Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 513.83

ОБ ОДНОМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ АЛГЕБРЫ $C(\Omega)_\beta$

М. И. Караханян, Т. А. Хорькова

Аннотация. Исследуются некоторые свойства алгебр непрерывных функций на локально компактном пространстве с топологией, заданной с помощью семейства операторов умножения (β-равномерные алгебры). Вводится понятие β-аменабельной алгебры и показывается, что β-равномерная алгебра является β-аменабельной тогда и тогда, когда она совпадает с алгеброй всех непрерывных ограниченных функций на локально компактном пространстве (аналог теоремы М. В. Шейнберга для равномерных алгебр).

Ключевые слова: β-равномерная алгебра, когомология, дифференцирование, β-топология, аменабельность.

Введение

Пусть $C_b(\Omega)$ — алгебра всех ограниченных непрерывных комплекснозначных функций на локально компактном пространстве Ω, наделенная равномерной нормой $\|\cdot\|_\infty$ ($\|f\|_\infty = \sup\limits_\Omega |f|$).

С помощью подалгебры $C_0(\Omega)$, состоящей из тех функций алгебры $C_b(\Omega)$, которые обращаются в нуль на бесконечности, определим семейство полунорм $\{P_g\}_{g\in C_0(\Omega)}$ на $C_b(\Omega)$, $P_g(f) = \|T_g f\|$, где $T_g : C_b(\Omega) \to C_b(\Omega)$ — оператор умножения $T_g f = gf$. Топология на $C_b(\Omega)$, заданная с помощью этого семейства полунорм, называется *β-топологией*, алгебра $C_b(\Omega)$ в β-топологии обозначается через $C(\Omega)_\beta$ (см. [1, 2]). Таким образом, β-топология на $C_b(\Omega)$ — это слабейшая из топологий, при которой все линейные операторы T_g, $g \in C_0(\Omega)$, непрерывны и сходимость сети функций $\{f_i\}_{i\in I}$ из $C_b(\Omega)$ к функции f_0 в β-топологии означает $\lim\limits_I \|f_i g - f_0 g\|_\infty = 0$ для любого g из $C_0(\Omega)$, т. е. β-топология совпадает с сильной операторной топологией при стандартном изометрическом вложении банаховой алгебры $C_b(\Omega)$ в пространство ограниченных операторов $C_0(\Omega)$.

Замкнутая в β-топологии подалгебра $\mathscr{A}$ алгебры $C(\Omega)_\beta$ называется *β-равномерной*, если она содержит константы и разделяет точки множества Ω (т. е. для любых $x_1, x_2 \in \Omega$, $x_1 \neq x_2$, существует функция $f \in \mathscr{A}$ такая, что $f(x_1) \neq f(x_2)$).

В данной заметке указывается ряд свойств β-равномерных алгебр. Вводится понятие β-аменабельной равномерной алгебры и доказывается, что β-равномерная алгебра аменабельна тогда и только тогда, когда она совпадает с $C(\Omega)_\beta$. Для равномерных алгебр аналогичный результат получен М. В. Шейнбергом (см. [3]).

§ 1. Алгебра $C(\Omega)_\beta$

Пространство максимальных идеалов M_Ω алгебры $C_b(\Omega)$ можно представить в виде $M_\Omega = F \cup \Omega$, где $F \cap \Omega = \{\varnothing\}$, F — компактное множество, являющееся границей Ω в M_Ω. Каждая функция из $C_b(\Omega)$ с сохранением нормы однозначно продолжается до функции на $C(M_\Omega)$ ($C(M_\Omega)$ — банахова алгебра всех непрерывных функций на M_Ω, наделенная равномерной нормой).

Для дальнейшего нам потребуется два простых утверждения (см. [1]).

Лемма 1. (a) *$C(\Omega)_\beta$ — β-полная локально выпуклая алгебра.*

(b) *$C_0(\Omega)$ всюду плотна в $C(\Omega)_\beta$.*

(c) *Пространство всех β-непрерывных линейных функционалов на $C(\Omega)_\beta$ изоморфно пространству $M(\Omega)$ всех конечных комплексных регулярных мер на Ω.*

Доказательство. (a) Из определения β-топологии следует, что если сеть функций $\{f_i\}_{i\in I}$ фундаментальна в β-топологии, то она на каждом компактном подмножестве локально компактного пространства Ω сходится в равномерной топологии к некоторой непрерывной функции f_0 на Ω. Покажем, что $f_0 \in C(\Omega)_\beta$. Допустим противное. Тогда найдется последовательность $\{x_n\}$ в Ω такая, что $|f_0(x_n)| > n$. Пусть $g \in C_0(\Omega)$ и $g(x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\overline{f_0(x_n)}}{|f_0(x_n)|}$. Так как сеть функций $\{f_i\}$ β-фундаментальная, то сеть $\{gf_i\}$ сходится на Ω в равномерной топологии к ограниченной функции на Ω. С другой стороны,

$$\lim_{i\in I}(gf_i)(x_n) = g(x_n)\lim_{i\in I} f_i(x_n) \geq \sqrt{n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Пришли к противоречию. Отсюда $f_0 \in C(\Omega)_\beta$.

(b) Алгебра $C_0(\Omega)$ содержит сеть функций $\{e_i\}_{i\in I}$, являющуюся ограниченной аппроксимативной единицей для $C_0(\Omega)$, т. е. для любого $g \in C_0(\Omega)$ сеть $\{ge_i\}_{i\in I}$ сходится равномерно на Ω к функции g. Для любого $f \in C(\Omega)_\beta$ сеть функций $\{fe_i\}_{i\in I}$ из $C_0(\Omega)$ β-сходится к функции f, так как

$$\lim_I \|T_g f - T_g(fe_i)\|_\infty = \lim_I \|gf - ge_i f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \lim_I \|g - ge_i\|_\infty = 0$$

для любого $g \in C_0(\Omega)$.

(c) Если ϕ — β-непрерывный линейный функционал на $C(\Omega)_\beta$, то он будет непрерывным функционалом на банаховой алгебре $C(M_\Omega)$. Согласно теореме Рисса найдется конечная регулярная борелевская мера μ на M_Ω, являющаяся представляющей мерой для ϕ, т. е.

$$\phi(f) = \int\limits_{M_\Omega} \hat{f}\, d\mu,$$

где $\hat{f}$ — преобразование Гельфанда функции f. Представим меру μ в виде суммы $\mu = \mu_F + \mu_\Omega$, где μ_F и μ_Ω — сужения меры μ на F и Ω соответственно. Покажем, что $\mu_F = 0$. Пусть $\{e_i\}_{i\in I}$ — ограниченная аппроксимативная единица в $C_0(\Omega)$. Тогда сеть функций $\{f_i\}_{i\in I}$, $f_i = 1 - e_i$, сходится в β-топологии в $C(\Omega)_\beta$ к нулевой функции. Поэтому сеть функционалов $\{f_i\phi\}_{i\in I}$, $(f_i\phi)(f) = \phi(f_i f)$, сходится к нулевому функционалу. Отсюда

$$0 = \lim_I (f_i\phi)(f) = \lim_I\biggl(\int\limits_F \widehat{f_i f}\, d\mu + \int\limits_\Omega \widehat{f_i f}\, d\mu\biggr) = \int\limits_F \hat{f}\, d\mu$$

для любого f из $C(\Omega)_\beta$. Следовательно, $\mu_F = 0$.

Итак, каждому β-непрерывному линейному функционалу на $C(\Omega)_\beta$ соответствует некоторая мера из $M(\Omega)$.

Доказательство обратного утверждения тривиально. Лемма доказана.

Замечание. Обозначим через $C_{00}(\Omega)$ множество функций из $C_0(\Omega)$ с компактным носителем. Если определить β-топологию на $C_b(\Omega)$ с помощью операторов $\{T_g : g \in C_{00}(\Omega)\}$, то $C_b(\Omega)$ не будет β-полной и ее пополнение в этом случае совпадает с алгеброй всех непрерывных функций на Ω.

Для любого открытого множества U в Ω такого, что замыкание $\overline{U}$ в $M(\Omega)$ множества U содержится в Ω, обозначим через $C_0(U)$ множество всех функций из $C(\Omega)$, которые равны нулю на $\Omega\backslash U$.

Лемма 2. (a) *Равномерная топология и β-топология совпадают на $C_0(U)$.*

(b) *Линейное пространство, порожденное функциями из $\{C_0(U_i)\}_{i\in I}$, где $\{U_i\}_{i\in I}$ — семейство всех открытых множеств в Ω таких, что $U_i \subset \overline{U}_i \subset \Omega$, β-плотно в $C(\Omega)_\beta$.*

Доказательство. (a) Пусть функция $g \in C_0(\Omega)$ равна единице на U. Тогда для любого $f \in C_0(U)$ справедливо равенство $T_g f = f$. Поэтому если сеть $\{f_i\}_{i\in I}$ в $C_0(U)$ β-сходится к некоторой функции f_0, то $T_g f_i = f_i$ должны равномерно сходиться к f_0. Так как $C_0(U)$ замкнута в равномерной норме, то $f \in C_0(U)$.

(b) Очевидно. Лемма доказана.

§ 2. β-Когомологии

Пусть $\mathscr{A}$ — β-равномерная алгебра на Ω. Так как $C_b(\Omega)$ — полное в β-топологии пространство, то $\mathscr{A}$ — замкнутая подалгебра алгебры $C_b(\Omega)$ в $\|\cdot\|_\infty$-норме. Поэтому β-полная равномерная алгебра $\mathscr{A}$ является также полной в равномерной норме. В дальнейшем через $\mathscr{A}_b$ будем обозначать алгебру $\mathscr{A}$ в $\|\cdot\|_\infty$-норме.

Пусть X — банахово пространство, являющееся одновременно банаховым $\mathscr{A}_b$-бимодулем. Будем говорить, что X — *β-полный $\mathscr{A}_b$-бимодуль*, если из того, что сеть $\{f_i\}_{i\in I}$ в $\mathscr{A}$ β-сходится к f_0, следует, что для любого x из X сети $\{f_i x\}_{i\in I}$ и $\{x f_i\}_{i\in I}$ сходятся к элементам $f_0 x$ и $x f_0$ соответственно в норме банахова пространства X. Бимодульная операция на банаховом пространстве X задает бимодульную операцию на сопряженном пространстве X^* к X:

$$(f\varphi)(x) = \varphi(xf), \quad (\varphi f)(x) = \varphi(fx)$$

для всех $f \in \mathscr{A}$, $x \in X$, $\varphi \in X^*$.

Линейный функционал $\varphi \in X^*$ назовем *слабо* β-непрерывным*, если из того, что $\{f_i\}_{i\in I}$ β-сходится в $\mathscr{A}$ к f_0, следует, что сети функционалов $\{f_i\varphi\}_{i\in I}$ и $\{\varphi f_i\}_{i\in I}$ в слабой* топологии сходятся к $f_0\varphi$ и φf_0 соответственно.

Если X — β-полный $\mathscr{A}_b$-бимодуль, то каждый линейный функционал $\varphi \in X^*$ является слабо* β-непрерывным. Действительно, если сеть функций $\{f_i\}_{i\in I}$ β-сходится к f_0, то

$$\lim_I (f_i\varphi)(x) = \lim_I \varphi(x f_i) = \varphi(x f_0) = (f_0\varphi)(x)$$

для любого $x \in X$.

Непрерывное отображение $D : \mathscr{A}_b \to X$ называется *X-дифференцированием*, если $D(fg) = fD(g) + D(f)g$ для любых f, g из $\mathscr{A}_b$. Отображение $\delta_x : \mathscr{A}_b \to X$, задаваемое формулой $\delta_x(f) = [f, x] = fx - xf$, $x \in X$, называется *внутренним дифференцированием.* Обозначим через $Z^1(\mathscr{A}, X)$ пространство всех непрерывных X-дифференцирований и через $B^1(\mathscr{A}, X)$ — пространство всех внутренних дифференцирований. Фактор-группа

$$H^1(\mathscr{A}, X) = Z^1(\mathscr{A}, X)/B^1(\mathscr{A}, X)$$

называется *первой группой когомологий алгебры* $\mathscr{A}_b$ с коэффициентами в $\mathscr{A}_b$-бимодуле X. Связь когомологий топологических алгебр со свойствами этих алгебр можно найти в книгах [4, 5].

Дифференцирование $D : \mathscr{A}_b \to X$ называется *β-непрерывным*, если из того, что сеть $\{f_i\}_{i\in I}$ в $\mathscr{A}$ сходится в β-топологии к f_0, следует, что сеть $\{D(f_i)\}_{i\in I}$ сходится в норме пространства X к $D(f_0)$. Пусть теперь X — β-полный $\mathscr{A}_b$-бимодуль. Тогда для любого x внутреннее дифференцирование δ_x является β-непрерывным. Обозначим через $Z^1_\beta(\mathscr{A}, X)$ пространство всех β-непрерывных дифференцирований. Так как каждое β-непрерывное дифференцирование $D : \mathscr{A}_b \to X$ является непрерывным дифференцированием из $\mathscr{A}_b$ в X, то $Z^1_\beta(\mathscr{A}, X)$ — абелева подгруппа группы $Z^1(\mathscr{A}, X)$. Поэтому для β-полного A_b-бимодуля X справедливо вложение $H^1_\beta(\mathscr{A}, X) \subset H^1(\mathscr{A}, X)$.

Аналогично можно определить $Z^1_\beta(\mathscr{A}, X^*)$ — абелеву группу всех β-непрерывных в слабой* топологии дифференцирований $D : \mathscr{A} \to X^*$, т. е. если сеть $\{f_i\}_{i\in I}$ в $\mathscr{A}$ β-сходится к f_0, то сеть линейных функционалов $\{D(f_i)\}_{i\in I}$ в слабой* топологии в X^* сходится к $D(f_0)$, и $Z^1(\mathscr{A}, X^*)$ — абелеву группу всех непрерывных в слабой* топологии дифференцирований $D : \mathscr{A}_b \to X^*$. Очевидно, что $Z^1_\beta(\mathscr{A}, X^*)$ есть подгруппа группы $Z^1(\mathscr{A}, X^*)$

Согласно Джонсону (см. [6]) банахова алгебра $\mathscr{A}_b$ называется *аменабельной*, если группа $H^1(\mathscr{A}, X^*) = Z^1(\mathscr{A}, X^*)/B^1(\mathscr{A}, X^*)$ тривиальна для любого $\mathscr{A}_b$-бимодуля X, где $B^1(\mathscr{A}, X^*)$ — абелева группа, состоящая из внутренних дифференцирований $\delta_\varphi(a) = a\varphi - \varphi a$.

Назовем алгебру $\mathscr{A}$ *β-аменабельной*, если группа

$$H^1_\beta(\mathscr{A}, X^*) = Z^1_\beta(\mathscr{A}, X^*)/B^1(\mathscr{A}, X^*)$$

тривиальна для любого β-полного $\mathscr{A}_b$-бимодуля X. Очевидно, что если $\mathscr{A}$ — аменабельная алгебра, то $\mathscr{A}$ β-аменабельна, т. е. из условия $H^1(\mathscr{A}, X^*) = 0$ для любого $\mathscr{A}_b$-бимодуля X следует, что $H^1_\beta(\mathscr{A}, X^*) = 0$ для любого β-полного $\mathscr{A}_b$-бимодуля X. В данной заметке доказывается, что из β-аменабельности следует аменабельность для любой β-равномерной алгебры.

§ 3. β-Полные $\mathscr{A}_b$-бимодули

В данном параграфе приведем два примера β-полных $\mathscr{A}_b$-бимодулей, которые используются в дальнейшем.

Лемма 3. *Пусть $\mu \in M(\Omega)$. Тогда найдутся мера ν из $M(\Omega)$ и функция g из $C_0(\Omega)$ такие, что $\mu = g\nu$, т. е.*

$$\int f\,d\mu = \int fg\,d\nu$$

для любого f из $C_0(\Omega)$.

Доказательство. Не теряя общности, можно предполагать, что μ — положительная мера с нормой, равной 1.

Пусть $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ — семейство вложенных друг в друга открытых множеств таких, что замыкание $\overline{U}_n$ множества U_n есть компактное подмножество множества U_{n+1} и $\mu(U_n) > \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$. Воспользовавшись леммой Урысона, для каждого числа n можно построить положительную функцию g_n из $C_0(\Omega)$ такую, что $g_n \equiv \frac{n^2}{2^{n-1}}$ на U_n и $\|g_n\|_\infty = \frac{n^2}{2^{n-1}}$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}$ следует, что функция $g = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ принадлежит пространству $C_0(\Omega)$. Покажем, что мера $\nu = g^{-1}\mu$ также принадлежит $M(\Omega)$. Действительно, так как $\mu(\Omega) = 1$, то

$$\mu(\Omega \setminus U_n) = \mu(\Omega) - \mu(U_n) < 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

и $\mu(U_{n+1} \setminus U_n) < \frac{1}{2^n}$.

Из равенства $g_{n+1} \equiv \frac{(n+1)^2}{2^n}$ на U_{n+1} вытекают неравенство $g^{-1}(x) \le \frac{2^n}{(n+1)^2}$ на U_{n+1} и

$$\nu(U_{n+1} \setminus U_n) = \int\limits_{U_{n+1} \setminus U_n} d\nu = \int\limits_{U_{n+1} \setminus U_n} g^{-1}\, d\mu \le \frac{2^n}{(n+1)^2} \mu(U_{n+1} \setminus U_n) < \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Так как функция g на U_1 равна $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} = \gamma < \infty$, то

$$\nu(\Omega) = \nu(U_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(U_{n+1} \setminus U_n) < \frac{1}{\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < \infty.$$

Таким образом, мера $\nu = g^{-1}\mu$ принадлежит $M(\Omega)$. Лемма доказана.

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $L^2(\Omega,\mu)$, $\mathscr{B} = B(L^2(\Omega,\mu))$ есть C^*-алгебра всех ограниченных линейных операторов на $L^2(\Omega,\mu)$. Для каждого оператора T из $\mathscr{B}$ число

$$\operatorname{tr} T = \sum_{n=1}^{\infty} (T\varphi_n, \varphi_n)$$

не зависит от выбора базиса $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $L^2(\Omega,\mu)$ (см. [7]). Оператор $T \in \mathscr{B}$ называется *ядерным*, если $\operatorname{tr}|T| < \infty$, где $|T| = \sqrt{T^*T}$ — модуль оператора T. Множество всех ядерных операторов образует банахово пространство $\mathscr{T}_1$ в следовой норме $\|T\|_1 = \operatorname{tr}|T|$ (см. [7]). Отметим, что $\|T^*\|_1 = \|T\|_1$ и для каждого оператора $B \in \mathscr{B}$ выполняется неравенство $\|BT\|_1 \le \|B\|\,\|T\|_1$ ($\|\cdot\|$ — операторная норма в $\mathscr{B}$). Операторная норма оператора умножения T_f на $L^2(\Omega,\mu)$ совпадает с равномерной нормой функции f из $\mathscr{A}_b$. Поэтому пространство $\mathscr{T}_1$ можно превратить в банахов $\mathscr{A}_b$-бимодуль, полагая $f \cdot T \cdot g = T_f T T_g$ для любых f, g из $\mathscr{A}_b$ и T из $\mathscr{T}_1$. Наша следующая задача — показать, что $\mathscr{T}_1$ является β-полным $\mathscr{A}_b$-бимодулем.

Лемма 4. *Для любого ядерного оператора T из $\mathscr{B}$ найдется положительная функция g из $C_0(\Omega)$ такая, что $T_{g^{-1}}T$ — ядерный оператор.*

Доказательство. Заметим, что $T_{g^{-1}}$ — неограниченный положительный оператор на $L^2(\Omega,\mu)$, но суперпозиция $T_{g^{-1}}T$ может быть ограниченной.

Докажем лемму сначала для положительных ядерных операторов. Пусть T — положительный ядерный оператор и $\|T\|_1 = 1$. Линейный функционал ω на $\mathscr{B}$ вида $\omega(A) = \operatorname{tr}(AT)$ является нормальным состоянием, т. е. положительным функционалом с нормой, равной 1, удовлетворяющим условию: если у возрастающей последовательности положительных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть верхняя грань, то $\omega(\lim_n A_n) = \lim_n \omega(A_n)$ (см. [8]).

Пусть $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ — семейство открытых множеств, удовлетворяющих следующим условиям: $U_n \subset \overline{U}_n \subset U_{n+1}$ и $\operatorname{supp}\mu \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n}$. Не теряя общности, можно предположить, что $\operatorname{supp}\mu = \Omega$.

Определим семейство проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, полагая $P_0 = I$, где I — единичный оператор, а $P_n f = \chi_n f$, где χ_n — характеристическая функция множества $\Omega \setminus U_n$. Очевидно, семейство $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует убывающую последовательность проекторов, сильно сходящуюся к нулевому оператору. Из нормальности состояния ω следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \omega(P_n) = \omega(\lim_{n\to\infty} P_n) = 0.$$

Пусть $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающее семейство положительных чисел такое, что $\omega(P_{m_k}) < \frac{1}{2^{2k}}$.

Ступенчатой функции $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} k(\chi_{m_{k-1}} - \chi_{m_k})$, где $\chi_{m_0} = 1$, соответствует неограниченный оператор

$$T_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} k(P_{m_{k-1}} - P_{m_k}) \quad (P_{m_0} = I).$$

Покажем, что $T_\varphi T$ — ядерный оператор, т. е. $\operatorname{tr}|T_\varphi T| < \infty$. В силу теоремы о полярном разложении оператор $k(P_{m_{k-1}} - P_{m_k})T$ можно представить в виде

$$k(P_{m_{k-1}} - P_{m_k})T = u_k k|(P_{m_{k-1}} - P_{m_k})T|,$$

где u_k — оператор частичной изометрии из алгебры $\mathscr{B}$ (см. [8]). Поэтому

$$k|(P_{m_{k-1}} - P_{m_k})T| = k u_k^*(P_{m_{k-1}} - P_{m_k})T.$$

Следовательно,

$$k\|(P_{m_{k-1}} - P_{m_k})T\|_1 = \operatorname{tr}(k|(P_{m_{k-1}} - P_{m_k})T|) = k\omega(u_k^*(P_{m_{k-1}} - P_{m_k}))$$
$$\le k\omega(u_k^* u_k)^{1/2}\omega(P_{m_{k-1}} - P_{m_k})^{1/2} < \frac{k}{2^{k-1}}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $u_k^* u_k$, $P_{m_{k-1}} - P_{m_k}$ — проекторы,

$$\omega(P_{m_k}) < \omega(P_{m_{k-1}}),\ \omega(u_k^* u_k) < 1 \text{ и } \omega(P_{m_{k-1}} - P_{m_k}) < \omega(P_{m_{k-1}}) < \frac{1}{2^{2(k-1)}}.$$

Тогда

$$\|T_\varphi T\|_1 \le \sum_{k=1}^{\infty} k\|(P_{m_{k-1}} - P_{m_k})T\|_1 \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}} < \infty.$$

Для завершения доказательства воспользуемся леммой Урысона. Пусть g_k — функция Урысона из $C_0(\Omega)$, равная единице на компактном множестве $\overline{U}_{m_k}$ и нулю на $\Omega\setminus U_{m_{k+1}}$. Покажем, что произведение $g\varphi$ функции $g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+2}} g_k$

из $C_0(\Omega)$ и ступенчатой функции $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k(\chi_{m_{k-1}} - \chi_{m_k})$ не превосходит единицы на Ω. Действительно, пусть $x \in \Omega$. Тогда $x \in U_{m_k} \setminus U_{m_{k-1}}$ при некотором k. В силу построения функции $g_1, \dots, g_{k-2}$ равны нулю на множестве $\Omega \setminus U_{m_{k-1}}$ и, следовательно, в точке x. Поэтому

$$g(x) = \sum_{n=k-1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} g_n(x) < \sum_{n=k-1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^k}.$$

Отсюда $\varphi(x)g(x) < \frac{k}{2^k} < 1$ и $T_g T_\varphi = T_{g\varphi}$ — ограниченный оператор на $L^2(\Omega, \mu)$ с операторной нормой, меньшей единицы. Так как φ^{-1} — ограниченная функция на Ω и $\sup \varphi^{-1} = 1$, то норма $\|T_{\varphi^{-1}}\|$ оператора $T_{\varphi^{-1}}$ равна единице. Поскольку следовая норма произведения оператора A из $\mathscr{B}$ на ядерный оператор T не превосходит числа $\|A\| \cdot \|T\|_1$, имеем

$$\|T_{g^{-1}} T\|_1 = \|T_{g^{-1}} T_\varphi T_{\varphi^{-1}} T\|_1 \le \|T_{g^{-1}} T_g T_\varphi T\|_1 = \|T_\varphi T\|_1 < \infty.$$

Таким образом, лемма доказана для положительного ядерного оператора.

Пусть теперь T — произвольный ядерный оператор. Тогда T представляется в виде $T = T_1 - T_2 + i(T_3 - T_4)$, где все T_i, $i = 1, 2, 3, 4$, — положительные ядерные операторы. Пусть g_i, $i = 1, 2, 3, 4$, — положительные функции из $C_0(\Omega)$ такие, что $T_{g_i^{-1}} T_i$ — ядерный оператор. Определим функцию $g(x) = \max\limits_{1 \le i \le 4} g_i(x)$, $x \in \Omega$. Тогда $\|T_{g^{-1}} T_i\|_1 = \|T_{g^{-1}} T_{g_i} T_{g_i^{-1}} T_i\|_1 \le \|T_{g_i^{-1}} T_i\|_1$, так как $g_i \le g$, и, следовательно, норма оператора $T_{g^{-1}} T_{g_i}$ в $\mathscr{B}$ не превосходит единицы. Отсюда

$$\|T_{g^{-1}} T\|_1 \le \sum_{i=1}^{4} \|T_{g^{-1}} T_i\| < \infty.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Банахово пространство $\mathscr{T}_1$ есть β-полный $\mathscr{A}_b$-бимодуль.*

Доказательство. Пусть сеть $\{f_i\}_{i \in I}$ из $\mathscr{A}$ β-сходится к f_0. Тогда для T из $\mathscr{T}_1$ найдется функция g в $C_0(\Omega)$ такая, что $T_{g^{-1}} T$ — ядерный оператор. Поэтому

$$\lim_I \|(f_i - f_0)T\| = \lim_I \|(f_i - f_0) g T_{g^{-1}} T\|_1 \le \lim_I \|(f_i - f_0) g\|_\infty \|T_{g^{-1}} T\| = 0.$$

§ 4. β-Аменабельные алгебры

Напомним, что банахова алгебра $\mathscr{B}$ всех ограниченных линейных операторов на $L^2(\Omega, \mu)$ изометрически изоморфна как банахово пространство сопряженному к $\mathscr{T}_1$ пространству $\mathscr{T}_1^*$. Этот изоморфизм осуществляется отображением $T \to \mathrm{tr}(T\,\cdot)$ (см. [7]).

Лемма 5. *Банахов $\mathscr{A}_b$-бимодуль $\mathscr{B}$ изометрически изоморфен как $\mathscr{A}_b$-бимодуль β-полному в слабой* топологии банахову $\mathscr{A}_b$-бимодулю $\mathscr{T}_1^*$.*

Доказательство. Зафиксируем $T \in \mathscr{B}$. Покажем, что линейный функционал $\varphi_T \in \mathscr{T}_1^*$, $\varphi_T(T_1) = \mathrm{tr}(TT_1)$, удовлетворяет равенствам $f\varphi_T = \varphi_{fT}$ и $\varphi_T f = \varphi_{Tf}$.

Действительно, по определению $\mathscr{A}_b$-бимодульной структуры на $\mathscr{T}_1^*$ имеем

$$f\varphi_T(T_1) = \varphi_T(T_1 T_f) = \mathrm{tr}(T T_1 T_f) = \mathrm{tr}(T_f T T_1) = \mathrm{tr}_{fT}(T_1).$$

Аналогично $(\varphi_T)(T_1) = \varphi_T(T_f T_1) = \mathrm{tr}(TT_f T_1) = \varphi_{Tf}(T_1)$ для всех $T_1 \in \mathscr{T}_1$. При доказательстве приведенных равенств мы использовали свойство следа $\mathrm{tr}(T_1T_2) = \mathrm{tr}(T_2T_1)$ для любого $T_1 \in \mathscr{T}_1$ и $T_2 \in \mathscr{B}$ (см. [7]). Таким образом, отображение $T \to \mathrm{tr}(T\ \cdot)$ есть $\mathscr{A}_b$-бимодульный изоморфизм между $\mathscr{B}$ и $\mathscr{T}_1^*$. Так как $\mathscr{T}_1^*$ β-полно в слабой* топологии, то и на $\mathscr{B}$ можно распространить β-полную слабую* топологию. Лемма доказана.

Пусть X — β-полный A_b-бимодуль и L — β-полный в слабой* топологии A_b-биподмодуль модуля X^*.

Лемма 6. *Пусть $L^\perp = \{x \in X : \varphi(x) = 0$ для всех $\varphi \in L\}$. Тогда*

(a) *фактор-пространство $X/L^\perp$ можно наделить структурой β-полного A_b-бимодуля;*

(b) *существует β-непрерывный изометрический A_b-бимодульный изоморфизм между β-полными в слабой* топологии A_b-бимодулями $(X/L^\perp)^*$ и L.*

Доказательство. (a) Покажем, что множество $fL^\perp$ содержится в $L^\perp$. Действительно, для любых $f \in A_b$ и $\varphi \in L$ произведение $f\varphi$ принадлежит L. Поэтому $(\varphi f)(x) = 0$ для всех $x \in L^\perp$ и $\varphi \in L$. Отсюда

$$(\varphi f)(x) = \varphi(fx) = 0.$$

Таким образом, $fx \in L^\perp$. Аналогично $xf \in L^\perp$ и, следовательно, $L^\perp$ — A_b-бимодуль. Определим A_b-бимодульную структуру на фактор-пространстве $X/L^\perp$, полагая

$$f[x]g = [fxg],$$

где $[x] = x + L^\perp$ — класс смежности x по $L^\perp$.

Покажем теперь, что банахово пространство $X/L^\perp$ этой структуры является β-полным A_b-бимодулем. Пусть сеть $\{f_i\}_{i\in I}$ из A сходится в β-топологии к f_0. Тогда $\lim\limits_I \|f_i x - f_0 x\| = 0$. Поэтому

$$\lim_I \|f_i[x] - f_0[x]\|' \le \lim_I \|f_i x - f_0 x\| = 0,$$

где $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ — норма и фактор-норма в X и фактор-пространстве X/L соответственно.

(b) То, что между пространствами $(X/L^\perp)^*$ и L существует A_b-бимодульный изометрический изоморфизм, — хорошо известный факт теории банаховых бимодулей, а так как $(X/L^\perp)^*$ и L β-полные в слабой* топологии, этот изоморфизм непрерывен в β-топологии. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $\mathscr{A}$ — β-полная равномерная алгебра. Если $\mathscr{A} \ne C(\Omega)_\beta$, то $H^1_\beta(\mathscr{A}, X^*) \ne 0$ для некоторого β-полного банахова $\mathscr{A}_b$-бимодуля X.*

Доказательство. Так как алгебры $\mathscr{A}$ и $C(\Omega)_\beta$ β-полные и $C(\Omega)_\beta$ — локально выпуклое топологическое пространство, то найдется нетривиальный β-непрерывный линейный функционал ϕ, ортогональный к алгебре $\mathscr{A}$, т. е. $\phi(f) = 0$ для всех $f \in \mathscr{A}$. Согласно лемме 1 для функционала ϕ найдется представляющая мера $\mu \in M(\Omega)$. Тогда $\int\limits_\Omega f\,d\mu = 0$, для всех $f \in \mathscr{A}$.

Обозначим через $H(\mathscr{A})$ замыкание $\mathscr{A}$ в норме пространства $L^2(\Omega, |\mu|)$. Очевидно, что $H(\mathscr{A})$ — гильбертово пространство, являющееся β-полным $\mathscr{A}_b$-бимодулем. Пусть ϕ — производная Радона — Никодима меры $|\mu|$ относительно меры μ, т. е. $\frac{d|\mu|}{d\mu} = \phi$. Тогда $|\phi| = 1$ почти всюду по мере $|\mu|$.

Гильбертово пространство $H(\mathscr{A})$ ортогонально гильбертову пространству $\phi\overline{H}(\mathscr{A}) = \{\phi\bar{f} : f \in H(\mathscr{A})\}$, где $\bar{f}$ — функция, сопряженная к функции f. Действительно, если $f, g \in H(\mathscr{A})$, то

$$(f, \phi\bar{g}) = \int\limits_{\Omega} fg\bar{\phi}\, d|\mu| = \int\limits_{\Omega} fg\, d\mu = 0.$$

Поэтому гильбертово пространство $L^2(\Omega, |\mu|)$ можно представить в виде прямой суммы нетривиальных гильбертовых пространств $H(\mathscr{A}) \oplus H(\mathscr{A})^{\perp}$. Пусть $P : L^2(\Omega, |\mu|) \to H(\mathscr{A})$ — проектор из $L^2(\Omega, |\mu|)$ на $H(\mathscr{A})$, $P^{\perp} : L^2(\Omega, |\mu|) \to H(\mathscr{A})^{\perp}$ — проектор из $L^2(\Omega, |\mu|)$ на $H(\mathscr{A})^{\perp}$. Каждый ограниченный линейный оператор T на $L^2(\Omega, |\mu|)$ можно представить в виде операторной матрицы

$$T = \begin{pmatrix} PTP & PTP^{\perp} \\ P^{\perp}TP & P^{\perp}TP^{\perp} \end{pmatrix},$$

в частности, так как $\mathscr{A}_b$-бимодульная операция определяет семейство линейных ограниченных операторов T_f на $L^2(\Omega, |\mu|)$, $f \in \mathscr{A}$, $T_f h = fh$, то

$$T_f = \begin{pmatrix} PT_fP & PT_fP^{\perp} \\ P^{\perp}T_fP & P^{\perp}T_fP^{\perp} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $H(\mathscr{A})$ — замыкание $\mathscr{A}$ в $L^2(\Omega, |\mu|)$, то $T_f(H(\mathscr{A})) \subset H(\mathscr{A})$ для всех $f \in \mathscr{A}$. Следовательно, $P^{\perp}T_fP = 0$ и операторы T_f, $f \in \mathscr{A}$, в матричной записи имеют вид

$$T_f = \begin{pmatrix} PT_fP & PT_fP^{\perp} \\ 0 & P^{\perp}T_fP^{\perp} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $PT_fP^{\perp} \neq 0$ для некоторого f из $\mathscr{A}$. Допустим противное. Тогда $T_f = PT_fP + P^{\perp}T_fP^{\perp}$ для всех $f \in \mathscr{A}$. Следовательно, $PT_f = T_fP$. Равенство $PT_f^* = T_f^*P$ получается из доказанного путем сопряжения и умножения обеих частей равенства на P справа и слева, здесь T_f^* — оператор в $B(L^2(\Omega, |\mu|))$, сопряженный к оператору T_f. Очевидно, $T_f^* = T_{\bar{f}}$, $f \in \mathscr{A}$. Отсюда

$$(PT_{\bar{f}})(1) = (T_{\bar{f}}P)(1) = T_{\bar{f}}(1) = \bar{f}.$$

Таким образом, $\bar{f}$ принадлежит $H(\mathscr{A})$ для любого $f \in \mathscr{A}$. Напомним, что $\mathscr{A}$ содержит константы и разделяет точки множества Ω. По теореме Стоуна — Вейерштрасса для β-равномерных алгебр (см. [2]) получим, что любая функция из $C(\Omega)_{\beta}$ принадлежит $H(\mathscr{A})$. Поэтому $H(\mathscr{A}) = L^2(\Omega, |\mu|)$. Но это невозможно, так как $H(\mathscr{A})$ имеет нетривиальное дополнение в $L^2(\Omega, |\mu|)$. Итак, $PT_fP^{\perp} \neq 0$ для некоторого f из $\mathscr{A}$.

С помощью операторов T_f, $f \in A$, зададим A_b-бимодульную структуру на $\mathscr{B}_0 = B(L^2(\Omega, |\mu|))$:

$$fT_g = T_fTT_g$$

для всех T из $\mathscr{B}_0$ и f, g из A. Согласно лемме 5 алгебра операторов $\mathscr{B}_0$ является β-полным в слабой* топологии банаховым A_b-бимодулем. Из представления оператора T_f в виде

$$T_f = \begin{pmatrix} PT_fP & PT_fP^{\perp} \\ 0 & P^{\perp}T_fP^{\perp} \end{pmatrix}$$

для всех $f \in A_b$ следует, что подалгебра

$$P\mathscr{B}_0P^\perp = \begin{pmatrix} 0 & P\mathscr{B}_0P^\perp \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

алгебры $\mathscr{B}_0$ является β-полным в слабой* топологии банаховым A_b-биподмодулем A_b-бимодуля $\mathscr{B}_0$. В силу леммы 6 A_b-бимодуль $P\mathscr{B}_0P^\perp$ является пространством, сопряженным к некоторому β-полному A_b-бимодулю.

Рассмотрим теперь оператор $D : \mathscr{A} \to P\mathscr{B}_0P^\perp$:

$$D(f) = \begin{pmatrix} 0 & PT_fP^\perp \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = PT_fP^\perp.$$

Покажем, что оператор D есть $P\mathscr{B}_0P^\perp$-дифференцирование на $\mathscr{A}$. Действительно,

$$\begin{aligned}
&fD(g) + D(f)g \\
&= \begin{pmatrix} PT_fP & PT_fP^\perp \\ 0 & P^\perp T_fP^\perp \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & PT_gP^\perp \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & PT_fP^\perp \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} PT_gP & PT_gP^\perp \\ 0 & P^\perp T_gP^\perp \end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix} 0 & PT_fPT_gP^\perp \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & PT_fP^\perp T_gP^\perp \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & PT_{fg}P^\perp \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D(fg).
\end{aligned}$$

Если сеть $\{f_i\}_{i\in I}$ в A β-сходится к f_0, то сеть операторов $\{T_{f_i}\}_{i\in I}$ в слабой* топологии в $\mathscr{B}_0$ сходится к T_{f_0}. Отсюда сеть $\{D(f_i)\}_{i\in I} = \{PT_{f_i}P^\perp\}$ β-сходится в слабой* топологии к $PT_{f_0}P^\perp = D(f_0)$. Таким образом, D — β-непрерывное в слабой* топологии дифференцирование в β-полном слабо* сопряженном пространстве $P\mathscr{B}_0P^\perp$.

Нам осталось доказать, что D не является внутренним дифференцированием. Допустим противное. Пусть $PAP^\perp$ из $P\mathscr{B}_0P^\perp$ — элемент такой, что $D(f) = T_fPAP^\perp - PAP^\perp T_f$. Так как $D(f) = PT_f - T_fP$, то

$$T_f(PAP^\perp + P) - (PAP^\perp + P)T_f = 0$$

для всех f из A. Следовательно, операторы умножения T_f коммутируют с оператором $PAP^\perp + P$ для всех f из A.

Из коммутативности алгебры A и нормальности операторов T_f, $f \in A$, следует (по теореме Фугледе: если некоторый оператор коммутирует с нормальным оператором, то он коммутирует и с его сопряженным оператором), что $PAP^\perp + P$ коммутирует и с $T_{\bar{f}} = T_f^*$, и (согласно теореме Стоуна — Вейрштрасса) с любым оператором умножения T_g, где g из $C(\Omega)_\beta$, на $L^2(\Omega, |\mu|)$. Поэтому $PAP^\perp + P = \alpha I$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, I — тождественный оператор. Но это невозможно. Таким образом, мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Отметим, что для более общих топологических пространств аналогичные рассуждения можно провести исходя из работы [9].

Сформулируем теперь основной результат данной работы.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{A}$ — β-равномерная алгебра. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $\mathscr{A} = C(\Omega)_\beta$;

(b) $\mathscr{A}$ — *аменабельная алгебра;*

(c) $\mathscr{A}$ — β-*аменабельная алгебра.*

Доказательство. (a)$\Rightarrow$(b). Алгебра $C_b(\Omega)$ изометрически изоморфна алгебре $C(M_\Omega)$. Поэтому каждый банахов $C_b(\Omega)$-модуль также является банаховым $C(M_\Omega)$-модулем. Но по теореме Джонсона (см. [6]) $C(M_\Omega)$ аменабельна, следовательно, аменабельна $C_b(\Omega)$.

(b)$\Rightarrow$(c) Очевидно, так как $H^1_\beta(\mathscr{A}, X)$ — подгруппа группы $H^1(\mathscr{A}, X)$.

(c)$\Rightarrow$(a) Следует из леммы 7.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Buck R. C.* Bounded continuous functions on a locally compact space // Michigan Math. J. 1958. V. 5, N 2. P. 95–104.

2. *Gliksberg I.* Bishop's generalized Stone–Weierstrass theorem for the strict topology // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. V. 14, N 2. P. 329–333.

3. *Шейнберг М. В.* Об одной характеристике $C(\Omega)$ в терминах групп когомологий // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, № 5. С. 203–204.

4. *Хелемский А. Я.* Гомология в банаховых и топологических алгебрах. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.

5. *Bonsall F., Duncan T.* Complete normed algebras. Berlin: Springer-Verl., 1973.

6. *Johnson R.* Cohomology on Banach algebras. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1972. (Mem. Amer. Math. Soc.; N 127).

7. *Рид М., Саймон Б.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.

8. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982.

9. *Giles R.* A generalization of the strict topology // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 161. P. 467–474.

Статья поступила 12 июля 2007 г., окончательный вариант — 6 июня 2008 г.

Караханян Мартин Исакович
Ереванский гос. университет, факультет математики и механики,
ул. Алека Манукяна, 1, Ереван 0025, Армения
m_karakhanyan@yahoo.com

Хорькова Тамара Анатольевна
Казанский гос. энергетический университет, кафедра высшей математики,
ул. Красносельская, 51, Казань 420066
tamarakhrkva@rambler.ru