Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 517.982.22

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОЧТИ СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

А. С. Усачев

Аннотация. Рассматривается пространство почти сходящихся последовательностей и действующие в нем операторы. Доказано, что это пространство инвариантно относительно некоторых преобразований, в том числе относительно оператора Харди и оператора усреднения.

Ключевые слова: банахов предел, почти сходящаяся последовательность, оператор Харди.

Через l_∞ обозначается пространство ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой $\|x\|_{l_\infty} = \sup\limits_n |x_n|$.

Линейный непрерывный функционал B на l_∞ называется *банаховым пределом*, если

1) $B(x_n) \geq 0$ при $x_n \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$;
2) $B(x_n) = B(Tx_n)$;
3) $B(\mathbf{1}) = 1$ для любого $x \in l_\infty$, где $\mathbf{1} = (1, 1, 1, \dots)$, а T — оператор сдвига:

$$T(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Существование банаховых пределов следует из теоремы Хана — Банаха и доказано С. Банахом [1].

Для некоторых $x \in l_\infty$ значение $B(x)$ не зависит от B. Например,

$$B(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots) = 1/2$$

для любого банахова предела B. Лоренц [2] доказал, что $B(x) = a$ для некоторых $x \in l_\infty$, $a \in \mathbb{R}^1$ и всех банаховых пределов B тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{i+j} = a$$

равномерно по $j \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Такие последовательности были названы *почти сходящимися*. Множество почти сходящихся последовательностей обозначается через ac. Тот факт, что последовательность $x \in l_\infty$ почти сходится к числу a, будем обозначать через $x \xrightarrow{ac} a$.

Сачестон [3] уточнил теорему Лоренца. Он доказал, что для любого $x \in l_\infty$ и любого банахова предела B справедливы точные неравенства $m(x) \leq B(x) \leq M(x)$, где

$$m(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{i+j}, \quad M(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{i+j}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00629).

Целью настоящей работы является изучение пространства ac и некоторых операторов, действующих в ac.

Пусть заданы последовательности номеров $m_k, n_k \in \mathbb{N}$. Из элементов последовательности $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$ сконструируем последовательность

$$\bar{x} = (x_{m_1}, x_{m_1+1}, \dots, x_{m_1+n_1}; x_{m_2}, x_{m_2+1}, \dots, x_{m_2+n_2}; \dots),$$

которая определяет линейный оператор в пространстве ac.

Теорема 1. *Если последовательность $x \in l_\infty$ является почти сходящейся, $x \xrightarrow{ac} a$ и $n_k \to \infty$, то последовательность $\bar{x}$ тоже почти сходится, причем к тому же числу a.*

Нетрудно показать, что предположение $n_k \to \infty$ необходимо для справедливости теоремы 1.

Рассмотрим оператор Харди $H : l_\infty \to l_\infty$, заданный следующим образом:

$$\{(Hx)_n\}_{n=1}^\infty = \left\{ \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right\}_{n=1}^\infty .$$

Если последовательность $x \in l_\infty$ является почти сходящейся, $x \xrightarrow{ac} a$, то последовательность Hx сходится к тому же числу $(Hx)_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Так как значения банаховых пределов на сходящихся последовательностях совпадают со значением предела, все банаховы пределы инвариантны относительно сужения оператора Харди на множество почти сходящихся последовательностей ac.

Заметим, что не все банаховы пределы инвариантны относительно оператора Харди. В качестве примера можно рассмотреть последовательность

$$x = (0, 0; 1; 0, 0, 0, 0; 1, 1; \dots; 0 \underset{2^m}{\dots} 0; 1 \underset{m}{\dots} 1; \dots).$$

По теореме Сачестона [3] для любого $\alpha \in [0, 1]$ существует банахов предел B такой, что $B(x) = \alpha$. При этом $(Hx)_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, т. е. для любого банахова предела $B(Hx) = 0$. Следовательно, относительно оператора Харди не инвариантны все банаховы пределы, кроме тех, значения которых на последовательности x равны нулю.

В [4] показано,что существуют банаховы пределы, инвариантные относительно оператора Харди.

Рассмотрим оператор усреднения. Пусть выбрана возрастающая последовательность номеров $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что $n_1 = 1$. Определим оператор $P\colon l_\infty \to l_\infty$ следующим образом: $(Px)_m = \frac{1}{n_{k+1}-n_k} \sum\limits_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} x_i, \quad n_k \le m < n_{k+1}$.

Для $x \in l_\infty$ обозначим через $\rho(x, ac)$ расстояние от x до ac в l_∞, т. е. $\rho(x, ac) = \inf\limits_{y \in ac} \|x - y\|_{l_\infty}$.

В [5] показано, что $\rho(x, ac) = \frac{1}{2}(M(x) - m(x))$.

Теорема 2. 1. *Если $x \in l_\infty$, то $\rho(Px, ac) \le \rho(x, ac)$.*

2. *$\rho(Px, ac) = \rho(x, ac)$ для любого $x \in l_\infty$ тогда и только тогда, когда $\sup\limits_k (n_{k+1} - n_k) < \infty$.*

Из первой части теоремы вытекает, что для любой последовательности $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ оператор P переводит ac в себя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Банах С.* Теория линейных операций. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
2. *Lorentz G. G.* A contribution to the theory of divergent sequences // Acta Math. 1948. V. 80, N 1. P. 167–190.
3. *Sucheston L.* Banach limits // Amer. Math Monthly. 1967. V. 74, N 1. P. 285–293.
4. *Доддс П. Г., де Пагтер Б., Седаев А. А., Семенов Е. М., Сукочев Ф. А.* Сингулярные симметричные функционалы и банаховы пределы с дополнительными свойствами инвариантности // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67, № 6. С. 111–136.
5. *Семенов Е. М., Усачев А. С., Хорпяков О. О.* Пространство почти сходящихся последовательностей // Докл. РАН. 2006. Т. 409, № 6. С. 754–755.

Статья поступила 1 марта 2007 г.

Усачев Александр Сергеевич
Воронежский гос. университет, математический факультет,
кафедра теории функций и геометрии,
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
`usa-alexandr@yandex.ru`