*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6*

*УДК 519.21*

# О СУММАХ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН БЕЗ СТЕПЕННЫХ МОМЕНТОВ

**С. В. Нагаев, В. И. Вахтель**

**Аннотация.** В 1952 г. Дарлинг доказал предельную теорему при функциональной нормировке для суммы независимых одинаково распределенных случайных величин без степенных моментов. В работе дается альтернативное доказательство теоремы Дарлинга. При этом используется аппарат преобразований Лапласа. Кроме того, для рассматриваемой схемы исследуется асимптотика вероятностей больших уклонений.

**Ключевые слова:** медленно меняющаяся функция, преобразование Лапласа, биномиальное распределение, независимые случайные величины, ветвящиеся процессы.

## § 1. Введение, формулировка и обсуждение результатов

Пусть $X, X_1, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что функция $V(x) = \mathbf{P}(X \ge x)$ является медленно меняющейся при $x \to \infty$, т. е.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{V(cx)}{V(x)} = 1 \tag{1}$$

для любого $c > 0$. Из этого условия следует, что $\mathbf{E}\{X^t; X > 0\} = \infty$ для любого $t > 0$, т. е. все степенные моменты бесконечны.

Положим $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $\overline{X}_n = \max\limits_{k\le n} X_k$, $X_n^*$ — максимальное по модулю слагаемое, т. е. $|X_n^*| = \max\limits_{k\le n} |X_k|$.

Еще Леви [1] (см. также [2, с. 212]) обратил внимание на то, что при выполнении условия (1) абсолютная величина разности $S_n - X_n^*$ мала по сравнению с $X_n^*$, т. е. $X_n^*$ вносит подавляющий вклад в сумму $S_n$. Если дополнительно предположить, что $X \ge 0$, то представляется весьма правдоподобным, что

$$\mathbf{P}(S_n < x) \sim \mathbf{P}(\overline{X}_n < x) = (1 - V(x))^n. \tag{2}$$

Если предположить, что $nV(x) = y$, где $y$ — фиксированное положительное число, то мы придем к приближенному равенству

$$\mathbf{P}(S_n < x) \sim e^{-y}.$$

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–01252), работа второго автора — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02–01–01252, 02–01–00358) и INTAS (проект 00–265).

Полагая здесь $x = V^{-1}(y/n)$, где $V^{-1}$ — обратная к $V$ функция, заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(nV(S_n) > y) = e^{-y}.$$

Таким образом, имеет место сходимость к невырожденному распределению при функциональной нормировке в терминах функции $V(x)$. Этот подход был реализован Дарлингом [3], причем без ограничения $X \geq 0$.

**Теорема A** (Дарлинг). *Если $X \geq 0$ или $\mathbf{P}(X < -x) = o(V(x))$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(nV(S_n) < y; S_n \geq 0) = 1 - e^{-y}. \tag{3}$$

*Если же левый хвост сравним с правым, т. е.*

$$\frac{V(x)}{V(x) + \mathbf{P}(X < -x)} \to p \in (0,1), \tag{4}$$

*то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(nW(S_n) < y) = 1 - pe^{-y/p} - qe^{-y/q}, \tag{5}$$

*где $q = 1 - p$, $W(x) = V(x)I(x \geq 0) + \mathbf{P}(X < x)I(x < 0)$.*

В настоящей работе мы в отличие от Дарлинга даем прямое доказательство (3) и (5), минуя соотношения типа (2). Заметим, что последнее будет вытекать из наших результатов как следствие. Область значений $x$ таких, что $nV(x)$ остается ограниченным при $n \to \infty$, можно рассматривать как зону нормальных уклонений $S_n$. Соответственно значения $x$, которые попадают в дополнительную зону, можно считать большими уклонениями. Поведение вероятностей больших уклонений будет предметом специального рассмотрения (см. ниже теорему 2).

Перейдем к точной формулировке наших результатов. Для этого нам понадобятся следующие обозначения:

$$g^+(s) = \mathbf{E}\{e^{-sX} \mid X \geq 0\}, \quad g^-(s) = \mathbf{E}\{e^{sX} \mid X < 0\},$$

$$L^+(x) = [1 - g^+(1/x)]\mathbf{P}(X \geq 0), \quad L^-(x) = [1 - g^-(1/x)]\mathbf{P}(X < 0).$$

Через $R^{\pm}(x)$ обозначим обратную к $L^{\pm}(x)$ функцию.

**Теорема 1.** *Предположим, что функция $L^+(x)$ является медленно меняющейся и при некотором $p \in (0,1]$ выполняется условие*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L^+(x)}{L^-(x)} = \frac{p}{q}, \quad q = 1 - p. \tag{6}$$

*Тогда для любого $x > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > R^+(x/n)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(nL^+(S_n) < x; S_n > 0) = p(1 - e^{-x/p}). \tag{7}$$

*Если предположить, что $L^-(x)$ медленно меняется и равенство (6) имеет место при некотором $q \in (0,1]$, то (7) останется верным при замене $S_n$, $L^+(x)$, $p$ на $-S_n$, $L^-(x)$ и $q$ соответственно.*

Обратим внимание читателя на то, что теорема 1 формулируется не в терминах функции распределения случайной величины $X$, а в терминах преобразований Лапласа положительной и отрицательной частей этой величины. Дело в том, что согласно тауберовой теореме (см, например, [4, с. 503, формула (5.22)]) функция $V(x)$ медленно меняется тогда и только тогда, когда $L^+(x)$ является медленно меняющейся, причем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{V(x)}{L^+(x)} = 1. \tag{8}$$

Отсюда легко следует, что условия (4) и (6) эквивалентны. Использование нормировки $L^+(x)$ обуславливается тем, что $L^+(x)$ является непрерывной строго убывающей функцией. Этот факт позволяет избежать некоторых трудностей, связанных с обращением функции $V(x)$.

Легко видеть, что если в (6) $p = 1$, то (7) эквивалентно (3), поскольку $L^+(x) \sim V(x)$. Кроме того, из (7) и соответствующего аналога для левого хвоста $S_n$ легко вытекает (5).

Покажем теперь, что из теоремы 1 следует соотношение (2).

Действительно, если $X \geq 0$, то при $y = R^+(x/n)$

$$\mathbf{P}(\overline{X}_n < y) = (1 - V(y))^n = (1 - V(R^+(x/n)))^n.$$

Используя (8), заключаем, что при любом положительном $x$ справедливы приближенные равенства

$$\mathbf{P}(\overline{X}_n < y) \sim (1 - L^+(R^+(x/n)))^n \sim (1 - x/n)^n \sim e^{-x}.$$

Сравнивая с (7), получаем соотношение

$$\mathbf{P}(S_n > R^+(x/n)) \sim \mathbf{P}(\overline{X}_n > R^+(x/n)).$$

**Теорема 2.** *Пусть $L^+(x)$ медленно меняется, при некотором $p > 0$ выполняется* (6) *и $n, y \to \infty$ так, что $nL^+(y) \to 0$. Тогда*

$$\lim_{n,y\to\infty} \frac{\mathbf{P}(S_n > y)}{nL^+(y)} = 1. \tag{9}$$

*При указанных во второй части теоремы* 1 *условиях для левого хвоста распределения $S_n$ справедливо равенство*

$$\lim_{n,y\to\infty} \frac{\mathbf{P}(S_n < -y)}{nL^-(y)} = 1. \tag{10}$$

*Предположим теперь, что функция $L(x) = L^+(x) + L^-(x)$ является медленно меняющейся. Тогда при $nL(y) \to 0$ имеет место*

$$\lim_{n,y\to\infty} \frac{\mathbf{P}(|S_n| > y)}{nL(y)} = 1. \tag{11}$$

Если функции $L^+(x)$ и $L^-(x)$ одновременно являются медленно меняющимися и $p, q$ положительны, то равенство (11) является очевидным следствием (9) и (10). С формальной точки зрения медленное изменение функции $L(x)$ является более слабым по сравнению с медленным изменением слагаемых условием. Однако при некоторых дополнительных ограничениях эти условия становятся эквивалентными. Предположим, например, что

$$0 < c_1 \leq \frac{L^+(x)}{L^-(x)} \leq c_2 < \infty. \tag{12}$$

Поскольку $L^+(x)$ монотонна, то отрицанием медленного изменения этой функции будет предположение о существовании постоянной $c > 1$ и последовательности $x_n$ таких, что для некоторого $\alpha < 1$

$$L^+(cx_n) < \alpha L^+(x_n). \tag{13}$$

Так как $L(x)$ медленно изменяется, а $L^-(x)$ не возрастает, то для любого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших $n$ имеет место оценка

$$(1-\varepsilon)L(x_n) < L(cx_n) < L^+(cx_n) + L^-(x_n).$$

Используя (13), получаем

$$(1-\varepsilon)L^+(x_n) + (1-\varepsilon)L^-(x_n) \le \alpha L^+(x_n) + L^-(x_n)$$

и, следовательно,

$$(1-\alpha-\varepsilon)L^+(x_n) \le \varepsilon L^-(x_n).$$

Отсюда ввиду произвольности $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L^+(x_n)}{L^-(x_n)} = 0,$$

что противоречит условию (12). Значит, функция $L^+(x)$ должна быть медленно меняющейся. Точно так же доказывается, что и $L^-(x)$ медленно изменяется.

Покажем теперь, что утверждения о нормальных и больших уклонениях можно объединить в одно. Если $n$ и $y$ одновременно стремятся к бесконечности и $nL^+(y) \to x \in (0,\infty)$, то $y = R^+((x+\varepsilon_n(y))/n)$, где $\varepsilon_n(y) \to 0$ при $n, y \to \infty$. Вследствие непрерывности правой части в (7) имеем

$$\mathbf{P}(S_n > y) = p(1 - e^{-(x+\varepsilon_n(y))/p})(1+o(1)).$$

Замечая, что $x + \varepsilon_n(y) = nL^+(y)$, и используя (8), приходим при $nV(y) \to x$ к равенству

$$\mathbf{P}(S_n > y) = p(1 - e^{-nV(y)/p})(1+o(1)). \tag{14}$$

Если же $nL^+(y) \to 0$, то

$$nL^+(y) \sim p(1 - e^{-nL^+(y)/p}).$$

Вновь используя (8), заключаем, что из (9) вытекает (14). Таким образом, при всех $y$ таких, что $nL^+(y)$ имеет конечный предел, хвост распределения $S_n$ аппроксимируется одной и той же функцией, заданной в правой части (14).

Дарлинг доказал (см. доказательство теоремы 4.2 из [3]), что

$$\mathbf{P}(X_n^* > y) = p(1 - e^{-nV(y)/p})(1+o(1)). \tag{15}$$

Сравнивая (14) и (15), мы приходим к приближенному равенству

$$\mathbf{P}(S_n > y) \sim \mathbf{P}(X_n^* > y).$$

Вывод именно этого соотношения был основным элементом в рассуждениях Дарлинга. В нашем же случае это соотношение является следствием теоремы 1.

Доказательства теорем 1 и 2 будут даны ниже в § 3, 4. Доказательство теоремы 1 использует аппарат преобразований Лапласа. Нужный нам результат о сходимости распределений и соответствующих преобразований Лапласа составляет содержание § 2. При доказательстве теоремы 2 используются верхние оценки для $\mathbf{P}(S_n \ge x)$ и $\mathbf{P}(|S_n| \ge x)$ из работы [5] и нижние оценки этих вероятностей, полученные в статьях [6, 7]. Вследствие медленного изменения функций $\mathbf{P}(X \ge x)$ и $\mathbf{P}(|X| \ge x)$ эти оценки смыкаются и дают асимптотически точный результат.

## § 2. Критерий слабой сходимости функциональных преобразований

Пусть $\xi_n$ — произвольная последовательность неотрицательных случайных величин, $L(x)$ — непрерывная монотонная медленно меняющаяся функция, через $R(x)$ будем обозначать обратную к $L(x)$ функцию, $a_n$ — произвольная последовательность, $\varphi(x)$ — неубывающая функция.

**Теорема 3.** *Если $L(x)$ возрастает и $a_n \to \infty$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(a_n^{-1} L(\xi_n) < x\big) = \varphi(x) \tag{16}$$

*для всех точек непрерывности $\varphi$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\exp\biggl\{-\frac{\xi_n}{R(a_n x)}\biggr\} = \varphi(x) \tag{17}$$

*для всех точек непрерывности $\varphi$.*

*Если же функция $L(x)$ является убывающей и $a_n \to 0$, то* (16) *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(a_n^{-1} L(\xi_n) < x\big) = 1 - \varphi(x) \tag{18}$$

*на множестве непрерывности $\varphi$.*

Прямое утверждение теоремы 3 в случае возрастающей $L(x)$ сформулировано (правда, в несколько другой форме) и доказано в работе [8].

Мы приведем два различных доказательства теоремы 3.

Первое доказательство. Рассмотрим сначала случай возрастающей $L(x)$. Предположим, что имеет место (16). Производя замену переменной $y = R(a_n z)$, имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\exp\left\{-\frac{\xi_n}{R(a_n x)}\right\} &= \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{y}{R(a_n x)}\right\} d\mathbf{P}(\xi_n < y) \\ &= \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{R(a_n z)}{R(a_n x)}\right\} d\mathbf{P}(\xi_n < R(a_n z)).\end{aligned}$$

Вследствие возрастания функции $R(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства

$$\mathbf{E}\exp\left\{-\frac{\xi_n}{R(a_n x)}\right\} \le \mathbf{P}(\xi_n < R(a_n(x+\varepsilon))) + \exp\left\{-\frac{R(a_n(x+\varepsilon))}{R(a_n x)}\right\}, \tag{19}$$

$$\mathbf{E}\exp\left\{-\frac{\xi_n}{R(a_n x)}\right\} \ge \exp\left\{-\frac{R(a_n(x-\varepsilon))}{R(a_n x)}\right\} \mathbf{P}(\xi_n < R(a_n(x-\varepsilon))). \tag{20}$$

**Лемма 1.** *Если $L(x)$ возрастает, то для любого $c > 1$*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(x)}{R(cx)} = 0. \tag{21}$$

*Если же $L(x)$ убывает, то для любого $c < 1$*

$$\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{R(cx)} = 0. \tag{22}$$

Доказательство равенства (21) содержится в теореме 1.11 книги [9], а для вывода (22) нужно внести минимальные изменения в доказательство (21).

Из (21), оценок (19) и (20) и условия (17) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших $n$ имеют место неравенства

$$\mathbf{P}(\xi_n < R(a_n(x-\varepsilon))) - \varepsilon < \varphi(x) < \mathbf{P}(\xi_n < R(a_n(x+\varepsilon))) + \varepsilon$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{P}\big(a_n^{-1}L(\xi_n) < x-\varepsilon\big) - \varepsilon < \varphi(x) < \mathbf{P}\big(a_n^{-1}L(\xi_n) < x+\varepsilon\big) + \varepsilon.$$

Это, очевидно, означает, что $\mathbf{P}\big(a_n^{-1}L(\xi_n) < x\big)$ сходится к $\varphi(x)$ для всех точек непрерывности $\varphi(x)$.

Для доказательства обратного утверждения достаточно повторить все рассуждения в обратном порядке.

Предположим теперь, что $L(x)$ убывает. Единственным отличием от уже рассмотренного случая является то, что при преобразовании $x \mapsto L(x)$ под знаком вероятности в (24) и (25) будет меняться знак неравенства.

Математическое ожидание, стоящее в левой части (16), можно рассматривать как обобщенное преобразование Лапласа.

Обратим внимание читателя на то, что в правых частях (16) и (17) стоит одна и та же функция. Это означает, что (17) сразу дает явный вид предельного распределения для последовательности $a_n^{-1}L(\xi_n)$, в то время как при использовании обычного преобразования Лапласа необходим еще один промежуточный шаг — обращение предельного преобразования, что зачастую является достаточно сложной задачей.

Приведенное выше доказательство основано на той же идее, что и доказательство леммы 1 в работе [8], но значительно проще.

Метод, используемый во втором доказательстве теоремы 3, является более «классическим» по сравнению с первым: сначала ищется предел преобразований Лапласа величин $\xi_n(x) := \xi_n/R(a_n x)$, а затем используется теорема непрерывности для преобразований Лапласа. Таким способом доказывались предельные теоремы для ветвящихся процессов с миграцией в работах [10, 11].

Второе доказательство. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Из (21) следует, что для любого $s > 1$ и всех достаточно больших $n$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{R(a_n x)} < \frac{s}{R(a_n x)} < \frac{1}{R(a_n(x-\varepsilon))}.$$

Отсюда, используя (16), при $s > 1$ получаем

$$\varphi(x-\varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}\exp\left\{-\frac{s\xi_n}{R(a_n x)}\right\} \le \limsup_{n\to\infty} \mathbf{E}\exp\left\{-\frac{s\xi_n}{R(a_n x)}\right\} \le \varphi(x).$$

В силу произвольности $\varepsilon$ заключаем, что для любой точки непрерывности функции $\varphi(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\exp\left\{-\frac{s\xi_n}{R(a_n x)}\right\} = \varphi(x) \quad \text{при } s > 1. \tag{23}$$

Аналогично доказывается справедливость (23) и при $s < 1$.

Таким образом, мы показали, что преобразования Лапласа величин $\xi_n(x) = \xi_n/R(a_n x)$ сходятся к функции, тождественно равной $\varphi(x)$. Последняя является преобразованием случайной величины $\xi(x)$, принимающей значения нуль и бесконечность с вероятностями $\varphi(x)$ и $1-\varphi(x)$ соответственно. Согласно теореме непрерывности для преобразований Лапласа (см., например, [4, гл. XIII, § 1, теорема 2])

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\xi_n(x)<u)=\varphi(x)$$

для любого $u>0$. Полагая в этом равенстве $u=1$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\xi_n<R(a_nx))=\varphi(x). \tag{24}$$

Отсюда вследствие возрастания $L(x)$ получаем (17).

Докажем теперь, что (17) влечет (16).

Для всякого фиксированного $u$ вследствие медленного изменения $L(x)$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\xi_n<uR(a_nx))&=\mathbf{P}(L(\xi_n)<L(uR(a_nx)))\\&=\mathbf{P}(L(\xi_n)<a_nx+\varepsilon_n(u)),\quad \varepsilon_n(u)\to 0.\end{aligned} \tag{25}$$

Отсюда в силу (17) и непрерывности $\varphi$ в точке $x$ заключаем, что для любого $u>0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\xi_n<uR(a_nx))=\varphi(x).$$

Другими словами, последовательность $\xi_n(x)$ слабо сходится к величине $\xi(x)$. Это, в частности, означает, что для всех $s>0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}e^{-s\xi_n(x)}=\mathbf{E}e^{-s\xi(x)}=\varphi(x).$$

Полагая здесь $s=1$, получаем (16).

Заметим, что все указанные выше работы [8, 10, 11] посвящены изучению различных модификаций ветвящихся процессов. Более сложная по сравнению со схемой суммирования независимых случайных величин структура ветвящихся процессов затрудняет вывод соотношений типа (2). Это и привело к появлению приведенных в этом параграфе методов доказательства слабой сходимости.

## § 3. Доказательство теоремы 1

Предположим сначала, что величина $X$ принимает только неотрицательные значения. В этом случае $g^+(s)$ является преобразованием Лапласа величины $X$. Нетрудно видеть, что $L^+(x)$ есть непрерывная убывающая к нулю функция. Заметим теперь, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\exp\left\{-\frac{S_n}{R^+(x/n)}\right\}&=\left(\mathbf{E}\exp\left\{-\frac{X}{R^+(x/n)}\right\}\right)^n\\&=\left(g^+\left(\frac{1}{R^+(x/n)}\right)\right)^n=(1-L^+(R^+(x/n)))^n.\end{aligned}$$

Поскольку $R^+(x)$ является обратной к $L^+(x)$, то из последнего равенства заключаем, что при $n\to\infty$

$$\mathbf{E}\exp\left\{-\frac{S_n}{R^+(x/n)}\right\}=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\to e^{-x}.$$

Применяя теперь теорему 2 для случая убывающей $L(x)$, получаем равенство

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(nL^+(S_n)<x)=1-e^{-x}. \tag{26}$$

Откажемся теперь от условия неотрицательности слагаемых $X_i$.

Легко видеть, что распределение $X$ совпадает с распределением величины $\alpha X^+ - (1-\alpha)X^-$, где случайные величины $\alpha, X^-, X^+$ независимы, $\alpha$ имеет распределение Бернулли с параметром $r = \mathbf{P}(X \geq 0)$, $\mathbf{P}(X^+ > x) = \mathbf{P}(X > x \mid X \geq 0)$ и $\mathbf{P}(X^- > x) = \mathbf{P}(X < -x \mid X < 0)$. Отсюда

$$S_n = S_\nu^+ - S_{n-\nu}^-, \tag{27}$$

где $S_k^+ = \sum\limits_1^k X_j^+$, $S_k^- = \sum\limits_1^k X_j^-$, $\nu = \nu(n)$ — случайная величина, имеющая биномиальное распределение с параметрами $n$ и $r$.

**Лемма 2.** *Имеют место следующие соотношения:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(S_\nu^+ > R^+(x/n)\big) = 1 - e^{-x}, \tag{28}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(S_\nu^- < R^+(x/n)\big) = e^{-qx/p}. \tag{29}$$

Доказательство. Согласно определению $\mathbf{E}e^{-sX^\pm} = g^\pm(s)$. Положим $L_*^\pm(x) = 1 - g^\pm(1/x)$. Поскольку равенство (7) для неотрицательных величин уже доказано, то

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\big(kL_*^+\big(S_k^+\big) < x\big) = 1 - e^{-x}.$$

Ввиду условия (6) при $x \to \infty$

$$L_*^+(x) \sim L^+(x)/r.$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\big(kL^+\big(S_k^+\big) < x\big) = 1 - e^{-x/r}.$$

Это означает, в частности, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\big(S_k^+ > R^+((1\pm\varepsilon)xr/k)\big) = 1 - e^{-x(1\pm\varepsilon)}.$$

Пусть $1 - \varepsilon < \frac{k}{nr} < 1 + \varepsilon$. Тогда, поскольку $R^+(x)$ убывает, для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\big(S_k^+ > R^+((1-\varepsilon)xr/k)\big) \leq \mathbf{P}\big(S_k^+ > R^+(x/n)\big) \leq \mathbf{P}\big(S_k^+ > R^+((1+\varepsilon)xr/k)\big).$$

Из двух последних соотношений следует, что для достаточно больших $n$

$$1 - e^{-x(1-\varepsilon)} - \varepsilon \leq \mathbf{P}\big(S_\nu^+ > R^+(x/n) \mid |\nu/nr - 1| \leq \varepsilon\big) \leq 1 - e^{-x(1+\varepsilon)} + \varepsilon. \tag{30}$$

С другой стороны, в силу закона больших чисел

$$\lim_{n\to\infty} \big[\mathbf{P}\big(S_\nu^+ > R^+(x/n)\big) - \mathbf{P}\big(S_\nu^+ > R^+(x/n) \mid |\nu/nr - 1| \leq \varepsilon\big)\big] = 0. \tag{31}$$

Комбинируя (30) и (31), получаем равенство (28).

Обратимся теперь к равенству (29). Ввиду (28)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_\nu < R^-(x/n)) = e^{-x}.$$

Другими словами,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(nL^-(S_\nu^-(x/n)) > x) = e^{-x}.$$

Заметим, что вследствие (6) с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L^-(S_\nu^-(x/n))}{L^+(S_\nu^-(x/n))} = \frac{q}{p}.$$

Из двух последних соотношений следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(nL^+(S_\nu^-(x/n)) > x) = e^{-qx/p}. \quad \square$$

**Лемма 3.** *Для любых $x, y > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(S_\nu^+ > R^+(x/n) + R^+(y/n)\big) = 1 - e^{-\min\{x,y\}}.$$

Доказательство. Пусть $x < y$. Тогда вследствие (22) при достаточно больших $n$

$$R(x/n) + R(y/n) < 2R(x/n) < R((1+\varepsilon)x/n),$$

как бы мало ни было $\varepsilon > 0$. Отсюда ввиду (28)

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(S_\nu^+ > R^+(x/n) + R^+(y/n)\big) \geq 1 - e^{-x}.$$

С другой стороны, вследствие (28)

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(S_\nu^+ > R^+(x/n) + R^+(y/n)\big) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(S_\nu^+ > R^+(x/n)\big) = 1 - e^{-x}.$$

Таким образом, при $x < y$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(S_\nu^+ > R^+(x/n) + R^+(y/n)\big) = 1 - e^{-x}.$$

Совершенно аналогично при $x > y$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(S_\nu^+ > R^+(x/n) + R^+(y/n)\big) = 1 - e^{-y}.$$

Лемма доказана. $\square$

Перейдем теперь к заключительному этапу доказательства. Нетрудно видеть, что

$$P_\nu(x) := \mathbf{P}\big(S_\nu^+ - S_{n-\nu}^- > x\big) = \mathbf{E}\int_0^\infty F_\nu^-(y)\,dF_{n-\nu}^+(x+y),$$

где $F_k^\pm(x) = \mathbf{P}\big(S_k^\pm < x\big)$. Производя замену переменных $x = R^+(u/n)$, $y = R^+(v/n)$, имеем

$$P_\nu(R^+(u/n)) = -\mathbf{E}\int_0^\infty F_\nu^-(R^-(v/n))\,dF_{n-\nu}^-(R^+(u/n) + R^+(v/n)).$$

Положим $k_1 = nr - n^{2/3}$, $k_2 = nr + n^{2/3}$. Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(k_1 \leq \nu \leq k_2) = 1. \tag{32}$$

Поэтому при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} &P_\nu(R^+(u/n)) \\ &= -\mathbf{E}\left(\int_0^\infty F_{n-\nu}^-(R^+(u/n))\,dF_\nu^+(R^+(u/n) + R^+(v/n)); k_1 \leq \nu \leq k_2\right) + o(1). \end{aligned} \tag{33}$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} F_{n-k_1}^-(R^+(v/n)) = \lim_{n\to\infty} F_{n-k_2}^-(R^+(v/n)) = e^{-qv/p}. \tag{34}$$

причем сходимость равномерна относительно $v$. Далее, $F^-_{k+1}(x) \le F^-_k(x)$. Поэтому при $k_1 \le \nu \le k_2$

$$F^-_{n-k_1}(R^+(v/n)) \le F^-_{n-\nu}(R^+(v/n)) \le F^-_{n-k_2}(R^+(v/n)). \tag{35}$$

Из (32)–(35) следует, что

$$P_\nu(R^+(u/n)) = -\int_0^\infty e^{-qv/p} d\mathbf{E}F^+_\nu(R^+(u/n) + R^+(v/n)) + o(1).$$

Применяя лемму 3, убеждаемся, что

$$\lim_{n\to\infty} P_\nu(R^+(u/n)) = -\int_0^\infty e^{-qv/p} de^{-\min(u,v)} = \int_0^u e^{-v/p}\, dv = p(1 - e^{-u/p}).$$

Отсюда, возвращаясь к (27), получаем утверждение (7).

## § 4. Доказательство теоремы 2

Согласно теореме 1 из работы [5] для любых $t \in (0,1]$, $y > 0$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P}(S_n > x) \le e^{x/y}\left(1 + \frac{xy^{t-1}}{n\mathbf{E}\{X^t; 0 < X \le y\}}\right)^{-x/y} + n\mathbf{P}(X > y).$$

Полагая в этом неравенстве $t = 1$, $y = x$, приходим к следующей оценке:

$$\mathbf{P}(S_n > x) \le n\mathbf{P}(X > x) + e\frac{n\mathbf{E}\{X; 0 < X \le x\}}{x}. \tag{36}$$

Очевидно,

$$\mathbf{E}\{X; 0 < X \le x\} = -x\mathbf{P}(X \ge x) + \int_0^x \mathbf{P}(X \ge z)\, dz.$$

Поскольку $\mathbf{P}(X \ge z)$ является медленно меняющейся функцией, согласно теореме 2.1 из [9]

$$\int_0^x \mathbf{P}(X \ge z) dz = x\mathbf{P}(X \ge x)(1 + o(1))$$

и, следовательно,

$$\mathbf{E}\{X; 0 < X \le x\} = o(x\mathbf{P}(X \ge x)).$$

Отсюда заключаем, что

$$\frac{n\mathbf{E}\{X; 0 < X \le x\}}{x} = o(n\mathbf{P}(X \ge x)). \tag{37}$$

Используя (37) для оценки правой части в (36), приходим при $nV(x) \to 0$ к неравенству

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}(S_n > x)}{n\mathbf{P}(X > x)} \le 1. \tag{38}$$

Чтобы получить соответствующую нижнюю оценку, воспользуемся неравенством из работы [6] (теорема 6.1), которое можно записать следующим образом:

$$\mathbf{P}(S_n > x) \geq n\mathbf{P}(X \geq \alpha x)[1 - \mathbf{P}(S_{n-1} < -(\alpha-1)x) - ((n-1)/2)\mathbf{P}(X \geq \alpha x)],$$

где $\alpha$ — произвольное положительное число.

Полагая в этом неравенстве $\alpha = 2$, имеем

$$\mathbf{P}(S_n > x) \geq \mathbf{P}(X_1 > 2x)[1 - \mathbf{P}(S_{n-1} < -x) - ((n-1)/2)\mathbf{P}(X \geq 2x)]. \tag{39}$$

Заметим, что при условии (6) и $nL^+(x) \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbf{P}(X < -x) = 0.$$

Применяя неравенство (38) к сумме $-S_n$, убеждаемся, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_{n-1} < -x) = 0 \tag{40}$$

при $nL^+(x) \to 0$.

Комбинируя (39) и (40), получаем при $nL^+(x) \to 0$ оценку

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}(S_n > x)}{n\mathbf{P}(X > 2x)} \geq 1.$$

Отсюда вследствие медленного изменения $\mathbf{P}(X > x)$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}(S_n > x)}{n\mathbf{P}(X > x)} \geq 1. \tag{41}$$

Из (38) и (41) следует (9). Применяя (9) к $-S_n$, приходим к утверждению (10).

Осталось доказать (11).

Для оценки $\mathbf{P}(|S_n| > x)$ сверху применим теорему 5 из упомянутой выше статьи [5]. Согласно этой теореме

$$\mathbf{P}(|S_n| > x) \leq e^{x/y}\left(1 + \frac{xy^{t-1}}{n\mathbf{E}\{|X|^t; 0 < |X| \leq y\}}\right)^{-x/y} + n\mathbf{P}(|X| > y)$$

при $0 < t \leq 1$, $y > 0$. Учитывая, что $\mathbf{P}(|X| > x) \sim L(x)$ при $x \to \infty$, и дословно повторяя вывод (38), получаем оценку

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}(|S_n| > y)}{nL(y)} \leq 1. \tag{42}$$

Чтобы получить нижнюю оценку для $\mathbf{P}(|S_n| > x)$, воспользуемся неравенством (1) из [7], которое применительно к нашим условиях будет выглядеть так:

$$\mathbf{P}(|S_n| > x) \geq n\mathbf{P}(|X| \geq \alpha x)[\min\{\mathbf{P}(S_{n-1} \geq -(\alpha-1)x),\\ \mathbf{P}(S_{n-1} \leq (\alpha-1)x)\} - n\mathbf{P}(|X| \geq \alpha x)],$$

где $\alpha$ — произвольное положительное число. Полагая здесь $\alpha = 2$ и замечая, что

$$\min\{\mathbf{P}(S_{n-1} \geq -x),\ \mathbf{P}(S_{n-1} \leq x)\} \geq \mathbf{P}(|S_{n-1}| \leq x),$$

приходим к неравенству

$$\mathbf{P}(|S_n| > x) \geq n\mathbf{P}(|X| \geq 2x)[1 - \mathbf{P}(|S_{n-1}| > x) - n\mathbf{P}(|X| \geq 2x)].$$

Оценивая $\mathbf{P}(|S_{n-1}| > x)$ с помощью (42), заключаем, что при $nL(y) \to 0$ имеет место соотношение

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}(|S_n| > y)}{nL(2y)} \geq 1. \tag{43}$$

Из (42) и (43) вследствие медленного изменения $L(y)$ вытекает (11).

### *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Lévy P.* Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires indépendentes en enchaines // J. Math. 1935. V. 14. P. 347–402.
**2.** *Lévy P.* Théorie de l'addition des variables aléatoires. Paris: Gauthier-Villar, 1937.
**3.** *Darling D. A.* The influence of the maximal term in the addition of independent random variables // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 73, N 1. P. 95–107.
**4.** *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.
**5.** *Фук Д. Х., Нагаев С. В.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1971. Т. 16, № 4. С. 660–675.
**6.** *Боровков А. А.* Оценки для распределений сумм случайных величин при невыполнении условия Крамера // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 997–1038.
**7.** *Нагаев С. В.* О вероятностях больших уклонений в банаховых пространствах // Мат. заметки. 1983. Т. 34, № 2. С. 309–313.
**8.** *Hudson I. L., Seneta E.* A note on simple branching processes with infinite mean // J. Appl. Probab. 1977. V. 14, N 4. P. 836–842.
**9.** *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
**10.** *Foster J. H.* A limit theorem for a branching process with state-dependent immigration // Ann. Math. Stat. 1971. V. 42, N 3. P. 513–525.
**11.** *Бадалбаев И. С., Якубов Т. Д.* Предельные теоремы для критических ветвящихся процессов Гальтона — Ватсона с миграцией // Теория вероятностей и ее применения. 1995. Т. 40, № 4. С. 833–849.

*Статья поступила 26 мая 2004 г.*

Нагаев Сергей Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`Nagaev@math.nsc.ru,  Nagaevs@hotmail.com`

Вахтель Виталий Иванович
Weierstrass-Institut,
Mohrenstrasse, 39, 10117 Berlin
`vakhtel@wais-berlin.de`