Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 510.53

ОГРАНИЧЕНИЯ НА СПЕКТРЫ СТЕПЕНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР

И. Ш. Калимуллин

Аннотация. Построена степень $\mathbf{b} \leq \mathbf{0}''$, для которой не существует алгебраической структуры со спектром степеней $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leq \mathbf{b}\}$. Кроме того, решена проблема, поставленная Миллером, об отделении несравнимых степеней спектрами линейных порядков.

Ключевые слова: вычислимые алгебраические структуры, вычислимо перечислимое множество, тьюрингова степень, относительная вычислимость.

Представлением счетной алгебраической структуры называется произвольная изоморфная копия $\mathscr{A}' \cong \mathscr{A}$, носитель которой содержится в множестве натуральных чисел ω. *Спектром степеней* $\mathbf{Sp}(\mathscr{A})$ счетной алгебраической структуры $\mathscr{A}$ конечной сигнатуры мы называем совокупность тьюринговых степеней атомных диаграмм всех представлений структуры $\mathscr{A}$ (здесь каждая атомная диаграмма отождествляется с множеством гёделевых номеров ее элементов). В частности, структура $\mathscr{A}$ называется *конструктивизируемой*, если $\mathbf{0} \in \mathbf{Sp}(\mathscr{A})$. Назовем структуру $\mathscr{A}$ $\mathbf{x}$-*конструктивизируемой*, если $\mathbf{y} \in \mathbf{Sp}(\mathscr{A})$ для некоторой $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$, т. е. если атомная диаграмма некоторой копии $\mathscr{A}$ является вычислимой относительно $\mathbf{x}$.

Следующий известный результат показывает, что не каждая совокупность степеней может быть спектром алгебраической структуры

Теорема 1 [1]. *Пусть $\mathscr{A}$ — счетная структура конечной сигнатуры. Тогда выполнено в точности одно из следующих утверждений:*

1) *для любых двух тьюринговых степеней $\mathbf{c} \leq \mathbf{d}$ если $\mathbf{c} \in \mathbf{Sp}(\mathscr{A})$, то $\mathbf{d} \in \mathbf{Sp}(\mathscr{A})$ (т. е. спектр степеней замкнут наверх);*

2) $\mathbf{Sp}(\mathscr{A}) = \{\mathbf{0}\}$ (*структуры с таким свойством называются тривиальными*).

Каждая конечная структура является очевидным примером тривиальной структуры, хотя существуют также и бесконечные тривиальные структуры такие, как, например, бесконечный полный граф. В данной работе будут рассматриваться только нетривиальные счетные структуры конечной сигнатуры. Из теоремы 1 следует, что для нетривиальных структур спектр степеней состоит в точности из степеней $\mathbf{x}$ таких, что структура является $\mathbf{x}$-конструктивизируемой.

Известно много интересных работ, посвященных изучению спектров различных алгебраических структур (см., например, [1–10]). В частности, из [2] следует, что для произвольной степени $\mathbf{a}$ совокупность $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{a}\}$ есть спектр степеней некоторой структуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00605) и гранта Президента РФ (код проекта МК–4314.2008.1).

Имеются также и более неожиданные примеры: Сламан [3] и независимо Вехнер [4] построили структуры со спектром степеней $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$. Удивительной особенностью такого спектра степеней является то обстоятельство, что он содержит не все степени (т. е. структура неконструктивизируема) и его мера (вероятность) в канторовском пространстве 2^ω равна единице в отличие, скажем, от спектра $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{a}\}$, $\mathbf{a} > \mathbf{0}$, имеющего нулевую меру.

Непосредственная релятивизация результата Сламана и Вехнера позволяет строить алгебраические структуры со спектром степеней $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} > \mathbf{b}\}$ для произвольной степени $\mathbf{b}$. Отметим, что мера таких спектров опять будет нулевой при $\mathbf{b} > \mathbf{0}$. Нетривиальной релятивизацией результата Сламана и Вехнера было бы нахождение для произвольной степени $\mathbf{b}$ алгебраической структуры со спектром степеней $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leq \mathbf{b}\}$ (имеющим единичную меру). Из работы автора [11] следует существование таких спектров, если степень $\mathbf{b}$ низкая, т. е. если $\mathbf{b}' = \mathbf{0}'$. Данная работа посвящена доказательству того, что последний результат нельзя распространить на произвольную степень $\mathbf{b}$. Более того, в § 3 будет построена степень $\mathbf{b} \leq \mathbf{0}''$, для которой совокупность степеней $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leq \mathbf{b}\}$ не является спектром никакой алгебраической структуры.

В работе используется терминология и обозначения из монографии [12]. В частности, $\langle x, y \rangle$ — однозначно определенный номер пары чисел $x, y \in \omega$, и для множества $X \subseteq \omega$ и $n \in \omega$ имеет место

$$X^{(n)} \overset{\mathrm{dfn}}{=} \{x : \langle n, x \rangle \in X\}.$$

Кроме того, для $\{0, 1\}$-значной частичной функции ψ будем через $\mathscr{S}(\psi)$ обозначать множество $\{x \in \omega : \psi(x)\downarrow = 1\}$.

§ 1. Случай линейных порядков

Прежде чем приступать к решению поставленной задачи, займемся ее частным случаем. А именно, докажем сначала существование степени $\mathbf{b}$, для которой совокупность степеней $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leq \mathbf{b}\}$ не является спектром никакого линейного порядка. Наши рассуждения позволят также ответить отрицательно на следующий вопрос, поставленный Миллером.

Вопрос [5]. *Можно ли для произвольных несравнимых степеней* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *найти такой линейный порядок* $\mathscr{L}$, *что* $\mathbf{a} \in \mathbf{Sp}(\mathscr{L})$ *и* $\mathbf{b} \notin \mathbf{Sp}(\mathscr{L})$?

Более того, верна

Теорема 2. *Для каждой степени* $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ *существует степень* $\mathbf{b}$, *не сравнимая с* $\mathbf{a}$, *такая, что* $\mathbf{b}' \leq \mathbf{a}'$ *и для любого линейного порядка* $\mathscr{L}$

$$\mathbf{a} \in \mathbf{Sp}(\mathscr{L}) \implies \mathbf{b} \in \mathbf{Sp}(\mathscr{L}).$$

Отметим, что если линейный порядок $\mathscr{L}$ поставить в начало данного утверждения, т. е. от схемы «$\forall\mathbf{a}\exists\mathbf{b}\forall\mathscr{L}\ldots$» перейти к «$\forall\mathscr{L}\forall\mathbf{a}\exists\mathbf{b}\ldots$», то получим более слабое утверждение, известное из работы Рихтер [2].

Фиксируя теперь произвольную низкую степень $\mathbf{a} > \mathbf{0}$, получаем

Следствие 1. *Существуют низкие несравнимые степени* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *такие, что не существует линейного порядка* $\mathscr{L}$, *для которого имеет место* $\mathbf{a} \in \mathbf{Sp}(\mathscr{L})$ *и* $\mathbf{b} \notin \mathbf{Sp}(\mathscr{L})$.

Следствие 2. *Существует такая низкая степень* $\mathbf{b}$, *что*

$$\mathbf{Sp}(\mathscr{L}) \neq \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leq \mathbf{b}\}$$

для всех счетных линейных порядков $\mathscr{L}$.

Отметим, что из работы [11] вытекает, что следствие 2 при сохранении условия «$\mathbf{b}$ низкая» нельзя распространить на произвольные алгебраические структуры. Поэтому следствие 2 можно рассматривать как косвенный аргумент в пользу отрицательного ответа на нерешенный вопрос Доуни [6] о существовании линейного порядка $\mathscr{L}$ со спектром степеней $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$.

Доказательство теоремы 2. Найт [1] было показано, что если $\mathbf{b} < \mathbf{a}$, то существует линейный порядок $\mathscr{L}$, для которого $\mathbf{a} \in \mathbf{Sp}(\mathscr{L})$ и $\mathbf{b} \notin \mathbf{Sp}(\mathscr{L})$. По этой причине мы не будем заботиться об условии $\mathbf{b} \not< \mathbf{a}$.

Кроме того, вместо рассмотрения всех линейных порядков $\mathscr{L}$ таких, что $\mathbf{a} \in \mathbf{Sp}(\mathscr{L})$, достаточно рассмотреть порядки вида $\langle W, <_\eta \rangle$, где $<_\eta$ — фиксированный вычислимый плотный линейный порядок на ω без наибольшего и наименьшего элементов (т. е. порядок, изоморфный упорядочению рациональных чисел), а $W \subseteq \omega$ — произвольное вычислимо перечислимое относительно $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a}$-в.п.) множество.

Фиксируем множество $A \in \mathbf{a}$. Требования на множество $B \in \mathbf{b}$ имеют вид

(I_e) $\langle B^{(n(e))}, <_\eta \rangle \cong \langle W_e^A, <_\eta \rangle$ посредством изморфизма g^e (где $n : \omega \to \omega$ — некоторая функция, а $B^{(n(e))} = \{x : \langle n(e), x \rangle \in B\}$),

(N_e) $\chi_A \neq \Phi_e^B$ для всех $e \in \omega$.

Здесь W_e^A, $e \in \omega$, — гёделева нумерация всех A-в.п. множеств, а Φ_e, $e \in \omega$, — гёделева нумерация всех тьюринговых функционалов.

Множество B будет определено через последовательность $\{0,1\}$-значных частичных функций $\{\beta_s\}_{s\in\omega}$ такую, что $\beta_s \subseteq \beta_{s+1}$ для каждого s и $\chi_B = \bigcup\limits_{s\in\omega} \beta_s$. Тогда $B = \mathscr{S}(\chi_B) = \mathscr{S}\bigl(\bigcup\limits_{s\in\omega} \beta_s\bigr) = \bigcup\limits_{s\in\omega} \mathscr{S}(\beta_s)$.

Кроме того, каждую строку конечной длины, состоящую из символов 0 и 1, будем отождествлять с соответствующей $\{0,1\}$-значной функцией, определенной на начальном отрезке ω. Множество всех таких строк обозначается через $2^{<\omega}$.

Предположим, что значение $n(e) \in \omega$ определено для некоторого $e \in \omega$. Пусть $\alpha \subseteq \beta$ — такие $\{0,1\}$-значные частичные конечные функции, причем существует вложение ψ^e порядка $\langle \mathscr{S}(\alpha)^{(n(e))}, <_\eta \rangle$ в порядок $\langle W_e^A, <_\eta \rangle$. Будем говорить, что β является *e-расширением α относительно* ψ^e, если вложение ψ^e можно продолжить до вложения φ^e порядка $\langle \mathscr{S}(\beta)^{(n(e))}, <_\eta \rangle$ в порядок $\langle W_e^A, <_\eta \rangle$.

Нетрудно заметить, что для фиксированных α и ψ^e предикат «β является e-расширением α относительно ψ^e» A-в.п. (равномерно относительно α и ψ^e). С другой стороны, этот же предикат будет (неравномерно) вычислим, поскольку вычислим каждый экзистенциональный тип линейного порядка.

На каждом шаге s нашего построения значения $n(e)$ будут определены только для $e < s/2$. Кроме того, для каждого $e < s/2$ будет определено вложение ψ_s^e порядка $\langle \mathscr{S}(\beta_s)^{(n(e))}, <_\eta \rangle$ в порядок $\langle W_e^A, <_\eta \rangle$, которое будет продолжено на следующем шаге $s+1$ вложением ψ_{s+1}^e. (Функция $\bigcup\limits_s \psi_s^e$ будет требуемым изоморфизмом g^e для I_e). Будем говорить для краткости, что β является *подходящим расширением на шаге* $s+1$, если $\beta_s \subseteq \beta$ и β есть e-расширение β_s относительно ψ_s^e для всех $e < s/2$. Таким образом, β_{s+1} является одним из подходящих расширений на шаге $s+1$ так же, как и каждая β_t при $t > s$.

Для удовлетворения требования N_e на шаге $s+1$ нам нужно попытаться найти (используя A'-оракул) такую строку σ, что объединение $\beta_s \cup \sigma$ однозначно и является подходящим расширением на шаге $s+1$, причем $\Phi_e^\sigma(x)\downarrow \neq \chi_A(x)$ для некоторого x. Если такой σ существует, то достаточно определить $\beta_{s+1} = \beta_s \cup \sigma$, расширяя каждое вложение ψ_s^i, $i < s/2$, до вложения $\psi_{s+1}^i : \mathscr{S}(\beta_{s+1})^{(n(i))} \to W_i^A$ (существующего в силу того, что $\beta_s \cup \sigma$ подходящее). В этом случае мы безусловно выполняем требование N_e. Если такой строки σ не существует, то требование N_e будет выполнено автоматически. Действительно, предположим, что $\chi_A = \Phi_e^B$. Тогда в противоречие с условиями теоремы A будет вычислимым. Для вычисления $\chi_A(x)$ для произвольного x достаточно найти строку σ такую, что $\beta_s \cup \sigma$ является подходящим расширением на шаге $s+1$ (это вычислимый предикат!) и $\Phi_e^\sigma(x)\downarrow$. Тогда для такого σ будет иметь место $\chi_A(x) = \Phi_e^\sigma(x)$.

Наше построение будет A'-вычислимым. Отсюда следует, что требования $R_e, e \in \omega$, обеспечивают условие $B' \leq_T A'$:

(R_e) $(\exists s)[(\exists \sigma \subseteq \beta_s)[\Phi_e^\sigma(e)\downarrow] \vee (\forall \sigma)[\sigma$ — подходящее расширение на шаге $s+1 \implies \Phi_e^\sigma(e)\uparrow]]$.

Здесь переменная σ действует на множестве $2^{<\omega}$ всех строк конечной длины, состоящих из символов 0 и 1.

В самом деле, зная A', мы можем эффективно найти шаг s такой, что либо для некоторого $\sigma \subseteq \beta_s$ имеет место $\Phi_e^\sigma(e)\downarrow$ для некоторого s, либо $\Phi_e^\sigma(e)\uparrow$ для всех σ, являющихся подходящими расширениями на шаге $s+1$ (последнее условие равномерно A-в.п.!). В первом случае имеет место $e \in B'$, во втором — $e \notin B'$.

Построение. Шаг $s = 0$. Значение функции $n(e)$ пока не определено ни для одного $e \in \omega$. Функции β_0 и ψ_0^e, $e \in \omega$, являются пустыми (нигде не определенными) функциями.

Шаг $s+1 = 2e+1$ (выполнение требований I_i, $i \leq e$).

Пусть k — достаточно большое число такое, что значение $\beta_s(\langle k, y\rangle)$ не определено ни для одного $y \in \omega$. Полагаем $n(e) = k$. Для каждого $i \leq e$ найдем наименьшее число w_i такое, что $w_i \in W_e^A - \operatorname{rng}(\psi_s^i)$. Если такого w_i не существует, то считаем w_i неопределенным. Если w_i определено, фиксируем такое число b_i, что $\beta_s(\langle n(i), b_i\rangle)$ не определено, и $<_\eta$-изоморфизм $\psi_s^i : \mathscr{S}(\beta_s)^{(n(i))} \to \operatorname{rng}(\psi_s^i)$ можно продолжить до изоморфизма между $\langle \{b_i\} \cup \mathscr{S}(\beta_s)^{(n(i))}, <_\eta\rangle$ и $\langle \{w_i\} \cup \operatorname{rng}(\psi_s^i), <_\eta\rangle$ (такое b_i найдется, поскольку $<_\eta$ — плотный линейный порядок без концевых точек). Полагаем

$$\beta_{s+1} = \beta_s \cup \{\langle\langle n(i), b_i\rangle, 1\rangle : i \leq e \text{ и } w_i \text{ определено}\},$$

$$\psi_{s+1}^i = \psi_s^i \cup \{\langle b_i, w_i\rangle\}, \text{ если } i \leq e \text{ и } w_i \text{ определено},$$

$$\psi_{s+1}^i = \psi_s^i \text{ в противном случае.}$$

Шаг $s+1 = 2e+2$ (выполнение N_e).

Случай 1. Существует такая строка σ, что объединение $\beta_s \cup \sigma$ однозначно и является подходящим расширением на шаге $s+1$, и $\Phi_e^\sigma(x)\downarrow \neq \chi_A(x)$ для некоторого x (истинность данного утверждения можно установить с помощью

A'-оракула). Фиксируем такую строку σ. Тогда для каждого $i \le e$ существует вложение φ_s^i из $\langle \mathscr{S}(\beta_s \cup \sigma)^{(n(i))}, <_\eta \rangle$ в $\langle W_i^A, <_\eta \rangle$, продолжающее вложение ψ_s^i. Определим $\beta_{s+1} = \beta_s \cup \sigma$, $\psi_{s+1}^i = \varphi_s^i$ для $i \le e$ и оставляем ψ_{s+1}^i пустыми при $i > e$.

Случай 2. В противном случае полагаем $\beta_{s+1} = \beta_s$ и $\psi_{s+1}^i = \psi_s^i$ для всех $i \in \omega$.

Описание построения завершено.

Отметим, что длины строк σ, для которых имеет место случай 1 на четных шагах, могут быть неограниченно большими, поскольку для каждого $m \in \omega$ существует индекс $e(m)$, для которого имеет место

$$\Phi_{e(m)}^\sigma(x)\downarrow \iff \Phi_{e(m)}^\sigma(x)\downarrow = 1 - \chi_A(0) \iff x = 0 \text{ и } |\sigma| > m.$$

Следовательно, $\bigcup\limits_s \psi_s$ является всюду определенной функцией, так что $\chi_B = \bigcup\limits_s \psi_s$ для некоторого множества B. В силу рассуждений, предшествующих построению, каждое N_e-требование выполнено.

Нечетные шаги построения описаны таким образом, что для каждого $e \in \omega$ функция $g^e = \bigcup\limits_s \psi_s^e$ осуществляет изоморфизм между порядками $\langle B^{(n(e))}, <_\eta \rangle$ и $\langle W_e^A, <_\eta \rangle$.

Для того чтобы установить $B' \le_T A'$, достаточно показать, что каждое R_e-требование выполнено. Пусть $k(e)$ — индекс такой, что

$$\Phi_{k(e)}^\sigma(x)\downarrow \iff \Phi_{k(e)}^\sigma(x)\downarrow = 1 - \chi_A(0) \iff x = 0 \text{ и } \Phi_e^\sigma(e)\downarrow.$$

Рассмотрим шаг $2k(e) + 2$. В случае 1 имеем $\Phi_e^\sigma(e)\downarrow$ для некоторого $\sigma \subseteq \beta_{s+1}$, что влечет истинность R_e по первому дизъюнкту. В случае 2 $\Phi_e^\sigma(e)\uparrow$ для всех подходящих расширений σ на шаге $s + 1$, т. е. R_e выполнено по второму дизъюнкту. $\square$

§ 2. Случай произвольной сигнатуры

Следующая теорема усиливает известный «фольклорный» результат (см., например, [7]) таким же образом, как теорема 2 усиливает результат Рихтер [2].

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— непустая счетная совокупность степеней, в которой нет наименьшего элемента. Тогда существует такая степень* $\mathbf{b}$, *что* $\mathbf{a} \not\le \mathbf{b}$ *для всех* $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, *и*

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Sp}(\mathscr{A}) \implies \mathbf{b} \in \mathbf{Sp}(\mathscr{A})$$

для произвольной алгебраической структуры $\mathscr{A}$.

Следствие 3. *Существует такая степень* $\mathbf{b}$, *что*

$$\mathbf{Sp}(\mathscr{A}) \neq \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\le \mathbf{b}\}$$

для всех алгебраических структур $\mathscr{A}$.

Доказательство. Фиксируем произвольные несравнимые степени $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$. Применяем теорему 3 при $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}$. $\square$

Доказательство теоремы 3. Ввиду [8, 9] вместо всех алгебраических структур $\mathscr{A}$ достаточно рассмотреть только неориентированные графы $\langle V, R \rangle$ без петель (т. е. бинарное отношение R симметрично и иррефлексивно), где носитель $V \subseteq \omega$ — произвольное множество, а вычислимое отношение R фиксировано таким, что $\langle \omega, R\rangle$ является *случайным* графом. Например, можем положить $R(m,n) \overset{\text{dfn}}{\Longleftrightarrow}$ по крайней мере одно из чисел $\left[\frac{m}{2^n}\right]$ и $\left[\frac{n}{2^m}\right]$ нечетно (что эквивалентно $n \in D_m$ или $m \in D_n$ для канонической нумерации $\{D_n\}_{n\in\omega}$ всех конечных множеств). Легко проверить, что для каждой пары непересекающихся конечных множеств $X, Y \subseteq \omega$ существует $z \in \omega$ такое, что $R(x,z)$ и $\neg R(y,z)$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$, т. е. граф $\langle \omega, R\rangle$ случаен.

Пусть $\langle V_0, R\rangle, \langle V_1, R\rangle, \langle V_2, R\rangle, \dots$ — все графы с точностью до изоморфизма такие, что $\mathbf{a} \subseteq \mathbf{Sp}(\langle V_e, R\rangle), e \in \omega$. Предположим также, что $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots\}$ и $A_i \in \mathbf{a}_i$ для каждого $i \in \omega$. Построим множество B, удовлетворяя требованиям $\{I_e\}_{e\in\omega}$ и $\{N_{e,j}\}_{e,j\in\omega}$:

(I_e) $\langle B^{(n(e))}, R\rangle \cong \langle V_e, R\rangle$ посредством изоморфизма g^e (для некоторой функции n),

$(N_{e,j})$ $\chi_{A_j} \neq \Phi_e^B$.

Как и при доказательстве теоремы 2, будем строить B и g^e, $e \in \omega$, с помощью монотонных последовательностей конечных частичных функций: $\chi_B = \bigcup\limits_s \beta_s$ и $g^e = \bigcup\limits_s \psi_s^e$.

Будем теперь говорить, что β является *подходящим расширением на шаге* $s+1$, если $\beta_s \subseteq \beta$ и для каждого $e < s/2$ вложение

$$\psi_s^e : \langle \mathscr{S}(\beta_s)^{(n(e))}, R\rangle \to \langle V_e, R\rangle$$

может быть продолжено до вложения

$$\varphi_s^e : \langle \mathscr{S}(\beta)^{(n(e))}, R\rangle \to \langle V_e, R\rangle.$$

Поскольку $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Sp}(\langle V_e, R\rangle)$ для всех $e \in \omega$, для каждого фиксированного s предикат «β является подходящим расширением на шаге $s+1$» в.п. относительно каждой степени $\mathbf{a}_j \in \mathbf{A}$, $i \in \omega$.

Построение, описанное ниже, является всего лишь подходящей модификацией построения из доказательства теоремы 2. В частности, выполнение всех I_e-требований будет теперь очевидным.

Построение. Шаг $s = 0$. Полагаем $n(e)$ не определенным ни для какого $e \in \omega$. Функции β_0 и ψ_0^e, $e \in \omega$, пусты (нигде не определены).

Шаг $s+1 = 2e+1$ (выполнение требований I_i, $i \le e$).

Пусть k — достаточно большое число такое, что значение $\beta_s(\langle k, y\rangle)$ не определено ни для одного $y \in \omega$. Определим $n(e) = k$. Для каждого $i \le e$ найдем наименьшее число w_i такое, что $w_i \in W_e^A - \operatorname{rng}(\psi_s^i)$. Если такого w_i не существует, то w_i не определено. Если w_i определено, то фиксируем такое число b_i, что $\beta_s(\langle n(i), b_i\rangle)$ не определено и R-изоморфизм $\psi_s^i : \mathscr{S}(\beta_s)^{(n(i))} \to \operatorname{rng}(\psi_s^i)$ можно продолжить до изоморфизма между $\langle \{b_i\} \cup \mathscr{S}(\beta_s)^{(n(i))}, R\rangle$ и $\langle \{w_i\} \cup \operatorname{rng}(\psi_s^i), R\rangle$ (такое b_i найдется, поскольку $\langle \omega, R\rangle$ — случайный граф). Полагаем

$$\beta_{s+1} = \beta_s \cup \{\langle\langle n(i), b_i\rangle, 1\rangle : i \le e \text{ и } w_i \text{ определено}\},$$

$$\psi_{s+1}^i = \psi_s^i \cup \{\langle b_i, w_i\rangle\}, \text{ если } i \le e \text{ и } w_i \text{ определено},$$

$$\psi_{s+1}^i = \psi_s^i \text{ в противном случае.}$$

Шаг $s+1 = 2e+2$ (выполнение N_e).

Случай 1. Существует такая строка σ, что объединение $\beta_s \cup \sigma$ однозначно и является подходящим расширением на шаге $s+1$, и $\Phi_e^\sigma(x)\downarrow \neq \chi_{A_j}(x)$ для некоторого x. Фиксируем такую строку σ. Тогда для каждого $i \leq \langle e,j\rangle$ существует вложение φ_s^i из $\langle \mathscr{S}(\beta_s \cup \sigma)^{(n(i))}, R\rangle$ в $\langle W_i^A, R\rangle$, продолжающее вложение ψ_s^i. Определим $\beta_{s+1} = \beta_s \cup \sigma$, $\psi_{s+1}^i = \varphi_s^i$ для $i \leq \langle e,j\rangle$. Оставляем ψ_{s+1}^i пустыми при $i > \langle e,j\rangle$.

Случай 2. В противном случае полагаем $\beta_{s+1} = \beta_s$ и $\psi_{s+1}^i = \psi_s^i$ для всех $i \in \omega$.

Описание построения завершено.

Теперь мы докажем, что каждое $N_{e,j}$-требование действительно выполнено. Если на шаге $s+1 = 2\langle e,j\rangle + 2$ имеет место случай 1, то $N_{e,j}$, очевидно, выполнено. Предположим, что на шаге $s+1 = 2\langle e,j\rangle+2$ имеет место случай 2 и $\chi_{A_j} = \Phi_e^B$. Тогда для каждого $x \in \omega$ выполнено $\chi_{A_j}(x) = \Phi_e^\sigma(x)$, где σ — произвольная строка такая, что $\Phi_e^\sigma(x)\downarrow$ и $\beta_s \cup \sigma$ является подходящим расширением на шаге $s+1$. Поскольку последнее условие в.п. относительно любого элемента $\mathbf{A}$, степень $\mathbf{a}_j = \deg(A_j)$ является наименьшим элементом $\mathbf{A}$ в противоречие с условиями теоремы. $\square$

Замечание. Пусть совокупность $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots\}$ удовлетворяет условиям теоремы 3, причем для степени $\mathbf{m} = \deg(M)$ существует вычислимая функция f такая, что $\Phi_{f(i)}^M \in \mathbf{a}_i$ для всех i (другими словами, $\mathbf{A}$ равномерно вычислимо относительно $\mathbf{m}$). Заметим, что доказательство теоремы остается корректным, если семейство $\mathscr{V} = \{V_e\}_{e\in\omega}$ заменить более широким семейством $\widehat{\mathscr{V}}$, состоящим из всех $\mathbf{a}_0$-в.п. множеств $\widehat{V}$ таких, что любой экзистенциональный тип графа $\langle \widehat{V}, R\rangle$ является в.п. относительно каждого $\mathbf{a}_i$, $i > 0$. Нетрудно показать, что имеется равномерное $\mathbf{m}'''$-вычислимое перечисление $\{\widehat{V}_e\}_{e\in\omega}$ семейства $\widehat{\mathscr{V}}$. Тогда в теореме 3 можно указать оценку $\mathbf{b} \leq \mathbf{m}^{(4)}$ и, следовательно, оценку $\mathbf{b} \leq \mathbf{0}^{(4)}$ в следствии 3. В следующем параграфе последняя оценка будет улучшена до $\mathbf{b} \leq \mathbf{0}''$.

§ 3. Построение степени $\mathbf{b} \leq \mathbf{0}''$

Докажем теперь следующую теорему, являющуюся более слабым утверждением, чем теорема 3, если не обращать внимание на имеющуюся оценку степени $\mathbf{b}$ сверху.

Теорема 4. *Для любой степени $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ существуют степени $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}''$ и $\mathbf{c} \leq \mathbf{a}''$ такие, что $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}$, $\mathbf{c} \not\leq \mathbf{b}$ и для любой алгебраической структуры $\mathscr{A}$*

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{c}\} \subseteq \mathbf{Sp}(\mathscr{A}) \implies \mathbf{b} \in \mathbf{Sp}(\mathscr{A}).$$

Следствие 4. *Существует такая степень $\mathbf{b} \leq \mathbf{0}''$, что*

$$\mathbf{Sp}(\mathscr{A}) \neq \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \not\leq \mathbf{b}\}$$

для всех алгебраических структур $\mathscr{A}$.

Доказательство. Фиксируем произвольную степень $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ такую, что $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'$, и применяем теорему 4. $\square$

Доказательство теоремы 4. Пусть $A \in \mathbf{a} > \mathbf{0}$. В качестве степени $\mathbf{c}$ возьмем произвольную ненулевую степень $\mathbf{c} = \deg(C) \leq \mathbf{a}''$ такую, что для всех множеств $W \subseteq \omega$ имеет место

$$W \text{ в.п.} \iff W \text{ в.п. относительно } A \text{ и } W \text{ в.п. относительно } C.$$

Известно (см. [13, 14] и теорему 5), что такие степени $\mathbf{c} = \deg(C) \le \mathbf{a}''$ существуют. Тогда индексное множество

$$\{e : W_e^A \text{ в.п. относительно } C\} = \{e : W_e^A \text{ в.п.}\} = \{e : (\exists j)[W_e^A = W_j]\}$$

принадлежит классу $\Sigma_3^A = \Sigma_1^{A''}$ и, следовательно, существует частично A''-вычислимая функция θ такая, что для всех $e \in \omega$

$$W_e^A \text{ в.п. относительно } C \iff \theta(e){\downarrow} \iff W_e^A = W_{\theta(e)}.$$

Фиксируем некоторое A''-вычисление θ, т. е. $\theta = \bigcup\limits_s \theta_s$, $\theta_s \subseteq \theta_{s+1}$, для всех s, причем предикаты $\theta_s(x){\downarrow}$ и $\theta_s(x){\downarrow} = y$ являются A''-вычислимыми равномерно по s.

Заметим также, что из выбора степени $\mathbf{c}$, в частности, следует, что $\mathbf{a} \cap \mathbf{c} = \mathbf{0}$, поэтому степени множеств A и C несравнимы. Для доказательства теоремы достаточно построить множество $B \le_T A''$, выполняя требования для всех $e \in \omega$:

(I_e) $\deg(C) \in \mathbf{Sp}(\langle W_e^A, R\rangle) \Longrightarrow (\exists n)[\langle B^{(n)}, R\rangle \cong \langle W_e^A, R\rangle]$,

(R_e) $\chi_C \ne \Phi_e^B$,

(N_e) $\chi_A \ne \Phi_e^B$.

Здесь отношение R такое же, как и при доказательстве теоремы 3.

Для выполнения требования I_0 необходимо фиксировать некоторое n_0 (например, равное нулю) и построить изоморфизм $g_0 = \bigcup\limits_s \psi_s^0$ между графами $\langle B^{(n_0)}, R\rangle$ и $\langle W_0^A, R\rangle$ тем же способом, что и в теоремах 2 и 3.

По аналогии для того чтобы выполнить R_0 на шаге $s+1$, рассмотрим все *подходящие расширения* β *на шаге* $s+1$, т. е. такие β, что $\beta_s \subseteq \beta$ и вложение $\psi_s^0 : \langle \mathscr{S}(\beta_s)^{(n_0)}, R\rangle \to \langle W_0^A, R\rangle$ можно продолжить до вложения $\varphi_s^0 : \langle \mathscr{S}(\beta)^{(n_0)}, R\rangle \to \langle W_0^A, R\rangle$. Множество таких подходящих расширений в.п. относительно A. Более того, если шаг s и конечная частичная функция β_s известны, то можем эффективно указать такой индекс $a(s)$, что $W_{a(s)}^A$ является множеством всех подходящих расширений на шаге $s+1$. Отметим также, что если $s < t$ и $\mathscr{S}(\beta_s) = \mathscr{S}(\beta_t)$, то

$$W_{a(t)}^A = \{\beta \in W_{a(s)}^A : \beta_t \subseteq \beta\}.$$

Поскольку множество подходящих расширений в.п. относительно A, нет никаких препятствий в выполнении требования R_0: достаточно попытаться найти два подходящих расширения $\gamma_0 \in 2^{<\omega}$ и $\gamma_1 \in 2^{<\omega}$ на шаге $s+1$ (используя лишь A'-оракул) такие, что $\Phi_0^{\gamma_0}(x){\downarrow} \ne \Phi_0^{\gamma_1}(x){\downarrow}$ для некоторого x. Если такие расширения найдутся, мы просто определяем $\beta_{s+1} = \gamma_i$ при таком $i \in \{0, 1\}$, что $\Phi_0^{\gamma_i}(x) \ne \chi_C(x)$. В противном случае, т. е. если таких γ_0 и γ_1 не существует, предположение $\chi_C = \Phi_0^B$ влечет равенство $\chi_C(x) = \Phi_0^{\gamma}(x)$ для любого подходящего расширения γ на шаге $s+1$, для которого имеет место $\Phi_0^{\gamma}(x){\downarrow}$. Отсюда немедленно следует $C \le_T A$, что противоречит выбору C.

Таким простым способом, однако, невозможно выполнить требование N_0, поскольку здесь мы можем получить заведомо верную сводимость $A \le_T A$ вместо заведомо ложной сводимости $C \le_T A$. Теперь нам необходимо воспользоваться функцией θ. Если предположение $\deg(C) \in \mathbf{Sp}(\langle W_0^A, R\rangle)$ из требования I_0 имеет место, то значение $\theta(a(s))$ должно быть определено и $W_{a(s)}^A = W_{\theta(a(s))}$, где $W^A_{a(s)} = W_{\theta(a(s))}$ — множество всех подходящих расширений на шаге $s+1$. Если мы можем удостовериться в этом на том же шаге $s+1$ (т. е. если $\theta_{s+1}(a(s))$ определено), то можем выполнить требование R_0 немедленно, поскольку мы уверены в том, что множество подходящих расширений на шаге $s+1$ в.п., а сводимость $A \leq_T \varnothing$ не имеет места.

Если $\theta_{s+1}(a(s))$ не определено, то на следующих шагах $t > s+1$ мы не будем увеличивать множество $\mathscr{S}(\beta_t)^{(n_0)}$ до тех пор, пока не получим $\theta_t(a(s))\downarrow$ (в это время мы будем определять лишь нулевые новые значения для β_t на числах вида $\langle n_0, y\rangle$). Кроме того, пока $\theta_t(a(s))$ не определено, мы пытаемся удовлетворить N_0 альтернативной стратегией, для которой множество возможных («подходящих») расширений есть просто множество всех расширений $\beta \supseteq \beta_s$ таких, что $\mathscr{S}(\beta) = \mathscr{S}(\beta_s)$.

Тогда в случае неопределенности $\theta(a(s))$ требование I_0 выполнено (поскольку его левая часть не имеет места), а требование N_0 выполнено посредством альтернативной стратегии.

Если же $\theta_t(a(s))$ определено на некотором шаге $t > s$, то альтернативная N_0-стратегия может не привести к успеху (поскольку она работает со слишком узким классом «подходящих» расширений), но исходная N_0-стратегия теперь обязана быть успешной на шаге t, поскольку мы точно знаем, что множество $W^A_{a(s)}$ в.п. и, следовательно, множество $W^A_{a(t-1)} = \left\{\beta \in W^A_{a(s)} : \beta_{t-1} \subseteq \beta\right\}$ в.п. Отметим, что исходная N_0-стратегия может увеличить множество $\mathscr{S}(\beta_t)$ (т. е. $\mathscr{S}(\beta_t) - \mathscr{S}(\beta_s) \neq \varnothing$). По этой причине для удовлетворения N_1 мы должны начать вычисление $\theta(a(t))$ для множества $W^A_{a(t)}$ подходящих расширений на шаге $t+1$. Пока $\theta(a(t))$ не определено, мы опять пытаемся выполнить $N_0, N_1, N_2, \dots$ альтернативными стратегиями, предполагающими, что в множество $\mathscr{S}(\beta_t)$ новые элементы никогда больше не попадут.

Таким образом, можем выделить два *выхода* для I_0-стратегии. Первый выход (обозначим его через 0) соответствует случаю, когда для каждого расширения β_s (сделанного либо некоторой N-стратегией, либо самой I_0-стратегией в целях сюръективности g_0) значение $\theta(a(s))$ определено. Второй выход (выход 1) имеет место, когда $\theta(a(s))$ не определено для некоторого s.

Второй выход конечен (начиная с некоторого шага первый выход не будет нам казаться вероятным), причем множество $B^{(n_0)}$ будет конечным. Этот выход обеспечивает выполнение требования I_0 за счет ложности его левой части.

Первый выход бесконечен (мы будем вынуждены инициализировать бесконечно часто N-стратегии, предполагающие конечный выход). В этом случае мы сможем выполнить требование I_0 и все N-требования тем же способом, что и при доказательстве теоремы 3 (но используя лишь A''-оракул).

Теперь совместная работа всех I-, R- и N-требований может быть формализована A''-вычислимым построением, использующим бинарное приоритетное дерево стратегий T. А именно, в качестве T возьмем множество $2^{<\omega}$ всех строк конечной длины, состоящих из символов 0 и 1. Длину строки $\sigma \in T$ будем обозначать через $|\sigma|$. Кроме того, будут использоваться следующие стандартные упорядочения на T:

$$\sigma <_L \tau \overset{\text{dfn}}{\iff} (\exists \rho \in T)[\rho 0 \subseteq \sigma \text{ и } \rho 1 \subseteq \tau],$$

$$\sigma < \tau \overset{\text{dfn}}{\iff} \sigma <_L \tau \text{ или } \sigma \subset \tau.$$

Каждую строку $\sigma \in T$ свяжем с некоторой стратегией выполнения требований $I_{|\sigma|}$, $R_{|\sigma|}$ и $N_{|\sigma|}$.

Для выполнения I-стратегии строки σ на каждом шаге s построения будет определено значение $n_s(\sigma)$, причем данная стратегия будет пытаться установить изоморфизм $\psi^\sigma : \langle B^{(n(\sigma))}, R\rangle \cong \langle W^A_{|\sigma|}, R\rangle$, где $n(\sigma) = \lim_s n_s(\sigma)$.

По s-m-n теореме можем фиксировать вычислимую функцию $\hat{a}(\psi, n, e)$ такую, что для всех $n, e \in \omega$ и конечной функции ψ (заданной своим каноническим номером) множество $W^A_{\hat{a}(\psi,n,e)}$ состоит в точности из (канонических номеров) конечных $\{0,1\}$-значных функций β таких, что

$$(\exists \varphi \supseteq \psi)\big[\varphi - \text{изоморфное вложение из } \langle \mathscr{S}(\beta)^{(n)}, R\rangle \text{ в } \langle W^A_e, R\rangle\big].$$

Для строки $\sigma \in T$ и шага $s \in \omega$ определим

$$a(\sigma, s) = \hat{a}\big(\psi^\sigma_s, n_s(\sigma), |\sigma|\big),$$

где ψ^σ_s — конечная часть ψ^σ, построенная на шаге s. Отметим, что если $n_s(\sigma) = n_t(\sigma)$ и $\psi^\sigma_s = \psi^\sigma_t$, то, очевидно, $a(\sigma, s) = a(\sigma, t)$.

Кроме того, в процессе построения для каждой строки $\sigma \in T$ будут определены $\{0,1\}$-значные параметры $R_s(\sigma), N_s(\sigma)$, показывающие степень выполнения соответственно R- и N-стратегий строки σ на шаге s (1 — выполнено, 0 — не выполнено).

Параметр $\delta_s \in T$ будет аппроксимировать истинный путь построения, проходящий через истинные выходы I-стратегий. Для шага s параметр $\zeta_s \in T$, $\zeta_s \subseteq \delta_s$, отмечает строку, для которой либо определяется новое значение $n_s(\zeta_s)$, либо выполняются R- или N-стратегии строки ζ_s. Наконец, параметр β_s аппроксимирует множество B, т. е. $\bigcup_s \beta_s = \chi_B$.

Построение. Инициализация строки σ на шаге s означает, что значение $n_s(\sigma)$ становится неопределенным, функция $\psi_s(\sigma)$ — нигде не определенной (пустой), параметры $R_s(\sigma)$ и $N_s(\sigma)$ устанавливаются нулевыми.

Шаг $s = 0$. Полагаем β_0 равной пустой функции. Строки δ_0 и ζ_0 также пусты. Все строки инициализированы на этом шаге.

Шаг $s + 1 = 3s' + 1$. Строка $\delta_{s+1} \in T$ однозначно определяется из условий:

(1) для всех $\sigma \subset \delta_{s+1}$ значение $n_s(\sigma)$ определено, причем соотношение $\sigma 0 \subseteq \delta_{s+1}$ имеет место тогда и только тогда, когда определено значение $\theta_s(a(\sigma, s))$ (в противном случае $\sigma 1 \subseteq \delta_{s+1}$);

(2) $n_s(\delta_{s+1})$ не определено.

Пусть $\zeta_{s+1} \subseteq \delta_{s+1}$ — строка из T наименьшей длины такая, что либо $n_s(\zeta_{s+1})$ не определено, либо $R_s(\zeta_{s+1}) = 0$, либо $N_s(\zeta_{s+1}) = 0$.

Инициализируем на шаге $s + 1$ все строки σ такие, что $\zeta_{s+1} < \sigma$.

Если $n_s(\zeta_{s+1})$ не определено (т. е. $\zeta_{s+1} = \delta_{s+1}$), то полагаем $n_{s+1}(\zeta_{s+1})$ равным наименьшему $y \in \omega$, для которого $\mathscr{S}(\beta_s)^{(y)} = \varnothing$. Остальные (еще не упомянутые) параметры β_{s+1}, $n_{s+1}(\sigma)$, ψ^σ_{s+1}, $R_{s+1}(\sigma)$ и $N_{s+1}(\sigma)$, где $\sigma \leq \zeta_{s+1}$, оставляем такими же, как на шаге s.

Предположим теперь, что $n_s(\zeta_{s+1})$ определено (т. е. $\zeta_{s+1} \subset \delta_{s+1}$). Назовем конечную $\{0,1\}$-значную функцию β *подходящим расширением на шаге* $s + 1$, если $\beta_s \subseteq \beta$ и для всех $\sigma \subseteq \zeta_{s+1}$ имеет место либо $\sigma 0 \subseteq \delta_{s+1}$ и $\beta \in W^A_{a(\sigma,s)}$, либо $\sigma 1 \subseteq \delta_{s+1}$ и $\mathscr{S}(\beta)^{(n_s(\sigma))} = \mathscr{S}(\beta_s)^{(n_s(\sigma))}$.

Выясним, существуют ли два подходящих расширения $\gamma_0 \in 2^{<\omega}$ и $\gamma_1 \in 2^{<\omega}$ на шаге $s + 1$ такие, что $\Phi^{\gamma_0}_{|\zeta_{s+1}|}(x){\downarrow} \neq \Phi^{\gamma_1}_{|\zeta_{s+1}|}(x){\downarrow}$ для некоторого x. Если таких расширений нет, то полагаем $\beta_{s+1} = \beta_s$ и $\psi^\sigma_{s+1} = \psi^\sigma_s$ для всех $\sigma \leq \zeta_{s+1}$.

Если такие расширения найдутся, то определяем $\beta_{s+1}=\gamma_i$ при таком выборе $i\in\{0,1\}$, что $\Phi^{\gamma_i}_{|\zeta_{s+1}|}(x)\neq\chi_C(x)$, если $R_s(\zeta_{s+1})=0$, и $\Phi^{\gamma_i}_{|\zeta_{s+1}|}(x)\neq\chi_A(x)$, если $R_s(\zeta_{s+1})=1$ и $N_{s+1}(\zeta_{s+1})=0$. При этом $\psi^\sigma_{s+1}=\psi^\sigma_s$, если $\sigma\leq\zeta_{s+1}$ и $\sigma 0\not\subseteq\delta_{s+1}$. Если же $\sigma\leq\zeta_{s+1}$ и $\sigma 0\subseteq\delta_{s+1}$, то полагаем ψ^σ_{s+1} равным некоторому расширению ψ^σ_s, являющемуся изоморфным вложением из $\langle\mathscr{S}(\beta_{s+1})^{(n_s(\sigma))},R\rangle$ в $\left\langle W^A_{|\sigma|},R\right\rangle$ (такое расширение существует, поскольку $\beta_{s+1}\in W^A_{a(\sigma,s)}$).

Кроме того, $R_{s+1}(\zeta_{s+1})=1$ и $N_{s+1}(\zeta_{s+1})=0$, если $R_s(\zeta_{s+1})=0$, и $R_{s+1}(\zeta_{s+1})=1$ и $N_{s+1}(\zeta_{s+1})=1$, если $R_s(\zeta_{s+1})=1$ и $N_s(\zeta_{s+1})=0$.

Остальные (не упомянутые) параметры $n_{s+1}(\sigma)$, $R_{s+1}(\sigma)$ и $N_{s+1}(\sigma)$, где $\sigma\leq\zeta_{s+1}$, оставляем такими же, как на шаге s.

Шаг $s+1=3s'+2$. Для каждого $\sigma\in T$ такого, что $\sigma 0\subseteq\delta_s$, найдем наименьшее число w_σ такое, что $w_\sigma\in W^A_{|\sigma|}-\operatorname{rng}\bigl(\psi^\sigma_s\bigr)$. Если такого w_σ нет или $\sigma 0\not\subseteq\delta_s$, то считаем, что w_σ не определено. Если w_σ определено, фиксируем такое число b_σ, что $\beta_s(\langle n_s(\sigma),b_\sigma\rangle)$ не определено, и R-изоморфизм $\psi^\sigma_s:\mathscr{S}(\beta_s)^{(n_s(\sigma))}\to\operatorname{rng}(\psi^\sigma_s)$ можно продолжить до изоморфизма между $\langle\{b_\sigma\}\cup\mathscr{S}(\beta_s)^{(n_s(\sigma))},R\rangle$ и $\left\langle\{w_\sigma\}\cup\operatorname{rng}\bigl(\psi^\sigma_s\bigr),R\right\rangle$ (такое b_σ найдется, поскольку $\langle\omega,R\rangle$ — случайный граф). Полагаем

$$\beta_{s+1}=\beta_s\cup\{\langle\langle n_s(\sigma),b_\sigma\rangle,1\rangle:\sigma\in T\text{ и }w_\sigma\text{ определено}\},$$

$$\psi^\sigma_{s+1}=\psi^\sigma_s\cup\{\langle b_\sigma,w_\sigma\rangle\},\text{ если }\sigma\in T\text{ и }w_\sigma\text{ определено},$$

$$\psi^\sigma_{s+1}=\psi^\sigma_s\text{ в противном случае.}$$

Значения параметров δ_{s+1}, ζ_{s+1}, $n_{s+1}(\sigma)$, $R_{s+1}(\sigma)$ и $N_{s+1}(\sigma)$, где $\sigma\in T$, оставляем такими же, как на шаге s.

Шаг $s+1=3s'+3$. Пусть z — наименьшее число, для которого $z\notin\operatorname{rng}\beta_s$. Полагаем $\beta_{s+1}=\beta_s\cup\{\langle z,0\rangle\}$. Значения параметров δ_{s+1}, ζ_{s+1}, $n_{s+1}(\sigma)$, ψ^σ_s, $R_{s+1}(\sigma)$ и $N_{s+1}(\sigma)$, где $\sigma\in T$, оставляем такими же, как на шаге s.

Описание построения завершено.

По построению на шагах вида $3s'+3$ частичная функция $\bigcup\limits_s\beta_s$ будет всюду определенной и, значит, для некоторого множества B выполняется $\chi_B=\bigcup\limits_s\beta_s$. Поскольку построение является A''-вычислимым, имеем $B\leq_T A''$.

Докажем, что множество B удовлетворяет всем I-, R- и N-требованиям. Для этого определим по индукции строку $\delta(e)\in T$ для каждого $e\in\omega$ следующим образом:

$$\delta(0)\text{ — пустая строка,}$$

$$\delta(e+1)=\begin{cases}\delta(e)0, & \text{если }(\forall t)(\exists s>t)[\delta(e)0\subseteq\delta_s],\\ \delta(e)1 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда для любого e множество шагов s таких, что $\delta_s<_L\delta(e)$, конечно.

Докажем по индукции, что для каждого e строка $\delta(e)$ инициализируется в ходе построения конечное число раз (что эквивалентно конечности множества шагов s, для которых $\zeta_s<\delta(e)$). Предположим, что это утверждение верно для всех $\delta(i)$, $i<e$. Тогда найдется шаг s_0 такой, что для всех $s>s_0$ строки $\delta(i)$, $i<e$, не инициализируются на шаге s, и $\delta_s\not<_L\delta(e)$. Тогда необходимо найдется шаг $s_1>s_0$ такой, что для всех $s>s_0$ и $i<e$ значение $n_s(\delta(i))$ определено, и $R_s(\delta(i))=N_s(\delta(i))=1$. Ясно, что строка $\delta(e)$ не может инициализироваться на шагах $s>s_1$.

Отсюда следует также, что для каждого e существуют пределы $n(\delta(i)) = \lim\limits_s n_s(\delta(i))$ и $\lim\limits_s R_s(\delta(e)) = \lim\limits_s N_s(\delta(e)) = 1$. Кроме того, для каждого e множество шагов s, для которых $\delta(e) \subseteq \delta_s$, бесконечно.

Теперь осталось доказать, что для каждого $e \in \omega$ работа I-, R- и N-стратегий строки $\delta(e)$ приводят к выполнению требований I_e, R_e и N_e соответственно.

Начнем с произвольного требования I_e, $e \in \omega$. Фиксируем шаг t_0 такой, что $\delta(e)$ не инициализируется на шагах $s \geq t_0$ и $n(\delta(e)) = n_s(\delta(e))$ для всех $s \geq t_0$. Заметим, что если $\delta(e+1) = \delta(e)0$, то за счет шагов вида $s = 3s'+2$, $s' \in \omega$, таких, что $\delta(n)0 \subseteq \delta_s$, изоморфное вложение $\psi^{\delta(e)} = \bigcup\limits_{s=t_0}^{\infty} \psi_s^{\delta(e)}$ графа $\langle B^{(n(\delta(e)))}, R\rangle$ в граф $\langle W_e^A, R\rangle$ будет сюръективным, т. е. требование I_e выполнено при $n = n(\delta(e))$.

Предположим теперь, что $\delta(e+1) = \delta(e)1$. Значит, существует шаг $t_1 = 3s_1' + 1 > t_0$ такой, что $\delta(e)1 \subseteq \delta_{t_1}$ и $\delta(e)0 \not\subseteq \delta_s$ для всех $s \geq t_1$. Тогда $\delta(e)1 \subseteq \delta_s$, если $s \geq t_1$ и $\delta(e) \subseteq \delta_s$. Это значит, что для любого s из бесконечного множества $\{s = 3s' + 1 : s \geq t_1 \& \delta(e) \subseteq \delta_s\}$ значение $\theta_s(a(\sigma, s))$ не определено. Но по построению $\psi_s^{\delta(e)} = \psi_{t_1}^{\delta(e)}$ для всех $s \geq t_1$. Поэтому $a(\delta(e), s) = a(\delta(e), t_1)$ для всех $s \geq t_1$, и, следовательно, значение $\theta(a(\delta(e), t_1))$ не определено. Из выбора частичной функции θ следует, что множество $W^A_{a(\delta(e),t_1)}$, состоящее из конечных $\{0,1\}$-значных функций β таких, что

$$\big(\exists \varphi \supseteq \psi_{t_1}^{\delta(e)}\big)\big[\varphi \text{ — изоморфное вложение из } \langle \mathscr{S}(\beta)^{(n(\delta(e)))}, R\rangle \text{ в } \langle W_e^A, R\rangle\big],$$

не является в.п. относительно C. Поэтому $\deg(C) \notin \mathbf{Sp}(\langle W_e^A, R\rangle)$, что также говорит о выполнении требования I_e.

Для того чтобы установить выполнение произвольного требования R_e, $e \in \omega$, фиксируем шаг $u+1 = 3s'+1$ такой, что $\delta(e) \subset \delta_{u+1}$, $R_u(\delta(e)) = 0$, и $\delta(e+1)$ не инициализируется на шагах $s > u$. Тогда по построению будем иметь $\zeta_{u+1} = \delta(e)$ и $R_{u+1}(\delta(e)) = 1$. При этом является очевидным выполнение требования R_e, если существуют два подходящих расширения $\gamma_0 \in 2^{<\omega}$ и $\gamma_1 \in 2^{<\omega}$ на шаге $u+1$ такие, что $\Phi_e^{\gamma_0}(x)\downarrow \neq \Phi_e^{\gamma_1}(x)\downarrow$ для некоторого x. Остается привести к противоречию случай, когда $\chi_C = \Phi_e^B$ и не существует строк $\gamma_0 \supseteq \beta_u$ и $\gamma_1 \supseteq \beta_u$ таких, что

$$(\exists x)\big[\Phi_e^{\gamma_0}(x)\downarrow \neq \Phi_e^{\gamma_1}(x)\downarrow\big],$$

$$(\forall i \leq e)\big[\delta(i+1) = \delta(i)0 \implies \gamma_0 \in W^A_{a(\delta(i),u)} \text{ и } \gamma_1 \in W^A_{a(\delta(i),u)}\big],$$

$$(\forall i \leq e)[\delta(i+1) = \delta(i)1 \implies \mathscr{S}(\gamma_0)^{(n(\delta(i)))} = \mathscr{S}(\gamma_1)^{(n(\delta(i)))} = \mathscr{S}(\beta_u)^{(n(\delta(i)))}]$$

(последние два условия означают, что γ_0 и γ_1 являются подходящими расширениями на шаге $u+1$). Для этого отметим, что по выбору шага u для каждого $i \leq e$ такого, что $\delta(i+1) = \delta(i)1$, и произвольного $s > u$ справедливо $\mathscr{S}(\beta_u)^{(n(\delta(i)))} = \mathscr{S}(\beta_s)^{(n(\delta(i)))}$. С другой стороны, если $i \leq e$ и $\delta(i+1) = \delta(i)0$, то имеет место $\beta_s \in W^A_{a(\delta(i),u)}$ для всех $s > u$ в силу существования изоморфного вложения $\psi_s^{\delta(i)}$, продолжающего вложение $\psi_u^{\delta(i)}$. Кроме того, если $i \leq e$ и $\delta(i+1) = \delta(i)0$, то по построению значение $\theta(a(\delta(i), u))$ определено и, следовательно, множество $W^A_{a(\delta(i),u)} = W_{\theta(a(\delta(i),u))}$ в.п. Следовательно, $\chi_C(x) = y$ тогда и только тогда, когда существует строка $\gamma \supseteq \beta_u$ такая, что $\Phi_e^{\gamma}(x)\downarrow = y$ и

$$(\forall i \leq e)[\delta(i+1) = \delta(i)0 \implies \gamma \in W_{\theta(a(\delta(i),u))}],$$

$$(\forall i \le e)[\delta(i+1) = \delta(i)1 \implies \mathscr{S}(\gamma)^{(n(\delta(i)))} = \mathscr{S}(\beta_u)^{(n(\delta(i)))}].$$

Данное утверждение противоречит невычислимости множества C.

Теперь, чтобы убедиться в справедливости требования N_e, $e \in \omega$, достаточно фиксировать шаг $v+1 = 3s'+1$ такой, что $\delta(e) \subset \delta_{v+1}$, $R_v(\delta(e)) = 1$, $N_v(\delta(e)) = 0$ и $\delta(e+1)$ не инициализируется на шагах $s > v$, и провести в точности такие же рассуждения с заменой C на A и u на v. $\square$

§ 4. Приложение

При доказательстве теоремы 4 был использован простой факт, заключающийся в том, что для каждого множества A существует невычислимое множество $C \le_T A''$ такое, что для всех множеств $W \subseteq \omega$ имеет место

$$W \text{ в.п.} \iff W \text{ в.п. относительно } A \text{ и } W \text{ в.п. относительно } C.$$

На языке степеней по перечислимости это эквивалентно тому, что для любой тотальной e-степени $\mathbf{a}_e$ существует тотальная e-степень $\mathbf{c}_e$, $\mathbf{0}_e < \mathbf{c}_e < \mathbf{a}_e''$, для которой выполнено $\mathbf{a}_e \cap \mathbf{c}_e = \mathbf{0}_e$. В справедливости последнего утверждения можно убедиться, анализируя доказательство теоремы 2 из статьи [13] и учитывая замечание из [14] (утверждение 2.11). Поскольку интересующая нас оценка $\mathbf{c}_e \le \mathbf{a}_e''$ в упомянутых источниках явно не указывается, мы для полноты приводим его доказательство.

Теорема 5 [13, 14]. *Для каждого множества A существует невычислимое множество $C \le_T A''$ такое, что для всех множеств $W \subseteq \omega$ имеет место*

$$W \text{ в.п.} \iff W \text{ в.п. относительно } A \text{ и } W \text{ в.п. относительно } C.$$

Доказательство. Будем строить χ_C посредством монотонной последовательности строк $\chi_C = \bigcup_s \sigma_s$. Наше алгоритмическое построение будет A''-вычислимым.

Построение. Шаг $s = 0$. Строка σ_0 пустая.

Шаг $s+1 = 2e+1$. Полагаем $\sigma_{s+1} = \sigma_s 0$, если $|\sigma_s| \in W_e$, и $\sigma_{s+1} = \sigma_s 1$ в противном случае (здесь используется лишь $\varnothing'$-оракул).

Шаг $s+1 = 2\langle e,j\rangle + 2$. Используя A''-оракул, выясняем, будет ли выполняться равенство $W_e^A = \{x : (\exists \sigma \supseteq \sigma_s)[x \in W_j^\sigma]\}$ (здесь σ пробегает все строки из $2^{<\omega}$).

Случай 1. Равенство имеет место. Полагаем $\sigma_{s+1} = \sigma_s$.

Случай 2. Существует такое $x_s \in W_e^A$, что $x_s \notin W_j^\sigma$ для всех строк $\sigma \supseteq \sigma_s$. Тогда также полагаем $\sigma_{s+1} = \sigma_s$.

Случай 3. Существует такое $x_s \notin W_e^A$, что $x_s \in W_j^\sigma$ для некоторой строки $\sigma \supseteq \sigma_s$. Полагаем $\sigma_{s+1} = \sigma$.

Описание построения завершено.

По построению на нечетных шагах для множества C, $\chi_C = \bigcup_s \sigma_s$, и произвольного $e \in \omega$ имеем $|\sigma_{2e}| \in C$ тогда и только тогда, когда $|\sigma_{2e}| \notin W_e$. Следовательно, C не вычислимо (даже не в.п.).

Предположим теперь, что некоторое множество W в.п. относительно A и в.п. относительно C. Тогда $W = W_e^A = W_j^C$ для некоторых $e, j \in \omega$. Рассмотрим шаг $s+1 = 2\langle e,j\rangle + 2$. Ясно, что случаи 2 и 3 не могут иметь места. Следовательно, $W = \{x : (\exists \sigma \supseteq \sigma_s)[x \in W_j^\sigma]\}$ в.п. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Knight J. F.* Degrees coded in jumps of orderings // J. Symbol. Logic. 1986. V. 51, N 4. P. 1034–1042.

2. *Richter L. J.* Degrees of structures // J. Symbolic Logic. 1981. V. 46, N 4. P. 723–731.

3. *Slaman T.* Relative to any nonrecursive set // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126, N 7. P. 2117–2122.

4. *Wehner S.* Enumerations, countable structures, and Turing degrees // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126, N 7. P. 2131–2139.

5. *Miller R. G.* The Δ_2^0-spectrum of a linear order // J. Symbol. Logic. 2001. V. 66, N 2. P. 470–486.

6. *Downey R.* On presentations of algebraic structures // Complexity, logic, and recursion theory. New York: Dekker, 1997. P. 157–205.

7. *Soskov I. N.* Degree spectra and co-spectra of structures // Ann. Univ. Sofia. 2003. V. 96, N 1. P. 45–68.

8. *Hirschfeldt D. R., Khoussainov B., Shore R. A., Slinko A. M.* Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures // Ann. Pure Appl. Logic. 2002. V. 115, N 1–3. P. 71–113.

9. *Harizanov V. S., Miller R. G.* Spectra of structures and relations // J. Symbol. Logic. 2007. V. 72, N 1. P. 324–348.

10. *Goncharov S. S., Harizanov V. S., Knight J. F., McCoy C., Miller R. G., Solomon R.* Enumerations in computable structure theory // Ann. Pure Appl. Logic. 2005. V. 136, N 3. P. 219–246.

11. *Калимуллин И. Ш.* Спектры степеней некоторых алгебраических структур // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 6. С. 729–744.

12. *Soare R. I.* Recursively enumerable sets and degrees: A study of computable functions and computably generated sets. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer-Verl., 1987.

13. *McEvoy K., Cooper S. B.* On minimal pairs of enumeration degrees // J. Symbol. Logic. 1985. V. 50, N 4. P. 983–1001.

14. *Sorbi A.* The enumeration degrees of Σ_2^0 sets // Complexity, logic, and recursion theory. New York: Dekker, 1997. P. 303–330.

Статья поступила 15 мая 2007 г.

Калимуллин Искандер Шагитович
Казанский гос. университет,
механико-математический факультет, кафедра алгебры и математической лигоки,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
`Iskander.Kalimullin@ksu.ru`