Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 517.51

ПОТОЧЕЧНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ B–ПОТЕНЦИАЛА РИССА В ТЕРМИНАХ B–МАКСИМАЛЬНЫХ И B–ДРОБНО–МАКСИМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В. С. Гулиев, Н. Н. Гараханова, Ю. Зерен

Аннотация. Исследованы максимальные и дробно-максимальные функции, а также потенциалы Рисса, порожденные оператором обобщенного сдвига, ассоциированным с оператором Лапласа — Бесселя. Получены поточечные и интегральные оценки, устанавливающие связь между B-максимальными, B-дробно-максимальными функциями и B-потенциалами Рисса и являющиеся распространением известных результатов на объекты более общей природы. На основе этих результатов доказаны интерполяционные теоремы для B-дробно-максимальных функций и B-потенциалов Рисса.

Ключевые слова: оператор обобщенного сдвига, B-максимальная функция, B-дробно-максимальная функция, B-потенциал Рисса, теорема Соболева.

Работа посвящена исследованиям некоторых задач теории гармонического анализа, ассоциированного с оператором Лапласа — Бесселя Δ_B. В отличие от классического случая, когда объектом исследования служат операторы типа свертки, порожденные обычным сдвигом τ^h, $h \in \mathbb{R}^n$ $(\tau^h\varphi(x) = \varphi(x-h))$, в работе рассматриваются сверточные структуры, порожденные обобщенным сдвигом, приспособленным к оператору Лапласа — Бесселя. Изучение оператора Лапласа — Бесселя требует привлечения некоторых классов специальных функций и соответствующих интегральных преобразований Фурье — Бесселя. С помощью преобразования Фурье — Бесселя для оператора Δ_B найдено фундаментальное решение в виде B-потенциала Рисса (см. [1–3]).

В данной работе исследуются B-максимальные и B-дробно-максимальные функции, а также B-потенциалы Рисса. Доказана $(L_{p,\gamma}, L_{q,\gamma})$-ограниченность B-дробно-максимальных функций, получены поточечные и интегральные оценки, устанавливающие связь между B-максимальными, B-дробно-максимальными функциями и B-потенциалами Рисса, а также теорема Соболева в предельном случае $\left(p = \frac{Q}{\alpha}\right)$. На основе этих результатов доказаны интерполяционные теоремы для B-дробно-максимальных функций и B-потенциалов Рисса.

1. Определения и необходимые факты

Пусть $\mathbb{R}^N$ — N-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $1 \le n \le N$, $N \ge 2$, $x' = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x'' = (x_{n+1}, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-n}$,

Работа первого и второго авторов выполнена при финансовой поддержке гранта Азербайджан-США двусторонней грант-программы (проект ANSF Award / AZM1–3110–BA–08), а также гранта INTAS (project 05–1000008–8157).

$x = (x', x'') \in \mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^N_{n,+} = \{x = (x', x'') \in \mathbb{R}^N : x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$, $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^N_{n,+} : |x - y| < r\}$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$, $\gamma_1 > 0, \dots, \gamma_n > 0$, $(x')^\gamma = x_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\gamma_n}$.

В случае $n = N$ полагаем $x = x'' \in \mathbb{R}^N_+$, $\mathbb{R}^N_+ \equiv \mathbb{R}^N_{n,+} = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 > 0, \dots, x_N > 0\}$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$.

Пусть $|E|_\gamma = \int\limits_E (x')^\gamma dx$ для измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^N_{n,+}$. Тогда $|B(0, r)|_\gamma = \omega(N, n, \gamma) r^Q$, $Q = N + |\gamma|$, где

$$\omega(N, n, \gamma) = \int\limits_{B(0,1)} (x')^\gamma dx = \frac{\pi^{\frac{N-n}{2}}}{2^n} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}.$$

Оператор обобщенного сдвига T^y определяется следующим образом:

$$T^y f(x) = C_{\gamma,n} \int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^\pi f((x_1, y_1)_{\alpha_1}, \dots, (x_n, y_n)_{\alpha_n}, x'' - y'')\, d\nu(\alpha),$$

где

$$C_{\gamma,n} = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \Gamma((\gamma_i + 1)/2) \Gamma^{-1}(\gamma_i/2),$$

$$(x_i, y_i)_{\alpha_i} = \sqrt{x_i^2 - 2x_i y_i \cos\alpha_i + y_i^2}, \quad 1 \le i \le n,$$

$$d\nu(\alpha) = \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1} \alpha_i \, d\alpha_1 \dots d\alpha_n, \quad 1 \le n \le N.$$

Отметим, что оператор обобщенного сдвига T^y тесно связан с оператором Лапласа — Бесселя Δ_B (см. [2]). И. А. Киприяновым, Л. А. Ивановым [2] показано, что объемный потенциал

$$u(x) = \int\limits_{R^N_{n,+}} |y|^{2-Q} T^y f(x) (y')^\gamma \, dy$$

является решением B-эллиптического уравнения

$$\Delta_B u(x) = f(x),$$

где

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^n B_i + \sum_{i=n+1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad B = (B_1, \dots, B_n),$$

$$B_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \gamma_i > 0, \ i = 1, \dots, n.$$

Как видно, решение этой задачи содержит оператор преобразования, в одномерном случае введенный Б. М. Левитаном [4] и называемый *оператором обобщенного сдвига*. Метод операторов преобразования своим широким применением, по видимому, обязан работам [4–6] и др. Ряд важных результатов в этом направлении для B-эллиптических, B-параболических и B-гиперболических уравнений установлен И. А. Киприяновым и его учениками (подробнее см. [3]).

Получение решения задачи в виде объемного потенциала подтверждает необходимость изучения различных свойств потенциалов, являющихся решением некоторых сингулярных дифференциальных уравнений.

Через $L_{p,\gamma} = L_{p,\gamma}\big(\mathbb{R}^N_{n,+}\big)$ обозначим пространство измеримых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^N_{n,+}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{p,\gamma}} = \|f\|_{p,\gamma} = \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} |f(x)|^p (x')^\gamma\, dx\Bigg)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Обозначим $L_{\infty,\gamma}\big(\mathbb{R}^N_{n,+}\big) = L_\infty\big(\mathbb{R}^N_{n,+}\big)$, где $L_\infty\big(\mathbb{R}^N_{n,+}\big)$ — класс всех существенно ограниченных функций f с нормой $\|f\|_{L_{\infty,\gamma}} = \|f\|_{L_\infty} = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\mathbb{R}^N_{n,+}} |f(x)|$.

Определим пространство $BMO_\gamma\big(\mathbb{R}^N_{n,+}\big)$ (см. [7, 8]). При $f \in L^{\mathrm{loc}}_{1,\gamma}\big(\mathbb{R}^N_{n,+}\big)$ положим

$$f_{B(0,r)}(x) = |B(0,r)|^{-1}_\gamma \int\limits_{B(0,r)} T^y f(x) (y')^\gamma\, dy.$$

Здесь $B(0,r) = \big\{y \in \mathbb{R}^N_{n,+} : |y| < r\big\}$.

Говорят, что $f \in L^{\mathrm{loc}}_{1,\gamma}\big(\mathbb{R}^N_{n,+}\big)$ *принадлежит пространству* $BMO_\gamma\big(\mathbb{R}^N_{n,+}\big)$, если

$$\|f\|_{*,\gamma} = \sup_{x,r} |B(0,r)|^{-1}_\gamma \int\limits_{B(0,r)} |T^y f(x) - f_{B(0,r)}(x)| (y')^\gamma\, dy < \infty.$$

Естественным образом определяется свертка (B-свертка), порожденная оператором обобщенного сдвига. Если φ, ψ — интегрируемые на $\mathbb{R}^N_{n,+}$ функции, то положим

$$(\varphi \otimes \psi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} \varphi(y) T^y \psi(x) (y')^\gamma\, dy.$$

Учитывая свойство обобщенного сдвига, нетрудно показать, что $\varphi \otimes \psi = \psi \otimes \varphi$, а также что справедливо неравенство Юнга для B-свертки

$$\|f \otimes g\|_{r,\gamma} \le \|f\|_{p,\gamma} \|g\|_{q,\gamma}, \quad 1 \le p, q, r \le \infty, \quad 1/p + 1/q = 1/r + 1,$$

и при $1 \le p \le \infty$, $f \in L_{p,\gamma}\big(\mathbb{R}^N_{n,+}\big)$, $y \in \mathbb{R}^N_{n,+}$

$$\|T^y f(\cdot)\|_{p,\gamma} \le \|f\|_{p,\gamma} \tag{1}$$

(см., например, [9]).

Пусть $f : \mathbb{R}^N_{n,+} \to \mathbb{R}$ — измеримая функция. Тогда неубывающая γ-перестановка функции f определяется следующим образом:

$$f^*_\gamma(t) = \inf\{s > 0 : f_{*,\gamma}(s) \le t\} \quad \forall t \in [0, \infty),$$

где $f_{*,\gamma}$ — γ-функция распределения функции f,

$$f_{*,\gamma}(t) = \Big|\big\{x \in \mathbb{R}^N_{n,+} : |f(x)| > t\big\}\Big|_\gamma \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Для γ-перестановки функции f справедливы следующие соотношения (подробнее см. [10–12]):

(1) если $0 < p < \infty$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} |f(x)|^p (x')^\gamma \, dx = \int\limits_0^\infty (f^*_\gamma(t))^p \, dt,$$

(2) для любого $t > 0$

$$\sup_{|E|_\gamma = t} \int\limits_E |f(x)|(x')^\gamma \, dx = \int\limits_0^t f^*_\gamma(s) \, ds,$$

(3) имеет место неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} |f(x)g(x)|(x')^\gamma \, dx \le \int\limits_0^\infty f^*_\gamma(t) g^*_\gamma(t) \, dt.$$

Слабое $L_{p,\gamma}$-пространство $WL_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$, $1 \le p < \infty$, определяется как множество локально суммируемых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^N_{n,+}$, с конечной нормой

$$\|f\|_{WL_{p,\gamma}} = \sup_{r>0} r f_{*,\gamma}(r)^{1/p}.$$

Определим на $(0, \infty)$ функцию

$$f^{**}_\gamma(t) = \frac{1}{t} \int\limits_0^t f^*_\gamma(s) \, ds, \quad t > 0.$$

Для функции $f^{**}_\gamma(t)$ справедливо неравенство (см. [13])

$$(f + g)^{**}_\gamma(t) \le f^{**}_\gamma(t) + g^{**}_\gamma(t).$$

В дальнейшем для доказательства теоремы Соболева в предельном случае $p = Q/\alpha$ нам понадобится ряд лемм.

Лемма 1 [11, 14]. *Пусть f, g — положительные измеримые функции на $\mathbb{R}^N_{n,+}$. Тогда для любого $t > 0$ справедливо неравенство*

$$(f \otimes g)^{**}_\gamma(t) \le C_{k,\gamma} \left(f^{**}_\gamma(t) \int\limits_0^t g^{**}_\gamma(u) \, du + \int\limits_t^\infty f^*_\gamma(u) g^{**}_\gamma(u) \, du \right). \tag{2}$$

Лемма 2 [11, 14]. *Пусть $0 < \alpha < Q$ и $K(x) = |x|^{\alpha - Q}$, $x \in \mathbb{R}^N_{n,+}$. Тогда*

$$K^*_\gamma(t) = \left(\frac{\omega(N, n, \gamma)}{t} \right)^{\frac{Q-\alpha}{Q}} \quad \text{и} \quad K^{**}_\gamma(t) = \frac{Q}{\alpha} K^*_\gamma(t).$$

Лемма 3 [13]. *Пусть* $a(s,t)$ *— неотрицательная измеримая функция на* $(-\infty,+\infty)\times[0,+\infty)$ *такая, что если* $0<s<t$, *то п. в.*

$$a(s,t)\le 1, \tag{3}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t>0}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}+\int\limits_{t}^{\infty}a(s,t)^{p'}\,ds\right)^{\frac{1}{p'}}=b<\infty. \tag{4}$$

Тогда существует постоянная $C_0=C_0(p,b)$ *такая, что для* $\phi\ge 0$ *и*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(s)^p\,ds\le 1 \tag{5}$$

справедливо неравенство

$$\int\limits_{0}^{\infty}e^{-F(t)}dt\le C_0, \tag{6}$$

где

$$F(t)=t-\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}a(s,t)\phi(s)\,ds\right)^{p'}. \tag{7}$$

2. $(L_{p,\gamma},L_{q,\gamma})$-ограниченность B-дробно-максимальных функций

В этом разделе будет исследована ограниченность B-максимальных функций $M_\gamma f(x)$ и B-дробно-максимальных функций $M_\gamma^\alpha f(x)$, порожденных обобщенным сдвигом в пространстве $L_{p,\gamma}$. B-максимальная функция определяется следующим образом (см. [7]):

$$M_\gamma f(x)=\sup_{r>0}|B(0,r)|_\gamma^{-1}\int\limits_{B(0,r)}T^y|f(x)|(y')^\gamma\,dy.$$

Рассмотрим также B-дробно-максимальную функцию

$$M_\gamma^\alpha f(x)=\sup_{r>0}|B(0,r)|_\gamma^{\frac{\alpha}{Q}-1}\int\limits_{B(0,r)}T^y|f(x)|(y')^\gamma\,dy,\quad 0\le\alpha<Q.$$

Отметим, что $M_\gamma^0 f=M_\gamma f$ при $\alpha=0$.

Справедлива

Теорема 1. *Пусть* $0\le\alpha<Q$, $1\le p\le\frac{Q}{\alpha}$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{Q}$.

1. *Если* $p=1$, $f\in L_{1,\gamma}\big(\mathbb{R}^N_{n,+}\big)$, *то для любого* $\tau>0$

$$\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}^N_{n,+}:M_\gamma^\alpha f(x)>\tau\}}(x')^\gamma\,dx\le\left(\frac{C_1}{\tau}\int\limits_{R^N_{n,+}}|f(x)|(x')^\gamma\,dx\right)^q, \tag{8}$$

где постоянная C_1 *не зависит от* f.

2. *Если* $1 < p < \frac{Q}{\alpha}$, $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$, *то* $M^\alpha_\gamma f \in L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$ *и*

$$\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} \big(M^\alpha_\gamma f(x)\big)^q (x')^\gamma\,dx\Bigg)^{1/q} \le C_2\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} |f(x)|^p (x')^\gamma dx\Bigg)^{1/p}, \tag{9}$$

где постоянная C_2 *не зависит от* f.

3. *Если* $p = \frac{Q}{\alpha}$, $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$, *то* $M^\alpha_\gamma f \in L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$ *и*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N_{n,+}} M^\alpha_\gamma f(x) \le \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} |f(x)|^p (x')^\gamma\,dx\Bigg)^{1/p}. \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $p = \frac{Q}{\alpha}$. Для функции $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$, применяя неравенство Гёльдера и неравенство (1), имеем

$$|B(0,r)|_\gamma^{\frac{\alpha}{Q}-1} \int\limits_{B(0,r)} T^y|f(x)|(y')^\gamma\,dy$$
$$\le |B(0,r)|_\gamma^{\frac{\alpha}{Q}-1+1-\frac{1}{p}}\Bigg(\int\limits_{B(0,r)} (T^y|f(x)|)^p (y')^\gamma\,dy\Bigg)^{\frac{1}{p}} \le \|T^y f\|_{L_{p,\gamma}} \le \|f\|_{L_{p,\gamma}}.$$

Из последней оценки непосредственно следует п. 3 теоремы 1.

Перейдем к доказательству пп. 2, 3 теоремы. Введем дробно-максимальную функцию, определенную на пространстве однородного типа. Под пространством однородного типа мы понимаем топологическое пространство X с непрерывной псевдометрикой ρ и положительной мерой μ, удовлетворяющей условию удвоения

$$\mu(B(x,2r)) \le c\mu(B(x,r)), \tag{11}$$

где c не зависит от x и $r > 0$. Здесь $B(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$. Пусть (X,ρ,μ) — пространство однородного типа. Определим

$$M^\beta_\mu f(x) = \sup_{r>0} \mu(B(x,r))^{\beta-1} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|d\mu(y), \quad 0 \le \beta < 1.$$

Известно, что дробно-максимальный оператор M^β_μ, $0 \le \beta < 1$, является оператором слабого типа $(1,q)$, $1 - 1/q = \beta$, т. е.

$$\mu\big\{x \in X : M^\beta_\mu f(x) > \tau\big\} \le \Bigg(\frac{C_1'}{\tau}\int\limits_X |f(x)|\,d\mu(x)\Bigg)^q, \quad 1 - \frac{1}{q} = \beta, \tag{12}$$

и сильного типа (p,q) для $1 < p < 1/\beta$, $1/p - 1/q = \beta$ (см. [15, 16]), т. е.

$$\Bigg(\int\limits_X \big|M^\beta_\mu f(x)\big|^q\,d\mu(x)\Bigg)^{1/q} \le C_2'\Bigg(\int\limits_X |f(x)|^p\,d\mu(x)\Bigg)^{1/p}, \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \beta. \tag{13}$$

Для доказательства теоремы 1 будем использовать эти утверждения. В нашем случае $X = \mathbb{R}^N_{n,+}$, $\rho(x,y) = |x-y|$, $\beta = \frac{\alpha}{Q}$, $0 \le \alpha < Q$, и $d\mu(x) = (x')^\gamma\,dx$. Ясно, что эта мера удовлетворяет условию удвоения (11).

Покажем, что

$$M_\gamma^\alpha f(x) \le c_1 M_\mu^\beta f(x),$$

где $c_1 = \omega(N,n,\gamma)^{\alpha/Q-1}2^{Q-\alpha}(1+c_2)$, $c_2 = \frac{C_{\gamma,1}}{\gamma}2^{(\frac{\gamma}{2}-1)_+ +1}$, $a_+ = \max\{a,0\}$.

Введем обозначение

$$M_{\gamma,r}^\alpha f(x) = |B(0,r)|_\gamma^{\frac{\alpha}{Q}-1} \int\limits_{B(0,r)} T^y|f(x)|(y')^\gamma\,dy.$$

Имеем

$$M_{\gamma,r}^\alpha f(x) = |B(0,r)|_\gamma^{\frac{\alpha}{Q}-1} \int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} T^y|f(x)|\chi_{B(0,r)}(y)(y')^\gamma\,dy$$
$$= |B(0,r)|_\gamma^{\frac{\alpha}{Q}-1} \int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} |f(y)|T^y\chi_{B(0,r)}(x)(y')^\gamma\,dy,$$

где

$$T^y\chi_{B(0,r)}(x) = c_\gamma \int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^\pi \chi_{B(0,r)}((x_1,y_1)_{\alpha_1},\dots,(x_n,y_n)_{\alpha_n},x''-y'')\,d\nu(\alpha),$$

χ_A — характеристическая функция множества $A \subset \mathbb{R}^N_{n,+}$.

Отметим, что $T^y\chi_{B(0,r)}(x) = 0$ для любого $y \in \mathbb{R}^N_{n,+} \setminus B(x,r)$, т. е. носитель функции $T^y\chi_{B(0,r)}(x)$ содержится в шаре $B(x,r)$.

Учитывая свойства B-свертки и принимая во внимание тот факт, что носитель функции $T^y\chi_{B(0,r)}(x)$ содержится в шаре $B(x,r)$, имеем

$$M_{\gamma,r}^\alpha f(x) = |B(0,r)|_\gamma^{\frac{\alpha}{Q}-1} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|T^y\chi_{B(0,r)}(x)(y')^\gamma\,dy.$$

В дальнейшем для простоты будем считать, что $n = 1$. В этом случае $\mathbb{R}^N_{n,+} = \mathbb{R}^N_+$. Покажем что, для всех $x \in \mathbb{R}^N_+$, $r > 0$ и $y \in B(x,r)$ (см. [8])

$$0 \le T^y\chi_{B(0,r)}(x) \le \min\{1, c_2 r^\gamma/x_1^\gamma\}. \tag{14}$$

Отметим что неравенство

$$0 \le T^y\chi_{B(0,r)}(x) \le 1, \quad x \in \mathbb{R}^N_{n,+},\ y \in B(x,r), \tag{15}$$

очевидно.

Имеем

$$T^y\chi_{B(0,r)}(x) \le C_{\gamma,1} \int\limits_{\{\alpha\in(0,\pi):(x_1,y_1)_\alpha^2+|x''-y''|^2<r^2\}} \sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha$$
$$\le C_{\gamma,1} \int\limits_{\{\alpha\in(0,\pi):(x_1,y_1)_\alpha<r\}} \sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha = C_{\gamma,1} \int\limits_{\left\{\alpha\in(0,\pi):\frac{x_1^2+y_1^2-r^2}{2x_1y_1}<\cos\alpha\right\}} \sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha$$
$$= C_{\gamma,1} \int\limits_{\frac{x_1^2+y_1^2-r^2}{2x_1y_1}}^1 (1-t^2)^{\frac{\gamma}{2}-1}\,dt \le C_{\gamma,1}2^{(\frac{\gamma}{2}-1)_+} \int\limits_{\frac{x_1^2+y_1^2-r^2}{2x_1y_1}}^1 (1-t)^{\frac{\gamma}{2}-1}\,dt$$

$$\le \frac{C_{\gamma,1}}{\gamma} 2^{(\frac{\gamma}{2}-1)_+ +1} \left(1 - \frac{x_1^2 + y_1^2 - r^2}{2x_1 y_1}\right)^{\frac{\gamma}{2}} \le \frac{C_{\gamma,1}}{\gamma} 2^{(\frac{\gamma}{2}-1)_+ +1} \left(\frac{r}{x_1}\right)^{\frac{\gamma}{2}} \left(\frac{r - |x_1 - y_1|}{y_1}\right)^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Заметим, что $\frac{r-|x_1-y_1|}{y_1} \le \frac{r}{x_1}$ в случае $y_1 \ge x_1$, а в случае $y_1 < x_1$ неравенство $\frac{r-|x_1-y_1|}{y_1} < \frac{r}{x_1}$ эквивалентно неравенству $r < x_1$.

Таким образом,

$$T^y \chi_{B(0,r)}(x) \le \frac{C_{\gamma,1}}{\gamma} 2^{(\frac{\gamma}{2}-1)_+ +1} \left(\frac{r}{x_1}\right)^{\gamma}. \tag{16}$$

Следовательно, из неравенств (15) и (16) следует справедливость оценки (14).

Теперь оценим меру шара $B(x,r)$. Рассмотрим вначале случай $x_1 \le r$. Имеем

$$\mu B(x,r) = \int\limits_{B(x,r)} y_1^\gamma \, dy \le \prod_{j=2}^{N} \int\limits_{|y_j|<r} dy_j \int\limits_{\{y_1>0; |x_1-y_1|<r\}} y_1^\gamma \, dy_1$$
$$\le (2r)^{N-1} \int\limits_0^{x_1+r} y_1^\gamma \, dy_1 = (2r)^{N-1} \frac{(x+r)^{\gamma+1}}{\gamma+1} \le \frac{(2r)^Q}{\gamma+1}.$$

Пусть теперь $x_1 > r$, тогда

$$\mu B(x,r) \le (2r)^{N-1} \int\limits_{x_1-r}^{x_1+r} y_1^\gamma \, dy_1 \le (2r)^N (x_1+r)^\gamma = (2r)^Q \frac{x_1^\gamma}{r^\gamma}.$$

Объединяя последние две оценки, имеем

$$\mu B(x,r) \le (2r)^Q \max\{1, x_1^\gamma / r^\gamma\}. \tag{17}$$

Оценим $M_\gamma^\alpha f(x)$ следующим образом:

$$M_\gamma^\alpha f(x) \le M_{0,\gamma}^\alpha f(x) + M_{1,\gamma}^\alpha f(x),$$

где

$$M_{0,\gamma}^\alpha f(x) = \sup_{r \le x_1} |B(0,r)|_\gamma^{\frac{\alpha}{Q}-1} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)| T^y \chi_{B(0,r)}(x) (y')^\gamma \, dy,$$

$$M_{1,\gamma}^\alpha f(x) = \sup_{r > x_1} |B(0,r)|_\gamma^{\frac{\alpha}{Q}-1} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)| T^y \chi_{B(0,r)}(x) (y')^\gamma \, dy.$$

В случае $x_1 < r$, учитывая, что $\mu B(x,r) \le (2r)^Q$, $T^y \chi_{B(0,r)}(x) \le 1$ и $|B(0,r)|_\gamma = \omega(N,1,\gamma) r^Q$, получим

$$M_{1,\gamma}^\alpha f(x) = \sup_{r > x_1} |B(0,r)|_\gamma^{\frac{\alpha}{Q}-1} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)| T^y \chi_{B(0,r)}(x) (y')^\gamma \, dy$$
$$\le \omega(N,1,\gamma)^{\alpha/Q-1} 2^{Q-\alpha} \sup_{r>0} (\mu B(x,r))^{\beta-1} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)| \, d\mu(y)$$
$$\le \omega(N,1,\gamma)^{\alpha/Q-1} 2^{Q-\alpha} M_\mu^\beta f(x).$$

В случае $x_1 \geq r$, поскольку $\mu B(x,r) \leq (2r)^Q \frac{x_1^\gamma}{r^\gamma}$, $T^y\chi_{B(0,r)}(x) \leq c_2 r^\gamma / x_1^\gamma$ и $|B(0,r)|_\gamma = \omega(N,1,\gamma)r^Q$, будем иметь

$$M_{0,\gamma}^\alpha f(x) \leq \sup_{r\leq x_1} |B(0,r)|_\gamma^{\frac{\alpha}{Q}-1} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)| T^y \chi_{B(0,r)}(x)(y')^\gamma\, dy$$

$$\leq c_2\omega(N,1,\gamma)^{\alpha/Q-1} 2^{Q-\alpha} \sup_{r>0} (\mu B(x,r))^{\beta-1} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\, d\mu(y)$$

$$= c_2\omega(N,1,\gamma)^{\alpha/Q-1}2^{Q-\alpha} M_\mu^\beta f(x).$$

Следовательно, $M_\gamma^\alpha f(x) \leq M_{0,\gamma}^\alpha f(x) + M_{1,\gamma}^\alpha f(x) \leq c_1 M_\mu^\beta f(x)$.

Учитывая в утверждениях (12) и (13) то, что $X = \mathbb{R}_{n,+}^N$, $\beta = \frac{\alpha}{Q}$, $1 < p < \frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \beta$ и мера $d\mu(x) = (x')^\gamma\, dx$ удовлетворяет условию удвоения, получим

$$\left\|M_\gamma^\alpha f\right\|_{q,\gamma} \leq c_1 \left\|M_\mu^\beta f\right\|_{q,\gamma} \leq C_2 \|f\|_{p,\gamma},$$

где $C_2 = c_1 C_2'$, а при $p = 1$, $1 - \frac{1}{q} = \beta$

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}_{n,+}^N : M_\gamma^\alpha f(x) > \tau\right\}\right|_\gamma \leq \mu\left\{x \in \mathbb{R}_{n,+}^N : M_\mu^\beta f(x) > \tau/c_1\right\}$$

$$\leq \left(\frac{C_1}{\tau} \int\limits_{\mathbb{R}_{n,+}^N} |f(x)|\, d\mu(x)\right)^q,$$

где $C_1 = c_1 C_1'$.

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. 1. *Пусть $f \in L_{1,\gamma}(\mathbb{R}_{n,+}^N)$. Тогда для любого $\tau > 0$*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}_{n,+}^N : M_\gamma f(x) > \tau\right\}\right|_\gamma \leq \frac{C_3}{\tau} \int\limits_{\mathbb{R}_{n,+}^N} |f(x)|(x')^\gamma\, dx, \tag{18}$$

где постоянная C_3 не зависит от f.

2. *Пусть $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n,+}^N)$, $1 < p \leq \infty$. Тогда $M_\gamma f(x) \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n,+}^N)$ и*

$$\|M_\gamma f\|_{p,\gamma} \leq C_4 \|f\|_{p,\gamma}, \tag{19}$$

где постоянная C_4 не зависит от f.

Следствие 2. *Если $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}_{n,+}^N)$, $1 \leq p \leq \infty$, то*

$$\lim_{r\to 0} |B(0,r)|_\gamma^{-1} \int\limits_{B(0,r)} T^y f(x)(y')^\gamma\, dy = f(x)$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}_{n,+}^N$.

Замечание 1. Отметим, что при $0 < \alpha < Q$ теорема 1 является новой даже в одномерном случае. Следствие 1 в одномерном случае, т. е. при $N = n = 1$, доказано в [17], а в многомерном случае при $n = N \geq 2$ — в [7] (подробнее см. [8]).

3. Поточечные и интегральные оценки для B-потенциала Рисса

Рассмотрим B-потенциал Рисса

$$I_\gamma^\alpha f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} T^y |x|^{\alpha-Q} f(y)(y')^\gamma \, dy, \quad 0 < \alpha < Q.$$

Нетрудно показать, что если $p \geq \frac{Q}{\alpha}$, то B-потенциал Рисса $I_\gamma^\alpha f$ не определен для всех функций $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$.

Докажем следующую теорему, являющуюся поточечной оценкой для B-потенциала Рисса $I_\gamma^\alpha f(x)$. Оценки такого типа для потенциала Рисса получены в [13].

Теорема 2. *Пусть $0 < \alpha < Q$ и $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$ — локально суммируемая функция. Тогда для $r > 0$ и $x \in \mathbb{R}^N_{n,+}$ существуют постоянные C_5–C_8, зависящие только от α, p, n, N, γ, такие, что*

$$I_\gamma^\alpha |f|(x) \leq C_5 \big(r^\alpha M_\gamma f(x) + r^{\alpha - \frac{\lambda}{p}} M_\gamma^{\frac{\lambda}{p}} f(x) \big), \quad 1 \leq p < \lambda/\alpha; \tag{20}$$

$$I_\gamma^\alpha |f|(x) \leq C_6 \|f\|_{p,\gamma}^{\frac{\alpha p}{Q}} (M_\gamma f(x))^{1-\frac{\alpha p}{Q}}, \quad 1 \leq p < \frac{Q}{\alpha}; \tag{21}$$

$$I_\gamma^{\alpha\theta} f(x) \leq C_7 \big(I_\gamma^\alpha f(x) \big)^\theta (M_\gamma f(x))^{1-\theta}, \quad 0 < \theta < 1; \tag{22}$$

$$I_\gamma^{\alpha\theta} f(x) \leq C_8 \big(M_\gamma^\alpha f(x) \big)^\theta (M_\gamma f(x))^{1-\theta}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{23}$$

Доказательство. Пусть $r > 0$ — произвольное число. Используя свойство свертки, представим $I_\gamma^\alpha |f|(x)$ в виде

$$I_\gamma^\alpha |f|(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} |y|^{\alpha-Q} T^y |f(x)| (y')^\gamma \, dy$$
$$= \Bigg(\int\limits_{B(0,r)} + \int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+} \setminus B(0,r)} \Bigg) T^y |f(x)| \, |y|^{\alpha-Q} (y')^\gamma \, dy = J_1(x,r) + J_2(x,r).$$

Для доказательства (20) сначала оценим $J_1(x,r)$. Суммируя по всем $j > 0$, получим

$$J_1(x,r) \leq \int\limits_{B(0,r)} T^y |f(x)| \, |y|^{\alpha-Q} (y')^\gamma \, dy$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{B(0,2^{-j+1}r) \setminus B(0,2^{-j}r)} T^y |f(x)| \, |y|^{\alpha-Q} (y')^\gamma \, dy \leq c r^\alpha M_\gamma f(x).$$

Следовательно,

$$J_1(x,t) \leq c t^\alpha M_\gamma f(x). \tag{24}$$

Так же оценим $J_2(x,r)$:

$$J_2(x,r) = \int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+} \setminus B(0,r)} |y|^{\alpha-Q} T^y |f(x)| (y')^\gamma \, dy$$
$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{B(0,2^{k+1}r) \setminus B(0,2^k r)} |y|^{\alpha-Q} T^y |f(x)| (y')^\gamma \, dy \leq c r^{\alpha - \frac{\lambda}{p}} M_\gamma^{\frac{\lambda}{p}} f(x),$$

ибо по нашему предположению $\alpha - \frac{\lambda}{p} < 0$.

Итак, оценка (20) доказана. Перейдем к доказательству (21). Используя оценку (1) и нижеследующую оценку для $J_2(x,t)$, придем к (21).

Применяя неравенство Гёльдера, а также (1), имеем

$$J_2(x,t) \le \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+} \setminus B(0,t)} (T^y|f(x)|)^p (y')^\gamma \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+} \setminus B(0,t)} |y|^{(\alpha - Q)p'} (y')^\gamma \, dy \right)^{\frac{1}{p'}}$$
$$\le \|T^y f\|_{p,\gamma} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+} \setminus B(0,t)} |y|^{(\alpha - Q)p'} (y')^\gamma \, dy \right)^{\frac{1}{p'}}$$
$$\le \|f\|_{p,\gamma} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+} \setminus B(0,t)} |y|^{(\alpha - Q)p'} (y')^\gamma \, dy \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Перейдем к сферическим координатам:

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+} \setminus B(0,t)} |y|^{(\alpha - Q)p'} (y')^\gamma \, dy \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int\limits_t^\infty \int\limits_{S_+^{N-1}} r^{(\alpha - Q)p' + Q - 1} (\theta')^\gamma \, dr d\theta \right)^{\frac{1}{p'}}$$
$$= \left(\int\limits_{S_+^{N-1}} (\theta')^\gamma \, d\theta \int\limits_t^\infty r^{(\alpha - Q)p' + Q - 1} \, dr \right)^{\frac{1}{p'}}$$
$$= \left(\int\limits_{S_+^{N-1}} (\theta')^\gamma \, d\theta \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_t^\infty r^{(\alpha - Q)p' + N + \gamma - 1} \, dr \right)^{\frac{1}{p'}} = c t^{\alpha - Q + \frac{Q}{p'}} = c t^{\alpha - \frac{Q}{p}}.$$

Следовательно,

$$J_2(x,t) \le c \|f\|_{p,\gamma} t^{\alpha - \frac{Q}{p}}. \tag{25}$$

Таким образом, из (24) и (25)

$$I_\gamma^\alpha |f|(x) \le c(t^\alpha M_\gamma f(x) + \|f\|_{p,\gamma} t^{\alpha - \frac{Q}{p}}).$$

Минимизируя по t, при $t = [(M_\gamma f(x))^{-1} \|f\|_{p,\gamma}]^{p/(Q)}$ получим

$$I_\gamma^\alpha |f|(x) \le C_6 \|f\|_{p,\gamma}^{\frac{\alpha p}{Q}} (M_\gamma f(x))^{1 - \frac{\alpha p}{Q}}.$$

Теперь докажем неравенство (22). Рассмотрим

$$I_\gamma^{\alpha\theta} f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} T^y f(x) |y|^{\alpha\theta - Q} (y')^\gamma \, dy$$
$$= \left(\int\limits_{B(0,t)} + \int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+} \setminus B(0,t)} \right) T^y f(x) |y|^{\alpha\theta - Q} (y')^\gamma \, dy = I_1(x,t) + I_2(x,t).$$

Оценим $I_2(x,t)$. Заметим, что так как по условию теоремы $0 < \theta < 1$, то $\alpha\theta - \alpha < 0$ и $|y|^{\alpha\theta-\alpha} \le t^{\alpha\theta-\alpha}$ для любого $y \in \mathbb{R}^N_{n,+} \backslash B(0,t)$. Отсюда

$$I_2(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}\backslash B(0,t)} T^y f(x) |y|^{\alpha\theta-Q} (y')^\gamma \, dy \le t^{\alpha\theta-\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}\backslash B(0,t)} T^y f(x) |y|^{\alpha-Q} (y')^\gamma \, dy \le t^{\alpha\theta-\alpha} I^\alpha_\gamma f(x). \quad (26)$$

Учитывая (24) и (26), имеем

$$I_1(x,t) \le c t^{\alpha\theta} M_\gamma f(x), \quad (27)$$

$$I_2(x,t) \le t^{\alpha\theta-\alpha} I^\alpha_\gamma f(x). \quad (28)$$

Таким образом, из (27) и (28) вытекает, что

$$I^{\alpha\theta}_\gamma f(x) \le c t^{\alpha\theta} M_\gamma f(x) + t^{\alpha\theta-\alpha} I^\alpha_\gamma f(x). \quad (29)$$

Минимизируя по t, при $t = \left[(M_\gamma f(x))^{-1} I^\alpha_\gamma f(x)\right]^{1/\alpha}$ получим

$$I^{\alpha\theta}_\gamma f(x) \le C_7 \big(I^\alpha_\gamma f(x)\big)^\theta (M_\gamma f(x))^{1-\theta}.$$

Перейдем к доказательству оценки (23). Рассмотрим $I_2(x,t)$. Суммируя по всем $j > 0$, приходим к неравенствам

$$I_2(x,t) \le \sum_{j=0}^\infty \int\limits_{B(0,2^{j+1}t)\backslash B(0,2^j t)} T^y f(x) |y|^{\alpha\theta-Q} (y')^\gamma \, dy \le \sum_{j=0}^\infty (2^j t)^{\alpha\theta-N-|\gamma|} \int\limits_{B(0,2^{j+1}t)} T^y f(x) (y')^\gamma \, dy$$
$$\le 2^{Q-\alpha} t^{\alpha\theta-\alpha} M^\alpha_\gamma f(x) \sum_{j=0}^\infty (2^{\alpha\theta-\alpha})^j \le c t^{\alpha\theta-\alpha} M^\alpha_\gamma f(x).$$

Следовательно,

$$I_2(x,t) \le c^{\alpha\theta-\alpha} M^\alpha_\gamma f(x). \quad (30)$$

Учитывая (27) и (30), имеем

$$I^{\alpha\theta}_\gamma f(x) \le t^{\alpha\theta} M_\gamma f(x) + c t^{\alpha\theta-\alpha} M^\alpha_\gamma f(x).$$

Минимизируя по t, при $t = \left[(M_\gamma f(x))^{-1} M^\alpha_\gamma f(x)\right]^{1/\alpha}$ получим

$$I^{\alpha\theta}_\gamma f(x) \le C_8 \big(M^\alpha_\gamma f(x)\big)^\theta (M_\gamma f(x))^{1-\theta}.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть* $0 < \alpha < Q$, $f \in L_{p,\gamma}\big(\mathbb{R}^N_{n,+}\big)$.

(a) *Если* $1 < p < \frac{\lambda}{\alpha}$, $1 \le r \le \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\alpha p}{\lambda r}$, *то для любой функции* $f \in L_{p,\gamma}\big(\mathbb{R}^N_{n,+}\big)$ *и* $M^{\frac{\lambda}{p}}_\gamma f \in L_{r,\gamma}\big(\mathbb{R}^N_{n,+}\big)$ *имеет место следующая оценка:*

$$\big\|I^\alpha_\gamma f\big\|_{q,\gamma} \le C_9 \big\|M^{\frac{\lambda}{p}}_\gamma f\big\|^{\frac{\alpha p}{\lambda}}_{r,\gamma} \|f\|^{1-\frac{\alpha p}{\lambda}}_{p,\gamma}, \quad (31)$$

где постоянная C_9 не зависит от функции f.

(b) *Если $1 < p < \frac{Q}{\alpha}$, то существуют постоянные C_{10} и C_{11}, зависящие только от α, p, n, N и γ, такие, что*

$$\left\|I_\gamma^{\alpha\theta} f\right\|_{r,\gamma} \le C_{10}\left\|I_\gamma^{\alpha}|f|\right\|_{q,\gamma}^{\theta}\|f\|_{p,\gamma}^{1-\theta}, \tag{32}$$

$$\left\|I_\gamma^{\alpha\theta} f\right\|_{r,\gamma} \le C_{11}\left\|M_\gamma^{\alpha} f\right\|_{q,\gamma}^{\theta}\|f\|_{L_{p,\gamma}}^{1-\theta}, \tag{33}$$

где $0 < \theta < 1$, $0 < q \le \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{p}$.

Доказательство. Взяв в оценке (20)

$$r = r(x) = \left(\frac{M_\gamma^{\frac{\lambda}{p}} f(x)}{M_\gamma f(x)}\right)^{\frac{p}{\lambda}},$$

имеем

$$\left|I_\gamma^{\alpha} f(x)\right| \le C_5\left(M_\gamma^{\frac{\lambda}{p}} f(x)\right)^{\frac{\alpha p}{\lambda}}(M_\gamma f(x))^{1-\frac{\alpha p}{\lambda}} \tag{34}$$

для каждого $x \in \mathbb{R}_{n,+}^N$. Возведя обе части неравенства в степень q, интегрируя по x и применяя неравенство Гёльдера к правой части неравенства (34), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}_{n,+}^N}\left|I_\gamma^{\alpha} f(x)\right|^q (x')^\gamma dx \le C_5^q \int\limits_{\mathbb{R}_{n,+}^N}\left(M_\gamma^{\frac{\lambda}{p}} f(x)\right)^{\frac{\alpha p q}{\lambda}}(M_\gamma f(x))^{q-\frac{\alpha p q}{\lambda}}(x')^\gamma\,dx$$

$$\le C_5^q\left\|\left(M_\gamma^{\frac{\lambda}{p}} f\right)^{\frac{\alpha p q}{\lambda}}\right\|_{s',\gamma}\|(M_\gamma f)^{q-\frac{\alpha p q}{\lambda}}\|_{s,\gamma},$$

где $\left(q - \frac{\alpha p q}{\lambda}\right)s = p$, $s' = \frac{s}{s-1} = \frac{\lambda r}{\alpha p q}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\alpha p}{\lambda r}$. Следовательно,

$$\left\|I_\gamma^{\alpha} f\right\|_{q,\gamma} \le C_5\left\|M_\gamma^{\frac{\lambda}{p}} f\right\|_{r,\gamma}^{\frac{\alpha p}{\lambda}}\|M_\gamma f\|_{p,\gamma}^{\frac{p}{qs}} \le C_9\left\|M_\gamma^{\frac{\lambda}{p}} f\right\|_{r,\gamma}^{\frac{\alpha p}{\lambda}}\|f\|_{p,\gamma}^{\frac{p}{qs}} = C_9\left\|M_\gamma^{\frac{\lambda}{p}} f\right\|_{r,\gamma}^{\frac{\alpha p}{\lambda}}\|f\|_{p,\gamma}^{1-\frac{\alpha p}{\lambda}}.$$

Докажем неравенство (32), неравенство (33) доказывается аналогично.

Рассмотрим $\left\|I_\gamma^{\alpha\theta} f\right\|_{r,\gamma}$. Учитывая (22) и применяя неравенство Гёльдера, приходим к соотношениям

$$\left\|I_\gamma^{\alpha\theta} f\right\|_{r,\gamma} \le C_7\left\|\left(I_\gamma^{\alpha}|f|\right)^{\theta}(M_\gamma f)^{1-\theta}\right\|_{r,\gamma} \le C_7\left\|\left(I_\gamma^{\alpha}|f|\right)^{\theta}\right\|_{r\tau',\gamma}\|(M_\gamma f)^{1-\theta}\|_{r\tau,\gamma}.$$

Введем следующие обозначения: $p = (1-\theta)r\tau$, $q = \theta r\tau'$, где $\tau' = \frac{\tau}{\tau-1}$. Тогда очевидно, что $\frac{1}{r\tau} = \frac{1-\theta}{p}$, а $\frac{1}{r\tau'} = \frac{\theta}{q}$. Учитывая полученное, имеем

$$\left\|I_\gamma^{\alpha\theta} f\right\|_{r,\gamma} \le C_7\left\|I_\gamma^{\alpha}|f|\right\|_{q,\gamma}^{\theta}\|M_\gamma f\|_{p,\gamma}^{1-\theta}.$$

Из последнего неравенства, оценки (19) и следствия 1 будем иметь

$$\left\|I_\gamma^{\alpha\theta} f\right\|_{r,\gamma} \le C_{10}\left\|I_\gamma^{\alpha}|f|\right\|_{q,\gamma}^{\theta}\|f\|_{p,\gamma}^{1-\theta}.$$

Теорема 3 доказана.

Далее рассмотрим модифицированный B-потенциал Рисса

$$\widetilde{I}_\gamma^{\alpha} f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_{n,+}^N}(T^y|x|^{\alpha-Q} - |y|^{\alpha-Q}\chi_{B*(0,1)}(y))f(y)(y')^\gamma\,dy,$$

где $B^*(0,1) = \mathbb{R}_{n,+}^N \backslash B(0,1)$.

Используя теоремы 1, 2, можно получить доказанную в [18] теорему Соболева для B-потенциала Рисса, а именно показать, что оператор I_γ^{α} является оператором сильного типа $(p,q)_\gamma$, $1 < p < Q/\alpha$, $1/p - 1/q = \alpha/Q$ и слабого типа $(1,q)_\gamma$, $1/q = 1 - \alpha/Q$ (в случае $N = n = 1$ см. [19], в случае $N \ge 2$, $n = 1$, см. [20], а в случае $N = n \ge 2$ см. [7, 21]).

Теорема 4. *Пусть $0 < \alpha < Q$, $1 \le p \le \frac{Q}{\alpha}$.*

(a) *Если $p = 1$, то условие $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{Q}$ является необходимым и достаточным для того, чтобы оператор I_γ^α действовал ограниченно из $L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$ в $WL_{q,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$.*

(b) *Если $1 < p < \frac{Q}{\alpha}$, то условие $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{Q}$ является необходимым и достаточным для того, чтобы оператор I_γ^α действовал ограниченно из $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$ в $L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$.*

(c) *Если $p = \frac{Q}{\alpha}$, $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$, $\|f\|_{L_{p,\gamma}} = 1$ и носитель функции f принадлежит шару $B(0,r)$, то*

$$\int\limits_{B(0,r)} \exp\left(\beta_0 \left|I_\gamma^\alpha f(x)\right|^{p'}\right)(x')^\gamma \, dx \le C_0 \omega(N,n,\gamma) r^Q,$$

где $\beta_0 = \omega(N,n,\gamma)^{-1}(pC_{\gamma,n})^{-p'}$, постоянная $C_0 = C_0(N,\alpha,\gamma)$ зависит только от N, α и γ.

(d) *Если $p = \frac{Q}{\alpha}$ и $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$, то $\widetilde{I}_\gamma^\alpha f \in BMO_\gamma(\mathbb{R}^N_{n,+})$ и*

$$\left\|\widetilde{I}_\gamma^\alpha f\right\|_{BMO_\gamma} \le C_{12}\|f\|_{p,\gamma},$$

где постоянная $C_{12} > 0$ не зависит от f.

Если же интеграл $I_\gamma^\alpha f$ почти всюду существует, то $I_\gamma^\alpha f \in BMO_\gamma(\mathbb{R}^N_{n,+})$ и справедливо неравенство

$$\left\|I_\gamma^\alpha f\right\|_{BMO_\gamma} \le C_{13}\|f\|_{p,\gamma},$$

где постоянная $C_{13} > 0$ не зависит от f.

Замечание 2. Части (a), (b) теоремы 4 разными методами доказаны в [22, 11, 14, 21] (см. также [18]). В случае $n = 1$ части (a), (b) теоремы 4 доказаны в [20], а в случае $n = N$ — в [7] (см. также [8]).

Доказательство. Сначала докажем часть (c). Обозначим $A = |B(0,r)|_\gamma$. Применяя лемму 1, аналог неравенства О'Нейла для обобщенных сверток, доказанную в [11, 14], и лемму 2, будем иметь

$$\begin{aligned}
\left(I_\gamma^\alpha f\right)_\gamma^*(t) &\le \left(I_\gamma^\alpha f\right)_\gamma^{**}(t) \\
&\le C_{\gamma,n}\left(f_\gamma^{**}(t)\int\limits_0^t (|\cdot|^{\alpha-N-\gamma})_\gamma^{**}(s)ds + \int\limits_t^\infty f_\gamma^*(s)(|\cdot|^{\alpha-N-\gamma})_\gamma^{**}(s)\,ds\right) \\
&= C_{\gamma,n}\left(f_\gamma^{**}(t)\int\limits_0^t \frac{Q}{\alpha}\left(\frac{\omega(N,n,\gamma)}{s}\right)^{\frac{Q-\alpha}{Q}} ds + \int\limits_t^A f_\gamma^*(s)\frac{Q}{\alpha}\left(\frac{\omega(N,n,\gamma)}{s}\right)^{\frac{Q-\alpha}{Q}} ds\right).
\end{aligned} \tag{35}$$

Учитывая, что $p = \frac{Q}{\alpha}$, $p' = \frac{p}{p-1} = \frac{Q}{Q-\alpha}$ и $\frac{1}{p'} = \frac{Q-\alpha}{Q}$, имеем

$$\left(I_\gamma^\alpha f\right)_\gamma^*(t) \le C_{\gamma,n} p\,\omega(N,n,\gamma)^{\frac{1}{p'}}\left(pt^{-\frac{1}{p'}}\int\limits_0^t f_\gamma^*(s)\,ds + \int\limits_t^A f_\gamma^*(s)s^{-\frac{1}{p'}}\,ds\right). \tag{36}$$

Пусть

$$a(s,t)=\begin{cases}1, & 0<s<t,\\ pe^{(t-s)/p'}, & t<s<\infty,\\ 0, & -\infty<s\le 0,\end{cases}\qquad \phi(s)=A^{1/p}f_\gamma^*(Ae^{-s})e^{-\frac{s}{p}}.$$

Тогда

$$\sup_{t>0}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}+\int\limits_{t}^{\infty}a(s,t)^{p'}\,ds\right)^{\frac{1}{p'}}=\sup_{t>0}\left(\int\limits_{t}^{\infty}(pe^{(t-s)/p'})^{p'}\,ds\right)^{\frac{1}{p'}}=p<\infty,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(s)^p\,ds=\int\limits_{-\infty}^{\infty}Af_\gamma^*(Ae^{-s})^pe^{-s}\,ds=\int\limits_{0}^{\infty}f_\gamma^*(t)^p\,dt$$
$$=\int\limits_{0}^{A}f_\gamma^*(t)^p\,dt=\int\limits_{B(0,r)}|f(x)|^p(x')^\gamma\,dx=1.$$

Так как $a(s,t)$ и $\phi(s)$ удовлетворяют условиям (3)–(5), по лемме 3 существует постоянная C_0, не зависящая от p, такая, что

$$\int\limits_{0}^{\infty}e^{-F(t)}\,dt\le C_0,$$

где $F(t)=t-\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}a(s,t)\phi(s)\,ds\right)^{p'}$. Подставляя значения $a(s,t)$ и $\phi(s)$, получим

$$F(t)=t-\left(\int\limits_{0}^{t}\phi(s)\,ds+\int\limits_{t}^{\infty}pe^{(t-s)/p'}\phi(s)\,ds\right)^{p'}=t-\left(\int\limits_{0}^{t}A^{1/p}f_\gamma^*(Ae^{-s}\right)e^{-\frac{s}{p}}\,ds$$
$$+\left(\int\limits_{t}^{\infty}pe^{(t-s)/p'}A^{1/p}f_\gamma^*(Ae^{-s})e^{-\frac{s}{p}}\,ds\right)^{p'}.$$

Делая замену переменных, имеем

$$F\left(\ln\frac{A}{t}\right)=\ln\frac{A}{t}-\left(\int\limits_{0}^{\ln\frac{A}{t}}A^{1/p}f_\gamma^*(Ae^{-s})e^{-\frac{s}{p}}\,ds\right.$$
$$\left.+\int\limits_{\ln\frac{A}{t}}^{\infty}pe^{(\ln\frac{A}{t}-s)/p'}A^{1/p}f_\gamma^*(Ae^{-s})e^{-\frac{s}{p}}\,ds\right)^{p'}=\ln\frac{A}{t}-(I_1+I_2)^{p'}.$$

Оценим I_1 и I_2:

$$I_1=\int\limits_{0}^{\ln\frac{A}{t}}A^{1/p}f_\gamma^*(Ae^{-s})e^{-\frac{s}{p}}\,ds=\int\limits_{t}^{A}f_\gamma^*(\tau)\tau^{-\frac{1}{p'}}\,d\tau,$$

$$I_2 = \int_{\ln\frac{A}{t}}^{\infty} p e^{(\ln\frac{A}{t}-s)/p'} A^{1/p} f_\gamma^*(Ae^{-s}) e^{-\frac{s}{p}}\, ds = \int_{\ln\frac{A}{t}}^{\infty} e^{\frac{\ln\frac{A}{t}}{p'}} e^{-\frac{s}{p'}} e^{-\frac{s}{p}} A^{1/p} f_\gamma^*(Ae^{-s})\, ds$$

$$= \int_{\ln\frac{A}{t}}^{\infty} pAt^{-\frac{1}{p'}} e^{-s} f_\gamma^*(Ae^{-s})\, ds = pt^{-\frac{1}{p'}} \int_0^t f_\gamma^*(\tau)\, d\tau.$$

Подставляя оценки для I_1 и I_2, имеем

$$F\left(\ln\frac{A}{t}\right) = \ln\frac{A}{t} - \left(pt^{-\frac{1}{p'}} \int_0^t f_\gamma^*(\tau)\, d\tau + \int_t^A f_\gamma^*(\tau)\tau^{-\frac{1}{p'}}\, d\tau\right)^{p'}. \qquad (37)$$

Комбинируя оценки (35)–(37), получим

$$C_0 \geq \int_0^\infty e^{-F(t)}\, dt = \int_0^A t^{-1} e^{-F(\ln\frac{A}{t})}\, dt$$

$$= \int_0^A t^{-1} \exp\left\{\left(pt^{-\frac{1}{p'}} \int_0^t f_\gamma^*(\tau)\, d\tau + \int_t^A f_\gamma^*(\tau)\tau^{-\frac{1}{p'}}\, d\tau\right)^{p'} - \ln\frac{A}{t}\right\} dt$$

$$= \frac{1}{A}\int_0^A \exp\left\{\left(pt^{-\frac{1}{p'}} \int_0^t f_\gamma^*(\tau)\, d\tau + \int_t^A f_\gamma^*(\tau)\tau^{-\frac{1}{p'}}\, d\tau\right)^{p'}\right\} dt$$

$$\geq \frac{1}{A}\int_0^A \exp\left\{\omega(N,n,\gamma)^{-1}\left[\frac{\left(I_\gamma^\alpha f\right)_\gamma^*(t)}{C_{\gamma,n}p}\right]^{p'}\right\} dt = \frac{1}{A}\int_{B(0,r)} \exp\left(\beta_0\left|I_\gamma^\alpha f(x)\right|^{p'}\right)(x')^\gamma\, dx.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{A}\int_{B(0,r)} \exp\left(\beta_0\left|I_\gamma^\alpha f(x)\right|^{p'}\right)(x')^\gamma\, dx \leq C_0.$$

П. (c) теоремы 4 доказан.

Отметим, что доказательство п. (d) теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 4 в работе [8].

Теорема 4 доказана.

Авторы искренне благодарят рецензентов за сделанные замечания, которые улучшили работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киприянов И. А., Кононенко В. И.* Фундаментальные решения для B-эллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 1. С. 114–129.
2. *Киприянов И. А., Иванов Л. А.* Получение фундаментальных решений для однородных уравнений с особенностями по нескольким переменным // Тр. семинара С. Л. Соболева. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1983. № 1. С. 55–77.
3. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука. Физматлит, 1997.
4. *Левитан Б. М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6, № 2. С. 102–143.

5. *Delsarte J.* Sur une extension de la formule of Taylor // J. Math. Pure Appl. 1938. V. 17, N 9. P. 219–231.
6. *Lions J.-L.* Operateurs de Delsarte of problems mixtes // Bull. Soc. Math. France. 1983. V. 26. P. 307–311.
7. *Гулиев В. С.* Теорема Соболева для B-потенциалов Рисса // Докл. РАН. 1998. Т. 358, № 4. С. 450–451.
8. *Guliev V. S.* On maximal function and fractional integral, associated with the Bessel differential operator // Math. Inequal. Appl. 2003. V. 6, N 2. P. 317–330.
9. *Киприянов И. А., Ключанцев М. И.* О сингулярных интегралах, порожденных оператором обобщенного сдвига. II // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11, № 5. С. 1060–1083.
10. *Edmunds D. E., Evans W. D.* Hardy operators, function spaces and embeddings. Berlin: Springer-Verl., 2004. (Springer Monogr. Math.).
11. *Guliyev V. S., Serbetci A., Ekincioglu I.* Necessary and sufficient conditions for the boundedness of rough B-fractional integral operators in the Lorentz spaces // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 336, N 1. P. 425–437.
12. *Stein E. M., Weiss G.* Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton: Princeton Univ. Press, 1971.
13. *Adams D. R., Hedberg L. I.* Function spaces and potential theory. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1996.
14. *Guliyev V. S., Serbetci A., Safarov Z. V.* Inequality of O'Neil-type for convolutions associated with the Laplace–Bessel differential operator and applications // Math. Inequal. Appl. 2008. V. 11, N 1. P. 99–112.
15. *Coifman R. R., Weiss G.* Analyse harmonique non commutative sur certains expaces homogenes. Berlin: Springer-Verl., 1971. (Lecture Notes in Math.; V. 242).
16. *Gatto A. E., Vagi S.* Fractional integrals on spaces of homogeneous type // Analysis and Partial Differential Equations. New York: Dekker, 1990. P. 171–216. (Lecture Notes Pure Appl. Math.; V. 122).
17. *Stempak K.* Almost everywhere summability of Laguerre series // Studia Math. 1991. V. 100, N 2. P. 129–147.
18. *Ляхов Л. Н.* Мультипликаторы смешанного преобразования Фурье — Бесселя // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1997. Т. 215. С. 234–249.
19. *Бродский А. Л.* Мультипликаторы преобразования Фурье — Бесселя и их приложения. Автореф. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов: Саратовский гос. университет, 1979.
20. *Гаджиев А. Д., Алиев И. А.* О классах операторов типа потенциала, порожденного обобщенным сдвигом // Докл. расширенных заседаний семинара Института прикладной математики им. И. Н. Векуа. Тбилисский гос. университет. 1988. Т. 3, № 2. С. 21–24.
21. *Ляхов Л. Н.* Обращение B-потенциалов Рисса // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321, № 3. С. 466–469.
22. *Garakhanova N. N.* Sobolev type theorems for $B_{k,n}$-Riesz potentials // Proc. of Inst. Math. Mech. of Azerbaijan AS. 2001. V. 15. P. 52–61.

Статья поступила 27 октября 2005 г., окончательный вариант — 22 апреля 2008 г.

Гулиев Вагиф Сабир оглы, Гараханова Наргиз Наваи кызы
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
ул. Ф. Агаева, 9, Баку Az-1141, Азербайджан
vagif@guliyev.com, nargizqarakhanova@yahoo.com

Зерен Юсуф
Университет Харран, Урфа, Турция
yusufzeren@hotmail.com