Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 517.984

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА НЕГЛАДКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Э. Ф. Ахмерова

Аннотация. Получена асимптотика спектра негладкого возмущения одномерного гармонического осциллятора. Используется аппарат теории возмущений, основанный на асимптотическом представлении части ядра резольвенты невозмущенного оператора в некоторой окрестности каждого из собственных чисел. Аналогичные вопросы будут рассмотрены ниже в подобных ситуациях.

Ключевые слова: гармонический осциллятор, асимптотика спектра, негладкое возмущение.

Рассмотрим оператор $H = H^0 + V$ в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, где $H^0 = -d^2/dx^2 + x^2$, V — оператор умножения на вещественную измеримую убывающую на бесконечности функцию. Как известно (см., например, [1, гл. 5, § 4, с. 326]), спектр оператора H^0 состоит из чисел $2n+1$, а соответствующие нормированные собственные функции суть $\varphi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}/\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $H_n(x)$ — многочлены Чебышева — Эрмита. Асимптотика собственных чисел возмущенного оператора $H = H^0 + V$ для гладких убывающих на бесконечности функций впервые подробно изучена в [2], где использовано эталонное решение с помощью функций Эйри [3, гл. 11, § 1, с. 377]. Так как $V(x)$ не предполагается гладкой, мы не можем непосредственно применить технику эталонных решений к функции $q(x) = x^2 + V(x)$. В данной работе используем аппарат теории возмущений, основанный на изучении асимптотического представления ядра резольвенты невозмущенного оператора.

Обозначим через λ_n собственные значения оператора H^0, через P_n — соответствующие проекторы на собственные подпространства, а через $R^0(\lambda)$ — резольвенту оператора H^0, $R^0(\lambda) = (H^0 - \lambda)^{-1}$. Согласно [4] если V удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\lambda-\lambda_n|\le 1/2} \left\| R_n^0(\lambda)V \right\| = 0, \tag{1}$$

где $R_n^0(\lambda) = R^0(\lambda) - (\lambda_n - \lambda)^{-1}P_n$, то спектр оператора $H = H^0 + V$ определяется из уравнения

$$\lambda = \lambda_n + (V\varphi_n, \varphi_n) - (VR_n(\lambda)V\varphi_n, \varphi_n). \tag{2}$$

Здесь $(.,.)$ — скалярное произведение в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, φ_n — нормированный собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_n,

$$R_n(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[R_n^0(\lambda)V\right]^m R_n^0(\lambda). \tag{3}$$

Таким образом, задача асимптотического разложения собственных значений возмущенного оператора $H = H^0 + V$ сводится к исследованию поведения части $R_n^0(\lambda)$ резольвенты невозмущенного оператора H^0 в окрестности $\lambda = \lambda_n$.

В $L^2(0,\infty)$ рассмотрим операторы $L_D^+ u = -u'' + x^2 u$, $u(0) = 0$ и $L_N^+ u = -u'' + x^2 u$, $u'(0) = 0$. Тогда спектр L_D^+ состоит из чисел $\lambda_n = 4n+3$, а оператор L_N^+ имеет собственные значения $\lambda_n = 4n+1$, $n \geq 0$. В п. 1 показано, что для изучения $R_n^0(\lambda)$ достаточно изучить резольвенты $B_D^+(\lambda)$ и $B_N^+(\lambda)$, соответствующие операторам задач Дирихле и Неймана в $L^2(0,\infty)$. В п. 2 получены представления ядер $B_D^+(x,t,\lambda)$ и $B_N^+(x,t,\lambda)$ указанных резольвент, в п. 3 дано асимптотическое представление части ядра резольвенты гармонического осциллятора в окрестности собственных чисел. На этой основе с использованием методов теории возмущений доказывается теорема об асимптотическом представлении спектра возмущенного гармонического осциллятора.

1. Представим оператор H^0 в виде

$$H^0 = H_D^0 \oplus H_N^0, \tag{4}$$

где H_D^0 и H_N^0 — сужения H^0 на инвариантные подпространства соответственно нечетных и четных функций из $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Далее, операторы H_D^0 и H_N^0, в свою очередь, разлагаются в прямые суммы

$$H_D^0 = L_D^- \oplus L_D^+, \quad H_N^0 = L_N^- \oplus L_N^+, \tag{5}$$

где

$$L_D^\pm = H_D^0|_{\mathbf{H}^\pm}, \quad L_N^\pm = H_N^0|_{\mathbf{H}^\pm}, \quad H^\pm = \{y \in \mathbf{H} : y(\mp x) = 0, x > 0\}.$$

Замечание 1. Ясно, что $\mathbf{H}^\pm$ изоморфно $(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^\pm))$. Поэтому операторы $L_D^\pm$ и $L_N^\pm$ унитарно эквивалентны операторам задач Дирихле и Неймана для гармонического осциллятора на полуосях $\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{R}^-$ соответственно. Именно поэтому мы употребляем обозначения H_D^0 и H_N^0. Тогда спектры операторов H_D^0 и H_N^0 суть $\{\lambda_{2k+1}\}_{k=0}^\infty$ и $\{\lambda_{2k}\}_{k=0}^\infty$ соответственно.

Пусть $R^0(\lambda)$, $R_D^0(\lambda)$, $R_N^0(\lambda)$ — резольвенты операторов H^0, H_D^0 и H_N^0. Из соотношения (4) имеем

$$R^0(\lambda) = R_D^0(\lambda) \oplus R_N^0(\lambda). \tag{6}$$

Для ядер указанных резольвент справедливы разложения

$$R^0(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{2n+1-\lambda}, \tag{7}$$

$$R_D^0(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi_{2n+1}(x)\varphi_{2n+1}(t)}{4n+3-\lambda}, \tag{8}$$

$$R_N^0(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi_{2n}(x)\varphi_{2n}(t)}{4n+1-\lambda}. \tag{9}$$

Отсюда в силу соотношений $\varphi_n(-x) = (-1)^n \varphi_n(x)$ получим

$$R_D^0(-x,t,\lambda) = -R_D^0(x,t,\lambda) = R_D^0(x,-t,\lambda), \tag{10}$$

$$R_N^0(-x,t,\lambda) = R_N^0(x,t,\lambda) = R_N^0(x,-t,\lambda) \tag{11}$$

для всех $x, t \in \mathbb{R}$ и $\lambda \neq 2n+1$.

Таким образом, для изучения ядра $R^0(x,t,\lambda)$ оператора $R^0(\lambda)$ при $x \in (-\infty,\infty)$, $t \in (-\infty,\infty)$ достаточно изучить ядра $R^0_D(x,t,\lambda)$ и $R^0_N(x,t,\lambda)$ при $x \geq 0$, $t \geq 0$. Для этого последнее удобнее связать с ядрами $B^{\pm}_D(x,t,\lambda)$ и $B^{\pm}_N(x,t,\lambda)$ резольвент $B^{\pm}_D(\lambda)$ и $B^{\pm}_N(\lambda)$ операторов $L^{\pm}_D$ и $L^{\pm}_N$. Из формулы (5) имеем

$$R^0_D(\lambda) = B^-_D(\lambda) \oplus B^+_D(\lambda). \tag{12}$$

Пусть f — произвольная нечетная функция из $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Тогда $f = f^- + f^+$, где $f^{\pm} = f\chi_{\mathbb{R}^{\pm}}(x)$, $\chi_{\mathbb{R}^{\pm}}(x)$ — характеристическая функция полуосей $\mathbb{R}^{\pm}$. Из (12) будем иметь $R^0_D(\lambda)f = B^-_D(\lambda)f^- \oplus B^+_D(\lambda)f^+$, поэтому

$$\big[R^0_D(\lambda)f\big](x) = \int\limits_{-\infty}^{0} B^-_D(x,t,\lambda)f^-(t)\,dt + \int\limits_{0}^{\infty} B^+_D(x,t,\lambda)f^+(t)\,dt, \tag{13}$$

причем $B^{\pm}_D(\mp x,t,\lambda) = 0$ для любых $x \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ и $\lambda \neq 4n+3$. С другой стороны,

$$\big[R^0_D(\lambda)f\big](x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R^0_D(x,t,\lambda)f(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{0} R^0_D(x,t,\lambda)f^-(t)\,dt + \int\limits_{0}^{\infty} R^0_D(x,t,\lambda)f^+(t)\,dt.$$

Отсюда, используя представление $R^0_D(x,t,\lambda) = R^{0-}_D(x,t,\lambda) + R^{0+}_D(x,t,\lambda)$, где $R^{0\pm}_D(x,t,\lambda) = R^0_D(x,t,\lambda)\chi_{\mathbb{R}^{\pm}}(x)$, и учитывая нечетность функций $f(t)$, $R^0_D(x,t,\lambda)$ по x и t, получим

$$\big[R^0_D(\lambda)f\big](x) = 2\int\limits_{-\infty}^{0} R^{0-}_D(x,t,\lambda)f^-(t)\,dt + 2\int\limits_{0}^{\infty} R^{0+}_D(x,t,\lambda)f^+(t)\,dt.$$

Сравнивая это выражение с (13), имеем $B^{\pm}_D(x,t,\lambda) = 2R^{0\pm}_D(x,t,\lambda)$. Аналогично доказывается, что $B^{\pm}_N(x,t,\lambda) = 2R^{0\pm}_N(x,t,\lambda)$. Отсюда получаем нужные для дальнейшего соотношения

$$R^0_D(x,t,\lambda) = \frac{1}{2}B^+_D(x,t,\lambda), \quad R^0_N(x,t,\lambda) = \frac{1}{2}B^+_N(x,t,\lambda), \quad x,t \geq 0. \tag{14}$$

Пусть $R^0_n(x,t,\lambda)$ — ядро резольвенты $R^0_n(\lambda)$. Из определения $R^0_n(\lambda)$ следует, что

$$R^0_n(x,t,\lambda) = R^0(x,t,\lambda) - \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{2n+1-\lambda}.$$

Отсюда согласно (6)–(9) и (14) при $x,t \geq 0$ будем иметь

$$R^0_n(x,t,\lambda) = \frac{1}{2}\begin{cases} B^+_N(x,t,\lambda) + B^+_{Dn}(x,t,\lambda), & n \text{ нечетное;} \\ B^+_D(x,t,\lambda) + B^+_{Nn}(x,t,\lambda), & n \text{ четное,} \end{cases} \tag{15}$$

где

$$B^+_{Dn}(x,t,\lambda) = B^+_D(x,t,\lambda) - \frac{2\varphi_{2n+1}(t)\varphi_{2n+1}(x)}{4n+3-\lambda}, \tag{16}$$

$$B^+_{Nn}(x,t,\lambda) = B^+_N(x,t,\lambda) - \frac{2\varphi_{2n}(t)\varphi_{2n}(x)}{4n+1-\lambda}. \tag{17}$$

Таким образом, чтобы исследовать поведение части $R^0_n(\lambda)$ резольвенты $R^0(\lambda)$ в окрестности $\lambda = \lambda_n$, нужно изучить поведение ядер $B^+_{Dn}(x,t,\lambda)$ и $B^+_{Nn}(x,t,\lambda)$ в некоторой окрестности каждого из чисел $\lambda = \lambda_{2n+1}$ и $\lambda = \lambda_{2n}$ соответственно.

2. Получим представления для ядер $B_D^+(x,t,\lambda)$, $B_N^+(x,t,\lambda)$ резольвент $B_D^+(\lambda)$ и $B_N^+(\lambda)$. Начнем с изучения $B_D^+(x,t,\lambda)$. Построим линейно независимые решения $y_k(x,\lambda)$, $k=1,2$, уравнения

$$-y''(x)+x^2y(x)=\lambda y(x), \tag{18}$$

где $y_1(x,\lambda)\in L^2(0,\infty)$. Для этого, следуя работам [2, 5], применим метод эталонных решений. Введем обозначения при $x\geq 0$, $\lambda>0$:

$$\xi(x,\lambda)=\left(\frac{3}{2}\int\limits_{\sqrt{\lambda}}^{x}|t^2-\lambda|^{\frac12}\,dt\right)^{\frac23}\operatorname{sgn}(x-\sqrt{\lambda}),$$

$$S(x,\lambda)=|\xi'(x,\lambda)|^{-\frac12},\quad K(x,\lambda)=S''(x,\lambda)S^{-1}(x,\lambda)|x^2-\lambda|^{-\frac12},$$

$$\widetilde{Q}(x,\lambda)=\begin{cases} Q(x,\lambda)=\int\limits_{x}^{\sqrt{\lambda}}(\lambda-t^2)^{\frac12}\,dt & \text{при } 0\leq x\leq\sqrt{\lambda},\\ Q_1(x,\lambda)=\int\limits_{\sqrt{\lambda}}^{x}(t^2-\lambda)^{\frac12}\,dt & \text{при } x>\sqrt{\lambda}.\end{cases}$$

В качестве эталонных решений возьмем функции

$$z_1(x,\lambda)=S(x,\lambda)Ai(\xi(x,\lambda)),\quad z_2(x,\lambda)=S(x,\lambda)Bi(\xi(x,\lambda)),$$

где $Ai(\xi)$, $Bi(\xi)$ — вещественные функции Эйри. Соответствующие интегральные уравнения указанного метода имеют вид

$$y_1(x,\lambda)=z_1(x,\lambda)+\int\limits_{x}^{\infty}H(x,t,\lambda)y_1(t,\lambda)\,dt, \tag{19}$$

$$y_2(x,\lambda)=z_2(x,\lambda)-\int\limits_{0}^{x}H(x,t,\lambda)y_2(t,\lambda)\,dt, \tag{20}$$

где $H(x,t,\lambda)=\{z_1(x,\lambda)z_2(t,\lambda)-z_1(t,\lambda)z_2(x,\lambda)\}S''(t,\lambda)S^{-1}(t,\lambda)$.

Введем вспомогательные функции

$$\widehat{Q}_1(x,\lambda)=\begin{cases}0, & 0\leq x\leq\sqrt{\lambda},\\ Q_1(x,\lambda), & x>\sqrt{\lambda},\end{cases} \tag{21}$$

$$v_k(x,\lambda)=|\lambda-x^2|^{\frac14}z_k(x,\lambda)\exp[(-1)^{k+1}\widehat{Q}_1(x,\lambda)],\quad k=1,2, \tag{22}$$

$$\psi_k(x,\lambda)=|\lambda-x^2|^{\frac14}y_k(x,\lambda)\exp[(-1)^{k+1}\widehat{Q}_1(x,\lambda)],\quad k=1,2. \tag{23}$$

Тогда, из формул (19)–(23) следует, что функции $\psi_k(x,\lambda)$, $k=1,2$, удовлетворяют уравнениям

$$\psi_1(x,\lambda)=v_1(x,\lambda)+\int\limits_{x}^{\infty}M_1(x,t,\lambda)\psi_1(t,\lambda)\,dt, \tag{24}$$

$$\psi_2(x,\lambda)=v_2(x,\lambda)+\int\limits_{0}^{x}M_2(x,t,\lambda)\psi_2(t,\lambda)\,dt, \tag{25}$$

где ядра M_k, $k=1,2$, имеют вид

$$M_1(x,t,\lambda)=\{v_1(x,\lambda)v_2(t,\lambda)-v_1(t,\lambda)v_2(x,\lambda)e^{2\widehat{Q}_1(x,\lambda)-2\widehat{Q}_1(t,\lambda)}\}K(t,\lambda),$$

$$M_2(x,t,\lambda)=\{v_2(x,\lambda)v_1(t,\lambda)-v_1(x,\lambda)v_2(t,\lambda)e^{2\widehat{Q}_1(t,\lambda)-2\widehat{Q}_1(x,\lambda)}\}K(t,\lambda).$$

Уравнения (24) и (25) рассматриваются в пространстве $\mathbf{C}(0,\infty)$, где норма определяется равенством $\|f\|_{\mathbf{C}}=\sup\limits_{x\geq 0}|f(x)|$, операторы $M_1(\lambda)$ и $M_2(\lambda)$ имеют вид

$$[M_1(\lambda)f](x)=\int\limits_x^\infty M_1(x,t,\lambda)f(t)\,dt,\quad [M_2(\lambda)f](x)=\int\limits_0^x M_2(x,t,\lambda)f(t)\,dt.$$

Из рассуждений работ [2, 5] следует, что $M_k(\lambda)$, $k=1,2$, — вольтерровы операторы, а для норм справедлива оценка

$$\|M_k(\lambda)\|\leq C(\lambda+1)^{-1}. \tag{26}$$

Замечание 2. В дальнейшем через C, C_0, $C_1,\dots$ будем обозначать любые положительные постоянные.

Лемма 1. *Функции $\psi_k(x,\lambda)$, $k=1,2$, представляются в виде*

$$\psi_k(x,\lambda)=v_k(x,\lambda)+v_k^{(1)}(x,\lambda),$$

где $\sup\limits_{x\geq 0,\lambda>0}|v_k(x,\lambda)|\leq C_0$, $\sup\limits_{x\geq 0,\lambda>0}(\lambda+1)\bigl|v_k^{(1)}(x,\lambda)\bigr|\leq C_1$.

Доказательство. Из формулы (22) и определений функций Эйри следует, что функции $v_k(x,\lambda)$, $k=1,2$, имеют вид

$$v_1(x,\lambda)\equiv\gamma_1(\widetilde{Q}(x,\lambda))=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{Q_1(x,\lambda)}{2}}e^{Q_1(x,\lambda)}K_{1/3}(Q_1(x,\lambda)), & x\geq\sqrt{\lambda},\\ \sqrt{\frac{Q(x,\lambda)}{6}}[J_{1/3}(Q(x,\lambda))+J_{-1/3}(Q(x,\lambda))], & x<\sqrt{\lambda},\end{cases}$$

$$v_2(x,\lambda)\equiv\gamma_2(\widetilde{Q}(x,\lambda))=\begin{cases}\sqrt{\frac{Q_1(x,\lambda)}{2}}e^{-Q_1(x,\lambda)}[I_{1/3}(Q_1(x,\lambda))+I_{-1/3}(Q_1(x,\lambda))],\\ \qquad x\geq\sqrt{\lambda},\\ \sqrt{\frac{Q(x,\lambda)}{2}}[J_{-1/3}(Q(x,\lambda))-J_{1/3}(Q(x,\lambda))],\\ \qquad x<\sqrt{\lambda},\end{cases}$$

где $I_\nu(z)$, $J_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — функции Бесселя. Из асимптотических формул функций $I_\nu(z)$, $J_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ при больших z, $|z|>N$, где N — достаточно большое число (см. [6, § 5.11, с. 171, 172]), имеем

$$\gamma_k(\widetilde{Q}(x,\lambda))=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}+O\bigl(Q_1^{-1}(x,\lambda)\bigr) & \text{при } Q_1(x,\lambda)\to+\infty,\\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\bigl(Q(x,\lambda)+(-1)^k\frac{\pi}{4}\bigr)+O(Q^{-1}(x,\lambda)) & \text{при } Q(x,\lambda)\to+\infty,\end{cases} \tag{27}$$

а при $\widetilde{Q}(x,\lambda)\to 0$ получим

$$\gamma_k(\widetilde{Q}(x,\lambda))=\frac{1}{\sqrt{2+(-1)^{k-1}}}\left(\frac{\widetilde{Q}(x,\lambda)}{2}\right)^{1/6}$$
$$\times\left[\frac{1}{\Gamma\bigl(\frac{4}{3}\bigr)}+\frac{(-1)^k}{\Gamma\bigl(\frac{2}{3}\bigr)}\left(\frac{\widetilde{Q}(x,\lambda)}{2}\right)^{2/3}\operatorname{sgn}(x-\sqrt{\lambda})\right]+O(\widetilde{Q}(x,\lambda))^{13/6},\quad k=1,2. \tag{28}$$

Из формул (27) и (28) будем иметь $\sup\limits_{x\geq 0,\lambda>0}|v_k(x,\lambda)|\leq C_0$. Отсюда и из соотношений (24)–(26) вытекает, что $\psi_k=\psi_k(x,\lambda)$ при $\lambda\gg 1$ представляются через $v_k=v_k(x,\lambda)$ в виде ряда Неймана

$$\psi_k=[I-M_k(\lambda)]^{-1}v_k=\sum_{m=0}^{\infty}M_k^m(\lambda)v_k.$$

Из последнего представления и формулы (26) следует оценка $\|v_k^{(1)}\|_{\mathbf{C}}\leq C(\lambda+1)^{-1}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *При достаточно больших λ, $\lambda\gg 1$, и $x\geq 0$ функции $y_k(x,\lambda)$, $k=1,2$, и $\partial y_1(x,\lambda)/\partial\lambda$ представляются в виде*

$$y_k(x,\lambda)=z_k(x,\lambda)\big(1+z_k^{(1)}(x,\lambda)\big),\tag{29}$$

$$\frac{\partial y_1(x,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\partial z_1(x,\lambda)}{\partial\lambda}\big(1+z_1^{(2)}(x,\lambda)\big),\tag{30}$$

причем функции $z_k(x,\lambda)$, $z_k^{(1)}(x,\lambda)$, $z_1^{(2)}(x,\lambda)$, $\partial z_1(x,\lambda)/\partial\lambda$, где $k=1,2$, удовлетворяют оценкам

$$|z_k(x,\lambda)|\leq\frac{Ce^{(-1)^k\widehat{Q}_1(x,\lambda)}}{|x^2-\lambda|^{1/4}+\lambda^{1/12}},\quad\left|\frac{\partial z_1(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right|\leq\frac{Ce^{-\widehat{Q}_1(x,\lambda)}(\widetilde{Q}(x,\lambda)+1)}{\lambda(\lambda^{1/12}+|\lambda-x^2|^{1/4})},$$

$$\sup_{x\geq 0,\lambda>1}\big|z_1^{(2)}(x,\lambda)\big|\leq C\lambda^{-1},\qquad\sup_{x\geq 0,\lambda>1}\big|z_k^{(1)}(x,\lambda)\big|\leq C\lambda^{-1}.$$

Доказательство. Формула (29) непосредственно следует из соотношений (22), (23) и леммы 1. При этом оценку функции $z_k(z,\lambda)$ при $|\sqrt{\lambda}-x|>\varepsilon$ нетрудно получить из равенства (22) и леммы 1. При $|x-\sqrt{\lambda}|\leq\varepsilon$ функция $\widetilde{Q}(x,\lambda)$ представляется в виде

$$\widetilde{Q}(x,\lambda)=\frac{1}{3\sqrt{\lambda}}\left|\lambda-x^2\right|^{3/2}+O(|\lambda-x^2|^{5/2}\lambda^{-3/2}).$$

Поэтому из формулы (28) при $|\sqrt{\lambda}-x|\leq C\lambda^{-1/6}$ имеем

$$\gamma_k(\widetilde{Q}(x,\lambda))=O\left(\frac{|\lambda-x^2|^{1/4}}{\lambda^{1/12}}\right).$$

Отсюда и из равенства (22) при $|\sqrt{\lambda}-x|\leq C\lambda^{-1/6}$ получим оценку $z_k(x,\lambda)$. Покажем, что верна формула (30). Для этого удобнее сделать замену переменной $x=\sqrt{\lambda}s$ и ввести обозначения

$$\tilde{y}_1(s,\lambda)=y_1(\sqrt{\lambda}s,\lambda),\quad\tilde{z}_1(s,\lambda)=z_1(\sqrt{\lambda}s,\lambda),\quad k=1,2.$$

Тогда нетрудно получить, что

$$\frac{\partial y_1(x,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\partial\tilde{y}_1\big(\frac{x}{\sqrt{\lambda}},\lambda\big)}{\partial\lambda}-\frac{x}{2\lambda}\frac{\partial y_1(x,\lambda)}{\partial x},\tag{31}$$

$$\frac{\partial z_k(x,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\partial\tilde{z}_k\big(\frac{x}{\sqrt{\lambda}},\lambda\big)}{\partial\lambda}-\frac{x}{2\lambda}\frac{\partial z_k(x,\lambda)}{\partial x},\quad k=1,2.\tag{31$'$}$$

Из соотношений (19), (21)–(23), учитывая обозначение $v_k(x,\lambda) = \gamma_k(\widetilde{Q}(x,\lambda))$, получим

$$y_1(x,\lambda) = z_1(x,\lambda) + z_1(x,\lambda)\int\limits_x^\infty \gamma_2(\widetilde{Q}(t,\lambda))\psi_1(t,\lambda)K(t,\lambda)\,dt \\ - z_2(x,\lambda)\int\limits_x^\infty \gamma_1(\widetilde{Q}(t,\lambda))\psi_1(t,\lambda)K(t,\lambda)e^{-2\widehat{Q}_1(t,\lambda)}\,dt. \quad (32)$$

Для нахождения производной $\partial\tilde{y}_1(s,\lambda)/\partial\lambda$ сделаем замену переменной $x = \sqrt{\lambda}s$, $t = \sqrt{\lambda}\tau$ в формуле (32). Заметим, что $K(t,\lambda) = \lambda^{-3/2}K(\tau,1)$, $\widetilde{Q}(t,\lambda) = \lambda\widetilde{Q}(\tau,1)$, поэтому нахождение производной заметно облегчается. После нахождения производной возникают выражения $\gamma_k'(\lambda\widetilde{Q}(\tau,1))$, $\tilde{\psi}_1(\tau,\lambda)/\partial\lambda \equiv \psi_1(\sqrt{\lambda}\tau,\lambda)/\partial\lambda$. Последнее также содержит функции $\gamma_k'(\lambda\widetilde{Q}(\tau,1))$. Используя рекуррентные соотношения цилиндрических функций с производными этих функций, нетрудно получить асимптотику $\gamma_k'(\widetilde{Q}(x,\lambda))$, $k=1,2$:

$$\gamma_k'(\widetilde{Q}(x,\lambda)) \\ = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{\pi}Q_1(x,\lambda)} + O\big(Q_1^{-2}(x,\lambda)\big) & \text{при } Q_1(x,\lambda)\to+\infty, \\ -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\left(Q(x,\lambda) + (-1)^k\frac{\pi}{4}\right) + O\left(Q^{-1}(x,\lambda)\right) & \text{при } Q(x,\lambda)\to+\infty. \end{cases} \quad (33)$$

При $\widetilde{Q}(x,\lambda)\to 0$ имеем

$$\gamma_k'(\widetilde{Q}(x,\lambda)) = \frac{1}{12\sqrt{2+(-1)^{k-1}}}\left(\frac{\widetilde{Q}(x,\lambda)}{2}\right)^{-1/6}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\left(\frac{\widetilde{Q}(x,\lambda)}{2}\right)^{-2/3} \right.\\ \left. + \frac{(-1)^k}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\operatorname{sgn}(x-\sqrt{\lambda})\right] + O(\widetilde{Q}(x,\lambda))^{7/6}, \quad k=1,2. \quad (34)$$

Замечание 3. Здесь $\gamma_k'(\widetilde{Q}) = \partial\gamma_k(\widetilde{Q})/\partial\widetilde{Q}$.

Рассуждая, как в доказательстве леммы 1, с помощью формул (33), (34) нетрудно показать, что $|\partial\tilde{\psi}_1(\tau,\lambda)/\partial\lambda| \le C$. Из рассуждений работы [2] имеем $\int\limits_0^\infty |K(\tau,1)|d\tau \le C_0$. Поэтому из формул (31), (31′) легко получить представление (30). Производя замену переменной в формуле (22), а затем дифференцируя, из асимптотических формул (27), (28), (33), (34) получим

$$\left|\frac{\partial\tilde{z}_k(s,\lambda)}{\partial\lambda}\right| \le \frac{C(\widetilde{Q}(s,1)+1)e^{(-1)^k\lambda\widehat{Q}_1(s,1)}}{\lambda^{13/12}+\lambda^{1/4}|1-s^2|^{1/4}}. \quad (35)$$

Дифференцируя соотношение (22) по x и пользуясь асимптотическими формулами (27), (28), (33), (34), после несложных вычислений придем к оценке

$$\left|\frac{\partial z_k(x,\lambda)}{\partial x}\right| \le \frac{C(|x^2-\lambda|^{1/4}+1)e^{(-1)^k\widehat{Q}_1(x,\lambda)}}{\lambda^{7/12}+1}. \quad (36)$$

Теперь из формул (31′), (35), (36) получим утверждение леммы.

Пусть $u(x,\lambda) = \left[B_D^+(\lambda)h\right](x)$, где $\lambda \ne 4n+3$, $n \ge 0$, $h(x) \in L^2(0,\infty)$. Тогда $u(x,\lambda)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$-u''(x) + x^2u(x) - \lambda u(x) = h(x) \quad (37)$$

и условиям

$$u(0,\lambda) = 0, \quad u(x,\lambda) \in L^2(0,\infty). \tag{38}$$

Введем ядро

$$G(x,t,\lambda) = \frac{1}{W(\lambda)} \begin{cases} y_1(x,\lambda)y_2(t,\lambda), & 0 \le t \le x < \infty, \\ y_1(t,\lambda)y_2(x,\lambda), & 0 \le x < t < \infty, \end{cases}$$

где $W(\lambda) = y_1(x,\lambda)y_2'(x,\lambda) - y_1'(x,\lambda)y_2(x,\lambda)$.

Лемма 3. *Функция* $w(x,\lambda) = \int\limits_0^\infty G(x,t,\lambda)h(t)\,dt$ *удовлетворяет уравнению* (37) *и условию* $w(x,\lambda) \in L^2(0,\infty)$.

Доказательство. То, что $w(x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению (37), проверяется непосредственно. Из формулы (23) и леммы 1, воспользовавшись асимптотическими формулами (27), (28), (33), (34), нетрудно получить, что при $\lambda \gg 1$

$$W(\lambda) = y_1(0,\lambda)y_2'(0,\lambda) - y_1'(0,\lambda)y_2(0,\lambda) = 1/\pi + O(1/\lambda). \tag{39}$$

Докажем, что $w(x,\lambda) \in L^2(0,\infty)$. Имеем

$$|w(x,\lambda)|^2 \le \Phi(x,\lambda) \int\limits_0^\infty |G(x,t,\lambda)||h(t)|^2\,dt, \tag{40}$$

где $\Phi(x,\lambda) = \int\limits_0^\infty |G(x,t,\lambda)|\,dt$. Достаточно доказать, что для любого $\lambda > 0$

$$\Phi_0(\lambda) = \sup_{x\ge 0} |\Phi(x,\lambda)| < C < \infty, \tag{41}$$

так как отсюда и из (40) будет следовать, что

$$\int\limits_0^\infty |w(x,\lambda)|^2\,dx \le \Phi_0(\lambda) \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty |G(x,t,\lambda)||h(t)|^2\,dtdx \le \Phi_0^2(\lambda)\|h\|^2.$$

Оценка (41) вытекает из леммы 2 и неравенства $|W(\lambda)| \ge C > 0$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Ядра* $B_D^+(x,t,\lambda)$ *и* $B_{Dn}^+(x,t,\lambda)$ *резольвент* $B_D^+(\lambda)$ *и* $B_{Dn}^+(\lambda)$ *соответственно имеют вид*

$$B_D^+(x,t,\lambda) = G(x,t,\lambda) - \frac{y_2(0,\lambda)}{W(\lambda)y_1(0,\lambda)} y_1(x,\lambda)y_1(t,\lambda), \tag{42}$$

$$\begin{aligned} B_{Dn}^+(x,t,\lambda) = G(x,t,\lambda) &- \frac{y_2(0,\lambda)y_1(x,\lambda)y_1(t,\lambda)}{W(\lambda)y_1(0,\lambda)} \\ &- \frac{y_2(0,4n+3)y_1(x,4n+3)y_1(t,4n+3)}{(4n+3-\lambda)W(4n+3)(y_1)'_\lambda(0,4n+3)}. \end{aligned} \tag{43}$$

Доказательство. Поскольку функции $u(x,\lambda)$ и $w(x,\lambda)$ удовлетворяют неоднородному уравнению (37) и принадлежат $L^2(0,\infty)$, их разность $f(x,\lambda) = u(x,\lambda) - w(x,\lambda)$ удовлетворяет однородному уравнению (18) и принадлежит

$L^2(0,\infty)$. Следовательно, $f(x,\lambda) = Ay_1(x,\lambda)$, где A — некоторая постоянная. Найдем ее из условия $u(0,\lambda) = 0$:

$$A = -\frac{y_2(0,\lambda)}{W(\lambda)y_1(0,\lambda)} \int\limits_0^\infty y_1(t,\lambda)h(t)dt.$$

Поскольку $u(x,\lambda) = f(x,\lambda) + w(x,\lambda)$, подставляя значения этих функций, получим равенство (42). С другой стороны, по определению имеем

$$B_D^+(x,t,\lambda) = 2\sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi_{2n+1}(x)\varphi_{2n+1}(t)}{4n+3-\lambda}.$$

Отсюда, так как функция $G(x,t,\lambda)$ при $\lambda \to 4n+3$ особенностей не имеет, из формулы (42) явствует, что

$$\begin{aligned} 2\varphi_{2n+1}(x)\varphi_{2n+1}(t) &= \lim_{\lambda\to 4n+3}(4n+3-\lambda)B_D^+(x,t,\lambda) \\ &= -\frac{y_2(0,4n+3)y_1(x,4n+3)y_1(t,4n+3)}{W(4n+3)(y_1)'_\lambda(0,4n+3)}. \end{aligned} \tag{44}$$

Из формул (44) и (16) легко получить (43). Теорема доказана.

Замечание 4. Такие же представления имеют ядра $B_N^+(x,t,\lambda)$, $B_{Nn}^+(x,t,\lambda)$ с тем отличием, что вместо отношения $y_2(0,\lambda)/y_1(0,\lambda)$ будет $y_2'(0,\lambda)/y_1'(0,\lambda)$, $4n+3$ заменится на $4n+1$ и вместо $(y_1)'_\lambda(0,\lambda_n)$ будем иметь $(y_1)''_{x\lambda}(0,\lambda_n)$.

3. Получим теперь асимптотику спектра возмущенного оператора. Для этого представим ядра $B_D^+(x,t,\lambda)$, $B_{Nn}^+(x,t,\lambda)$ в окрестности $\lambda_{2n} = 4n+1$ и $B_N^+(x,t,\lambda)$, $B_{Dn}^+(x,t,\lambda)$ в окрестности $\lambda_{2n+1} = 4n+3$. Из формулы (22) и асимптотических формул (27), (28), (33), (34) (поскольку по обозначению $v_k(x,\lambda) \equiv \gamma_k(\widetilde{Q}(x,\lambda))$) нетрудно получить асимптотические формулы для функций $z_k(x,\lambda)$, $\partial z_k(x,\lambda)/\partial\lambda$, $k=1,2$. Имеем

$$z_k(x,\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}(x^2-\lambda)^{1/4}} e^{(-1)^k Q_1(x,\lambda)}\bigl[1 + O\bigl(Q_1^{-1}(x,\lambda)\bigr)\bigr] \\ \qquad\qquad \text{при } Q_1(x,\lambda) \to +\infty, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}(\lambda-x^2)^{1/4}} \cos\bigl(Q(x,\lambda) + (-1)^k\frac{\pi}{4}\bigr) + O(Q^{-1}(x,\lambda)) \\ \qquad\qquad \text{при } Q(x,\lambda) \to +\infty, \end{cases} \tag{45}$$

$$z_k(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda^{1/12}\sqrt{3}\Gamma\bigl(\frac{4}{3}\bigr)6^{1/6}} + \frac{(-1)^k \operatorname{sgn}(x-\sqrt{\lambda})|x^2-\lambda|}{\lambda^{5/12}\sqrt{3}\Gamma\bigl(\frac{2}{3}\bigr)6^{5/6}} + O(\lambda^{-13/12}|x^2-\lambda|) \tag{45$'$}$$

при $|x-\sqrt{\lambda}| \le C\lambda^{-1/6}$, $C>0$, не зависит от λ,

$$\frac{z_k(x,\lambda)}{\partial\lambda} = \begin{cases} \frac{(-1)^{k+1}e^{(-1)^k Q_1(x,\lambda)}}{4\sqrt{\pi}(x^2-\lambda)^{1/4}} \ln\bigl(\frac{x+\sqrt{x^2-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\bigr) + O\bigl(Q_1^{-1}(x,\lambda)\bigr) \\ \qquad\qquad \text{при } Q_1(x,\lambda) \to +\infty, \\ -\frac{\sin\bigl(Q(x,\lambda)+(-1)^k\frac{\pi}{4}\bigr)}{2\sqrt{\pi}(\lambda-x^2)^{1/4}}\bigl(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\bigr) + O(Q^{-1}(x,\lambda)) \\ \qquad\qquad \text{при } Q(x,\lambda) \to +\infty, \end{cases} \tag{46}$$

$$\frac{\partial z_k(x,\lambda)}{\partial\lambda} = O\left(\frac{1}{\lambda^{5/12}}\right) \quad \text{при } |x-\sqrt{\lambda}| \le \varepsilon\sqrt{\lambda},\ 0<\varepsilon<1. \tag{46$'$}$$

Тогда из теоремы 1, замечания 4 и леммы 2 следует

Теорема 2. *При $|\lambda-\lambda_n| \le 1/2$ и $x \ge 0$, $t \ge 0$ справедливы асимптотические формулы*

$$B^+(x,t,\lambda) = G^0(x,t,\lambda_n) + \pi \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}(\lambda-\lambda_n)\right) \times \left(z_1(x,\lambda_n) + \int_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(x,p)}{\partial p}\,dp\right)\left(z_1(t,\lambda_n) + \int_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(t,p)}{\partial p}\,dp\right) + \widehat{G}(x,t,\lambda_n) + \hat{g}_1(x,t,\lambda_n),$$

$$B_n^+(x,t,\lambda) = G^0(x,t,\lambda_n) + \frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{4(\lambda-\lambda_n)} \int_{\lambda_n}^{\lambda} \sin\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right)(\lambda-t)\,dt \times \left(z_1(x,\lambda_n) + \int_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(x,p)}{\partial p}\,dp\right)\left(z_1(t,\lambda_n) + \int_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(t,p)}{\partial p}\,dp\right)$$
$$+ \frac{4}{(\lambda-\lambda_n)}\left(z_1(x,\lambda_n) + \int_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(x,p)}{\partial p}\,dp\right)\int_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(t,p)}{\partial p}\,dp$$
$$+ \frac{4}{(\lambda-\lambda_n)}\left(z_1(t,\lambda_n) + \int_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(t,p)}{\partial p}\,dp\right)\int_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(x,p)}{\partial p}\,dp + \widehat{G}(x,t,\lambda_n) + \hat{g}_2(x,t,\lambda_n),$$

где

$$B^+(x,t,\lambda) = \begin{cases} B_D^+(x,t,\lambda) & \text{при } n \text{ четном},\\ B_N^+(x,t,\lambda) & \text{при } n \text{ нечетном},\end{cases}$$

$$B_n^+(x,t,\lambda) = \begin{cases} B_{Dn}^+(x,t,\lambda) & \text{при } n \text{ нечетном},\\ B_{Nn}^+(x,t,\lambda) & \text{при } n \text{ четном},\end{cases}$$

$$G^0(x,t,\lambda_n) = \pi \begin{cases} \left(z_1(x,\lambda_n) + \int_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(x,p)}{\partial p}\,dp\right)\left(z_2(t,\lambda_n) + \int_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_2(t,p)}{\partial p}\,dp\right), & t \le x,\\ \left(z_1(t,\lambda_n) + \int_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(t,p)}{\partial p}\,dp\right)\left(z_2(x,\lambda_n) + \int_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_2(x,p)}{\partial p}\,dp\right), & x < t,\end{cases}$$

$$\widehat{G}(x,t,\lambda_n) = O\left(\frac{e^{\operatorname{sgn}(x-t)[\widehat{Q}_1(t,\lambda_n)-\widehat{Q}_1(x,\lambda_n)]}}{n(n^{1/12}+|x^2-\lambda_n|^{1/4})(n^{1/12}+|t^2-\lambda_n|^{1/4})}\right),$$

$$\hat{g}_k(x,t,\lambda_n) = O\left(\frac{e^{-\widehat{Q}_1(t,\lambda_n)}}{n(n^{1/12}+|t^2-\lambda_n|^{1/4})}\right) + O\left(\frac{e^{-\widehat{Q}_1(x,\lambda_n)}}{n(n^{1/12}+|x^2-\lambda_n|^{1/4})}\right).$$

Асимптотические представления собственных функций и ядер $B^+(x,t,\lambda)$, $B_n^+(x,t,\lambda)$ позволяют выписать асимптотику спектра возмущенного оператора $H = H^0 + V$. Пусть $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ — спектр оператора $H = H^0 + V$. Справедлива

Теорема 3. *Пусть $V(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Тогда выполняется условие (1) и собственные числа оператора $H = H^0 + V$ определяются из уравнения (2). Если же предположить, что функция $V(x)$ удовлетворяет условию*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|)^{\alpha}|V(x)|^{\beta}\,dx < \infty, \quad \text{где } \beta > 2,\ \alpha > \beta - 1,$$

то при достаточно больших n справедлива асимптотическая формула

$$\mu_n = \lambda_n + \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\lambda_n^{1/2}-\lambda_n^{-1/6}} V^+(x)\cos^2\Big(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\Big)(\lambda_n - x^2)^{-1/2}\,dx$$

$$+\frac{4}{3}\frac{1}{6^{1/3}\lambda_n^{1/6}}\int\limits_{\lambda_n^{1/2}-\lambda_n^{-1/6}}^{\lambda_n^{1/2}+\lambda_n^{-1/6}} V^+(x)\bigg(\frac{1}{\Gamma\big(\frac{4}{3}\big)} - \frac{(x^2-\lambda_n)}{\Gamma\big(\frac{2}{3}\big)6^{2/3}\lambda_n^{1/3}}\bigg)^2\,dx$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda_n^{1/2}+\lambda_n^{-1/6}}^{\infty} V^+(x)(x^2-\lambda_n)^{-1/2}e^{-2Q_1(x,\lambda_n)}\,dx$$

$$-\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^+(x)(\lambda_n - x^2)^{-1/2}\cos^2\Big(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\Big)$$

$$\times\int\limits_0^{x} V^+(t)(\lambda_n - t^2)^{-1/2}\cos 2Q(t,\lambda_n)\,dtdx$$

$$-\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^-(x)(\lambda_n - x^2)^{-1/2}\cos^2\Big(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\Big)$$

$$\times\int\limits_0^{x} V^-(t)(\lambda_n - t^2)^{-1/2}\cos 2Q(t,\lambda_n)\,dtdx$$

$$+\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^+(x)(\lambda_n - x^2)^{-1/2}\cos^2\Big(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\Big)\,dx$$

$$\times\int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^+(t)(\lambda_n - t^2)^{-1/2}\cos 2Q(t,\lambda_n)\arccos\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\,dt + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right),$$

где $\varepsilon = (\alpha+1-\beta)/(2\beta)$, $V^{\pm}(x) = (V(x)\pm V(-x))/2$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера, функции $Q(x,\lambda_n)$, $Q_1(x,\lambda_n)$ определены выше.

Замечание 5. Теорема преследует две цели: 1) найти условие на возмущение $V(x)$, при котором справедливо уравнение (2); 2) найти условие на возмущение $V(x)$, при котором справедлива асимптотическая формула

$$\mu_n = \lambda_n + (V\varphi_n,\varphi_n) - \big(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\big) + O(1/n^{\delta}),$$

где $\delta > 1$. Приведенная в теореме асимптотика — развернутая форма записи этой формулы.

Для доказательства теоремы 3 предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 4. *Пусть $V(x)\in L^2(\mathbb{R})$. Тогда при всех $n \gg 1$ справедлива оценка $\|V\varphi_n\| \le C/n^{1/12}$.*

Доказательство. Действительно, так как $\varphi_n(-x) = (-1)^n\varphi_n(x)$, имеем

$$\|V\varphi_n\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} V^2(x)\varphi_n^2(x)\,dx = \int\limits_0^{\infty} V^2(-x)\varphi_n^2(x)\,dx + \int\limits_0^{\infty} V^2(x)\varphi_n^2(x)\,dx.$$

Из формулы (44) и леммы 2 нетрудно получить, что при нечетных n и $x \ge 0$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2} z_1(x, \lambda_n)\,(1 + \widehat{\varphi}_n(x))\,, \tag{47}$$

где $\sup\limits_{x \ge 0} |\widehat{\varphi}_n(x)| \le Cn^{-1}$. Аналогичное представление имеет место и при четном n. Отсюда и из формул (45), (45′), так как $V(x) \in L^2(\mathbb{R})$, легко следует утверждение леммы.

Лемма 5. *Пусть $V(x)$ удовлетворяет условию $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|)^\alpha |V(x)|^\beta\,dx < \infty$, где $\beta > 2$, $\alpha > \beta - 1$. Тогда при всех $n \ge 1$ и $|\lambda - \lambda_n| \le 1/2$ справедлива оценка $\left\|R_n^0(\lambda)V\varphi_n\right\| \le C/n^{1/2}$.*

Доказательство. Из формулы (15) при нечетных n (при четных n имеет место аналогичное представление) нетрудно получить, что

$$\left\|R_n^0(\lambda)V\varphi_n\right\|^2 = 2\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty B_N^+(x,t,\lambda)V^-(t)\varphi_n(t)\,dt\right)^2 dx + 2\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty B_{Dn}^+(x,t,\lambda)V^+(t)\varphi_n(t)\,dt\right)^2 dx,$$

где $V^\pm(t) = (V(t) \pm V(-t))/2$. Для оценки последних интегралов воспользуемся представлением (47) и теоремой 2. Здесь возникают функции $z_k(x,\lambda_n)$, $\partial z_k(x,\lambda)/\partial\lambda$. Для оценки функций $z_k(x,\lambda_n)$ достаточно воспользоваться оценкой $|z_k(x,\lambda_n)| \le C|\lambda_n - x^2|^{-1/4} e^{(-1)^k \widehat{Q}_1(x,\lambda_n)}$, которая следует из формулы (22) и леммы 1. Для оценки производных $\partial z_k(x,\lambda_n)/\partial\lambda$ воспользуемся асимптотическими формулами (46), (46′). Тогда получим интегралы вида

$$I_n = \int\limits_0^\infty |\lambda_n - t^2|^{-1/2} |V^\pm(t)|\,dt,$$

при этом $\left\|R_n^0(\lambda)V\varphi_n\right\|^2 \le CI_n^2$. Представим I_n в виде

$$I_n = \int\limits_0^\infty (1+t)^{-\alpha/\beta} |\lambda_n - t^2|^{-1/2} |V^\pm(t)| (1+t)^{\alpha/\beta}\,dt.$$

Применив неравенство Гёльдера, получим

$$I_n \le J_n^{\frac{\beta-1}{\beta}} \left[\int\limits_0^\infty |V(t)|^\beta (1+t)^\alpha\,dt\right]^{1/\beta},$$

где $J_n = \int\limits_0^\infty |\lambda_n - x^2|^{-\frac{\beta}{2(\beta-1)}} (1+x)^{-\frac{\alpha}{\beta-1}}\,dx$. Разобьем J_n на три интеграла:

$$J_n = \int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} (\lambda_n - x^2)^{-\frac{\beta}{2(\beta-1)}} (1+x)^{-\frac{\alpha}{\beta-1}}\,dx + \int\limits_{\sqrt{\lambda_n}/2}^{3\sqrt{\lambda_n}/2} |\lambda_n - x^2|^{-\frac{\beta}{2(\beta-1)}} (1+x)^{-\frac{\alpha}{\beta-1}}\,dx + \int\limits_{3\sqrt{\lambda_n}/2}^{\infty} (x^2 - \lambda_n)^{-\frac{\beta}{2(\beta-1)}} (1+x)^{-\frac{\alpha}{\beta-1}}\,dx = J_n^{(1)} + J_n^{(2)} + J_n^{(3)}.$$

Нетрудно получить, что $J_n^{(1)} \leq C_1 n^{-\beta/[2(\beta-1)]}$, $J_n^{(k)} \leq C_k n^{-(\alpha+1)/[2(\beta-1)]}$, $k = 2, 3$. Отсюда следует, что $|I_n| \leq Cn^{-1/2}$. Тогда $\left\|R_n^0(\lambda)V\varphi_n\right\|^2 \leq Cn^{-1}$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $V(x)$ удовлетворяет условию $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)^\alpha |V(x)|^\beta\,dx < \infty$, где $\beta > 2$, $\alpha > \beta - 1$. Тогда при всех $n \geq 1$ справедлива оценка $\left\|VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n\right\| \leq C/n^{7/12}$.*

Лемма 6 доказывается аналогично леммам 4 и 5.

Доказательство теоремы 3. Пусть $V(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Покажем, что выполняется условие (1). Действительно, пусть $\|f\| = 1$, $|\lambda - \lambda_n| \leq 1/2$. Тогда

$$\left|\left[R_n^0(\lambda)Vf\right](x)\right|^2 \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|R_n^0(x,t,\lambda)\right|^2 |V(t)|^2\,dt.$$

Поэтому при $|\lambda - \lambda_n| \leq 1/2$, используя представление (15) и теорему 2, получим

$$\left\|R_n^0(\lambda)V\right\|^2 \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|R_n^0(x,t,\lambda)\right|^2 |V(t)|^2\,dt \leq Cn^{-1/6}.$$

Таким образом, для определения собственных значений оператора $H = H^0 + V$ имеем уравнение

$$\lambda_n + (V\varphi_n, \varphi_n) - (VR_n(\mu_n)V\varphi_n, \varphi_n) = \mu_n. \tag{48}$$

Покажем, что при выполнении второго условия теоремы справедлива асимптотическая формула

$$\mu_n = \lambda_n + (V\varphi_n, \varphi_n) - \left(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n, \varphi_n\right) + O(1/n^\delta),$$

где $\delta > 1$.

Согласно формуле (3) $R_n(\lambda_n) = R_n^0(\lambda_n) - R_n^0(\lambda_n)VR_n(\lambda_n)$. Подставляя последнее в тождество Гильберта — Шмидта

$$R_n(\mu_n) = R_n(\lambda_n) + (\mu_n - \lambda_n)R_n(\mu_n)R_n(\lambda_n),$$

имеем

$$\begin{aligned} R_n(\mu_n) = R_n^0(\lambda_n) - R_n^0(\lambda_n)VR_n(\lambda_n) + (\mu_n - \lambda_n)R_n(\mu_n)R_n^0(\lambda_n) \\ - (\mu_n - \lambda_n)R_n(\mu_n)R_n^0(\lambda_n)VR_n(\lambda_n). \end{aligned}$$

Отсюда и из (48) нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} &\mu_n - \lambda_n - (V\varphi_n, \varphi_n) + \left(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n, \varphi_n\right) \\ &= (1-\gamma_n)^{-1}\left\{\left(VR_n^0(\lambda_n)VR_n(\lambda_n)V\varphi_n, \varphi_n\right) + \gamma_n\left[(V\varphi_n, \varphi_n) - \left(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n, \varphi_n\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{49}$$

где $\gamma_n = \left(VR_n(\mu_n)R_n^0(\lambda_n)V\varphi_n, \varphi_n\right) - (VR_n(\mu_n)R_n^0(\lambda_n)VR_n(\lambda_n)V\varphi_n, \varphi_n)$. Оценим γ_n и выражение в фигурной скобке формулы (49). Имеем

$$|\gamma_n| \leq C\left|\left(VR_n(\mu_n)R_n^0(\lambda_n)V\varphi_n, \varphi_n\right)\right| \leq C\left\|R_n^0(\lambda_n)V\varphi_n\right\|\|R_n(\mu_n)V\varphi_n\|.$$

Из формулы (3) следует, что

$$R_n(\mu_n)V\varphi_n = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\big[R_n^0(\mu_n)V\big]^m R_n^0(\mu_n)V\varphi_n.$$

Так как $\big\|R_n^0(\mu_n)V\big\| < 1$, отсюда $\|R_n(\mu_n)V\varphi_n\| \le C\big\|R_n^0(\mu_n)V\varphi_n\big\|$. Итак, при $|\mu_n-\lambda_n| \le 1/2$ из леммы 5 получаем, что

$$|\gamma_n| \le C_0 n^{-1}. \tag{50}$$

Аналогично оцениваются остальные составляющие в фигурной скобке равенства (49). Из лемм 5 и 6 имеем

$$\big|\big(VR_n^0(\lambda_n)VR_n(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\big)\big| \le \|R_n(\lambda_n)V\varphi_n\|\big\|VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n\big\| \le C_1 n^{-13/12}, \tag{51}$$

а из лемм 4 и 5 получим

$$|(V\varphi_n,\varphi_n)| \le \|V\varphi_n\| \le C_2 n^{-1/12}, \tag{52}$$

$$\big|\big(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\big)\big| \le \big\|R_n^0(\lambda_n)V\varphi_n\big\|\|V\varphi_n\| \le C_3 n^{-7/12}. \tag{53}$$

Итак, из соотношений (49)–(53) выводим, что

$$\mu_n = \lambda_n + (V\varphi_n,\varphi_n) - \big(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\big) + O(n^{-13/12}). \tag{54}$$

Используя представления собственных функций и ядер $B_N^+(x,t,4n+3)$, $B_D^+(x,t,4n+1)$, $B_{Dn}^+(x,t,4n+3)$, $B_{Nn}^+(x,t,4n+1)$, получим асимптотические формулы для второго и третьего приближений собственного числа μ_n. Так как $\varphi_n(x) = (-1)^n\varphi_n(x)$, имеем

$$(V\varphi_n,\varphi_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} V(x)\varphi_n^2(x)\,dx = \int\limits_0^{\infty}[V(-x)+V(x)]\varphi_n^2(x)\,dx.$$

Согласно формуле (47)

$$\int\limits_0^{\infty}[V(-x)+V(x)]\varphi_n^2(x)\,dx = 2\int\limits_0^{\infty}[V(-x)+V(x)]z_1^2(x,\lambda_n)\,(1+\widehat{\varphi}(x))\,dx.$$

При выполнении второго условия теоремы, рассуждая аналогично лемме 5, нетрудно показать, что

$$\left|\int\limits_0^{\infty} V(\pm x)z_1^2(x,\lambda_n)\,dx\right| \le Cn^{-1/2}.$$

Тогда

$$(V\varphi_n,\varphi_n) = 2\int\limits_0^{\infty}[V(-x)+V(x)]z_1^2(x,\lambda_n)\,dx + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Отсюда, воспользовавшись асимптотическими формулами (45), (45′), поскольку $\widetilde{Q}(x,\lambda_n) = O(\lambda_n)$ и при выполнении второго условия теоремы $V(x) \in L(\mathbb{R})$, имеем

$$(V\varphi_n,\varphi_n) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\lambda_n^{1/2}-\lambda_n^{-1/6}} [V(-x)+V(x)]\cos^2\Big(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\Big)(\lambda_n-x^2)^{-1/2}\,dx$$

$$+\frac{2}{3\Gamma^2\left(\frac{4}{3}\right)6^{1/3}\lambda_n^{1/6}}\int\limits_{\lambda_n^{1/2}-\lambda_n^{-1/6}}^{\lambda_n^{1/2}+\lambda_n^{-1/6}}[V(-x)+V(x)]\,dx$$

$$-\frac{2}{9\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\lambda_n^{1/2}}\int\limits_{\lambda_n^{1/2}-\lambda_n^{-1/6}}^{\lambda_n^{1/2}+\lambda_n^{-1/6}}[V(-x)+V(x)]\operatorname{sgn}(x-\sqrt{\lambda_n})|x^2-\lambda_n|\,dx$$

$$+\frac{2}{3\Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right)6^{5/3}\lambda_n^{5/6}}\int\limits_{\lambda_n^{1/2}-\lambda_n^{-1/6}}^{\lambda_n^{1/2}+\lambda_n^{-1/6}}[V(-x)+V(x)](x^2-\lambda_n)^2\,dx$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\lambda_n^{1/2}+\lambda_n^{-1/6}}^{\infty}[V(-x)+V(x)](x^2-\lambda_n)^{-1/2}e^{-2Q_1(x,\lambda_n)}\,dx+O\left(\frac{1}{n^{7/6}}\right). \quad (55)$$

Получим асимптотическое представление $\big(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\big)$. Рассуждая аналогично лемме 5, при нечетном n имеем

$$\big(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\big)=2\int\limits_0^\infty V^-(x)\varphi_n(x)\int\limits_0^\infty B_N^+(x,t,\lambda_n)V^-(t)\varphi_n(t)\,dt\,dx$$
$$+2\int\limits_0^\infty V^+(x)\varphi_n(x)\int\limits_0^\infty B_{Dn}^+(x,t,\lambda_n)V^+(t)\varphi_n(t)\,dtdx, \quad (56)$$

а при четном n —

$$\big(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\big)=2\int\limits_0^\infty V^-(x)\varphi_n(x)\int\limits_0^\infty B_D^+(x,t,\lambda_n)V^-(t)\varphi_n(t)\,dtdx$$
$$+2\int\limits_0^\infty V^+(x)\varphi_n(x)\int\limits_0^\infty B_{Nn}^+(x,t,\lambda_n)V^+(t)\varphi_n(t)\,dtdx, \quad (57)$$

где $V^-(x)=(V(x)-V(-x))/2$, $V^+(x)=(V(x)+V(-x))/2$. Теперь из формул (56), (57), теоремы 2 и формулы (47) получим

$$\big(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\big)$$
$$=8\pi\int\limits_0^\infty V^-(x)z_1^2(x,\lambda_n)(1+\widehat{\varphi}_n(x))\int\limits_0^x V^-(t)z_1(t,\lambda_n)z_2(t,\lambda_n)(1+\widehat{\varphi}_n(t))\,dtdx$$
$$+8\pi\int\limits_0^\infty V^+(x)z_1^2(x,\lambda_n)(1+\widehat{\varphi}_n(x))\int\limits_0^x V^+(t)z_1(t,\lambda_n)z_2(t,\lambda_n)(1+\widehat{\varphi}_n(t))\,dtdx$$
$$+16\pi\int\limits_0^\infty V^+(x)z_1^2(x,\lambda_n)(1+\tilde z_1(x,\lambda_n))\,dx\int\limits_0^\infty V^+(t)z_1(t,\lambda_n)\frac{\partial z_1(t,\lambda_n)}{\partial\lambda}(1+\tilde z_1(t,\lambda_n))\,dt$$
$$+4\int\limits_0^\infty V^-(x)z_1(x,\lambda_n)(1+\widehat{\varphi}_n(x))\int\limits_0^\infty V^-(t)z_1(t,\lambda_n)$$

$$\times [\tilde g(x,t,\lambda_n) + \widehat G(x,t,\lambda_n)](1+\widehat\varphi_n(t))\,dtdx$$
$$+ 4\int_0^\infty V^+(x) z_1(x,\lambda_n)(1+\widehat\varphi_n(x)) \int_0^\infty V^+(t) z_1(t,\lambda_n)$$
$$\times [\tilde g(x,t,\lambda_n) + \widehat G(x,t,\lambda_n)](1+\widehat\varphi_n(t))\,dtdx,$$

где $\sup\limits_{x\ge 0}|\widehat\varphi_n(x)| \le C_1 n^{-1}$, $\sup\limits_{x\ge 0}|\tilde z_1(x,\lambda_n)| \le C_2 n^{-1}$,

$$\widehat G(x,t,\lambda_n) = O\biggl(\frac{e^{\operatorname{sgn}(x-t)[\widehat Q_1(t,\lambda_n)-\widehat Q_1(x,\lambda_n)]}}{n(n^{1/12}+|x^2-\lambda_n|^{1/4})(n^{1/12}+|t^2-\lambda_n|^{1/4})}\biggr),$$

$$\tilde g(x,t,\lambda_n) = \max_{x\ge 0,t\ge 0}\bigl(\hat g_k(x,t,\lambda_n) + \hat g_k^0(x,t,\lambda_n)\bigr)$$
$$= O\biggl(\frac{e^{-\widehat Q_1(t,\lambda_n)}}{n(n^{1/12}+|t^2-\lambda_n|^{1/4})}\biggr) + O\biggl(\frac{e^{-\widehat Q_1(x,\lambda_n)}}{n(n^{1/12}+|x^2-\lambda_n|^{1/4})}\biggr). \quad (58)$$

Из формулы (22) и леммы 1, рассуждая аналогично лемме 5, при условии теоремы будем иметь

$$\biggl|\int_0^\infty V^-(x) z_1^2(x,\lambda_n)\widehat\varphi_n(x)\int_0^x V^-(t) z_1(t,\lambda_n) z_2(t,\lambda_n)\,dtdx\biggr|$$
$$\le \frac{C}{n}\biggl(\int_0^\infty V^-(x)|x^2-\lambda_n|^{-1/2}dx\biggr)^2 \le \frac{C_1}{n^2}, \quad (59)$$

$$\biggl|\int_0^\infty V^-(x) z_1(x,\lambda_n)\int_0^\infty V^-(t) z_1(t,\lambda_n)\widehat G(x,t,\lambda_n)\,dtdx\biggr|$$
$$\le \frac{C}{n}\biggl(\int_0^\infty |V^-(x)||x^2-\lambda_n|^{-1/2}dx\biggr)^2 \le \frac{C_2}{n^2}. \quad (60)$$

Используя асимптотические формулы (45) и (45′), поскольку $V(x)\in L^2(\mathbb{R})$, также нетрудно показать, что

$$\biggl|\int_0^\infty V^-(x) z_1(x,\lambda_n)\int_0^\infty V^-(t) z_1(t,\lambda_n)\tilde g(x,t,\lambda_n)\,dtdx\biggr|$$
$$\le \frac{C_3}{n^{13/12}}\biggl(\int_0^\infty |V^-(x)||z_1(x,\lambda_n)|\,dx\biggr)^2 \le \frac{C_4}{n^{13/12}}\int_0^\infty |z_1(x,\lambda_n)|^2\,dx \le \frac{C_5}{n^{13/12}}. \quad (61)$$

Таким образом, из формул (58)–(61) получим

$$\bigl(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\bigr) = 8\pi\int_0^\infty V^-(x) z_1^2(x,\lambda_n)\int_0^x V^-(t) z_1(t,\lambda_n) z_2(t,\lambda_n)\,dtdx$$

$$+ 8\pi \int_0^\infty V^+(x) z_1^2(x,\lambda_n) \int_0^x V^+(t) z_1(t,\lambda_n) z_2(t,\lambda_n)\,dtdx$$

$$+ 16 \int_0^\infty V^+(x) z_1^2(x,\lambda_n)\,dx \int_0^\infty V^+(t) z_1(t,\lambda_n) \frac{\partial z_1(t,\lambda_n)}{\partial \lambda}\,dt + O\left(\frac{1}{n^{13/12}}\right). \quad (62)$$

Рассмотрим

$$l_\pm = \int_0^\infty V^\pm(x) z_1^2(x,\lambda_n) \int_0^x V^\pm(t) z_1(t,\lambda_n) z_2(t,\lambda_n)\,dtdx$$

и представим $l_\pm$ в виде

$$l_\pm = \int_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^\pm(x) z_1^2(x,\lambda_n) \int_0^x V^\pm(t) z_1(t,\lambda_n) z_2(t,\lambda_n)\,dtdx$$

$$+ \int_{\sqrt{\lambda_n}/2}^\infty V^\pm(x) z_1^2(x,\lambda_n) \int_0^x V^\pm(t) z_1(t,\lambda_n) z_2(t,\lambda_n)\,dtdx = l_\pm^{(1)} + l_\pm^{(2)}. \quad (63)$$

Оценим $l_\pm^{(2)}$. Согласно формуле (22) и лемме 1, рассуждая аналогично лемме 5, при выполнении второго условия будем иметь

$$\left|l_\pm^{(2)}\right| \le \int_{\sqrt{\lambda_n}/2}^\infty |V(\pm x)||x^2 - \lambda_n|^{-1/2}\,dx \int_0^\infty |V(\pm t)||t^2 - \lambda_n|^{-1/2}\,dt \le C n^{-\frac{\alpha+1+\beta}{2\beta}}.$$

Поскольку $\alpha + 1 > \beta$, отсюда

$$\left|l_\pm^{(2)}\right| \le C_0 n^{-(1+\varepsilon)}, \quad \varepsilon = (\alpha + 1 - \beta)/2\beta > 0. \quad (64)$$

Преобразуем последний интеграл в правой части формулы (62):

$$l = \int_0^\infty V^+(x) z_1^2(x,\lambda_n)\,dx \int_0^\infty V^+(t) z_1(t,\lambda_n) \frac{\partial z_1(t,\lambda_n)}{\partial \lambda}\,dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^+(x) z_1^2(x,\lambda_n)\,dx \int_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^+(t) z_1(t,\lambda_n) \frac{\partial z_1(t,\lambda_n)}{\partial \lambda}\,dt$$

$$+ \int_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^+(x) z_1^2(x,\lambda_n)\,dx \int_{\sqrt{\lambda_n}/2}^\infty V^+(t) z_1(t,\lambda_n) \frac{\partial z_1(t,\lambda_n)}{\partial \lambda}\,dt$$

$$+ \int_{\sqrt{\lambda_n}/2}^\infty V^+(x) z_1^2(x,\lambda_n)\,dx \int_0^\infty V^+(t) z_1(t,\lambda_n) \frac{\partial z_1(t,\lambda_n)}{\partial \lambda}\,dt = l_1 + l_2 + l_3. \quad (65)$$

Аналогично предыдущим рассуждениям можно показать, что

$$|l_k| \le C n^{-(1+\varepsilon)}, \quad \varepsilon = (\alpha + 1 - \beta)/2\beta > 0. \quad (66)$$

Итак, из формул (62)–(66) получим

$$\big(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\big)=8\pi\int\limits_0^\infty V^-(x)z_1^2(x,\lambda_n)\int\limits_0^x V^-(t)z_1(t,\lambda_n)z_2(t,\lambda_n)\,dtdx$$
$$+8\pi\int\limits_0^\infty V^+(x)z_1^2(x,\lambda_n)\int\limits_0^x V^+(t)z_1(t,\lambda_n)z_2(t,\lambda_n)\,dtdx$$
$$+16\int\limits_0^\infty V^+(x)z_1^2(x,\lambda_n)\,dx\int\limits_0^\infty V^+(t)z_1(t,\lambda_n)\frac{\partial z_1(t,\lambda_n)}{\partial\lambda}\,dt+O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right). \quad (67)$$

Используя асимптотические формулы (45)–(46′), из соотношения (67) будем иметь равенство

$$\big(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\big)=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n}/2}V^+(x)(\lambda_n-x^2)^{-1/2}\cos^2\left(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\times\int\limits_0^x V^+(t)(\lambda_n-t^2)^{-1/2}\cos 2Q(t,\lambda_n)\,dtdx$$
$$+\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n}/2}V^-(x)(\lambda_n-x^2)^{-1/2}\cos^2\left(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\times\int\limits_0^x V^-(t)(\lambda_n-t^2)^{-1/2}\cos 2Q(t,\lambda_n)\,dtdx$$
$$+\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n}/2}V^+(x)(\lambda_n-x^2)^{-1/2}\cos^2\left(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\right)\,dx$$
$$\times\int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n}/2}V^+(t)(\lambda_n-t^2)^{-1/2}\cos 2Q(t,\lambda_n)\arccos\frac{x}{\sqrt{\lambda_n}}\,dt+O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right). \quad (68)$$

Итак, из соотношений (54), (55), (68) получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

Результаты теоремы согласуются с результатами Х. Х. Муртазина и Т. Г. Амангильдина (см. [2, теорема 2]), полученными ранее для гладких и финитных возмущений $V(x)$. Например, если положить, что $V(x)\in C_0^1(-\infty,+\infty)$, $V(x)=0$ при $|x|\ge b$, то, учитывая, что $Q'(x,\lambda_n)=-\sqrt{\lambda_n-x^2}$, и интегрируя по частям, из асимптотической формулы теоремы 3 легко получить, что

$$\mu_n=\lambda_n+\frac{1}{\pi\sqrt{\lambda_n}}\int\limits_{-b}^{b}V(x)\,dx+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

В нашем же случае мы накладываем на потенциал лишь условия типа суммируемости. В частности, возмущение $V(x)$ может быть даже разрывным. Например, в качестве возмущения можем взять функцию $V(x)$, $|V(x)|\le C|x|^{-\delta}$, при $|x|>1$, $|V(x)|\le C|x|^{-\gamma}$ при $|x|\le 1$, где $\gamma<1/\beta$, $\delta>1$.

Автор выражает искреннюю благодарность Х. Х. Муртазину за предложенный метод и Х. К. Ишкину за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
2. *Муртазин Х. Х., Амангильдин Т. Г.* Асимптотика спектра оператора Штурма — Лиувилля // Мат. сб. 1979. Т. 110, № 1. С. 135–149.
3. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.
4. *Ахмерова Э. Ф., Муртазин Х. Х.* Спектральная асимптотика для негладких возмущений дифференциальных операторов и формулы следов // Докл. РАН. 2003. Т. 388, № 6. С. 731–733.
5. *Giertz M.* On the solutions in $L^2(-\infty,+\infty)$ of $-y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ when q is rapidly increasing // Proc. London Math. Soc. 1964. V. 14, N 53. P. 53–73.
6. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматгиз, 1963.

Статья поступила 21 ноября 2006 г.

Ахмерова Эльвира Фангизовна
Институт социально-экономических исследований УНЦ РАН,
пр. Октября, 71, Уфа 450054
eakhmerova@yandex.ru