*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2008. Том 49, № 5*

*УДК 517.953+517.983*

# КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ И УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

**Г. В. Демиденко**

**Аннотация.** Рассматривается класс матричных квазиэллиптических операторов во всем пространстве. Для этих операторов установлены свойства изоморфизма в специальных шкалах весовых соболевских пространств. На основе таких свойств доказана однозначная разрешимость начальной задачи для одного класса уравнений соболевского типа.

**Ключевые слова:** квазиэллиптический оператор, весовое соболевское пространство, изоморфизм, уравнение соболевского типа.

*Памяти Сергея Львовича Соболева*

## § 1. Введение

В работе рассмотрим один класс матричных квазиэллиптических операторов:

$$\mathscr{L}(D_x) = (l_{j,r}(D_x)) \tag{1.1}$$

во всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Для этих операторов установим свойства изоморфизма в специальных шкалах весовых соболевских пространств $W^l_{p,\sigma}$ и применим их для доказательства разрешимости начальной задачи для одного класса уравнений соболевского типа:

$$\begin{gathered}\mathscr{L}(D_x)D_t^m U + \sum_{k=0}^{m-1} \mathscr{L}_{m-k}(D_x) D_t^k U = F(t,x),\\ D_t^k U|_{t=0} = \varphi_{k+1}(x), \quad k = 0,\dots,m-1.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Теоремы о свойствах изоморфизма дифференциальных операторов имеют многочисленные приложения в теории уравнений с частными производными. Однако во многих случаях их формулировки далеко не очевидные. Например, дифференциальный оператор

$$\Delta - \varepsilon I : W_p^2(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty,$$

при $\varepsilon > 0$ устанавливает изоморфизм, но для оператора Лапласа

$$\Delta : W_p^2(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty,$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–00289) и гранта Сибирского отделения Российской академии наук (код проекта 2.2).

это неверно. Аналогичная ситуация имеет место для полигармонического оператора

$$\Delta^m : W_p^{2m}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty.$$

Ни при каких $m$ этот оператор не является изоморфизмом. В частности, используя результаты из [1, гл. 12], можно показать, что для разрешимости уравнения

$$\Delta^m u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ n > 2m,$$

в соболевском пространстве $W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ при $p \leq \frac{n}{n-2m}$ нужно, чтобы правая часть $f(x)$ удовлетворяла условиям ортогональности вида

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) x^\alpha dx = 0, \quad |\alpha| \leq s.$$

Отметим, что первые теоремы об изоморфизме для оператора Лапласа $\Delta$ в $\mathbb{R}^n$ доказаны в работах [2, 3], а теоремы о свойствах изоморфизма однородных эллиптических операторов в литературе появились в 70–80-е годы прошлого столетия (см., например, [4–9]). Первая теорема об изоморфизме для однородных квазиэллиптических операторов в $\mathbb{R}^n$ доказана автором [10], дальнейшее изучение свойств этих операторов проведено в [11]. Теоремы об изоморфизме для более общих классов матричных квазиэллиптических операторов в $\mathbb{R}^n$ содержатся в работах [12–14].

В настоящей работе продолжаются исследования [10, 12–14].

## § 2. Формулировка основных результатов

Укажем условия на класс матричных дифференциальных операторов (1.1).

Условие 1. Будем предполагать, что матричный $\nu\times\nu$-дифференциальный оператор $\mathscr{L}(D_x)$ имеет постоянные коэффициенты и его символ $\mathscr{L}(i\xi) = (l_{j,r}(i\xi))$ удовлетворяет следующим условиям.

Условие 2. Существуют векторы $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $t = (t_1, \dots, t_\nu)$, $t_r > 0$, $t_r/\alpha_j \in \mathbb{N}$, такие, что для любого $c > 0$

$$l_{j,r}(c^\alpha i\xi) = c^{t_r} l_{j,r}(i\xi), \quad j, r = 1, \dots, \nu.$$

Условие 3. Равенство

$$\det \mathscr{L}(i\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\xi = 0$.

Матричные операторы, удовлетворяющие указанным условиям, входят в класс *квазиэллиптических операторов*, введенных Л. Р. Волевичем [15].

Приведем некоторые примеры операторов, удовлетворяющих условиям 1–3.

Пример 1. Операторы, *эллиптические по Петровскому*: $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$. Отметим, что при $t_1 = \dots = t_\nu = 1$ такие операторы называются *однородными эллиптическими* операторами. К ним относится, например, оператор Навье из теории упругости:

$$\mathscr{L}(D_x) = \begin{pmatrix} \mu\Delta + (\lambda+\mu)D^2_{x_1} & (\lambda+\mu)D^2_{x_1x_2} & (\lambda+\mu)D^2_{x_1x_3} \\ (\lambda+\mu)D^2_{x_1x_2} & \mu\Delta + (\lambda+\mu)D^2_{x_2} & (\lambda+\mu)D^2_{x_2x_3} \\ (\lambda+\mu)D^2_{x_1x_3} & (\lambda+\mu)D^2_{x_2x_3} & \mu\Delta + (\lambda+\mu)D^2_{x_3} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$\lambda$, $\mu$ — постоянные Ламе, $\Delta$ — оператор Лапласа по $x$. Здесь $\det \mathscr{L}(i\xi) = -\mu^2(\lambda+2\mu)|\xi|^6$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Операторы, *параболические по Петровскому*:

$$\mathscr{L}(D_x) = \begin{pmatrix} D_{x_n}^{t_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & D_{x_n}^{t_\nu} \end{pmatrix} - \mathscr{L}^0(D_{x'}, D_{x_n}), \quad x = (x', x_n). \tag{2.2}$$

Вектор однородности имеет вид $\alpha = \left(\frac{1}{2b}, \dots, \frac{1}{2b}, 1\right)$, $b \in \mathbb{N}$.

Пример 3. Операторы, *параболические по Эйдельману*, имеют вид (2.2). В этом случае вектор однородности $\alpha$ равен $\left(\frac{1}{2b_1}, \dots, \frac{1}{2b_{n-1}}, 1\right)$, $b_j \in \mathbb{N}$, и для элементов матрицы $\mathscr{L}^0(i\xi', i\xi_n) = \left(l_{j,r}^0(i\xi)\right)$ справедливо

$$l_{j,r}^0(c^\alpha i\xi) = c^{t_r} l_{j,r}^0(i\xi), \quad c > 0, \ j, r = 1, \dots, \nu,$$

при этом мнимые части корней уравнения

$$\det \mathscr{L}(is, i\lambda) = 0, \quad s \in \mathbb{R}^{n-1},$$

удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Im} \lambda_j(s) \geq \delta\left(s_1^{2b_1} + \dots + s_{n-1}^{2b_{n-1}}\right), \quad \delta > 0.$$

Пример 4. *Однородные квазиэллиптические операторы*: $t_1 = \dots = t_\nu = 1$. К ним относится, например, оператор *параболического типа с «противоположными временами»* [16]:

$$\mathscr{L}(D_x) = \begin{pmatrix} D_{x_n} - \Delta' & 0 \\ & \\ 0 & D_{x_n} + \Delta' \end{pmatrix},$$

где $\Delta'$ — оператор Лапласа по $x'$. В этом случае $\alpha = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 1\right)$ и $t_1 = t_2 = 1$.

Очевидно, в класс однородных квазиэллиптических операторов входят скалярные квазиэллиптические операторы

$$\mathscr{L}(D_x) = \sum_{\beta\alpha=1} a_\beta D_x^\beta, \quad \mathscr{L}(i\xi) \neq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

По аналогии с [10] мы установим свойства изоморфизма квазиэллиптических операторов (1.1), используя специальные весовые соболевские пространства, введенные в [17]:

$$W_{p,\sigma}^l(\mathbb{R}^n), \quad l = (k/\alpha_1, \dots, k/\alpha_n), \quad k/\alpha_i \in \mathbb{N}, \ 1 < p < \infty, \ \sigma > 0.$$

Определение. Будем говорить, что локально суммируемая функция $u(x)$ *принадлежит весовому соболевскому пространству* $W_{p,\sigma}^l(\mathbb{R}^n)$, если $u(x)$ имеет обобщенные производные $D_x^\nu u(x)$ в $\mathbb{R}^n$, $\nu\alpha \leq k$, и

$$\left\|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(k-\nu\alpha)} D_x^\nu u(x), L_p(\mathbb{R}^n)\right\| < \infty, \quad \langle x \rangle^2 = \sum_{i=1}^n x_i^{2/\alpha_i}.$$

Норма в пространстве $W_{p,\sigma}^l(\mathbb{R}^n)$ определяется следующим образом:

$$\left\|u(x), W_{p,\sigma}^l(\mathbb{R}^n)\right\| = \sum_{0 \leq \nu\alpha \leq k} \left\|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(k-\nu\alpha)} D_x^\nu u(x), L_p(\mathbb{R}^n)\right\|. \tag{2.3}$$

Мы будем рассматривать общий случай, когда компоненты $k/\alpha_i$ вектора гладкости $l$ могут быть различными. Отметим, что в изотропном случае, когда $k/\alpha_1 = \cdots = k/\alpha_n = \bar{l}$, норма (2.3) эквивалентна следующей:

$$\sum_{0\le|\beta|\le\bar{l}} \left\|(1+|x|)^{-\sigma(\bar{l}-|\beta|)} D_x^\beta u(x), L_p(\mathbb{R}^n)\right\|. \tag{2.4}$$

Заметим, что множество функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ всюду плотно в $W_{p,\sigma}^l(\mathbb{R}^n)$ при $\sigma \le 1$ (см. [17]).

Приведем два хорошо известных примера весовых соболевских пространств, которые в изотропном случае $k/\alpha_i = \bar{l}$ совпадают с определенными выше при $\sigma = 1$.

Пример 5. *Пространство Кудрявцева* $W_{p,\square}^{\bar{l}}(\mathbb{R}^n)$, $\square = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < 1$, $j = 1,\dots,n\}$, норма в котором определяется следующим образом:

$$\left\|u(x), W_{p,\square}^{\bar{l}}(\mathbb{R}^n)\right\| = \int_\square |u(x)|\,dx + \sum_{|\beta|=\bar{l}} \left\|D_x^\beta u(x), L_p(\mathbb{R}^n)\right\|.$$

В работе [18] доказано, что в случае $p > n$ эта норма эквивалентна норме (2.4) при $\sigma = 1$. Следовательно, в случае $k/\alpha_1 = \cdots = k/\alpha_n = \bar{l}$, $p > n$, $\sigma = 1$, пространства $W_{p,\square}^{\bar{l}}(\mathbb{R}^n)$ и $W_{p,\sigma}^l(\mathbb{R}^n)$ совпадают.

Пример 6. *Пространство Ниренберга — Уолкера — Кантора* $M_{\bar{l},m}^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, норма в котором определяется по формуле [19, 20]

$$\left\|u(x), M_{\bar{l},m}^p(\mathbb{R}^n)\right\| = \sum_{0\le|\beta|\le\bar{l}} \left\|(1+|x|)^{m+|\beta|} D_x^\beta u(x), L_p(\mathbb{R}^n)\right\|.$$

Следовательно, в случае $k/\alpha_1 = \cdots = k/\alpha_n = \bar{l}$, $m = -\bar{l}$, $\sigma = 1$, пространства $M_{\bar{l},m}^p(\mathbb{R}^n)$ и $W_{p,\sigma}^l(\mathbb{R}^n)$ совпадают.

Будем говорить, что вектор-функция $U(x) = (U^1(x),\dots,U^\nu(x))^T$ *принадлежит пространству*

$$\mathbf{W}_{p,\sigma}^{\mathbf{l}}(\mathbb{R}^n) = \prod_{r=1}^{\nu} W_{p,\sigma}^{l^r}(\mathbb{R}^n), \quad l^r = (t_r/\alpha_1,\dots,t_r/\alpha_n),\ 1 < p < \infty,\ \sigma \ge 0,$$

если каждая ее компонента $U^r(x)$ принадлежит $W_{p,\sigma}^{l^r}(\mathbb{R}^n)$, и будем писать

$$\left\|U(x), \mathbf{W}_{p,\sigma}^{\mathbf{l}}(\mathbb{R}^n)\right\| = \sum_{r=1}^{\nu} \left\|U^r(x), W_{p,\sigma}^{l^r}(\mathbb{R}^n)\right\|.$$

Будем писать также

$$\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n) = \prod_{r=1}^{\nu} L_p(\mathbb{R}^n).$$

Введем следующие обозначения:

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad t_{\max} = \max\{t_1,\dots,t_\nu\}.$$

Сформулируем теорему об изоморфизме.

**Теорема 1.** *Пусть $|\alpha|/p > t_{\max}$. Тогда оператор*

$$\mathscr{L}(D_x) : \mathbf{W}^{\mathbf{l}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n) \to \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty,\ \sigma = 1,$$

*устанавливает изоморфизм.*

Приведем пример использования теоремы 1.

Рассмотрим задачу Коши (1.2) для системы уравнений, не разрешенных относительно старшей производной по времени:

$$\mathscr{L}(D_x)D_t^m U + \sum_{k=0}^{m-1} \mathscr{L}_{m-k}(D_x)D_t^k U = F(t,x). \tag{2.5}$$

В настоящее время уравнения вида (2.5) называются *уравнениями соболевского типа*, поскольку именно работы С. Л. Соболева (см. [21, т. I]) послужили началом систематического изучения таких уравнений. Отметим также, что *уравнение Соболева*

$$\Delta D_t^2 u + D_{x_n}^2 u = f(t,x)$$

в литературе является одним из самых популярных среди уравнений, не разрешенных относительно старшей производной.

Будем предполагать, что матричные $\nu \times \nu$-дифференциальные операторы $\mathscr{L}_k(D_x)$, $k = 1, \dots, m$, имеют постоянные коэффициенты и удовлетворяют условию 2, т. е. их символы $\mathscr{L}_k(i\xi) = \big(l^k_{j,r}(i\xi)\big)$ так же, как и символ оператора $\mathscr{L}(D_x)$, квазиоднородные.

Сформулируем теорему о безусловной разрешимости задачи Коши (1.2), для простоты предполагая, что начальные условия нулевые.

**Теорема 2.** *Пусть $|\alpha|/p > t_{\max}$, $\varphi_k(x) \equiv 0$, $k = 1, \dots, m$. Тогда для любой вектор-функции $F(t,x) \in C([0,T];\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n))$ задача (1.2) имеет единственное решение $U(t,x) \in C^m\big([0,T];\mathbf{W}^{\mathbf{l}}_{p,1}(\mathbb{R}^n)\big)$ и справедлива оценка*

$$\big\|U(t,x), C^m\big([0,T];\mathbf{W}^{\mathbf{l}}_{p,1}(\mathbb{R}^n)\big)\big\| \le c(T)\|F(t,x), C([0,T];\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n))\| \tag{2.6}$$

*с константой $c(T)$, не зависящей от $F(t,x)$.*

## § 3. Доказательство основных результатов

При доказательстве теоремы 1 будем следовать схеме из [10, 12]. Поэтому кратко укажем схему доказательства и остановимся на существенных отличиях.

Из условий 1, 2 вытекает, что оператор $\mathscr{L}(D_x)$ отображает пространство $\mathbf{W}^{\mathbf{l}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$ и является ограниченным.

Действительно, если $U(x) \in \mathbf{W}^{\mathbf{l}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, то $j$-ю компоненту вектор-функции $\mathscr{L}(D_x)U(x)$ можно записать в виде

$$(\mathscr{L}(D_x)U(x))_j = \sum_{r=1}^{\nu} l_{j,r}(D_x)U^r(x), \quad l_{j,r}(D_x) = \sum_{\beta\alpha = t_r} a_{j,r,\beta} D_x^\beta.$$

Отсюда $l_{j,r}(D_x)U^r(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$, поэтому $\mathscr{L}(D_x)U(x) \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$, а поскольку коэффициенты $a_{j,r,\beta}$ постоянные, имеем также неравенство

$$\|\mathscr{L}(D_x)U(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)\| \le c\big\|U(x), \mathbf{W}^{\mathbf{l}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)\big\|,$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от $U(x)$.

Следовательно, для доказательства теоремы 1 нужно установить, что при $|\alpha|/p > t_{\max}$ система дифференциальных уравнений

$$\mathscr{L}(D_x)U(x) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

имеет единственное решение $U(x) \in \mathbf{W}^{\mathbf{l}}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ для любой правой части $F(x) \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$, при этом имеет место оценка

$$\big\|U(x), \mathbf{W}^{\mathbf{l}}_{p,1}(\mathbb{R}^n)\big\| \leq C\|F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)\| \tag{3.2}$$

с константой $C > 0$, не зависящей от $F(x)$.

Отметим основные моменты доказательства разрешимости системы (3.1) и получения оценки (3.2).

Для доказательства разрешимости системы (3.1) будем использовать метод построения приближенных решений, подробно описанный в монографии [22]. Этот метод основан на использовании интегрального представления С. В. Успенского [23] для суммируемых функций (см. также [22, гл. 1]):

$$\varphi(x) = \lim_{h\to 0}(2\pi)^{-n}\int\limits_h^{h^{-1}} v^{-|\hat{\alpha}|-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i\frac{x-y}{v^{\hat{\alpha}}}\xi\right)G(\xi)\varphi(y)\,d\xi dy dv, \tag{3.3}$$

где

$$G(\xi) = 2m\langle\xi\rangle^{2m}\exp(-\langle\xi\rangle^{2m}), \quad \langle\xi\rangle^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^{2/\hat{\alpha}_i}, \quad m, 1/\hat{\alpha}_i \in \mathbb{N}.$$

Вначале будем предполагать, что компоненты $F^j(x)$ вектор-функции $F(x) \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$ имеют компактные носители.

Рассмотрим семейство интегральных операторов $P_{k,h}$, $k = 1,\dots,\nu$, $0 < h < 1$, определенных следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{k,h}F(x) = (2\pi)^{-n}\int\limits_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|/t_k}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i\frac{x-y}{v^{\alpha/t_k}}\xi\right) \\ \times G_k(\xi)\left(\sum_{r=1}^{\nu} l^{k,r}(\xi)F^r(y)\right)d\xi dy dv, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $l^{k,r}(\xi)$ — элементы обратной матрицы $(\mathscr{L}(i\xi))^{-1}$ и

$$G_k(\xi) = 2m\langle\xi\rangle_k^{2m}\exp\bigl(-\langle\xi\rangle_k^{2m}\bigr), \quad \langle\xi\rangle_k^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^{2t_k/\alpha_i}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Из определения (3.4) и условий 1–3 следует, что функции $P_{k,h}F(x)$ бесконечно дифференцируемы и

$$\sum_{k=1}^{\nu} l_{j,k}(D_x)P_{k,h}F(x) = F_h^j(x),$$

где

$$F_h^j(x) = (2\pi)^{-n}\int\limits_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|/t_j-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i\frac{x-y}{v^{\alpha/t_j}}\xi\right)G_j(\xi)F^j(y)\,d\xi dy dv.$$

В силу представления (3.3) с $\hat{\alpha}_i = \alpha_i/t_j$ имеем

$$\left\|F_h^j(x) - F^j(x), L_p(\mathbb{R}^n)\right\| \to 0, \quad h \to 0.$$

Следовательно, вектор–функцию $U_h(x)$ с компонентами $U_h^k(x) = P_{k,h}F(x)$, $k = 1, \dots, \nu$, можно рассматривать в качестве приближенного решения системы (3.1). В дальнейшем вектор-функцию $U_h(x)$ будем записывать в виде

$$U_h(x) = P_h F(x) = (P_{1,h}F(x), \dots, P_{\nu,h}F(x))^T. \tag{3.6}$$

Очевидно, можно указать натуральное число $m_1$ такое, что при $m \geq m_1$ в (3.5) функции $P_{k,h}F(x)$ будут суммируемыми в любой степени $p \geq 1$ (см. [12]). В дальнейшем будем считать, что в (3.5) $m \geq m_1$.

В следующем параграфе будет доказано, что при условии $|\alpha|/p > t_{\max}$ справедлива оценка

$$\left\|U_h(x), \mathbf{W}_{p,1}^{\mathbf{l}}(\mathbb{R}^n)\right\| \leq C\|F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)\| \tag{3.7}$$

с константой $C > 0$, не зависящей от $F(x)$ и $h$, а также установлена сходимость

$$\left\|U_{h_1}(x) - U_{h_2}(x), \mathbf{W}_{p,1}^{\mathbf{l}}(\mathbb{R}^n)\right\| \to 0, \quad h_1, h_2 \to 0. \tag{3.8}$$

Покажем, как, используя это, можно доказать теорему 1.

В силу полноты пространства $\mathbf{W}_{p,1}^{\mathbf{l}}(\mathbb{R}^n)$ из (3.7), (3.8) следует, что существует линейный непрерывный оператор

$$P : \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n) \to \mathbf{W}_{p,\sigma}^{\mathbf{l}}(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty, \ \sigma = 1,$$

определенный на финитных вектор-функциях $F(x)$ по формуле

$$PF(x) = \lim_{h \to 0} P_h F(x),$$

при этом вектор-функция $U(x) = PF(x) \in \mathbf{W}_{p,1}^{\mathbf{l}}(\mathbb{R}^n)$ будет решением системы (3.1). В силу плотности множества финитных вектор-функций в $\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$ по теореме о продолжении по непрерывности оператор $P$ можно единственным образом продолжить на все пространство $\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$ с сохранением нормы. Для продолженного оператора будем использовать то же обозначение $P$.

Из неравенства (3.7) следует, что линейные операторы

$$P_h : \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n) \to \mathbf{W}_{p,\sigma}^{\mathbf{l}}(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty, \ \sigma = 1,$$

являются непрерывными и совокупность норм $\{\|P_h\|\}$ ограничена: $\|P_h\| \leq C$. Следовательно, по теореме Банаха — Штейнгауза сходимость

$$\left\|P_h F(x) - PF(x), \mathbf{W}_{p,1}^{\mathbf{l}}(\mathbb{R}^n)\right\| \to 0, \quad h \to 0,$$

имеет место для любой вектор-функции $F(x) \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$.

Из сказанного выше вытекает существование решения $U(x) \in \mathbf{W}_{p,1}^{\mathbf{l}}(\mathbb{R}^n)$ системы (3.1) для любой правой части $F(x) \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$, при этом имеет место оценка (3.2).

Единственность решения системы (3.1) в рассматриваемом пространстве доказывается по аналогии с [10].

Итак, квазиэллиптический оператор

$$\mathscr{L}(D_x) : \mathbf{W}_{p,1}^{\mathbf{l}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty,$$

непрерывен, область его значений при условии, что $|\alpha|/p > t_{\max}$, совпадает со всем пространством $\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$, ядро $\operatorname{Ker} \mathscr{L}(D_x)$ нулевое, ограниченный оператор $P : \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n) \to \mathbf{W}^{\mathbf{l}}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ является обратным.

Следовательно, для полного доказательства теоремы 1 нужно получить оценку (3.7) и установить сходимость (3.8). Этот вопрос обсуждается в следующем параграфе.

Утверждение теоремы 2 является простым следствием доказанной теоремы об изоморфизме квазиэллиптического оператора (1.1).

Действительно, в силу теоремы 1 и условия на символы дифференциальных операторов $\mathscr{L}_k(D_x)$ линейные операторы

$$(\mathscr{L}(D_x))^{-1}\mathscr{L}_{m-k}(D_x) : \mathbf{W}^{\mathbf{l}}_{p,1}(\mathbb{R}^n) \to \mathbf{W}^{\mathbf{l}}_{p,1}(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty, \ k = 0, \dots, m-1,$$

при $|\alpha|/p > t_{\max}$ непрерывны. Следовательно, при $\varphi_k(x) \equiv 0$, $k = 1, \dots, m$, задача (1.2) эквивалентна задаче Коши для дифференциального уравнения с ограниченными операторными коэффициентами:

$$D_t^m U + \sum_{k=0}^{m-1} (\mathscr{L}(D_x))^{-1}\mathscr{L}_{m-k}(D_x) D_t^k U = (\mathscr{L}(D_x))^{-1} F(t,x),$$
$$D_t^k U|_{t=0} = 0, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Поскольку правая часть уравнения $(\mathscr{L}(D_x))^{-1}F(t,x)$ принадлежит пространству $C\big([0,T]; \mathbf{W}^{\mathbf{l}}_{p,1}(\mathbb{R}^n)\big)$, из общей теории задачи Коши вытекают существование и единственность решения задачи $U(t,x) \in C^m\big([0,T]; \mathbf{W}^{\mathbf{l}}_{p,1}(\mathbb{R}^n)\big)$, а также оценка (2.6).

## § 4. Оценки приближенных решений системы (3.1)

Доказательство неравенства (3.7) и сходимости (3.8) разобьем на ряд лемм.

Вначале приведем оценки старших производных компонент вектор-функции (3.6).

**Лемма 4.1.** *Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta\alpha = t_k$. Тогда имеет место оценка*

$$\big\|D_x^\beta U_h^k(x), L_p(\mathbb{R}^n)\big\| \le C_\beta \|F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)\| \tag{4.1}$$

*с константой $C_\beta > 0$, не зависящей от $F(x)$ и $h$, при этом*

$$\big\|D_x^\beta U_{h_1}^k(x) - D_x^\beta U_{h_2}^k(x), L_p(\mathbb{R}^n)\big\| \to 0, \quad h_1, h_2 \to 0. \tag{4.2}$$

Доказательство. Очевидно, оценку (4.1) достаточно провести для вектор-функции $F(x) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Из определения (3.4) имеем

$$D_x^\beta U_h^k(x) = (2\pi)^{-n} \int_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|/t_k - 1} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i \frac{x-y}{v^{\alpha/t_k}} \xi\right)$$
$$\times G_k(\xi)(i\xi)^\beta \left(\sum_{r=1}^{\nu} l^{k,r}(\xi) F^r(y)\right) d\xi dy dv.$$

Используя свойства преобразования Фурье, эту формулу можно переписать в виде

$$D_x^\beta U_h^k(x) = (2\pi)^{-n} \int_h^{h^{-1}} v^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \exp(i(x-y)s) G_k(s v^{\alpha/t_k})\, ds\right) F_{k,\beta}(y)\, dy dv, \tag{4.3}$$

где

$$F_{k,\beta}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(iy\xi)(i\xi)^\beta \left( \sum_{r=1}^{\nu} l^{k,r}(\xi) \widehat{F}^r(\xi) \right) d\xi.$$

Мультииндекс $\beta$ такой, что $\beta\alpha = t_k$, поэтому в силу условий 2, 3 функция

$$\mu_{k,\beta}(\xi) = (i\xi)^\beta \sum_{r=1}^{\nu} l^{k,r}(\xi)$$

удовлетворяет условиям теоремы о мультипликаторах [24]. Тогда из этой теоремы вытекает неравенство

$$\|F_{k,\beta}(x), L_p(\mathbb{R}^n)\| \le c_\beta \|F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)\|$$

с константой $c_\beta$, не зависящей от $F(x)$. Следовательно, используя свойства интегрального представления (3.3) (см. [22, гл. 1]), из (4.3) получаем оценку (4.1).

Доказательство (4.2) проводится аналогичным образом. Лемма доказана.

При получении весовых оценок производных

$$D_x^\beta U_h^k(x), \quad 0 \le \beta\alpha < t_k, \tag{4.4}$$

нам понадобятся некоторые оценки следующих интегралов

$$\mathscr{K}_{\beta,h}^{k,r}(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|/t_k - \beta\alpha/t_k} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left( i \frac{x\xi}{v^{\alpha/t_k}} \right) \times G_k(\xi)(i\xi)^\beta l^{k,r}(\xi) d\xi dv, \quad 0 < h < 1. \tag{4.5}$$

**Лемма 4.2.** *Пусть $|\alpha| + \beta\alpha > t_k$. Тогда существует $m_2$ такое, что если $m \ge m_2$ в определении (3.5) функции $G_k(\xi)$, то справедлива оценка*

$$\langle x \rangle^{|\alpha| + \beta\alpha - t_k} \left| \mathscr{K}_{\beta,h}^{k,r}(x) \right| \le c, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.6}$$

*с константой $c > 0$, не зависящей от $h$.*

Доказательство оценки (4.6) нетрудно провести по аналогии с доказательством леммы 3.3 из [12].

В дальнейшем будем считать, что в определении (3.5) $m \ge \max\{m_1, m_2\}$.

Проведем оценки производных (4.4).

**Лемма 4.3.** *Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta\alpha < t_k$ и $|\alpha|/p > t_k$. Тогда имеет место неравенство*

$$\left\| \langle x \rangle^{-(t_k - \beta\alpha)} D_x^\beta U_h^k(x), L_p(\mathbb{R}^n) \right\| \le c \|F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)\| \tag{4.7}$$

*с константой $c > 0$, не зависящей от $F(x)$ и $h$, при этом*

$$\left\| \langle x \rangle^{-(t_k - \beta\alpha)} \big( D_x^\beta U_{h_1}^k(x) - D_x^\beta U_{h_2}^k(x) \big), L_p(\mathbb{R}^n) \right\| \to 0, \quad h_1, h_2 \to 0. \tag{4.8}$$

Доказательство. Очевидно, оценку (4.7) достаточно провести для вектор–функции $F(x) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Принимая во внимание (3.4), (3.5) и (4.5), производную $D_x^\beta U_h^k(x)$ запишем в виде

$$D_x^\beta U_h^k(x) = \sum_{r=1}^{\nu} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathscr{K}_{\beta,h}^{k,r}(x-y) F^r(y)\, dy.$$

Используя лемму 4.2, получим оценку

$$\left\|\langle x\rangle^{-(t_k-\beta\alpha)} D_x^\beta U_h^k(x), L_p(\mathbb{R}^n)\right\| \\ \leq c_1 \sum_{r=1}^{\nu} \left\| \langle x\rangle^{-(t_k-\beta\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x-y\rangle^{-(|\alpha|+\beta\alpha-t_k)} |F^r(y)|\, dy, L_p(\mathbb{R}^n)\right\|.$$

По условию $|\alpha|/p > t_k$, $t_k-\beta\alpha > 0$, поэтому $|\alpha|+\beta\alpha-t_k > 0$. Учитывая это, будем иметь

$$\left\|\langle x\rangle^{-(t_k-\beta\alpha)} D_x^\beta U_h^k(x),\ L_p(\mathbb{R}^n)\right\| \\ \leq c_2 \sum_{r=1}^{\nu} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} |x_i|^{(\beta\alpha-t_k)/|\alpha|} |x_i-y_i|^{(t_k-\beta\alpha)/|\alpha|-1} |F^r(y)|\, dy, L_p(\mathbb{R}^n)\right\|.$$

Следовательно, применяя неравенство Харди — Литтлвуда [25], получаем оценку (4.7).

Доказательство сходимости (4.8) проводится по аналогии с доказательством (4.7).

Лемма доказана.

Из лемм 4.1, 4.3 непосредственно вытекают оценка (3.7) и сходимость (3.8) для вектор-функции (3.6), являющейся приближенным решением системы (3.1). Тем самым доказательство теоремы 1 полностью завершено.

## § 5. Примеры

В качестве следствий из теоремы 1 сформулируем утверждения о свойствах изоморфизма дифференциальных операторов

$$\mathscr{L}(D_x) : \mathbf{W}_{p,1}^{\mathbf{l}}(\mathbb{R}^n) = \prod_{r=1}^{\nu} W_{p,1}^{l^r}(\mathbb{R}^n) \to \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n), \quad l^r = (t_r/\alpha_1,\dots,t_r/\alpha_n),\ p>1, \tag{5.1}$$

рассмотренных в примерах 1–4.

**1.** Пусть $\mathscr{L}(D_x)$ — матричный дифференциальный оператор, эллиптический по Петровскому, и, как в примере 1, вектор однородности имеет вид $\alpha = \left(\frac{1}{m},\dots,\frac{1}{m}\right)$. Тогда

$$l^r = (t_r m,\dots,t_r m), \quad |\alpha| = \frac{n}{m}$$

и согласно теореме 1 оператор (5.1) устанавливает изоморфизм при условии $n > mpt_{\max}$. Для однородных эллиптических операторов ($t_1 = \dots = t_\nu = 1$) это справедливо при $n > mp$. В частности, оператор Навье (2.1) устанавливает изоморфизм

$$\mathscr{L}(D_x) : \mathbf{W}_{p,1}^{\mathbf{2}}(\mathbb{R}^3) \to \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^3)$$

при $1 < p < \frac{3}{2}$.

**2.** Пусть $\mathscr{L}(D_x)$ — оператор, параболический по Петровскому и, как в примере 2, вектор однородности имеет вид $\alpha = \left(\frac{1}{2b},\dots,\frac{1}{2b},1\right)$. Тогда

$$l^r = t_r(2b,\dots,2b,1), \quad |\alpha| = \frac{n-1}{2b}+1.$$

По теореме 1 оператор (5.1) устанавливает изоморфизм при условии $n+2b-1 > 2bpt_{\max}$.

**3.** Пусть $\mathscr{L}(D_x)$ — оператор, параболический по Эйдельману, и, как в примере 3, вектор однородности $\alpha$ равен $\left(\frac{1}{2b_1}, \dots, \frac{1}{2b_{n-1}}, 1\right)$. Тогда

$$l^r = t_r(2b_1, \dots, 2b_{n-1}, 1), \quad |\alpha| = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2b_i}.$$

Согласно теореме 1 оператор (5.1) устанавливает изоморфизм при условии

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2b_i} > pt_{\max}.$$

**4.** Пусть $\mathscr{L}(D_x)$ — однородный квазиэллиптический оператор ($t_1 = \dots = t_\nu = 1$). Тогда по теореме 1 оператор (5.1) устанавливает изоморфизм при условии $|\alpha| > p$. В частности, оператор параболического типа с «противоположными временами»:

$$\mathscr{L}(D_x) = \begin{pmatrix} D_{x_n} - \Delta' & 0 \\ & \\ 0 & D_{x_n} + \Delta' \end{pmatrix} : W^{\mathbf{2},1}_{p,1}(\mathbb{R}^n) \times W^{\mathbf{2},1}_{p,1}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n) \times L_p(\mathbb{R}^n),$$

устанавливает изоморфизм при $1 < p < \frac{n+1}{2}$.

## § 6. Обобщения

Следуя [14] и описанной в данной работе схеме, можно изучать свойства изоморфизма квазиэллиптических операторов из более широкого класса. А именно, условие 2 на символ оператора $\mathscr{L}(D_x)$ можно заменить следующим.

Условие $2^0$. Существуют векторы

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (t_1, \dots, t_\nu), \quad t_k > 0, \quad (s_1, \dots, s_\nu), \quad s_k \le 0, \quad \max\{s_k\} = 0,$$

такие, что для любого $c > 0$ справедливо равенство

$$\mathscr{L}(c^\alpha i\xi) = \begin{pmatrix} c^{s_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c^{s_\nu} \end{pmatrix} \mathscr{L}(i\xi) \begin{pmatrix} c^{t_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c^{t_\nu} \end{pmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Класс дифференциальных операторов, удовлетворяющих условиям 1, $2^0$ и 3, включает, в частности, операторы, эллиптические по Дуглису — Ниренбергу.

Используя теоремы об изоморфизме для такого класса операторов, можно доказывать теоремы о безусловной разрешимости начальной задачи для более широкого класса уравнений соболевского типа. Например, в работе [14] с использованием теорем об изоморфизме [12] некоторых операторов, эллиптических по Дуглису — Ниренбергу, доказана теорема о корректности начальной задачи для класса систем первого порядка:

$$A_0 D_t u + \sum_{j=1}^{n} A_j D_{x_j} u + Bu = F(t, x), \tag{6.1}$$

где матрица $A_0$ вырожденна. В этот класс входит, в частности, *система Соболева* [26]

$$v_t + [\vec{\omega}, v] + \nabla p = f(t, x), \quad \operatorname{div} v = g(t, x),\ x \in \mathbb{R}^3. \tag{6.2}$$

Напомним, что в случае

$$A_0 = A_0^* > 0, \quad A_k = A_k^*, \quad k = 1, \dots, n,$$

системы вида (6.1) называются *гиперболическими по Фридрихсу* [27], но система (6.2) не входит в этот класс, поскольку для нее $\det A_0 = 0$.

Замечание. Интересно отметить, что две фундаментальные работы [26] и [27], посвященные теории систем вида (6.1), опубликованы в один и тот же год.

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

**2.** *Cantor M.* Spaces of functions with asymptotic conditions on $\mathbb{R}^n$ // Indiana Univ. Math. J. 1975. V. 24, N 9. P. 897–902.

**3.** *McOwen R. C.* The behavior of the Laplacian on weighted Sobolev spaces // Comm. Pure Appl. Math. 1979. V. 32, N 6. P. 783–795.

**4.** *Багиров Л. А., Кондратьев В. А.* Об эллиптических уравнениях в $\mathbb{R}^n$ // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 3. С. 498–504.

**5.** *Cantor M.* Some problems of global analysis on asymptotically simple manifolds // Compositio Math. 1979. V. 38, N 1. P. 3–35.

**6.** *McOwen R. C.* On elliptic operators in $\mathbb{R}^n$ // Comm. Partial Differential Equations. 1980. V. 5, N 9. P. 913–933.

**7.** *Lockhart R. B.* Fredholm properties of a class of elliptic operators on non–compact manifolds // Duke Math. J. 1981. V. 48, N 1. P. 289–312.

**8.** *Choquet–Bruhat Y., Christodoulou D.* Elliptic systems in $H_{s,\sigma}$ spaces on manifolds which are Euclidean at infinity // Acta Math. 1981. V. 146, N 1/2. P. 129–150.

**9.** *Lockhart R. B., McOwen R. C.* Elliptic differential operators on noncompact manifolds // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1985. V. 12, N 3. P. 409–447.

**10.** *Демиденко Г. В.* О квазиэллиптических операторах в $\mathbb{R}_n$ // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1028–1037.

**11.** *Hile G. N.* Fundamental solutions and mapping properties of semielliptic operators // Math. Nachrichten. 2006. V. 279, N 13–14. P. 1538–1572.

**12.** *Демиденко Г. В.* Изоморфные свойства одного класса дифференциальных операторов и их приложения // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 1036–1056.

**13.** *Демиденко Г. В.* Об одном классе матричных дифференциальных операторов // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 1. С. 103–118.

**14.** *Demidenko G. V.* Mapping properties of quasielliptic operators and applications // Int. J. Dynamical Systems Differential Equations. 2007. V. 1, N 1. P. 58–67.

**15.** *Волевич Л. Р.* Локальные свойства решений квазиэллиптических систем // Мат. сб. 1962. Т. 59, № 3. С. 3–52.

**16.** *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.

**17.** *Демиденко Г. В.* О весовых соболевских пространствах и интегральных операторах, определяемых квазиэллиптическими уравнениями // Докл. РАН. 1994. Т. 334, № 4. С. 420–423.

**18.** *Кудрявцев Л. Д.* Теоремы вложения для классов функций, определенных на всем пространстве или полупространстве // I. Мат. сб. 1966. Т. 69, № 4. С. 616–639; II. Мат. сб. 1966. Т. 70, № 1. С. 3–35.

**19.** *Nirenberg L., Walker H. F.* The null spaces of elliptic partial differential operators in $\mathbb{R}^n$ // J. Math. Anal. Appl. 1973. V. 42, N 2. P. 271–301.

**20.** *Cantor M.* Elliptic operators and the decomposition of tensor fields // Bull. Amer. Math. Soc. 1981. V. 5, N 3. P. 235–262.

**21.** *Соболев С. Л.* Избранные труды. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики; Филиал "Гео" Изд-ва СО РАН. Т. I, 2003. Т. II, 2006.

**22.** *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
**23.** *Успенский С. В.* О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1972. Т. 117. С. 292–299.
**24.** *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1969. Т. 105. С. 89–167.
**25.** *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
**26.** *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
**27.** *Friedrichs K. O.* Symmetric hyperbolic linear differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1954. V. 7, N 2. P. 345–392.

*Статья поступила 10 июня 2008 г.*

Демиденко Геннадий Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru