Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2008. Том 49, № 3

УДК 517.9

О СПЕКТРАХ И СИНГУЛЯРНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С БИОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ

О. Г. Авсянкин

Аннотация. Рассматриваются многомерные интегральные операторы с биоднородными и инвариантными относительно всех вращений ядрами. Для усеченных операторов указанного типа описано предельное поведение множества сингулярных значений, а в том случае, когда эти операторы самосопряженные, описано предельное поведение их спектров.

Ключевые слова: интегральный оператор, усеченный оператор, спектр, сингулярные значения, C^*-алгебра.

Введение. Работа посвящена многомерным интегральным операторам с биоднородными и инвариантными относительно всех вращений ядрами. Изучение таких операторов начато в [1] и продолжено в [2]. В частности, в [2] описано предельное поведение ε-псевдоспектров «усеченных» операторов с ядрами вышеуказанного типа. Кроме того, построен пример, показывающий, что для спектров аналогичные результаты, вообще говоря, не имеют места. Данная работа в некотором смысле является продолжением [2]. В ней исследуется предельное поведение множества сингулярных значений «усеченных» интегральных операторов с биоднородными ядрами, а при дополнительном предположении самосопряженности этих операторов описывается и предельное поведение их спектров. Отметим, что для операторов Винера — Хопфа, Тёплица и некоторых других классов операторов подобные результаты получены в [3–5].

Ниже использованы следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство; $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$; $|x|=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$; $dx=dx_1\dots dx_n$; $\Omega_n=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\le 1\}$; $\mathfrak{L}(H)$ — C^*-алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H; $\mathrm{Sp}(A)$ — спектр оператора $A\in\mathfrak{L}(H)$; $\mathrm{Spr}(A)$ — спектральный радиус оператора $A\in\mathfrak{L}(H)$.

1. В пространстве $L_2(\Omega_n)$ рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x)=\int\limits_{\Omega_n}k(x,y)\varphi(y)\,dy,\quad x\in\Omega_n,\tag{1}$$

предполагая, что функция $k(x,y)$ определена на $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет следующим условиям:

1°) однородности степени $(-n)$, т. е.

$$k(\alpha x,\alpha y)=\alpha^{-n}k(x,y)\quad\forall\,\alpha>0;$$

2°) инвариантности относительно группы вращений $SO(n)$, т. е.

$$k(\omega(x), \omega(y)) = k(x, y) \quad \forall\, \omega \in SO(n);$$

3°) суммируемости, т. е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, y)||y|^{-n/2}\, dy < \infty, \quad \text{где} \quad e_1 = (1, 0, \ldots, 0).$$

Известно [6, с. 70], что оператор K ограничен в пространстве $L_2(\Omega_n)$. Обозначим через $\widetilde{K}$ оператор вида

$$(\widetilde{K}\varphi)(x) = \int\limits_{\Omega_n} k(y, x)\varphi(y)\, dy, \quad x \in \Omega_n. \tag{2}$$

Определим в $L_2(\Omega_n)$ проектор P_τ $(0 < \tau < 1)$ формулой

$$(P_\tau\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \tau < |x| \le 1, \\ 0, & |x| \le \tau, \end{cases} \tag{3}$$

а также оператор R_τ $(0 < \tau < 1)$ — формулой

$$(R_\tau\varphi)(x) = \begin{cases} \left(\frac{\tau}{|x|^2}\right)^{n/2}\varphi\left(\tau\frac{x}{|x|^2}\right), & \tau < |x| \le 1, \\ 0, & |x| \le \tau. \end{cases} \tag{4}$$

В [7] показано, что

$$R_\tau^2 = P_\tau; \quad P_\tau R_\tau = R_\tau P_\tau = R_\tau; \tag{5}$$

$$R_\tau K R_\tau = P_\tau \widetilde{K} P_\tau. \tag{6}$$

2. Определим в $L_2(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2})$ оператор A равенством

$$A = \lambda(I_1 \otimes I_2) + \lambda_1(K_1 \otimes I_2) + \lambda_2(I_1 \otimes K_2) + (K_3 \otimes K_4), \tag{7}$$

где $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, I_j $(j = 1, 2)$ — единичный оператор в $L_2(\Omega_{n_j})$, K_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ — оператор вида (1), причем K_1, K_3 действуют в $L_2(\Omega_{n_1})$, а K_2, K_4 действуют в $L_2(\Omega_{n_2})$. С оператором A естественным образом связаны следующие три оператора:

$$A_1 = \lambda(I_1 \otimes I_2) + \lambda_1(\widetilde{K}_1 \otimes I_2) + \lambda_2(I_1 \otimes K_2) + (\widetilde{K}_3 \otimes K_4), \tag{8}$$

$$A_2 = \lambda(I_1 \otimes I_2) + \lambda_1(K_1 \otimes I_2) + \lambda_2(I_1 \otimes \widetilde{K}_2) + (K_3 \otimes \widetilde{K}_4), \tag{9}$$

$$A_{12} = \lambda(I_1 \otimes I_2) + \lambda_1(\widetilde{K}_1 \otimes I_2) + \lambda_2(I_1 \otimes \widetilde{K}_2) + (\widetilde{K}_3 \otimes \widetilde{K}_4), \tag{10}$$

где $\widetilde{K}_j$ — оператор вида (2). Положим

$$A_{\tau_1,\tau_2} = (P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})A(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}), \tag{11}$$

где P_{τ_j} — проектор вида (3), действующий в пространстве $L_2(\Omega_{n_j})$, $j = 1, 2$.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ множество всех семейств $\{B_{\tau_1,\tau_2}\}$ операторов B_{τ_1,τ_2}, действующих в пространстве $(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})(L_2(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2}))$, таких, что

$$\|\{B_{\tau_1,\tau_2}\}\| := \sup_{0<\tau_1,\tau_2<1} \|B_{\tau_1,\tau_2}\| < \infty. \tag{12}$$

Легко проверить, что множество $\mathfrak{F}$ с покомпонентно выполняемыми операциями и нормой (12) представляет собой C^*-алгебру. Поскольку множество

$$\mathfrak{F}_0 = \{\{C_{\tau_1,\tau_2}\} \in \mathfrak{F} : \lim_{\substack{\tau_1 \to 0,\\ \tau_2 \to 0}} \|C_{\tau_1,\tau_2}\| = 0\}$$

является замкнутым двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{F}$, то фактор-алгебра $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}_0$ будет C^*-алгеброй. Пусть $\mathfrak{A}$ — наименьшая C^*-подалгебра C^*-алгебры $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}_0$, содержащая все элементы вида $\{A_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0$, где A_{τ_1,τ_2} определяется из (11). В [2] показано, что если $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{A}$, то в $\mathfrak{L}(L_2(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2}))$ существуют операторы B, B_1, B_2 и B_{12} такие, что

$$B = s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1 \to 0,\\ \tau_2 \to 0}} (P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})\, B_{\tau_1,\tau_2}(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}), \tag{13}$$

$$B_1 = s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1 \to 0,\\ \tau_2 \to 0}} (R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})\, B_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}), \tag{14}$$

$$B_2 = s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1 \to 0,\\ \tau_2 \to 0}} (P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})\, B_{\tau_1,\tau_2}(P_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}), \tag{15}$$

$$B_{12} = s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1 \to 0,\\ \tau_2 \to 0}} (R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2})\, B_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1} \otimes R_{\tau_2}), \tag{16}$$

где R_{τ_j} — оператор вида (4), действующий в $L_2(\Omega_{n_j})$. Заметим, что для семейства $\{A_{\tau_1,\tau_2}\}$ вида (11) предельные операторы, определяемые формулами (13)–(16), суть операторы (7)–(10) соответственно. Это непосредственно проверяется с помощью формул (5) и (6).

Предложение 1 [2]. *Элемент $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{A}$ обратим в алгебре $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда операторы B, B_1, B_2 и B_{12} обратимы в $\mathfrak{L}(L_2(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2}))$.*

Для дальнейшего необходимо уточнить понятие предела семейства множеств.

Определение 1. Пусть $\{E_{\tau_1,\tau_2}\}$, $0 < \tau_1, \tau_2 < 1$, — семейство множеств, содержащихся в $\mathbb{C}$. *Пределом семейства множеств* E_{τ_1,τ_2} при $\tau_1 \to 0$, $\tau_2 \to 0$ назовем множество E, состоящее из всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для каждого из которых найдутся убывающие последовательности $\{\tau_{1s}\}$ и $\{\tau_{2s}\}$ такие, что $\lim\limits_{s\to\infty} \tau_{1s} = \lim\limits_{s\to\infty} \tau_{2s} = 0$, и последовательность $\{\lambda_s\} \subset \mathbb{C}$ такая, что $\lambda_s \in E_{\tau_{1s},\tau_{2s}}$ и $\lim\limits_{s\to\infty} \lambda_s = \lambda$. (В этом случае будем писать $E = \lim\limits_{\substack{\tau_1 \to 0,\\ \tau_2 \to 0}} E_{\tau_1,\tau_2}$.)

Теорема 1. *Пусть $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{A}$. Тогда*

$$\lim_{\substack{\tau_1 \to 0,\\ \tau_2 \to 0}} \operatorname{Sp}(B_{\tau_1,\tau_2}) \subset \operatorname{Sp}(B) \cup \operatorname{Sp}(B_1) \cup \operatorname{Sp}(B_2) \cup \operatorname{Sp}(B_{12}). \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \notin \operatorname{Sp}(B) \cup \operatorname{Sp}(B_1) \cup \operatorname{Sp}(B_2) \cup \operatorname{Sp}(B_{12})$, т. е. операторы $B - \lambda_0 I$, $B_1 - \lambda_0 I$, $B_2 - \lambda_0 I$ и $B_{12} - \lambda_0 I$, где $I = I_1 \otimes I_2$, обратимы в $\mathfrak{L}(L_2(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2}))$. Тогда в силу предложения 1 элемент $\{B_{\tau_1,\tau_2} - \lambda_0(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})\} + \mathfrak{F}_0$ обратим в C^*-алгебре $\mathfrak{A}$. Это означает, что найдутся такие числа $\delta_1, \delta_2 \in (0,1)$, что для всех $0 < \tau_1 < \delta_1$, $0 < \tau_2 < \delta_2$ операторы $B_{\tau_1,\tau_2} - \lambda_0(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})$ обратимы в пространстве $(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})(L_2(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2}))$, причем

$$M := \sup_{\substack{0<\tau_1<\delta_1,\\ 0<\tau_2<\delta_2}} \|(B_{\tau_1,\tau_2} - \lambda_0(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}))^{-1}\| < \infty.$$

Тогда при вышеуказанных значениях τ_1 и τ_2 справедливо неравенство

$$\mathrm{Spr}((B_{\tau_1,\tau_2} - \lambda_0(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}))^{-1}) \le M,$$

из которого имеем

$$\begin{aligned} M \ge \sup\{|\mu| : \mu \in \mathrm{Sp}((B_{\tau_1,\tau_2} - \lambda_0(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}))^{-1})\} \\ = \sup\{|\mu|^{-1} : \mu \in \mathrm{Sp}(B_{\tau_1,\tau_2} - \lambda_0(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}))\} \\ = (\inf\{|\mu| : \mu \in \mathrm{Sp}(B_{\tau_1,\tau_2} - \lambda_0(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}))\})^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\inf_{\mu \in \mathrm{Sp}(B_{\tau_1,\tau_2})} |\mu - \lambda_0| \ge 1/M$$

для всех $0 < \tau_1 < \delta_1$, $0 < \tau_2 < \delta_2$. Значит, $\lambda_0 \notin \lim\limits_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}} \mathrm{Sp}(B_{\tau_1,\tau_2})$. Следовательно, справедливо (17). $\square$

Теорема 2. *Пусть $\{B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{A}$ и операторы B_{τ_1,τ_2} являются самосопряженными для всех $0 < \tau_1$, $\tau_2 < 1$. Тогда*

$$\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}} \mathrm{Sp}(B_{\tau_1,\tau_2}) = \mathrm{Sp}(B) \cup \mathrm{Sp}(B_1) \cup \mathrm{Sp}(B_2) \cup \mathrm{Sp}(B_{12}). \tag{18}$$

Доказательство. Так как P_{τ_j} и R_{τ_j}, где $j = 1, 2$, суть самосопряженные операторы, то самосопряженными являются и операторы B, B_1, B_2 и B_{12}. Поскольку спектр самосопряженного оператора веществен, ниже всюду считаем, что $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Если $\lambda_0 \notin \lim\limits_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}} \mathrm{Sp}(B_{\tau_1,\tau_2})$, то найдутся такие числа $\varepsilon > 0$ и $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1)$, что для всех $\mu \in \bigcup\{\mathrm{Sp}(B_{\tau_1,\tau_2}) : 0 < \tau_1 < \delta_1,\ 0 < \tau_2 < \delta_2\}$ выполняется неравенство $|\lambda_0 - \mu| > \varepsilon$. Тогда для любых $0 < \tau_1 < \delta_1$, $0 < \tau_2 < \delta_2$ оператор $B_{\tau_1,\tau_2} - \lambda_0(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})$ обратим в пространстве $(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})(L_2(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2}))$, причем оператор $(B_{\tau_1,\tau_2} - \lambda_0(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}))^{-1}$ является самосопряженным. Учитывая, что спектральный радиус любого самосопряженного оператора равен его норме (см., например, [8, с. 54]), имеем

$$\begin{aligned} \|(B_{\tau_1,\tau_2} - \lambda_0(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}))^{-1}\| = \mathrm{Spr}((B_{\tau_1,\tau_2} - \lambda_0(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2}))^{-1}) \\ = \sup_{\mu\in \mathrm{Sp}(B_{\tau_1,\tau_2})} |\lambda_0 - \mu|^{-1} \le 1/\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, элемент $\{B_{\tau_1,\tau_2} - \lambda_0(P_{\tau_1} \otimes P_{\tau_2})\} + \mathfrak{F}_0$ обратим в алгебре $\mathfrak{A}$. Но тогда в силу предложения 1 операторы $B - \lambda_0 I$, $B_1 - \lambda_0 I$, $B_2 - \lambda_0 I$ и $B_{12} - \lambda_0 I$, где $I = I_1 \otimes I_2$, обратимы в $\mathfrak{L}(L_2(\Omega_{n_1} \times \Omega_{n_2}))$, т. е. $\lambda_0 \notin \mathrm{Sp}(B) \cup \mathrm{Sp}(B_1) \cup \mathrm{Sp}(B_2) \cup \mathrm{Sp}(B_{12})$. Таким образом, доказано вложение

$$\mathrm{Sp}(B) \cup \mathrm{Sp}(B_1) \cup \mathrm{Sp}(B_2) \cup \mathrm{Sp}(B_{12}) \subset \lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}} \mathrm{Sp}(B_{\tau_1,\tau_2}). \tag{19}$$

Из (19) и (17) вытекает (18). $\square$

Следствие 1. *Пусть оператор A вида (7) является самосопряженным. Тогда*

$$\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}} \mathrm{Sp}(A_{\tau_1,\tau_2}) = \mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(A_1) = \mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(A_2), \tag{20}$$

где операторы A_1 *и* A_2 *определяются формулами* (8) *и* (9) *соответственно.*

Доказательство. Так как операторы P_{τ_j}, где $j=1,2$, являются самосопряженными, операторы A_{τ_1,τ_2} вида (11) также являются самосопряженными. Применяя к элементу $\{A_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0\in\mathfrak{A}$ теорему 2, получаем

$$\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}} \mathrm{Sp}(A_{\tau_1,\tau_2}) = \mathrm{Sp}(A)\cup\mathrm{Sp}(A_1)\cup\mathrm{Sp}(A_2)\cup\mathrm{Sp}(A_{12}). \tag{21}$$

Рассмотрим унитарный оператор

$$U_j:\ L_2(\Omega_{n_j})\to L_2(\Omega_{n_j}),\quad (U_j\varphi)(x)=\overline{\varphi(x)}, \tag{22}$$

где $j=1,2$. Очевидно, что $U_j^2=I_j$ и $U_j\widetilde{K}U_j=K^*$. Тогда $U(\bar{\mu}I-A^*)U=\mu I-A_{12}$, где $U=U_1\otimes U_2$, $I=I_1\otimes I_2$. Отсюда следует, что

$$\mu\in\mathrm{Sp}(A_{12})\Longleftrightarrow\bar{\mu}\in\mathrm{Sp}(A^*)\Longleftrightarrow\mu\in\mathrm{Sp}(A).$$

Таким образом, $\mathrm{Sp}(A_{12})=\mathrm{Sp}(A)$. Аналогично с помощью равенства $U(\bar{\mu}I-A_2^*)U=\mu I-A_1$ доказывается, что $\mathrm{Sp}(A_1)=\mathrm{Sp}(A_2)$. Тогда из (21) вытекает (20). □

3. В этом пункте мы изучим предельное поведение множества сингулярных значений рассматриваемых операторов. Следуя [4, с. 78; 5, с. 119], введем

Определение 2. Пусть H — гильбертово пространство и $D\in\mathfrak{L}(H)$. Множество $\Sigma(D)=\{s\in[0;\infty):\ s^2\in\mathrm{Sp}(D^*D)\}$ называется *множеством сингулярных значений* оператора D.

Заметим, что оператор D^*D самосопряженный и положительный. Обозначим через $(D^*D)^{1/2}$ положительный квадратный корень из оператора D^*D. Хорошо известно, что такой корень существует и единствен. Тогда из теоремы об отображении спектра (см., например, [8, с. 61]) следует, что

$$\Sigma(D)=\mathrm{Sp}((D^*D)^{1/2}). \tag{23}$$

Теорема 3. *Пусть* $\{B_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0\in\mathfrak{A}$. *Тогда*

$$\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}} \Sigma(B_{\tau_1,\tau_2})=\Sigma(B)\cup\Sigma(B_1)\cup\Sigma(B_2)\cup\Sigma(B_{12}), \tag{24}$$

где операторы B, B_1, B_2 *и* B_{12} *определяются формулами* (13)–(16).

Доказательство. Рассмотрим элемент $\{B^*_{\tau_1,\tau_2}B_{\tau_1,\tau_2}\}+\mathfrak{F}_0\in\mathfrak{A}$. Для семейства $\{B^*_{\tau_1,\tau_2}B_{\tau_1,\tau_2}\}$ вычислим пределы, определяемые формулами вида (13)–(16). Покажем, например, что

$$s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}}(R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})B^*_{\tau_1,\tau_2}B_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})=B_1^*B_1.$$

Прежде всего заметим, что

$$s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}}(R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})B^*_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})=B_1^*. \tag{25}$$

Действительно, если A_{τ_1,τ_2} — семейство вида (11), то, используя равенства (5) и (6), получаем

$$s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}}(R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})A^*_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})=s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}}((R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})A(R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2}))^*$$
$$=s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}}((P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})A_1(P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2}))^*=s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}}(P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})A_1^*(P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})=A_1^*,$$

где A_1 — оператор вида (8). Учитывая, что элементы $\{A_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0$ являются образующими алгебры $\mathfrak{A}$, убеждаемся в справедливости формулы (25).

Далее, в силу равенств (5), (14) и (25) имеем

$$\begin{aligned}&s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}} (R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})B^*_{\tau_1,\tau_2}B_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})\\ &\quad = s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}} (R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})B^*_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})(R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})B_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2}) = B_1^*B_1.\end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}} (P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2})B^*_{\tau_1,\tau_2}B_{\tau_1,\tau_2}(P_{\tau_1}\otimes P_{\tau_2}) = B^*B,$$

$$s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}} (P_{\tau_1}\otimes R_{\tau_2})B^*_{\tau_1,\tau_2}B_{\tau_1,\tau_2}(P_{\tau_1}\otimes R_{\tau_2}) = B_2^*B_2,$$

$$s\text{-}\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}} (R_{\tau_1}\otimes R_{\tau_2})B^*_{\tau_1,\tau_2}B_{\tau_1,\tau_2}(R_{\tau_1}\otimes R_{\tau_2}) = B_{12}^*B_{12}.$$

Применяя к элементу $\{B^*_{\tau_1,\tau_2}B_{\tau_1,\tau_2}\} + \mathfrak{F}_0$ теорему 2, получим

$$\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}} \mathrm{Sp}(B^*_{\tau_1,\tau_2}B_{\tau_1,\tau_2}) = \mathrm{Sp}(B^*B)\cup \mathrm{Sp}(B_1^*B_1)\cup \mathrm{Sp}(B_2^*B_2)\cup \mathrm{Sp}(B_{12}^*B_{12}).$$

Используя теорему об отображении спектра [8, с. 61], запишем

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}} \mathrm{Sp}((B^*_{\tau_1,\tau_2}B_{\tau_1,\tau_2})^{1/2}) &= \lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}} (\mathrm{Sp}(B^*_{\tau_1,\tau_2}B_{\tau_1,\tau_2}))^{1/2}\\ &= (\mathrm{Sp}(B^*B)\cup \mathrm{Sp}(B_1^*B_1)\cup \mathrm{Sp}(B_2^*B_2)\cup \mathrm{Sp}(B_{12}^*B_{12}))^{1/2}\\ &= \mathrm{Sp}((B^*B)^{1/2})\cup \mathrm{Sp}((B_1^*B_1)^{1/2})\cup \mathrm{Sp}((B_2^*B_2)^{1/2})\cup \mathrm{Sp}((B_{12}^*B_{12})^{1/2}).\end{aligned}$$

Учитывая (23), приходим к (24). Теорема доказана. $\square$

Следствие 2. *Пусть A — оператор вида* (7). *Тогда*

$$\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}} \Sigma(A_{\tau_1,\tau_2}) = \Sigma(A)\cup\Sigma(A^*)\cup\Sigma(A_1)\cup\Sigma(A_1^*) = \Sigma(A)\cup\Sigma(A^*)\cup\Sigma(A_2)\cup\Sigma(A_2^*), \tag{26}$$

где A_1 и A_2 — операторы вида (8) *и* (9).

Доказательство. В силу теоремы 3

$$\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}} \Sigma(A_{\tau_1,\tau_2}) = \Sigma(A)\cup\Sigma(A_1)\cup\Sigma(A_2)\cup\Sigma(A_{12}). \tag{27}$$

Пусть U_j — оператор вида (22) и $U = U_1\otimes U_2$. Используя легко проверяемые равенства $UA_{12}U = A^*$, $UA_{12}^*U = A$ и определение 2, получим

$$\begin{aligned}(\Sigma(A_{12}))^2 &= \mathrm{Sp}(A_{12}^*A_{12}) = \mathrm{Sp}(UA_{12}^*A_{12}U)\\ &= \mathrm{Sp}(UA_{12}^*UUA_{12}U) = \mathrm{Sp}(AA^*) = (\Sigma(A^*))^2.\end{aligned}$$

Таким образом, $\Sigma(A_{12}) = \Sigma(A^*)$. Аналогично доказывается, что

$$\Sigma(A_2) = \Sigma(A_1^*);\quad \Sigma(A_1) = \Sigma(A_2^*).$$

Тогда из (27) следует (26). $\square$

Хорошо известно (см., например, [8, с. 17]), что для любого оператора $D\in\mathfrak{L}(H)$ справедливо равенство $\mathrm{Sp}(D^*D)\setminus\{0\} = \mathrm{Sp}(DD^*)\setminus\{0\}$. Следовательно, $\Sigma(D)\setminus\{0\} = \Sigma(D^*)\setminus\{0\}$. Но тогда

$$\Sigma(D)\cup\Sigma(D^*)\subset\Sigma(D)\cup\{0\}.$$

Это простое замечание позволяет непосредственно из следствия 2 получить

Следствие 3. *Пусть A — оператор вида (7). Тогда*

$$\Sigma(A)\cup\Sigma(A_1)\subset \lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}}\Sigma(A_{\tau_1,\tau_2})\subset\Sigma(A)\cup\Sigma(A_1)\cup\{0\},$$

$$\Sigma(A)\cup\Sigma(A_2)\subset \lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}}\Sigma(A_{\tau_1,\tau_2})\subset\Sigma(A)\cup\Sigma(A_2)\cup\{0\}.$$

Если множество $\Sigma(A)$ содержит число $s=0$, то

$$\lim_{\substack{\tau_1\to 0,\\ \tau_2\to 0}}\Sigma(A_{\tau_1,\tau_2})=\Sigma(A)\cup\Sigma(A_1)=\Sigma(A)\cup\Sigma(A_2).$$

Замечание. Если в (7) $\lambda=0$, то число $s=0$ заведомо является сингулярным значением оператора A. Это следует из теоремы 1 работы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Авсянкин О. Г., Деундяк В. М.* О вычислении индекса многомерных интегральных операторов с биоднородными ядрами // Докл. РАН. 2003. Т. 391, № 1. С. 7–9.
2. *Авсянкин О. Г.* Многомерные интегральные операторы с биоднородными ядрами: проекционный метод и псевдоспектры // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 501–513.
3. *Böttcher A.* Pseudospectra and singular values of large convolution operators // J. Integral Equations Appl. 1994. V. 6, N 3. P. 267–301.
4. *Böttcher A., Grudsky S. M.* Toeplitz matrices, asymptotic linear algebra and functional analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 2000.
5. *Hagen R., Roch S., Silbermann B.* C^*-Algebras and numerical analysis. New York; Basel: Marcel Dekker, 2001.
6. *Karapetiants N., Samko S.* Equations with involutive operators. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 2001.
7. *Авсянкин О. Г., Карапетянц Н. К.* О псевдоспектрах многомерных интегральных операторов с однородными степени $-n$ ядрами // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1199–1216.
8. *Мёрфи Дж.* C^*-алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997.

Статья поступила 12 марта 2007 г., окончательный вариант — 30 ноября 2007 г.

Авсянкин Олег Геннадиевич
Южный федеральный университет,
факультет математики, механики и компьютерных наук (мехмат),
кафедра дифференциальных и интегральных уравнений,
ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону 344090
avsyanki@math.rsu.ru