Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1

УДК 517.97

УСРЕДНЕНИЕ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. В. Жиков, С. Е. Пастухова

Аннотация. Рассмотрены дивергентные эллиптические уравнения с весом, локально интегрируемым вместе с обратным. Для уравнений этого типа наблюдается эффект Лаврентьева, заключающийся в том, что основные краевые задачи допускают неединственную постановку. Приведена классификация решений. Показана достижимость так называемых W-решений. Изучено усреднение произвольных достижимых решений и установлено, что их асимптотическое поведение неодинаково. При условии повышенной суммируемости веса получены оценки для разности между точным решением и специальными приближениями.

Ключевые слова: эффект Лаврентьева, достижимость, усреднение, аппроксимационное решение.

§ 1. Классификация решений вырождающихся эллиптических уравнений

1. Напомним понятия слабого, вариационного и аппроксимационного решений, а также общие свойства этих решений, известные из работ [1, 2].

Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ уравнение

$$-\operatorname{div} \rho A \nabla u + \rho u = \rho f, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \tag{1.1}$$

где $A = A(x)$ — измеримая симметрическая матрица такая, что

$$\lambda \xi^2 \leq A\xi\xi \leq \lambda^{-1}\xi^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \lambda > 0, \tag{1.2}$$

а вес ρ удовлетворяет условию $\rho = \rho(x) \geq 0$, $\rho, \rho^{-1} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Введем весовое соболевское пространство $W = W(\mathbb{R}^d, \rho\, dx)$, состоящее из функций $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ с конечной нормой $\|u\|_\rho = \big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} (u^2 + |\nabla u|^2)\rho\ dx\big)^{\frac{1}{2}}$. Благодаря неравенству $\big(\int\limits_\Omega |u|\, dx\big)^2 \leq \int\limits_\Omega u^2 \rho\, dx \cdot \int\limits_\Omega \rho^{-1}\, dx$, где Ω — любая ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, W полно относительно нормы $\|u\|_\rho$.

Функцию $u \in W$ назовем *слабым решением уравнения* (1.1), если выполнено интегральное тождество

$$[u, \varphi] = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \tag{1.3}$$

где

$$[u, \varphi] = \int (A\nabla u \nabla \varphi + u\varphi)\rho\, dx, \quad (f, \varphi) = \int f\varphi\rho\, dx.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00621).

Здесь и далее для упрощения записи $\int \cdot\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \cdot\, dx$.

Вопрос о единственности слабого решения приводит к проблеме плотности гладких функций в пространстве W. Если ρ — локально невырожденный вес, т. е. $\rho + \rho^{-1} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, то плотность гладких функций нетрудно показать. Для «типичного» вырожденного веса плотности гладких функций нет, нет и единственности слабых решений. В связи с этим определим пространство $H = H(\mathbb{R}^d, \rho\, dx)$ как замыкание множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ в W, и пусть V — промежуточное пространство, $H \subseteq V \subseteq W$.

Определение 1.1. Будем говорить, что $u \in V$ есть *V-решение* или *вариационное решение*, если интегральное тождество (1.3) выполнено для любой пробной функции $\varphi \in V$.

Существование и единственность V-решения непосредственно следуют из теоремы Рисса о представлении. Взяв в тождестве (1.3) в качестве пробной функции само V-решение, приходим к энергетическому равенству

$$[u, u] = (f, u). \tag{1.4}$$

Предложение 1.2. *Слабое решение является вариационным тогда и только тогда, когда выполнено энергетическое равенство.*

Доказательство. Определим пространство V как наименьшее подпространство в W, содержащее H и само решение. Тогда тождество (1.3) выполнено для любого $\varphi \in V$.

Таким образом, понятие вариационного решения можно определить без указания промежуточного подпространства.

Очевидно, что V-решение служит минимизантом вариационной задачи

$$\min_V F(u), \quad F(u) = [u, u] - 2(f, u).$$

Предложение 1.3 (см. [1]). *Если $H \neq W$, то для некоторой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$*

$$\min_W F(u) < \min_H F(u) = \inf_{C_0^\infty} F(u). \tag{1.5}$$

Итак, в задачах (1.5) минимум по множеству всех допустимых функций может быть меньше точной нижней грани по множеству гладких допустимых функций. Такого рода явления в вариационных задачах принято называть *эффектом Лаврентьева.*

Вариационные решения не исчерпывают всего множества слабых решений.

Предложение 1.4. *Если u_1, u_2 — вариационные решения, $u_1 \neq u_2$, то полусумма $\frac{u_1+u_2}{2}$ есть слабое, но не вариационное решение.*

Действительно, для полусуммы выполнено интегральное тождество (1.3), но не энергетическое равенство (1.4), так как $\left(f, \frac{u_1+u_2}{2}\right) = \frac{1}{2}([u_1, u_1] + [u_2, u_2]) > \left[\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{u_1+u_2}{2}\right]$.

Пример. Пусть $d = 2$, вес ρ равен 1 вне единичного круга $Q = \{x : |x| \le 1\}$, а внутри этого круга задан равенством $\rho(x) = \begin{cases} |x|^\alpha, & \text{если } x_1 x_2 < 0, \\ |x|^{-\alpha}, & \text{если } x_1 x_2 > 0, 0 < \alpha < 2. \end{cases}$ Рассмотрим ограниченную функцию

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 > 0,\ x_2 > 0, \\ \sin\theta, & \text{если } x_1 < 0,\ x_2 > 0, \\ 0, & \text{если } x_1 < 0,\ x_2 < 0, \\ \cos\theta, & \text{если } x_1 > 0,\ x_2 < 0,\ \theta \text{ — полярный угол.} \end{cases}$$

Положим $u_0 = \eta u$, где $\eta \in C_0^\infty(Q)$ и $\eta(0) = 1$. Можно показать, что $\int \rho|\nabla u_0|^2 dx < \infty$, т. е. $u_0 \in W$, но при этом u_0 нельзя аппроксимировать в W гладкими функциями. Таким образом, $W \neq H$. Более точно, H имеет коразмерность 1 в W. Подробности см. в [2, § 5].

2. Прежде чем вводить другие решения, напомним определение сходимости в переменном L^2 и ее основные свойства (см. [1]).

Пусть μ^h, μ — меры Радона на $\mathbb{R}^d$, $\mu^h \rightharpoonup \mu$ при $h \to 0$, т. е. $\int \varphi\, d\mu^h \to \int \varphi\, d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$, где $C_0(\mathbb{R}^d)$ — пространство непрерывных функций с компактным носителем. Примером служит абсолютно непрерывная мера $d\mu^h = \rho^h(x)\, dx$, если $\rho^h \rightharpoonup \rho$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Семейство $u^h \in L^2(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$ ограничено, если $\limsup\limits_{h\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |u^h|^2\, d\mu^h < \infty$. Ограниченное семейство $u^h \in L^2(\mathbb{R}^d, d\mu^h)$ сходится слабо к $u \in L^2(\mathbb{R}^d, d\mu)$, $u^h \rightharpoonup u$, если

$$\lim_{h\to 0} \int u^h \varphi\, d\mu^h = \int u\varphi\, d\mu \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

и сходится сильно к $u \in L^2(\mathbb{R}^d, d\mu)$, $u^h \to u$, если

$$\lim_{h\to 0} \int g^h u^h\, d\mu^h = \int gu\, d\mu \text{ при } g^h \rightharpoonup g.$$

Известно, что

(i) ограниченное семейство компактно относительно слабой сходимости;

(ii) $\liminf\limits_{h\to 0} \int |u^h|^2\, d\mu^h \geq \int u^2\, d\mu$, если $\quad u^h \rightharpoonup u$;

(iii) сильная сходимость $u^h \to u$ складывается из слабой сходимости $u^h \rightharpoonup u$ и соотношения $\lim\limits_{h\to 0} \int |u^h|^2\, d\mu^h = \int u^2\, d\mu$;

(iv) сильная сходимость векторов $v^h \to v$ в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu^h)^d$ складывается из слабой сходимости $v^h \rightharpoonup v$ и соотношения $\lim\limits_{h\to 0} \int Av^h v^h\, d\mu^h = \int Avv\, d\mu$, где A — симметрическая матрица, удовлетворяющая условию (1.2).

3. Введем класс аппроксимационных решений уравнения (1.1). Рассмотрим аппроксимацию исходного вырожденного веса ρ локально невырожденными весами ρ^h:

$$\rho^h, (\rho^h)^{-1} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d), \tag{1.6}$$

$$\rho^h \to \rho, \quad (\rho^h)^{-1} \to \rho^{-1} \text{ в } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \text{ при } h \to 0. \tag{1.7}$$

Примеры таких аппроксимаций строятся с помощью классического сглаживания. Пусть $K(x)$ — ядро сглаживания: $K \geq 0$, K финитно, $K \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\int K\, dx = 1$, $K(x) = K(-x)$. Для $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ полагаем

$$(f)_h(x) = h^{-d} \int K(h^{-1}(x-y)) f(y)\, dy = \int K(y) f(x+hy)\, dy. \tag{1.8}$$

В том случае, когда K — характеристическая функция единичного куба $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$, получаем сглаживание по Стеклову, или среднее по Стеклову. Будем использовать «прямое» и «обратное» сглаживания исходного веса ρ:

$$\rho^h = (\rho)_h, \quad \rho^h = ((\rho^{-1})_h)^{-1}. \tag{1.9}$$

Далее будет проверено, что условия (1.6), (1.7) для обеих аппроксимаций выполняются.

Наряду с (1.1) введем однозначно разрешимое «приближенное» уравнение

$$u^h \in W(\mathbb{R}^d, \rho^h dx) = H(\mathbb{R}^d, \rho^h dx), \quad -\operatorname{div} \rho^h A \nabla u^h + \rho^h u^h = \rho^h f. \tag{1.10}$$

Лемма 1.5. *Пусть u^h — решение задачи* (1.10), *ρ^h — произвольная аппроксимация, удовлетворяющая условиям* (1.6), (1.7). *Тогда с точностью до выбора подпоследовательности имеет место слабая сходимость*

$$u^h \rightharpoonup u, \quad \nabla u^h \rightharpoonup \nabla u \text{ в } L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx). \tag{1.11}$$

Здесь u — слабое решение уравнения (1.1), *для которого выполнены неравенства*

$$[u,u] \le (f,u), \quad (f,u_2) \le (f,u) \le (f,u_1), \tag{1.12}$$

где u_1 — W-решение, а u_2 — H-решение уравнения (1.1).

Определение 1.6. Решение уравнения (1.1) назовем *аппроксимационным* или *достижимым*, если оно служит пределом в смысле сходимости (1.11) решений задачи (1.10) для некоторой аппроксимации ρ^h вида (1.6), (1.7).

Слабые решения, для которых нарушаются неравенства (1.12), не достижимы, как это следует из леммы 1.5. Достижимость слабых решений, для которых эти неравенства выполнены, в общем случае не доказана. Более того, неизвестно даже, достижимо ли любое вариационное решение. Однако H- и W-решения достижимы.

Лемма 1.7. *H- и W-решения задачи* (1.1) *достижимы с помощью аппроксимаций соответственно прямого и обратного сглаживаний* (*см* (1.9)). *Более того, в этом случае сходимость* (1.11) *становится сильной.*

В пространстве W гладкие функции не плотны. Тем не менее справедливо следующее утверждение, которое, на первый взгляд, этому противоречит.

Лемма 1.8. *Если ρ^h — обратное сглаживание веса ρ, то для любого $u \in W$ имеет место сходимость $(u)_h \to u$, $(\nabla u)_h \to \nabla u$ в $L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx)$.*

В случае прямого сглаживания веса выполнено свойство совсем иного характера.

Лемма 1.9. *Пусть ρ^h — прямое сглаживание веса ρ, а u^h — произвольная последовательность из $W(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx)$ такая, что $u^h \rightharpoonup u$, $\nabla u^h \rightharpoonup v$ в $L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx)$. Тогда $u \in H$ и $v = \nabla u$.*

Сформулированные выше результаты очевидным образом переносятся на уравнение (1.1) с правой частью f.

§ 2. Формулировка основных результатов об усреднении

1. Пусть $\rho(y)$ — неотрицательный 1-периодический вес, $Y = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$ — ячейка периодичности, $\langle \cdot \rangle = \int_Y \cdot\, dy$ — среднее по ячейке, $\rho, \rho^{-1} \in L^1(Y)$, $\langle \rho \rangle = 1$; $A(y)$ — измеримая симметрическая 1-периодическая матрица, удовлетворяющая условию (1.2). Введем весовые соболевские пространства периодических функций: $W_{\mathrm{per}} = W_{\mathrm{per}}(Y, \rho\,dy) = \big\{u \in W^{1,1}_{\mathrm{per}}(Y) : \langle u \rangle = 0,\ \langle \rho |\nabla u|^2 \rangle < \infty \big\}$, где $W^{1,1}_{\mathrm{per}}(Y)$ — классическое соболевское пространство 1-периодических функций, суммируемых по Y вместе с градиентом; $H_{\mathrm{per}} = H_{\mathrm{per}}(Y, \rho\,dy)$ — замыкание множества гладких 1-периодических функций $C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)$ в W_{per}. Возможна ситуация, когда $H_{\mathrm{per}} \ne W_{\mathrm{per}}$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ уравнение

$$-\operatorname{div} \rho_\varepsilon A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon + \rho_\varepsilon u_\varepsilon = \rho_\varepsilon f, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \tag{2.1}$$

в котором $A_\varepsilon = A(\varepsilon^{-1}x)$, $\rho_\varepsilon = \rho(\varepsilon^{-1}x)$, и исследуем при $\varepsilon \to 0$ асимптотическое поведение решений разного типа, в том числе W_ε- и H_ε-решений, где $W_\varepsilon = W(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon\, dx)$ и $H_\varepsilon = H(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon\, dx)$ — связанные с весом ρ_ε соболевские пространства.

Заметим, что по свойству среднего значения имеется слабая сходимость мер $\rho_\varepsilon dx \rightharpoonup dx$ и можно оперировать сходимостью в «переменном» при $\varepsilon \to 0$ пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)$. При этой сходимости предельные элементы принадлежат пространству $L^2(\mathbb{R}^d, dx) = L^2(\mathbb{R}^d)$, а ограниченная последовательность $u_\varepsilon \in W_\varepsilon$ имеет в качестве предельных функций элементы $u \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Цель усреднения — найти предел для решений u_ε и уравнение, которому этот предел удовлетворяет.

Напомним основные объекты, участвующие в усреднении:

1) задача на ячейке, зависящая от параметра $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$w \in W_{\mathrm{per}}, \quad \langle \rho A(\xi + \nabla w)\nabla\varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y); \tag{2.2}$$

2) усредненная, или предельная, матрица $\widehat{A}$, заданная через решение уравнения (2.2) равенством

$$\widehat{A}\xi = \langle \rho A(\xi + \nabla w) \rangle; \tag{2.3}$$

3) усредненное, или предельное, уравнение

$$u \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad -\operatorname{div} \widehat{A}\nabla u + u = f. \tag{2.4}$$

Все эти объекты определены однозначно, если ρ — невырожденный вес. В случае вырожденного веса, когда решение уравнения (2.2) неединственно, можно выделить H_{per}- и W_{per}-решения, а также другие аппроксимационные решения. Фактически мы имеем различные задачи на ячейке, и им соответствуют различные усредненные матрицы $\widehat{A}$, определяемые по формуле (2.3), и различные усредненные уравнения (2.4). Например, W_{per}- и H_{per}-решениям сопоставляем матрицы

$$\widehat{A}_1\xi = \langle \rho A(\xi + \nabla w_1) \rangle, \quad \widehat{A}_2\xi = \langle \rho A(\xi + \nabla w_2) \rangle. \tag{2.5}$$

Всякое аппроксимационное решение w уравнения (2.2) с вырожденным весом ρ реализуется как предел последовательности решений уравнения

$$w^h \in H_{\mathrm{per}}(Y, \rho^h\, dy) = W_{\mathrm{per}}(Y, \rho^h\, dy), \quad \operatorname{div} \rho^h A(\xi + \nabla w^h) = 0, \tag{2.6}$$

где ρ^h — некоторая невырожденная аппроксимация веса ρ такая, что

$$\rho^h, (\rho^h)^{-1} \in L^\infty_{\mathrm{per}}(Y), \quad \rho^h \to \rho, \quad (\rho^h)^{-1} \to \rho^{-1} \text{ в } L^1(Y), \tag{2.7}$$

более точно, быть может, по подпоследовательности

$$\nabla w^h \to \nabla w \quad \text{ в } L^2(Y, \rho^h\, dy). \tag{2.8}$$

Отсюда, поскольку соответствующая задаче (2.6) усредненная матрица $\widehat{A}_h$ задается равенством $\widehat{A}_h\xi = \langle \rho^h A(\xi + \nabla w^h) \rangle$, имеем сходимость $\widehat{A}_h \to \widehat{A}$, где $\widehat{A}$ — усредненная матрица, соответствующая решению w.

Для матрицы $\widehat{A}_h$ известна оценка Фойгта — Рейсса $\langle (\rho^h)^{-1}A^{-1} \rangle^{-1} \le \widehat{A}_h \le \langle \rho^h A \rangle$ (см. [3, гл. 1, § 6]), которая в пределе в силу (2.7) переходит в двустороннюю оценку $\langle \rho^{-1}A^{-1} \rangle^{-1} \le \widehat{A} \le \langle \rho A \rangle$ для любой усредненной матрицы $\widehat{A}$. Ясно, что $\widehat{A}$ невырожденна и ее константа эллиптичности зависит лишь от постоянной λ из (1.2) и нормы $\|\rho^{-1}\|_{L^1(Y)}$.

Очевидно неравенство $\widehat{A}_1 \le \widehat{A}_2$ (см. (2.5)), вытекающее из вариационного представления сравниваемых матриц

$$\widehat{A}_1\xi\xi = \min_{\varphi\in W_{\mathrm{per}}} \langle \rho A(\xi+\nabla\varphi)(\xi+\nabla\varphi)\rangle, \quad \widehat{A}_2\xi\xi = \min_{\varphi\in H_{\mathrm{per}}} \langle \rho A(\xi+\nabla\varphi)(\xi+\nabla\varphi)\rangle. \quad (2.9)$$

Для любой усредненной матрицы $\widehat{A}$ выполнена оценка

$$\widehat{A}_1 \le \widehat{A} \le \widehat{A}_2. \quad (2.10)$$

Действительно, согласно свойству полунепрерывности и $(2.9)_1$

$$\widehat{A}\xi\xi = \lim_{h\to 0}\langle \rho^h A(\xi+\nabla w^h)(\xi+\nabla w^h)\rangle \ge \langle \rho A(\xi+\nabla w)(\xi+\nabla w)\rangle \ge \widehat{A}_1\xi\xi, \text{ т. е. } \widehat{A}_1 \le \widehat{A}.$$

Попутно доказано неравенство $\langle \rho A(\xi+\nabla w)(\xi+\nabla w)\rangle \le \widehat{A}\xi\xi$. Далее, ввиду (2.3) и (2.2) $\widehat{A}\xi\xi = \langle \rho A(\xi+\nabla w)\xi\rangle = \langle \rho A(\xi+\nabla w)(\xi+\nabla w_2)\rangle$, где w_2 есть H_{per}-решение уравнения (2.2). Здесь мы воспользовались тем, что в тождестве (2.2) для w можно взять пробную функцию $\varphi \in H_{\mathrm{per}}$, в частности $\varphi = w_2$. Отсюда в силу $(2.9)_2$ $\widehat{A}\xi\xi \le \langle \rho A(\xi+\nabla w)(\xi+\nabla w)\rangle^{\frac12}\langle \rho A(\xi+\nabla w_2)(\xi+\nabla w_2)\rangle^{\frac12} \le (\widehat{A}\xi\xi)^{\frac12}(\widehat{A}_2\xi\xi)^{\frac12}$, т. е. $\widehat{A} \le \widehat{A}_2$.

2. Сформулируем теоремы об усреднении задачи (2.1).

Теорема 2.1. *Пусть u_ε — W_ε-решение уравнения* (2.1), *u — решение задачи* (2.4) *с матрицей $\widehat{A}_1$. Тогда имеет место сходимость $u_\varepsilon \to u$ в $L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon\, dx)$.*

Аналогичное утверждение верно для H_ε-решений.

Обратимся к произвольным аппроксимационным решениям уравнения (2.1). Предположим существование 1-периодической аппроксимации ρ^h вида (1.6), (1.7) такой, что

(a) усредненные матрицы $\widehat{A}_h$, отвечающие уравнению с весом ρ^h, сходятся: $\widehat{A}_h \to \widehat{A}$;

(b) решение u_ε задачи (2.1) при каждом ε получается как предел решений u_ε^h задачи с весом $\rho_\varepsilon^h = \rho^h(\varepsilon^{-1}x)$, быть может, по некоторой подпоследовательности $\{h'\} \subset \{h\}$.

Теорема 2.2. *Пусть u_ε — определенное в условии* (b) *аппроксимационное решение задачи* (2.1), *$\widehat{A}$ — матрица из условия* (a). *Тогда имеет место сходимость $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon\, dx)$, где u — решение усредненной задачи* (2.4). *Усредненная матрица $\widehat{A}$ находится по формуле вида* (2.3), *в которой w — соответствующее аппроксимационное решение задачи* (2.2), *при этом выполнено неравенство* (2.10).

Доказательство теоремы 2.2 достаточно сложное — это связано с тем, что мы предполагаем лишь условие $\rho, \rho^{-1} \in L^1(Y)$, которое не обеспечивает весового неравенства Пуанкаре (см. (2.19)). При выполнении этого неравенства доказательство выглядит проще.

Усреднение H_ε-решений получено в [4] для произвольной периодической борелевой нормированной меры μ (необязательно весовой, когда $d\mu(y) = \rho(y)\,dy$, как в нашем случае). Для общей меры имеется только одна возможность определить соболевское пространство — через замыкание гладких функций. Иначе говоря, мы имеем дело лишь с H_ε-решениями. Что касается решений других типов, в том числе W_ε-решений, то они возникают лишь в случае весовых мер, когда проявляется эффект Лаврентьева. При дополнительном условии $\rho, \rho^{-1} \in L^t(Y)$ для некоторого $t > 1$ усреднение W_ε-решений вырожденных линейных уравнений может быть получено из общей теории усреднения вариационных нелинейных задач с нестандартным условием роста [5]. Усреднение аппроксимационных решений ранее не рассматривалось.

3. Утверждение теоремы 2.2 остается в силе и для уравнения в $\mathbb{R}^d$

$$-\operatorname{div}\rho_\varepsilon A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon + \rho_\varepsilon u_\varepsilon = f, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \tag{2.11}$$

отличающегося от (2.1) правой частью. Теперь для произвольного аппроксимационного решения u_ε задачи (2.11) введем специальные приближения и докажем для них оценки погрешности. Будем предполагать, что

$$\rho \in L^r(Y), \quad \rho^{-1} \in L^s(Y), \quad 2d^{-1} = r^{-1} + s^{-1}. \tag{2.12}$$

Основной результат сформулируем сначала для невырожденного веса ρ. Константы в оценках погрешности будут зависеть от веса через его нормы $\|\rho\|_{L^r}$, $\|\rho^{-1}\|_{L^s}$, что позволит с помощью предельного перехода перенести эти оценки на аппроксимационные решения для задач с вырожденным весом.

Пусть $u(x)$ — решение усредненной задачи, называемое также нулевым приближением к точному решению u_ε. В качестве первого приближения принято брать

$$v_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon N^j(y)\partial_{x_j} u(x), \quad y = \varepsilon^{-1}x, \tag{2.13}$$

где N^j — решение задачи (2.2) при $\xi = e_j$, а $e_1, \ldots, e_d$ — базис в $\mathbb{R}^d$ (см., например, [3, гл. 1]). Введем также «сглаженное первое приближение» $\tilde{v}_\varepsilon$, которое получается по формуле (2.13), если заменить в ней функцию $u(x)$ двойным средним по Стеклову:

$$[u]_\varepsilon(x) = ((u)_\varepsilon)_\varepsilon(x), \tag{2.14}$$

где $(u)_\varepsilon(x) = \int\limits_Y u(x + \varepsilon\omega)\,d\omega$ — среднее по Стеклову, т. е.

$$\tilde{v}_\varepsilon = [u]_\varepsilon + \varepsilon N^j(y)\partial_{x_j}[u]_\varepsilon, \quad y = \varepsilon^{-1}x. \tag{2.15}$$

Теорема 2.3. *Если ρ — невырожденный вес, то верна оценка*

$$\int (|u_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon|^2 + |\nabla u_\varepsilon - \nabla \tilde{v}_\varepsilon|^2)\rho_\varepsilon\,dx \le C\varepsilon^2 \int f^2 \rho_\varepsilon^{-1}\,dx, \tag{2.16}$$

где константа C зависит лишь от размерности d, постоянной эллиптичности λ, показателей r и s из равенства (2.12) *и норм $\|\rho\|_{L^r(Y)}$, $\|\rho^{-1}\|_{L^s(Y)}$.*

Возникает вопрос, можно ли в оценке (2.16) заменить сглаженное первое приближение $\tilde{v}_\varepsilon$ обычным первым приближением v_ε. Кроме того, нас интересует L^2-оценка для разности между точным решением и нулевым приближением u. Такие оценки существуют, но константы в них зависят от нормы $\|\rho\|_{L^\infty}$.

Теорема 2.4. *Если ρ — невырожденный вес, то верны оценки*

$$\begin{gathered}\int (|u_\varepsilon - v_\varepsilon|^2 + |\nabla u_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon|^2)\rho_\varepsilon\,dx \le C\varepsilon^2 \int f^2 \rho_\varepsilon^{-1}\,dx, \\ \int |u_\varepsilon - u|^2 \rho_\varepsilon\,dx \le C\varepsilon^2 \int f^2 \rho_\varepsilon^{-1}\,dx,\end{gathered} \tag{2.17}$$

в которых константа C зависит лишь от размерности d, постоянной эллиптичности λ и норм $\|\rho\|_{L^\infty(Y)}$, $\|\rho^{-1}\|_{L^s(Y)}$, где $2s > d$.

Для вырожденного веса ρ рассмотрим аппроксимационное решение, достижимое с помощью весов ρ^h, удовлетворяющих условиям (a), (b). По формулам

(2.13) или (2.15) строим первое приближение, в котором $N^j(y)$ — соответствующее аппроксимационное решение задачи на ячейке, а $u(x)$ — решение соответствующего усредненного уравнения.

Теорема 2.5. *Пусть вес ρ вырожден, выполнено условие* (2.12) *и невырожденная периодическая аппроксимация ρ^h такова, что*

$$\rho^h \to \rho \quad \text{в } L^r(Y), \quad (\rho^h)^{-1} \to \rho^{-1} \text{ в } L^s(Y). \tag{2.18}$$

Тогда для соответствующего аппроксимационного решения задачи (2.12) *верна оценка* (2.16). *Кроме того, если $\rho \in L^\infty(Y)$, $\rho^{-1} \in L^s(Y)$, $2s > d$, то справедливы оценки* (2.17).

Вывод оценок (2.16), (2.17) основан на технике из работ [6–10], и многие результаты этих работ получаются как следствия теоремы 2.3 при $\rho \equiv 1$.

Впервые L^2-оценки вида $(2.17)_2$ в случае $\rho \equiv 1$ для скалярных эллиптических уравнений, а также для некоторых классов векторных уравнений доказаны М. С. Бирманом и Т. А. Суслиной (см. [11]). При этом использовался спектральный метод, основанный на блоховском разложении самосопряженных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами. В работах [12, 13] L^2-оценки получили дальнейшее уточнение.

4. При выводе сформулированных в п. 3 результатов используются представляющие самостоятельный интерес вспомогательные утверждения: весовые неравенства Пуанкаре и Соболева, оценки для среднего по Стеклову в весовых нормах, лемма о свойствах решения задачи на ячейке и другие. Некоторые из них приведены в следующих двух леммах, где через C обозначены константы, зависящие лишь от размерности d, показателей r и s из (2.12), а также норм $\|\rho\|_{L^r(Y)}$, $\|\rho^{-1}\|_{L^s(Y)}$.

Лемма 2.6. *В предположении* (2.12) *имеет место неравенство Пуанкаре*

$$\|u\|_{L^2(Y,\rho\,dy)} \le C\|\nabla u\|_{L^2(Y,\rho\,dy)} \quad \forall u \in W_{\text{per}}. \tag{2.19}$$

Лемма 2.7. *Пусть выполнено условие* (2.12), $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\Phi \in W(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)$, $b_\varepsilon(x) = b(\varepsilon^{-1}x)$ *и* $b(y)$ *1-периодична, средние* $(\varphi)_\varepsilon$ *и* $[\varphi]_\varepsilon$ *определены в* (2.14). *Тогда*

$$\|(\varphi)_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}; \tag{2.20}$$

$$\text{если } b \in L^2_{\text{per}}(Y, dy), \text{ то } \|b_\varepsilon(\varphi)_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le \langle b^2\rangle \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}; \tag{2.21}$$

$$\|\Phi - (\Phi)_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)} \le C\varepsilon\|\nabla\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)}; \tag{2.22}$$

$$\|\Phi - [\Phi]_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)} \le C\varepsilon\|\nabla\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)}; \tag{2.23}$$

$$\|\Phi(x) - \Phi(x+\varepsilon\omega)\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \le C\varepsilon\|\nabla\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)} \quad \forall \omega \in Y; \tag{2.24}$$

если $b \in L^2_{\text{per}}(Y, \rho dy)$ *и* $\langle \rho b\rangle = 0$, *то*

$$\left|\int b_\varepsilon(\varphi)_\varepsilon \Phi \rho_\varepsilon\,dx\right| \le C\varepsilon\langle \rho b^2\rangle^{\frac12}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\nabla\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}. \tag{2.25}$$

Замечание. 1. Свойства (2.20), (2.21) не требуют выполнения условия (2.12). Кроме того, свойства (2.20)–(2.22) верны для любого сглаживания вида (1.8), при этом константа в правой части зависит от нормы $\|K\|_{L^\infty}$.

2. Известно, что итерация сглаживаний есть снова сглаживание. Двойному среднему по Стеклову $[\varphi]_\varepsilon$ соответствует ядро сглаживания $K(x) = k(x_1)...k(x_d)$, где $k(t)$ — функция, имеющая профиль треугольника: $k(t) = 1 - |t|$ при $|t| < 1$ и $k(t) = 0$ при $|t| > 1$.

§ 3. О предельном переходе в весовых пространствах

1. Напомним, что семейство измеримых функций $\beta^h(x)$ на Ω (Ω — шар в $\mathbb{R}^d$) *равностепенно интегрируемо*, если для любого $\delta > 0$ найдется $\tau = \tau(\delta)$ такое, что $\int_K |\beta^h(x)|\,dx < \delta$, как только $|K| < \tau$ для измеримого множества $K \subset \Omega$, где $|K|$ — мера Лебега.

Критерий слабой компактности в $L^1(\Omega)$. *Эквивалентны утверждения:*
(i) *семейство β^h слабо компактно в $L^1(\Omega)$;*
(ii) *семейство β^h равностепенно интегрируемо;*
(iii) *для любого $\delta > 0$ найдется $\lambda = \lambda(\delta)$ такое, что $\sup\limits_h \int_{\{|\beta^h|>\lambda\}} |\beta^h|\,dx < \delta$.*

Теорема Лебега. *Пусть семейство $\beta^h \in L^1(\Omega)$ равностепенно интегрируемо и $\beta^h \to \beta$ п. в. в Ω. Тогда $\beta^h \to \beta$ в $L^1(\Omega)$.*

Лемма 3.1. *Если ρ, $\rho^{-1} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, то для обычного сглаживания $\rho^h = (\rho)_h$ выполнены свойства* (1.6), (1.7). *То же верно для «обратного» сглаживания $\rho^h = ((\rho^{-1})_h)^{-1}$.*

Доказательство проведем для веса $\rho^h = (\rho)_h$. Если Ω — носитель ядра сглаживания K и $K(x) \le C$, то $\rho^h(x) \le C \int_\Omega \rho(x+hy)\,dy$, откуда следует, что $\rho^h \in L^\infty_{\mathrm{loc}}$. По неравенству Йенсена

$$(\rho^h)^{-1}(x) \le (\rho^{-1})_h(x) \le C \int_\Omega \rho^{-1}(x+hy)\,dy, \tag{3.1}$$

откуда $(\rho^h)^{-1} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}$. Этим проверено свойство (1.6). Далее, сходимость $\rho^h \to \rho$ в L^1_{loc} имеет место в силу классических свойств сглаживания. Можно также считать, что $(\rho^h)^{-1} \to \rho^{-1}$ п. в. на $\mathbb{R}^d$. Неравенство $(3.1)_1$ обеспечивает равностепенную интегрируемость семейства $(\rho^h)^{-1}$, поскольку этим свойством обладает сходящаяся в L^1_{loc} последовательность $(\rho^{-1})_h$. Отсюда по теореме Лебега $(\rho^h)^{-1} \to \rho^{-1}$ в L^1_{loc}. Свойство (1.7) проверено, и лемма доказана.

Лемма 3.2. *Если $\rho^h \ge 0$ и выполнено* (1.7), *то верны следующие утверждения:*

$$b^h \rightharpoonup b \text{ в } L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h dx) \quad \Longrightarrow \quad b^h \rightharpoonup b \text{ в } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d), \tag{3.2}$$

$$b^h \to b \text{ в } L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h dx) \quad \Longleftrightarrow \quad \rho^h b^h \to \rho b \text{ в } L^2(\mathbb{R}^d, (\rho^h)^{-1} dx). \tag{3.3}$$

Доказательство. Последовательность b^h слабо компактна в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, так как

$$\int_K |b^h|\,dx \le \Big(\int_K (\rho^h)^{-1}\,dx\Big)^{\frac12} \Big(\int_K \rho^h |b^h|^2\,dx\Big)^{\frac12} \le C\Big(\int_K (\rho^h)^{-1}\,dx\Big)^{\frac12},$$

что дает равностепенную интегрируемость последовательности b^h. Покажем, что на самом деле имеет место сходимость $(3.2)_2$. Прежде всего для $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\int (\rho^h)^{-1} \varphi \rho^h\,dx = \int \varphi\,dx = \int \rho^{-1}\varphi\rho\,dx, \text{ т. е. } (\rho^h)^{-1} \rightharpoonup \rho^{-1} \text{ в } L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx).$$

Кроме того, если Ω — ограниченная область, то в силу $(1.7)_2$ $\int_\Omega (\rho^h)^{-2}\rho^h\,dx \to \int_\Omega (\rho^{-1})^2 \rho\,dx$, т. е. имеет место сильная сходимость $(\rho^h)^{-1} \to \rho^{-1}$ в $L^2(\Omega, \rho^h\,dx)$.

Отсюда по свойствам сходимости в $L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx)$

$$\lim_{h\to 0}\int b^h\varphi\,dx = \lim_{h\to 0}\int (\rho^h)^{-1}\varphi b^h\rho^h\,dx = \int \rho^{-1}\varphi b\rho\,dx = \int b\varphi\,dx,$$

что означает $(3.2)_2$. Свойство (3.3) выводится аналогичными рассуждениями.

Теперь докажем утверждения из п. 3 в § 1, касающиеся предельного перехода в $W(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx)$ и вопросов достижимости в предельном пространстве $W(\mathbb{R}^d, \rho\,dx)$. Из утверждения (3.2) непосредственно следует

Лемма 3.3. *Если $u^h \rightharpoonup u$, $\nabla u^h \rightharpoonup v$ в $L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx)$, то $u \in W(\mathbb{R}^d, \rho\,dx)$ и $v = \nabla u$.*

Доказательство леммы 1.5. Из соответствующего (1.10) интегрального тождества

$$\int \rho^h(A\nabla u^h\nabla\varphi + u^h\varphi)\,dx = \int f\varphi\rho^h\,dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \tag{3.4}$$

вытекает ограниченность u^h и ∇u^h в $L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx)$. Можно считать, что $u^h \rightharpoonup u$, $\nabla u^h \rightharpoonup v$ в $L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx)$, и по лемме 3.3 $v = \nabla u$. Тождество (3.4) переходит в пределе в (1.3), и сходимость (1.11) доказана. Равенство (3.4) с $\varphi = u^h$ по свойству полунепрерывности в пределе дает неравенство $(1.12)_1$. Поскольку $F(u_1) = \min\limits_W F(\varphi)$ (см. (1.5)), а также $[u_1, u_1] = (f, u_1)$ (см. (1.4)) с $u = u_1$, в силу $(1.12)_1$ имеем

$$F(u_1) \le F(u) \Longleftrightarrow [u_1, u_1] - 2(f, u_1) \le [u, u] - 2(f, u) \Longrightarrow -(f, u_1) \le -(f, u),$$

т. е. $(f, u) \le (f, u_1)$. Из тождества (1.3) для решения u с $\varphi = u_2$, а также равенства $[u_2, u_2] = (f, u_2)$ и $(1.12)_1$ выводим

$$(f, u_2)^2 = [u, u_2]^2 \le [u, u][u_2, u_2] \le (f, u)(f, u_2), \quad \text{т. е. } (f, u_2) \le (f, u).$$

Лемма доказана.

В связи с леммами 1.5 и 3.3 возникают вопросы: достижимы ли H- и W-решения задачи (1.1) и при каких аппроксимациях предельная функция в лемме 3.3 принадлежит пространству $H(\mathbb{R}^d, \rho\,dx)$? Ответим на эти вопросы в следующих пунктах.

2. Нам понадобится специальный оператор «поднятия» функций, построенный в [14] для случая произвольной меры и обслуживающий аппроксимации прямого сглаживания.

Лемма 3.4. *Пусть $\rho \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ и $\rho^h = (\rho)_h$ — сглаживание. По данной функции $b \in L^2(\mathbb{R}^d, \rho\,dx)$ определим элемент $T_h b \in L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx)$ равенством*

$$\int T_h b\varphi\rho^h\,dx = \int b(\varphi)_h\rho\,dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{3.5}$$

Тогда имеет место сильная сходимость $T_h b \to b$ в $L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx)$.

Доказательство. Исходим из оценки

$$\left(\int b(\varphi)_h\rho\,dx\right)^2 \le C\int ((\varphi)_h)^2\rho\,dx, \quad C = \int b^2\rho\,dx.$$

По неравенству Коши — Буняковского $((\varphi)_h)^2 \le (\varphi^2)_h$, поэтому

$$\int ((\varphi)_h)^2\rho\,dx \le \int (\varphi^2)_h\rho\,dx = \int \varphi^2\rho^h\,dx$$

в силу свойств сглаживания. Следовательно, по теореме Рисса о представлении существует функция $T_h b$, удовлетворяющая (3.5), причем $\int (T_h b)^2 \rho^h\,dx \le \int b^2 \rho\,dx$. Поскольку $(\varphi)_h \to \varphi$ равномерно, из (3.5) следует слабая сходимость $T_h b \rightharpoonup b$ в $L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx)$. В силу последнего неравенства эта сходимость сильная. Лемма доказана.

Установим еще одно важное свойство оператора T_h. Предварительно напомним, что функция $a \in L^2(\mathbb{R}^d, \rho\,dx)$ и вектор $b \in L^2(\mathbb{R}^d, \rho\,dx)^d$ связаны отношением

$$\operatorname{div} b = a \text{ (по мере } \rho\,dx), \text{ если } \int b \cdot \nabla\varphi \rho\,dx = -\int a\varphi\rho\,dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{3.6}$$

Аналогично для $a^h \in L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx)$ и $b^h \in L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx)^d$ определено отношение

$$\operatorname{div} b^h = a^h \text{ (по мере } \rho^h\,dx), \text{ если } \int b^h \cdot \nabla\varphi \rho^h\,dx = -\int a^h\varphi\rho^h\,dx \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{3.7}$$

В тождествах (3.6) и (3.7) по замыканию пробными можно брать функции из $H(\mathbb{R}^d, \rho\,dx)$ и $H(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx)$ соответственно.

Лемма 3.5. *Если* a, b *связаны отношением* (3.6), *то* $a^h = T_h a$, $b^h = T_h b$ *связаны отношением* (3.7).

Утверждение вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\int b^h \cdot \nabla\varphi\rho^h\,dx = \int T_h b \cdot \nabla\varphi\rho^h\,dx = \int b \cdot (\nabla\varphi)_h \rho\,dx = \int b \cdot \nabla((\varphi)_h)\rho\,dx$$
$$= -\int a(\varphi)_h \rho\,dx = -\int T_h a\varphi\rho^h\,dx = -\int a^h\varphi\rho^h\,dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Доказательство леммы 1.9. Равенство $v = \nabla u$ уже установлено в лемме 3.3. Определим замкнутые в $(L^2(\mathbb{R}^d, \rho\,dx))^{d+1}$ пространства

$$X_W = \{(u, \nabla u) : u \in W\}, \quad X_H = \{(u, \nabla u) : u \in H\},$$
$$X_H^\perp = \left\{(a, b) \in X_W : \int (au + b \cdot \nabla u)\rho\,dx = 0 \quad \forall (u, \nabla u) \in X_H\right\}.$$

Ясно, что любая пара $(a, b) \in X_H^\perp$ связана отношением (3.6), а соответствующие ей элементы $a^h = T_h a$ и $b^h = T_h b$ — отношением (3.7). В тождестве (3.7) с пробной функцией $\varphi = u^h$ перейдем к пределу, используя сходимости $a^h \to a$, $b^h \to b$, $u^h \rightharpoonup u$, $\nabla u^h \rightharpoonup \nabla u$,

$$\int b^h \cdot \nabla u^h \rho^h\,dx = -\int a^h u^h \rho^h\,dx \Longrightarrow \int (au + b \cdot \nabla u)\rho\,dx = 0 \Longrightarrow u \in H$$

в силу произвольности $(a, b) \in X_H^\perp$. Лемма 1.9 доказана.

Из леммы 1.9 вытекает

Лемма 3.6. *Пусть в предположениях леммы* 1.5 $\rho^h = (\rho)_h$ *— сглаживание. Тогда предел* u *есть* H*-решение уравнения* (1.1), *а сходимость* (1.11) *сильная.*

Доказательство. Леммы 3.3 и 1.9 обеспечивают сходимость (1.11), причем u — H-решение уравнения (1.1). Отсюда, используя энергетические равенства для уравнений (1.10) и (1.1), имеем

$$\lim_{h\to 0} \int \rho^h (A\nabla u^h \nabla u^h + u^h u^h)\,dx$$
$$= \lim_{h\to 0} \int f u^h \rho^h\,dx = \int f u \rho\,dx = \int \rho(A\nabla u \nabla u + u^2)\,dx.$$

Тогда по свойствам (ii)–(iv) сходимости в $L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx)$ (см. п. 2 в § 1) получаем соотношения

$$\lim_{h\to 0}\int \rho^h A\nabla u^h\nabla u^h\,dx = \int \rho A\nabla u\nabla u\,dx, \quad \lim_{h\to 0}\int \rho^h|u^h|^2\,dx = \int \rho u^2\,dx$$

и как следствие сильную сходимость u^h и ∇u^h. Лемма доказана.

3. Рассмотрим вопросы достижимости для W-решений. Ключевым здесь является следующее утверждение, из которого вытекает лемма 1.8.

Лемма 3.7. *Если* ρ, $\rho^{-1}\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$, $\rho^h = ((\rho^{-1})_h)^{-1}$, *то*

$$(\Phi)_h \to \Phi \text{ в } L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx) \quad \forall \Phi\in L^2(\mathbb{R}^d, \rho\,dx).$$

Доказательство. Положим $\lambda = \rho^{-1}$, $\lambda_h = (\rho^{-1})_h$. По лемме 3.2 достаточно установить

$$(\Phi)_h\lambda_h^{-1} \to \Phi\rho \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^d, \lambda_h\,dx). \tag{3.8}$$

Весу λ^h сопоставим оператор T_h согласно конструкции (3.5). Тогда

$$\int T_h(\rho\Phi)\varphi\lambda_h\,dx = \int \rho\Phi(\varphi)_h\lambda dx = \int \Phi(\varphi)_h dx = \int (\Phi)_h\varphi dx \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

откуда получаем равенство $(\Phi)_h = \lambda_h T_h(\rho\Phi)$, или $(\Phi)_h\lambda_h^{-1} = T_h(\rho\Phi)$, и сходимость (3.8) обеспечена основным свойством оператора T_h. Лемма доказана.

Теперь не представляет труда установить следующий факт.

Теорема 3.8. *Пусть* ρ, $\rho^{-1}\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$, $\rho^h = ((\rho^{-1})_h)^{-1}$, u^h — *решение уравнения* (1.10). *Тогда имеет место сильная сходимость* $u^h\to u$, $\nabla u^h \to \nabla u$ *в* $L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx)$, *где* u *есть* W-*решение уравнения* (1.1).

Доказательство. По лемме 1.8 $(\Phi)_h \in W(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx)$, если $\Phi\in W(\mathbb{R}^d, \rho\,dx)$. Запишем тождество (3.4) для u^h с пробной функцией $\varphi = (\Phi)_h$. После перехода к пределу с учетом сходимости $(\Phi)_h\to\Phi$, $(\nabla\Phi)_h\to\nabla\Phi$ в $L^2(\mathbb{R}^d, \rho^h\,dx)$ получим интегральное тождество

$$\int \rho(A\nabla u\nabla\Phi + u\Phi)\,dx = \int f\Phi\rho\,dx, \quad \Phi\in W(\mathbb{R}^d, \rho\,dx),$$

которое означает, что u есть W-решение. Те же аргументы, что и при выводе леммы 3.6, дают сильную сходимость в (1.11).

§ 4. Общая теорема об усреднении аппроксимационных решений

Приведем доказательство теоремы 2.2, разбив его на несколько этапов.

1°. Для аппроксимационного решения уравнения (2.1) выполнено энергетическое неравенство вида $(1.12)_1$:

$$\int (A_\varepsilon\nabla u_\varepsilon\nabla u_\varepsilon + u_\varepsilon^2)\rho_\varepsilon\,dx \le \int f u_\varepsilon\rho_\varepsilon\,dx,$$

которое обеспечивает ограниченность в $L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon\,dx)$ последовательностей u_ε, ∇u_ε, $p_\varepsilon = A_\varepsilon\nabla u_\varepsilon$. Тогда по свойствам сходимости в переменном (по ε) пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon\,dx)$ (см. п. 2 § 1), можно считать, что

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u, \quad \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla u, \quad p_\varepsilon \rightharpoonup p \text{ в } L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon\,dx). \tag{4.1}$$

При условии $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ имеем также оценку решения по принципу максимума

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.2}$$

В отвечающем уравнению (2.1) интегральном тождестве

$$\int (p_\varepsilon \cdot \nabla\varphi + u_\varepsilon \varphi)\rho_\varepsilon \, dx = \int f\varphi\rho_\varepsilon \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \tag{4.3}$$

перейдем к пределу и в силу (4.1) получим

$$\int (p \cdot \nabla\varphi + u\varphi)\, dx = \int f\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{4.4}$$

Наша цель — доказать равенство $p = \widehat{A}\nabla u$.

Положим $g = A(\xi + \nabla_y w)$, где w — аппроксимационное решение уравнения (2.2). Тогда $\langle g \cdot \nabla\varphi\rho\rangle = 0$ $\forall \varphi \in C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)$, что влечет за собой тождество в $\mathbb{R}^d$

$$\int g_\varepsilon \cdot \nabla\varphi\rho_\varepsilon \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in H(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon \, dx). \tag{4.5}$$

Решение w достижимо с помощью решений w^h задачи (2.6) с невырожденным весом ρ^h (см. (2.8)) и, значит, g достижимо с помощью $g^h = A(\xi + \nabla_y w^h)$, т. е. $g^h \rightharpoonup g$ в $L^2(Y, \rho^h dy)$. Функции u_ε, p_ε, $g_\varepsilon = g\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$ достижимы с помощью их аналогов u_ε^h, p_ε^h, $g_\varepsilon^h = g^h\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$:

$$u_\varepsilon^h \rightharpoonup u_\varepsilon, \ \nabla u_\varepsilon^h \rightharpoonup \nabla u_\varepsilon, \ p_\varepsilon^h \rightharpoonup p_\varepsilon, \ g_\varepsilon^h \rightharpoonup g_\varepsilon \text{ в } L^2\big(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon^h dx\big) \text{ при } h \to 0. \tag{4.6}$$

2°. Предполагаем сначала, что вес ρ невырожденный. Исходя из поточечного равенства

$$\Phi_\varepsilon(x) \equiv p_\varepsilon \cdot \nabla_y w = \nabla u_\varepsilon \cdot A_\varepsilon \nabla_y w = \nabla u_\varepsilon \cdot g_\varepsilon - p_\varepsilon \cdot \xi, \tag{4.7}$$

изучим интеграл $J_\varepsilon = \int \Phi_\varepsilon \varphi\rho_\varepsilon \, dx$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Из (4.3), взяв $\varepsilon w_\varepsilon \varphi$, $w_\varepsilon = w(\varepsilon^{-1}x)$, пробной функцией, имеем

$$J_\varepsilon = \int p_\varepsilon \cdot \nabla_y w\varphi\rho_\varepsilon \, dx = \varepsilon \int f w_\varepsilon \varphi\rho_\varepsilon \, dx - \varepsilon \int (p_\varepsilon \cdot \nabla\varphi + u_\varepsilon\varphi) w_\varepsilon \rho_\varepsilon \, dx.$$

С другой стороны, согласно (4.7)

$$J_\varepsilon = \int \nabla u_\varepsilon \cdot g_\varepsilon \varphi\rho_\varepsilon \, dx - \int p_\varepsilon \cdot \xi\varphi\rho_\varepsilon \, dx = -\int u_\varepsilon g_\varepsilon \cdot \nabla\varphi\rho_\varepsilon \, dx - \int p_\varepsilon \cdot \xi\varphi\rho_\varepsilon \, dx$$

в силу соленоидальности вектора g_ε (см. (4.5)). Отсюда следует равенство

$$\varepsilon \int f w_\varepsilon \varphi\rho_\varepsilon \, dx - \varepsilon \int (p_\varepsilon \cdot \nabla\varphi w_\varepsilon + u_\varepsilon w_\varepsilon \varphi)\rho_\varepsilon \, dx + \int (u_\varepsilon g_\varepsilon \cdot \nabla\varphi + p_\varepsilon \cdot \xi\varphi)\rho_\varepsilon \, dx = 0. \tag{4.8}$$

3°. Теперь рассмотрим вырожденный вес ρ. Наша цель — установить (предельным переходом по параметру аппроксимации) аналог равенства (4.8) для аппроксимационного решения, а затем перейти в нем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Оба предельных перехода основаны на одинаковых соображениях, использующих свойства сильной и слабой сходимостей в переменном L^2-пространстве. Отметим, что в случае вырожденного веса $\rho \in L^1(Y)$ отсутствует весовое неравенство Пуанкаре на ячейке Y, вследствие чего норма $\|w\|_{L^2(Y,\rho dy)}$ не контролируется и $\varepsilon w_\varepsilon \varphi$ нельзя, как ранее в п. 2°, считать пробной функцией в интегральном тождестве для u_ε. По этой причине вместо w берем срезку

$$\overline{w}(y) = \begin{cases} \pm m, & y \in K_m = \{y \in Y : |w| > m\}, \\ w(y), & y \notin K_m, \end{cases}$$

и взамен (4.8) получаем равенство

$$\int (u_\varepsilon g_\varepsilon \cdot \nabla\varphi + p_\varepsilon \cdot \xi\varphi)\rho_\varepsilon\, dx = \varepsilon \int (p_\varepsilon \cdot \nabla\varphi \overline{w}_\varepsilon + u_\varepsilon \overline{w}_\varepsilon \varphi)\rho_\varepsilon\, dx - \varepsilon \int f\overline{w}_\varepsilon \varphi\rho_\varepsilon\, dx + \delta_m, \tag{4.9}$$

$$\delta_m = \int p_\varepsilon \cdot \nabla_y(\overline{w} - w)\varphi\rho_\varepsilon\, dx.$$

Величина δ_m будет сколь угодно малой, если параметр срезки m взять достаточно большим. Для обоснования используем следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Если ρ — невырожденный вес, то*

$$\int\limits_{K_m} \rho|\nabla_y w|^2\, dy \le c_1|\xi|^2 \int\limits_{K_m} \rho\, dy, \quad |K_m| \le c_2|\xi|m^{-1}, \tag{4.10}$$

где постоянная c_1 зависит только от константы эллиптичности λ, а постоянная c_2 еще от величины $\langle\rho^{-1}\rangle$ и размерности d.

Доказательство. Подставив в тождество (2.2) пробную функцию $\varphi = w - \overline{w}$, после несложных преобразований приходим к равенству $\int\limits_{K_m} \rho A\nabla_y w \nabla_y w\, dy = -\int\limits_{K_m} \rho A\xi\nabla_y w\, dy$, откуда по неравенству Коши — Буняковского получаем $(4.10)_1$. Кроме того,

$$m|K_m| \le \int\limits_Y |w|\, dy \le c_0 \int\limits_Y |\nabla w|\, dy \le c_0 \Big(\int\limits_Y \rho^{-1}\, dy\Big)^{\frac12} \Big(\int\limits_Y \rho|\nabla w|^2\, dy\Big)^{\frac12},$$

и оценка $(4.10)_2$ также доказана.

Вернемся к оценке погрешности δ_m. Если Ω — шар, содержащий носитель функции φ, то в условиях, обеспечивающих неравенство $(4.10)_1$, имеем

$$\delta_m^2 \le \sup\varphi^2 \int\limits_\Omega |p_\varepsilon|^2\rho_\varepsilon\, dx \int\limits_\Omega |\nabla_y(w - \overline{w})|^2\rho_\varepsilon\, dx$$
$$\le C_1|\Omega| \int\limits_Y |\nabla_y(w - \overline{w})|^2\rho\, dy \le C_2 \int\limits_{K_m} \rho\, dy.$$

Отсюда и из (4.9) получим неравенство

$$\left|\int u_\varepsilon g_\varepsilon \cdot \nabla\varphi\rho_\varepsilon\, dx + \int p_\varepsilon \cdot \xi\varphi\rho_\varepsilon\, dx\right| \le C(\varepsilon m + l_m(\rho)), \tag{4.11}$$

где $l_m(\rho) = \sup\big\{\int\limits_K \rho\, dy : K \subset Y, |K| \le c_2|\xi|m^{-1}\big\}$, а постоянная C зависит только от d, λ, $\langle\rho^{-1}\rangle$ и правой части $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

4°. Посмотрим, как выглядит аналог неравенства (4.11) для аппроксимационных решений. Запишем (4.11) с функциями $u_\varepsilon^h, g_\varepsilon^h, p_\varepsilon^h, \rho_\varepsilon^h$ вместо $u_\varepsilon, g_\varepsilon, p_\varepsilon, \rho_\varepsilon$.

Можем считать, что при фиксированном ε и $h \to 0$

$$|u_\varepsilon^h| \le C, \quad u_\varepsilon^h(x) \to u_\varepsilon(x) \text{ п. в. на } \mathbb{R}^d \tag{4.12}$$

(см. оценку типа (4.2) для u_ε^h, а также лемму 3.2, обеспечивающую на основании $(4.6)_1$ и $(4.6)_2$ слабую сходимость u_ε^h в $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$). Поскольку $\rho^h \to \rho$ в $L^1(Y)$, то

$$l_m(\rho^h) \le l(m), \quad l(m) \to 0 \text{ при } m \to \infty. \tag{4.13}$$

Отсюда

$$\left|\int u_\varepsilon^h g_\varepsilon^h\cdot\nabla\varphi\rho_\varepsilon^h\,dx+\int p_\varepsilon^h\cdot\xi\varphi\rho_\varepsilon^h\,dx\right|\le C(\varepsilon m+l(m)).\tag{4.14}$$

Имея в виду соотношения (4.6) и (4.12), перейдем к пределу при $h\to 0$ в (4.14). Некоторая проблема возникает только в первом слагаемом:

$$T^h\equiv\int u_\varepsilon^h g_\varepsilon^h\cdot\nabla\varphi\rho_\varepsilon^h\,dx=\int u_\varepsilon g_\varepsilon^h\cdot\nabla\varphi\rho_\varepsilon^h\,dx+\int\bigl(u_\varepsilon^h-u_\varepsilon\bigr)g_\varepsilon^h\cdot\nabla\varphi\rho_\varepsilon^h\,dx.$$

Поскольку u_ε ограничена (см. (4.2)) и $g_\varepsilon^h\rho_\varepsilon^h\rightharpoonup g_\varepsilon\rho_\varepsilon$ в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)^d$ ввиду $(4.6)_4$, имеем

$$\lim_{h\to0}T^h=\int u_\varepsilon g_\varepsilon\cdot\nabla\varphi\rho_\varepsilon\,dx+\lim_{h\to0}\int\bigl(u_\varepsilon^h-u_\varepsilon\bigr)g_\varepsilon^h\cdot\nabla\varphi\rho_\varepsilon^h\,dx=\int u_\varepsilon g_\varepsilon\cdot\nabla\varphi\rho_\varepsilon\,dx.$$

Для обоснования последнего равенства может быть использована

Лемма 4.2. *Пусть a_h, b_h — измеримые неотрицательные функции на Ω такие, что*

(i) $a_h(x)\le C,\quad a_h\to 0$ *в* $L^1(\Omega)$;

(ii) *семейство b_h равностепенно интегрируемо.*

Тогда $a_hb_h\to 0$ в $L^1(\Omega)$.

Достаточно положить $a_h=\bigl|u_\varepsilon^h-u_\varepsilon\bigr|$, $b_h=\bigl|g_\varepsilon^h\bigr|\rho_\varepsilon^h$, где b_h равностепенно интегрируема в силу ограниченности g_ε^h в $L^2\bigl(\Omega,\rho_\varepsilon^h\,dx\bigr)$. Вернемся к неравенству (4.14). В пределе оно дает соотношение для аппроксимационных решений

$$\left|\int u_\varepsilon g_\varepsilon\cdot\nabla\varphi\rho_\varepsilon\,dx+\int p_\varepsilon\cdot\xi\varphi\rho_\varepsilon\,dx\right|\le C(\varepsilon m+l(m)),$$

где $l(m)$ из (4.13). Переходя в нем к пределу при $\varepsilon\to0$ (здесь так же, как в случае (4.14), применяем к первому интегралу лемму 4.2), получим

$$\left|\int u\langle g\rho\rangle\cdot\nabla\varphi\,dx+\int p\cdot\xi\varphi\,dx\right|\le Cl(m)\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

где $\langle g\rho\rangle=\widehat{A}\xi$ (см. (2.3)). Отсюда ввиду $(4.13)_2$ следует искомое равенство $p=\widehat{A}\nabla u$. Вместе с (4.4) оно означает, что u — решение усредненного уравнения.

Оценка (2.10) доказана в § 2. Остается привести

Доказательство леммы 4.2. Ясно, что

$$\int\limits_\Omega a_hb_h\,dx\le n\int\limits_\Omega a_h\,dx+C\int\limits_{\{b_h>n\}}b_h\,dx=I_1^h+I_2^h,$$

где $I_1^h\to0$ в силу условия (i) при фиксированном n, а $\sup\limits_h I_2^h\to0$ при $n\to\infty$ в силу условия (ii) (см. в § 3 критерий слабой сходимости в $L^1(\Omega)$). Отсюда $\int\limits_\Omega a_hb_h\,dx\to0$.

§ 5. О весовых неравенствах и среднем по Стеклову

1. Доказательство леммы 2.6. По неравенству Гёльдера

$$\int\limits_Y|uv|\,dy\le\Bigl(\int\limits_Y|u|^t\,dy\Bigr)^{\frac1t}\Bigl(\int\limits_Y|v|^{t'}\,dy\Bigr)^{\frac1{t'}},\quad\text{где } t>1,\ t'=\frac{t}{t-1},$$

получаем оценки

$$\int_Y u^2\rho\,dy \le C_1\Big(\int_Y |u|^q\,dy\Big)^{\frac{2}{q}}, \quad \text{где } q=\frac{2r}{r-1},\ r>1, \quad C_1=\|\rho\|_{L^r(Y)}, \tag{5.1}$$

$$\int_Y |u|^p\,dy \le \Big(\int_Y \rho^{-\lambda t}\,dy\Big)^{\frac{1}{t}}\Big(\int_Y \rho^{t'\lambda}|u|^{pt'}\,dy\Big)^{\frac{1}{t'}},$$

последняя из которых дает неравенство

$$\Big(\int_Y |u|^p\,dy\Big)^{\frac{2}{p}} \le C_2\int_Y u^2\rho\,dy, \quad \text{где} \quad p=\frac{2s}{s+1}, \quad C_2=\|\rho^{-1}\|_{L^s(Y)}, \tag{5.2}$$

если $t\lambda=s$, $\lambda t'=\frac{\lambda t}{t-1}=1$, $pt'=\frac{pt}{t-1}=2$.

Из (5.1), (5.2) и классического неравенства Соболева

$$\Big(\int_Y |u|^q\,dy\Big)^{\frac{2}{q}} \le C_0\Big(\int_Y |\nabla u|^p\,dy\Big)^{\frac{2}{p}}, \quad \int_Y u\,dy=0, \quad \text{где } q=\frac{dp}{d-p},\ p<d, \tag{5.3}$$

вытекает приводящая к (2.19) цепочка неравенств

$$\int_Y u^2\rho\,dy \le C_1\Big(\int_Y |u|^q\,dy\Big)^{\frac{2}{q}} \le C_0C_1\Big(\int_Y |\nabla u|^p\,dy\Big)^{\frac{2}{p}} \le C_0C_1C_2\int_Y |\nabla u|^2\rho\,dy.$$

Здесь показатели p и q подчинены условиям из (5.1) и (5.2), а с другой стороны, сопряжены по Соболеву. Заведомо $p<d$, так как $p=\frac{2s}{s+1}<2\le d$. Отсюда $\frac{2r}{r-1}=\frac{d\frac{2s}{s+1}}{d-\frac{2s}{s+1}}=\frac{2ds}{ds+d-2s}\iff\frac{2}{d}=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}$, и это в точности условие (2.12). Лемма доказана.

Отметим, что свойство периодичности функции u нигде не использовалось и его можно опустить в формулировке леммы.

Замечание. Предыдущие рассуждения показывают, что если

$$\rho\in L^r(Y), \quad \rho^{-1}\in L^s(Y), \quad 2d^{-1}>r^{-1}+s^{-1}, \tag{5.4}$$

то найдется показатель $\sigma>2$ такой, что

$$\Big(\int_Y |u|^\sigma\rho\,dy\Big)^2 \le C\Big(\int_Y |\nabla u|^2\rho\,dy\Big)^\sigma \quad \forall u\in W_{\mathrm{per}}. \tag{5.5}$$

Доказательство леммы 2.7. Оценки (2.20) и (2.21) получаются по неравенству Коши — Буняковского. Например, $((\varphi)^\varepsilon)^2\le(\varphi^2)^\varepsilon$, откуда

$$\int |b_\varepsilon(\varphi)_\varepsilon|^2\,dx \le \iint_Y b^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi^2(x+\varepsilon\omega)\,d\omega dx$$

$$=\int\Big(\int_Y b^2\left(\frac{x}{\varepsilon}-\omega\right)\,d\omega\Big)\varphi^2(x)\,dx=\langle b^2\rangle\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

и свойство (2.21) установлено.

Доказательство неравенств (2.22)–(2.24) разбиваем на несколько шагов, причем из соображений гомотетии достаточно рассмотреть лишь случай $\varepsilon=1$.

(i) Пусть φ задана на удвоенном кубе $2Y$. Докажем неравенство

$$\|\varphi(\cdot) - \varphi(\cdot + \omega)\|_{L^q(Y)} \le C_0 \|\nabla\varphi\|_{L^p(2Y)} \quad \forall \omega \in Y,\ q = \frac{dp}{d-p},\ p < d. \tag{5.6}$$

Рассуждая методом от противного, найдем $\omega_n \in Y$ и функции φ_n такие, что

$$\|\nabla\varphi_n\|_{L^p(2Y)} \to 0, \quad \|\varphi_n(\cdot) - \varphi_n(\cdot + \omega_n)\|_{L^q(Y)} = 1. \tag{5.7}$$

Считаем, что $\int\limits_{2Y} \varphi_n dx = 0$, так как вычитание константы из φ_n не меняет соотношения (5.7). По классическому неравенству Соболева (5.3) (для области $2Y$) из $(5.7)_1$ следует сходимость $\|\varphi_n\|_{L^q(2Y)} \to 0$, исключающая соотношение $(5.7)_2$.

(ii) Из неравенства (5.6) теми же рассуждениями, что и при выводе (2.19), устанавливаем неравенство

$$\int\limits_Y \rho(x)|\varphi(x) - \varphi(x+\omega)|^2\, dx \le C \int\limits_{2Y} |\nabla\varphi(x)|^2 \rho(x)\, dx, \quad \omega \in Y, \tag{5.8}$$

где постоянная C зависит от $\|\rho\|_{L^r(2Y)}, \|\rho^{-1}\|_{L^s(2Y)}$ и константы C_0 из (5.3). Действительно,

$$\int\limits_Y \rho(x)|\varphi(x+\omega) - \varphi(x)|^2\, dx \le c\Bigl(\int\limits_Y |\varphi(x+\omega) - \varphi(x)|^q\, dx\Bigr)^{\frac{2}{q}}$$
$$\le cC_0\Bigl(\int\limits_{2Y} |\nabla\varphi|^p dx\Bigr)^{\frac{2}{p}} \le C\int\limits_{2Y} |\nabla\varphi|^2 \rho\, dx.$$

(iii) Суммируя оценку (5.8) по всем единичным кубам Y, покрывающим $\mathbb{R}^d$, получим неравенство (2.24). Далее, проинтегрировав (2.24) по $\omega \in Y$, по выпуклости выводим (2.22).

(iv) Вывод оценки (2.23) можно провести, во-первых, повторяя схему рассуждений из пп. (i)–(iii). Во-вторых, согласно замечанию в конце § 2 среднее $[\varphi]_\varepsilon$ есть сглаживание вида (1.8) (с ядром «типа треугольника»), для которого свойство (2.22) остается в силе. Дальнейшие подробности опускаем.

Теперь докажем свойство (2.25). После преобразований

$$I = \int b_\varepsilon \varphi^\varepsilon \Phi \rho_\varepsilon\, dx = \int \int\limits_Y b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x+\varepsilon\omega)\Phi(x)\, dxd\omega$$
$$= \int\int\limits_Y b\left(\frac{x}{\varepsilon} - \omega\right)\rho\left(\frac{x}{\varepsilon} - \omega\right)\varphi(x)\Phi(x - \varepsilon\omega)\, dxd\omega$$
$$= \int\int\limits_Y b\left(\frac{x}{\varepsilon} - \omega\right)\rho\left(\frac{x}{\varepsilon} - \omega\right)\varphi(x)(\Phi(x-\varepsilon\omega) - \Phi(x))\, dxd\omega$$

по неравенству Коши — Буняковского получаем

$$I^2 \le \int\int\limits_Y \Bigl|\varphi(x) b\left(\frac{x}{\varepsilon} - \omega\right)\Bigr|^2 \rho\left(\frac{x}{\varepsilon} - \omega\right) d\omega dx \int\limits_Y \int \rho\left(\frac{x}{\varepsilon} - \omega\right)|\Phi(x-\varepsilon\omega) - \Phi(x)|^2\, dxd\omega$$
$$\le \langle \rho b^2\rangle \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \langle \|\Phi(\cdot) - \Phi(\cdot + \varepsilon\omega)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon\, dx)}\rangle.$$

Отсюда в силу (2.24) вытекает (2.25). Лемма доказана.

Лемма 5.1. *Если $\rho \in L^r(Y)$, где $2r = d$ при $d > 2$ и $r > 1$ при $d = 2$, то*

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon\, dx)} \le C\bigl(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^2\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\bigr), \quad C = \mathrm{const}(d, \|\rho\|_{L^r(Y)}). \tag{5.9}$$

Доказательство. Для определенности считаем $d > 2$. Из соображений гомотетии достаточно рассмотреть случай $\varepsilon = 1$. Разбиваем $\mathbb{R}^d$ на единичные кубы. В каждом таком кубе Y имеем оценку

$$\frac{1}{2}\int\limits_Y u^2\rho\,dy \le \int\limits_Y (u-\langle u\rangle)^2\rho\,dy + \int\limits_Y \langle u\rangle^2\rho\,dy, \quad \text{где } \langle u\rangle = \int\limits_Y u\,dy,\ \langle u\rangle^2 \le \langle u^2\rangle.$$

По неравенствам Гёльдера и Соболева

$$\int\limits_Y (u-\langle u\rangle)^2\rho\,dy \le \Big(\int\limits_Y \rho^{\frac{d}{2}}\,dy\Big)^{\frac{2}{d}}\Big(\int\limits_Y (u-\langle u\rangle)^{\frac{2d}{d-2}}\,dy\Big)^{\frac{d-2}{d}} \le C_0\|\rho\|_{L^{\frac{d}{2}}(Y)}\int\limits_Y |\nabla u|^2\,dy.$$

Отсюда $\int\limits_Y u^2\rho\,dy \le C\|u\|^2_{H^1(Y)}$. Суммируя эту оценку по всем кубам Y, выводим (5.9).

2. Опираясь на свойства среднего по Стеклову, докажем некоторые неравенства для нулевого и первого приближений, введенных в п. 3 из § 2.

Лемма 5.2. *Для среднего по Стеклову решения задачи* (2.4) *верна оценка*

$$\|(u)_\varepsilon\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \le C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon^{-1}\,dx)}, \tag{5.10}$$

где C зависит лишь от постоянной эллиптичности матрицы $\widehat{A}$.

Доказательство. Поскольку $U = (u)_\varepsilon$ — решение уравнения $-\operatorname{div}\widehat{A}\nabla U + U = (f)_\varepsilon$, выполнено энергетическое равенство

$$\int (\widehat{A}\nabla U\nabla U + U^2)\,dx = \int (f)_\varepsilon U\,dx.$$

В силу неравенства Коши — Буняковского и (2.21) имеем

$$\Big(\int (f)_\varepsilon U\,dx\Big)^2 = \Big(\int f(U)_\varepsilon\,dx\Big)^2 \le \int \rho_\varepsilon^{-1}f^2\,dx\int \rho_\varepsilon|(U)_\varepsilon|^2\,dx$$
$$\le \int \rho_\varepsilon^{-1}f^2\,dx\int U^2\,dx.$$

Отсюда следует оценка $\|U\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla U\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le c\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon^{-1}\,dx)}$.

Рассматривая $U_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$ как решение уравнения $-\operatorname{div}\widehat{A}\nabla U_i + U_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(f)_\varepsilon$, из энергетического равенства выводим неравенство $\|\nabla U_i\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le c\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon^{-1}\,dx)}$, $i = 1,\dots,d$, и оценка (5.10) установлена. Лемма доказана.

Следующая лемма дает ответ на естественно возникающий вопрос о принадлежности первого приближения вида (2.15) пространству W_ε.

Лемма 5.3. *Пусть вес ρ невырожденный, т. е. $\rho, \rho^{-1} \in L^\infty(Y)$, функция $\tilde v_\varepsilon$ определена в* (2.15). *Тогда $\tilde v_\varepsilon \in W_\varepsilon$, причем $\|\tilde v_\varepsilon\|_{W_\varepsilon} \le C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon^{-1}\,dx)}$, где константа C того же типа, что в теореме* 2.3.

Доказательство. В наших предположениях выполнено неравенство Пуанкаре (2.19), из которого следует оценка для решения N^j задачи (2.2):

$$\langle \rho|N^j|^2\rangle \le C\langle \rho|\nabla N^j|^2\rangle < \infty. \tag{5.11}$$

Согласно (2.15)

$$\nabla\tilde v_\varepsilon = \nabla[u]_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j}[u]_\varepsilon\nabla_y N^j(y) + \varepsilon N^j(y)\nabla\frac{\partial}{\partial x_j}[u]_\varepsilon, \quad y = \varepsilon^{-1}x, \tag{5.12}$$

где $[u]_\varepsilon = (U)_\varepsilon, U = (u)_\varepsilon$. Поэтому в силу (2.21) имеем

$$\begin{gathered}\int \rho_\varepsilon |[u]_\varepsilon|^2\,dx = \int \rho_\varepsilon |(U)_\varepsilon|^2\,dx \le \langle\rho\rangle \int U^2\,dx = \int U^2\,dx,\\ \int \rho_\varepsilon |\nabla[u]_\varepsilon|^2\,dx \le \int |\nabla U|^2\,dx.\end{gathered}\tag{5.13}$$

Аналогично если $N = N^j$, то

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{\partial}{\partial x_j}[u]_\varepsilon (\nabla_y N)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)} + \left\|N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla\frac{\partial}{\partial x_j}[u]_\varepsilon\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)}\\ &\qquad + \left\|N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}[u]_\varepsilon\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)} \le \langle\rho(|\nabla N|^2+N^2)\rangle\|U\|^2_{H^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}\tag{5.14}$$

Отсюда и из (5.10), (5.11) вытекает искомая оценка.

3. Если ρ — невырожденный вес, то решение N задачи (2.2) есть элемент пространства $L^\infty(Y)$ в силу специфики правой части уравнения (см. [15, гл. II, теорема B.2]). Изучим свойство ограниченности N, допуская вырождение веса и следя за тем, чтобы константа в оценке для L^∞-нормы зависела от веса через его интегральные нормы. Рассуждениями, аналогичными использовавшимся при выводе (2.19) и (5.5), доказывается

Лемма 5.4. *При условии* (5.4), *если B_2 — шар радиуса* 2, *то для некоторого* $\sigma > 2$

$$\int\limits_{B_2} |u|^\sigma \rho\,dx \le C\biggl(\int\limits_{B_2} |\nabla u|^2\rho\,dx\biggr)^{\frac{\sigma}{2}} \quad \forall u \in C_0^\infty(B_2),\tag{5.15}$$

где C зависит от размерности d, r и s из (5.4), *а также норм* $\|\rho\|_{L^r(Y)}$, $\|\rho^{-1}\|_{L^s(Y)}$.

Известно, что неравенство (5.15) позволяет с помощью итерационной техники Мозера доказать следующий результат (см., например, [16; 17, гл. 8]).

Лемма 5.5. *В предположении* (5.4) *решение N задачи на ячейке принадлежит $L^\infty(Y)$, причем $\|N\|_{L^\infty(Y)} \le C$, где константа C зависит от постоянной эллиптичности λ, размерности d, r и s из* (5.4), *а также норм* $\|\rho\|_{L^r(Y)}$, $\|\rho^{-1}\|_{L^s(Y)}$.

Отсюда следует

Лемма 5.6. *В предположении леммы* 5.5 *функция $\nabla_y N(\frac{x}{\varepsilon})$ является мультипликатором $H(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon\,dx) \to L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon\,dx)$ с оценкой*

$$\int \left|\nabla_y N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) w(x)\right|^2 \rho_\varepsilon\,dx \le C\int (|w(x)|^2 + \varepsilon^2|\nabla w(x)|^2)\rho_\varepsilon\,dx \quad \forall w \in H(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon\,dx),\tag{5.16}$$

где C — константа того же типа, что в лемме 5.5.

Доказательство. Достаточно установить оценку (5.16) для $\varepsilon = 1$ — общий случай получается из соображений гомотетии. Положим $F = A\xi$, $b = \rho(A\nabla N + F)$. Тогда вектор b соленоидален и выполнено тождество

$$\int b\cdot\nabla\varphi\,dx = 0 \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

в котором по замыканию можно брать $\varphi \in H(\mathbb{R}^d, \rho\,dx)$. Взяв $\varphi(x) = N(x)|w(x)|^2$, $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, получим

$$0 = \int b \cdot \nabla\varphi\,dx = \int A\nabla N w\nabla N w\rho\,dx + 2\int A\nabla N w N\nabla w\rho\,dx$$
$$+ \int F \cdot w\nabla N w\rho\,dx + 2\int F \cdot wN\nabla w\rho\,dx = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Слагаемое J_1 оцениваем снизу $J_1 \geq \lambda\int|\nabla N|^2 w^2\rho\,dx$, используя условие $A\xi\xi \geq \lambda\xi^2$. Остальные слагаемые оцениваем сверху через $\|w\|_{H^1(\mathbb{R}^d,\rho\,dx)}$ и величину δJ_1, где δ достаточно мало. При этом важно, что N, $F = A\xi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. С помощью неравенства $2|A\xi\eta| \leq \delta A\xi\xi + \delta^{-1}A\eta\eta$ получим

$$|J_2| \leq \delta\int A\nabla N w\nabla N w\rho\,dx + \delta^{-1}c\int A\nabla w\nabla w\rho\,dx,\ |J_2| \leq \delta J_1 + c_1\delta^{-1}\int\rho|\nabla w|^2\,dx.$$

Аналогично

$$|J_3| \leq \delta\int|\nabla N|^2 w^2\rho\,dx + c\delta^{-1}\int w^2\rho\,dx, \quad |J_4| \leq c\int(|w|^2 + |\nabla w|^2)\rho\,dx.$$

Если δ выбрать достаточно малым, то получим искомую оценку вида

$$\frac{\lambda}{2}\int|\nabla N|^2 w^2\rho\,dx \leq c_1\int(|w|^2 + |\nabla w|^2)\rho\,dx.$$

Лемма доказана.

Впервые мультипликаторные свойства градиента решения вспомогательной задачи на ячейке для случая $\rho \equiv 1$ были отмечены в работе [18].

§ 6. Оценки усреднения

1. Доказательство теоремы 2.3. Ввиду невырожденности веса пространства W_ε и H_ε совпадают. Далее будем существенно опираться на свойства среднего по Стеклову, перечисленные в лемме 2.7. Отсюда исходит зависимость константы из оценки (2.16) от указанных величин. Из (5.12) и определения усредненной матрицы имеем

$$\nabla\tilde{v}_\varepsilon = (e_j + \nabla_y N^j)z_j^\varepsilon + \varepsilon N^j\nabla z_j^\varepsilon, \quad \rho A\nabla\tilde{v}_\varepsilon - \widehat{A}\nabla[u]_\varepsilon = g^j z_j^\varepsilon + \varepsilon\rho A N^j\nabla z_j^\varepsilon, \tag{6.1}$$

где

$$z_j^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_j}[u]_\varepsilon, \quad [u]_\varepsilon = (U)_\varepsilon, \quad U = (u)_\varepsilon, \quad g^j = \rho A(e_j + \nabla_y N^j) - \widehat{A}e_j, \tag{6.2}$$

причем периодический вектор g^j соленоидален и имеет нулевое среднее по ячейке, т. е.

$$\langle g^j \cdot \nabla\varphi\rangle = 0 \quad \forall\varphi \in C_{\mathrm{per}}^\infty(Y), \quad \langle g^j\rangle = 0. \tag{6.3}$$

Функция $[u]_\varepsilon$ удовлетворяет равенству $-\operatorname{div}\widehat{A}\nabla[u]_\varepsilon + [u]_\varepsilon = [f]_\varepsilon$. Отсюда в силу уравнения (2.1) выводим цепочку равенств

$$-\operatorname{div}\rho_\varepsilon A_\varepsilon\nabla(\tilde{v}_\varepsilon - u_\varepsilon) + \rho_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon - u_\varepsilon) = -\operatorname{div}\rho_\varepsilon A_\varepsilon\nabla\tilde{v}_\varepsilon + \rho_\varepsilon\tilde{v}_\varepsilon - f$$
$$= -\operatorname{div}(\rho_\varepsilon A_\varepsilon\nabla\tilde{v}_\varepsilon - \widehat{A}\nabla[u]_\varepsilon) + \varepsilon\rho_\varepsilon N_\varepsilon^j\frac{\partial}{\partial x_j}[u]_\varepsilon + (\rho_\varepsilon - 1)[u]_\varepsilon + ([f]_\varepsilon - f) = \sum_{i=1}^5 T_i, \tag{6.4}$$

где согласно (6.1), (6.2)

$$T_1 = -\operatorname{div}(g_\varepsilon^j z_j^\varepsilon), \quad T_2 = -\operatorname{div} \varepsilon\rho_\varepsilon A_\varepsilon N_\varepsilon^j \nabla z_j^\varepsilon,$$
$$T_3 = \varepsilon\rho_\varepsilon N_\varepsilon^j z_j^\varepsilon, \quad T_4 = (\rho_\varepsilon - 1)[u]_\varepsilon, \quad T_5 = [f]_\varepsilon - f. \tag{6.5}$$

На языке интегрального тождества это означает

$$\int \rho_\varepsilon(A_\varepsilon\nabla(\tilde v_\varepsilon - u_\varepsilon)\nabla\Phi + (\tilde v_\varepsilon - u_\varepsilon)\Phi)\,dx = \sum_{i=1}^{5}\int T_i\Phi\,dx \quad \forall\Phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{6.6}$$

Оценим сверху каждое слагаемое правой части (6.6). По неравенству Коши — Буняковского в силу $(6.2)_1$, (5.14) имеем

$$\left|\int T_2\Phi\,dx\right|^2 \le \varepsilon^2\int\rho_\varepsilon|\nabla\Phi|^2\,dx\int\rho_\varepsilon\big|A_\varepsilon N_\varepsilon\nabla z_j^\varepsilon\big|^2\,dx \le C\varepsilon^2\|U\|^2_{H^2(\mathbb{R}^d)}\|\nabla\Phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)}, \tag{6.7}$$

$$\left|\int T_3\Phi\,dx\right| \le C\varepsilon\|U\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)}. \tag{6.8}$$

К интегралу с T_4 применим неравенство (2.25), а именно

$$\left|\int T_4\Phi\,dx\right| = \left|\int \rho_\varepsilon^{-1}(\rho_\varepsilon-1)(U)_\varepsilon\Phi\rho_\varepsilon\,dx\right| \le \varepsilon\langle\rho^{-1}(\rho-1)^2\rangle\|U\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\nabla\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)}. \tag{6.9}$$

Поскольку $\int T_5\Phi\,dx = \int f([\Phi]_\varepsilon - \Phi)\,dx$, в силу (2.23)

$$\left|\int T_5\Phi\,dx\right| \le C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon^{-1}\,dx)}\|\nabla\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)}. \tag{6.10}$$

Наконец, установим неравенство

$$\left|\int T_1\Phi\,dx\right| \le C\varepsilon\|U\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}\|\nabla\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)}. \tag{6.11}$$

Тождество $(6.3)_1$ влечет за собой аналогичное тождество в $\mathbb{R}^d$ на функциях из $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Следовательно, по замыканию

$$\int g_\varepsilon^j\cdot\nabla\varphi\,dx = 0 \quad \forall\varphi\in H_\varepsilon.$$

В частности, в качестве пробной функции можно взять $\varphi = z_j^\varepsilon\Phi \in H_\varepsilon$ (см. (5.13), (5.14)). Отсюда

$$\int T_1\Phi\,dx = -\int g_\varepsilon^j\cdot\nabla z_j^\varepsilon\Phi\,dx = -\int\rho_\varepsilon^{-1}g_\varepsilon^j\cdot\nabla z_j^\varepsilon\Phi\rho_\varepsilon\,dx,$$

что дает (6.11) в силу (2.25) и соотношений $\langle g^j\rangle = 0$, $\rho^{-1}g^j\in L^2(Y,\rho\,dy)$.

Из (6.6)–(6.11) и (5.10) следует неравенство

$$\|\tilde v_\varepsilon - u_\varepsilon\|^2_{W_\varepsilon} \le C\varepsilon\|\Phi\|_{W_\varepsilon}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon^{-1}\,dx)}, \quad \Phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Полагая в нем $\Phi = \Phi_m$, $\Phi_m\to(\tilde v_\varepsilon - u_\varepsilon)$ в W_ε (что возможно по лемме 5.3), выводим оценку (2.16). Теорема доказана.

Отсюда следуют L^2-оценки для нулевых приближений $(u)_\varepsilon$ и $[u]_\varepsilon$.

Теорема 6.1. *Пусть ρ — невырожденный вес, приближения $(u)_\varepsilon$ и $[u]_\varepsilon$ определены в* (2.14). *Тогда верны оценки*

$$\|u_\varepsilon - [u]_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \le C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon^{-1}dx)},$$
$$\|u_\varepsilon - (u)_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \le C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon^{-1}dx)}, \tag{6.12}$$

где константа C зависит от тех же величин, что в теореме 2.3, и лишь при $d = 2$ дополнительно предполагаем, что $r > 1$.

Доказательство. Исходим из представления

$$u_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon = (u_\varepsilon - (u)_\varepsilon) + ((u)_\varepsilon - [u]_\varepsilon) - \varepsilon N_\varepsilon^j \frac{\partial}{\partial x_j}[u]^\varepsilon.$$

Два последних слагаемых несущественны на основании (5.14), (5.10) и неравенства

$$\|(u)_\varepsilon - [u]_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)} \le C\varepsilon\|\nabla U\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)} \le C\varepsilon\|\nabla U\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon^{-1}dx)},$$

где последовательно использованы (2.22), (5.9), (5.10). Соотношение (5.9) предполагает, что в (2.12) $r > 1$ для размерности $d = 2$. В случае $d = 2$, $r = 1$ мы не в состоянии оценить должным образом $(u)_\varepsilon - [u]_\varepsilon$ и выводим лишь оценку $(6.12)_1$. Во всех других случаях получается и оценка $(6.12)_2$, так как

$$\|u_\varepsilon - (u)_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)} \le \|u_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)} + \|(u)_\varepsilon - [u]^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)}$$
$$+ \varepsilon\left\|N_\varepsilon^j \frac{\partial}{\partial x_j}[u]^\varepsilon\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon\,dx)} \le C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon^{-1}\,dx)}.$$

Теорема доказана.

2. Доказательство теоремы 2.4. Покажем, что в неравенстве (2.16) можно заменить $\tilde{v}_\varepsilon$ обычным первым приближением v_ε из (2.13), если оперировать нормами $\|\rho\|_{L^\infty}$ и $\|\rho^{-1}\|_{L^s}$, где $2s > d$. Это позволяет использовать не только оценки из леммы 2.7, но и приведенные в п. 3 из § 5 свойства решения ячеечной задачи и его градиента, а также обычную энергетическую оценку для усредненного уравнения. Отсюда исходит зависимость константы из неравенств (2.17) от указанных величин.

Запишем подробно функцию $v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon$ и ее градиент:

$$v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon = u - [u]_\varepsilon + \varepsilon N \cdot \nabla(u - [u]_\varepsilon), \quad \text{где } N = (N^1, \dots, N^d),$$
$$\nabla(v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon) = \nabla(u - [u]_\varepsilon) + \nabla N \nabla(u - [u]_\varepsilon) + \varepsilon\nabla^2(u - [u]_\varepsilon)N.$$

В силу (2.23) и ограниченности ρ имеем

$$\|u - [u]_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \le C\varepsilon\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \le C\varepsilon\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{6.13}$$
$$\|\nabla(u - [u]_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \le C\varepsilon\|\nabla^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Кроме того (см. (2.20) и (5.16)),

$$\|\nabla^2(u - [u]_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \le C\|\nabla^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

$$\|\nabla N \nabla(u - [u]_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \le C(\|\nabla(u - [u]_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} + \varepsilon\|\nabla^2(u - [u]_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}).$$

Отсюда в силу ограниченности N и обычной энергетической оценки $\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \le C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ для решения (2.4) вытекает неравенство $\|v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{W_\varepsilon} \le C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon^{-1}dx)}$, которое вместе с (2.16) приводит к $(2.17)_1$. Попутно (см. (6.13)) мы вывели оценку $(2.17)_2$. Теорема доказана.

3. Покажем, как в случае вырожденного веса, удовлетворяющего предположениям теоремы 2.5, вывести оценки (2.16), (2.17) для аппроксимационных решений.

Прежде всего, одно замечание. Можно считать, что константы в неравенствах (2.19), (5.15), (5.9), (2.22)–(2.25), отвечающих весу ρ^h вида (2.18), не зависят от h и определяются через указанные ранее величины, связанные только с весами ρ и ρ^{-1}.

Весу ρ^h сопоставляем однозначно разрешимое уравнение в $\mathbb{R}^d$

$$-\operatorname{div}\rho^h_\varepsilon A_\varepsilon \nabla u^h_\varepsilon + u^h_\varepsilon = f, \quad \rho^h_\varepsilon = \rho^h(\varepsilon^{-1}x),$$

и задачу на ячейке

$$N^{j,h} \in W^{1,2}_{\mathrm{per}}(Y), \quad \operatorname{div}\rho^h A(e_j + \nabla N^{j,h}) = 0, \quad j = 1, \ldots, d, \tag{6.14}$$

а также усредненную матрицу $\widehat{A}_h$, определяемую равенством

$$\widehat{A}_h e_j = \langle \rho^h A(e_j + \nabla N^{j,h})\rangle, \quad j = 1, \ldots, d,$$

и усредненное уравнение в $\mathbb{R}^d$

$$-\operatorname{div}\widehat{A}_h \nabla u_h + u_h = f, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{6.15}$$

Будем считать, что решения u^h_ε сходятся в $L^2\big(\mathbb{R}^d, \rho^h_\varepsilon\, dx\big)$ вместе с градиентами к рассматриваемому аппроксимационному решению задачи (2.1): $u^h_\varepsilon \rightharpoonup u_\varepsilon, \quad \nabla u^h_\varepsilon \rightharpoonup \nabla u_\varepsilon$, а решения периодической задачи (6.14) сходятся в $L^2(Y, \rho^h dy)$ к соответствующему аппроксимационному решению периодической задачи (2.2): $\nabla N^{j,h} \rightharpoonup \nabla N^j, \quad N^{j,h} \rightharpoonup N^j$. Тогда отвечающие функциям $N^{j,h}$ и N^j усредненные матрицы также связаны сходимостью $\hat{A}_h \to \hat{A}$. Отсюда следует сходимость решений задачи (6.15) к решению задачи (2.4):

$$u_h \rightharpoonup u, \quad \nabla u_h \rightharpoonup \nabla u \quad \text{в} \ \ L^2(\mathbb{R}^d). \tag{6.16}$$

Следствием эллиптической теории является результат, основанный на предположении $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Лемма 6.2. *Решение задачи* (6.15) *экспоненциально затухает на бесконечности вместе со всеми производными равномерно по* h. *Сходимость функций в* (6.16) *можно считать равномерной на компактах, при этом для производных любого порядка. Эта сходимость сохраняется для средних по Стеклову, т. е.* $(u_h)_\varepsilon \to (u)_\varepsilon$ *и т. д.*

Ввиду невырожденности ρ^h выполнены оценки типа (2.16), (2.17) для решения u^h_ε и его приближений $u_h, \tilde{v}^h_\varepsilon, v^h_\varepsilon$, построенных с помощью задач (6.14) и (6.15). Например, $\tilde{v}^h_\varepsilon = [u_h]^\varepsilon + \varepsilon N^{j,h}\frac{\partial}{\partial x_j}[u_h]^\varepsilon$, где $[u_h]^\varepsilon$ — двойное среднее по Стеклову решения u_h, и верна оценка

$$\int \big(\big|u^h_\varepsilon - \tilde{v}^h_\varepsilon\big|^2 + \big|\nabla u^h_\varepsilon - \nabla\tilde{v}^h_\varepsilon\big|^2\big)\rho^h_\varepsilon dx \le C\varepsilon^2 \int f^2\big(\rho^h_\varepsilon\big)^{-1} dx, \tag{6.17}$$

где константа C зависит лишь от размерности d, постоянной эллиптичности λ, показателей r и s из (2.12) и норм $\|\rho\|_{L^r(Y)}, \quad \|\rho^{-1}\|_{L^s(Y)}$. Из приведенных выше свойств функций u_h и $N^{j,h}$ можно вывести сходимость (при $h \to 0$ и фиксированном ε) $\tilde{v}^h_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{v}_\varepsilon$, $\nabla\tilde{v}^h_\varepsilon \rightharpoonup \nabla\tilde{v}_\varepsilon$ в $L^2\big(\mathbb{R}^d, \rho^h_\varepsilon dx\big)$ и перейти к пределу по полунепрерывности в оценке (6.17). Тогда получим оценку (2.16) для разности между аппроксимационным решением u_ε и его первым приближением $\tilde{v}_\varepsilon$. Подобным же образом устанавливаются и другие оценки для аппроксимационных решений.

На основании леммы 1.7 оценки усреднения для H_ε- и W_ε-решений получаются как частный случай из оценок для аппроксимационных решений. Достаточно заметить, что аппроксимации прямого и обратного сглаживаний (см. (1.9)) удовлетворяют условию (2.18), которое проверяется так же, как (1.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жиков В. В.* О весовых соболевских пространствах // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 8. С. 27–58.
2. *Жиков В. В.* К проблеме предельного перехода в дивергентных в неравномерно эллиптических уравнениях // Функц. анализ и его приложения. 2001. Т. 35, № 1. С. 23–39.
3. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
4. *Жиков В. В.* Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 8. С. 3–40.
5. *Жиков В. В.* Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. РАН. Сер. мат. 1986. Т. 50, № 4. С. 675–711.
6. *Жиков В. В.* Об операторных оценках в теории усреднения // Докл. РАН. 2005. Т. 403, № 3. С. 305–308.
7. *Жиков В. В.* О некоторых оценках из теории усреднения // Докл. РАН. 2006. Т. 406, № 5. С. 597–601.
8. *Пастухова С. Е.* О некоторых оценках из усреднения задач теории упругости // Докл. РАН. 2006. Т. 406, № 5. С. 604–608.
9. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* Operator estimates for some problems in homogenization theory // Russian J. Math. Phys. 2005. V. 12, N 4. P. 515–524.
10. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients // Russian J. Math. Phys. 2006. V. 13, N 2. P. 251–265.
11. *Бирман М. С., Суслина Т. А.* Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства усреднения // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15, № 5. С. 1–108.
12. *Жиков В. В.* О спектральном методе в теории усреднения // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2005. Т. 250. С. 95–104.
13. *Бирман М. С., Суслина Т. А.* Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17, № 6. С. 110–216.
14. *Жиков В. В.* Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах // Изв. РАН. Сер. мат. 2002. Т. 66, № 2. С. 81–148.
15. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983.
16. *Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O.* Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Oxford, NJ; Tokyo: Clarendon Press, 1997.
17. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1988.
18. *Суслина Т. А.* Усреднение стационарной периодической системы Максвелла // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16, № 5. С. 162–244.

Статья поступила 4 июля 2006 г.

Жиков Василий Васильевич
Владимирский гос. педагогический университет,
пр. Строителей, 11, Владимир 600024
zhikov@vgpu.vladimir.ru

Пастухова Светлана Евгеньевна
Московский институт радиотехники, электроники и автоматики,
пр. Вернадского, 78, Москва 119454
leonowmw@cs.msu.su