Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2007. Том 48, № 6

УДК 517.54

ЛОКАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИСКАЖЕНИЕМ НА ГРУППАХ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Д. В. Исангулова

Аннотация. Предлагаемая работа является второй в цикле работ автора, посвященном устойчивости в теореме Лиувилля на группе Гейзенберга. Предполагается доказать, что всякое отображение с ограниченным искажением на области Джона группы Гейзенберга приближается конформным отображением с порядком близости $\sqrt{K-1}$ в равномерной норме и с порядком близости $K-1$ в норме Соболева L_p^1 для всех $p < \frac{C}{K-1}$.

В настоящей работе доказывается локальный вариант сформулированного результата: всякое отображение с ограниченным искажением с коэффициентом искажения K, близким к 1, определенное на шаре, приближается конформным отображением на меньшем шаре с порядком близости $\sqrt{K-1}$ в равномерной норме и с порядком близости $K-1$ в норме Соболева L_p^1 для всех $p < \frac{C}{K-1}$. Построен пример, показывающий асимптотическую точность порядка близости отображения с ограниченным искажением к конформному в норме Соболева.

Ключевые слова: группа Гейзенберга, отображение с ограниченным искажением, коэрцитивная оценка, устойчивость.

§ 1. Введение

Классическая теорема Лиувилля говорит о том, что всякое конформное отображение евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, есть сужение некоторого мёбиусова преобразования всего пространства, т. е. сужение композиции конечного числа преобразований инверсии относительно сферы. Напомним, что отображение f некоторой области n-мерного евклидова пространства конформно, если оно переводит всякую бесконечно малую сферу в бесконечно малую сферу. Квазиконформный гомеоморфизм характеризуется тем, что образ всякого бесконечно малого шара является эллипсоидом, у которого отношение наибольшей полуоси к наименьшей не превосходит некоторой постоянной $K \geq 1$. Если мы откажемся от условия гомеоморфности, то при некоторых топологических предположениях получаем отображение с ограниченным искажением. В случае $K = 1$ отображение конформно.

Задача об устойчивости в теореме Лиувилля о конформных отображениях состоит в том, чтобы

1) показать, что при K, близком к единице, отображение с K-ограниченным искажением приближается мёбиусовым,

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 06–01–00735), Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российский ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ 8526.2006.1) и фонда ИНТАС (грант YSF 03–55–905).

2) оценить порядок отклонения отображения от мёбиусова в зависимости от величины $K-1$.

Близость отображения с ограниченным искажением к мёбиусову можно рассматривать в различных топологиях: равномерной, интегральной, пространств Соболева.

Проблема устойчивости в теореме Лиувилля о конформных отображениях пространства поставлена М. А. Лаврентьевым в 30-х гг. прошлого столетия, и им же установлены первые теоремы устойчивости [1, 2]. Полное решение проблемы Лаврентьева получил Ю. Г. Решетняк [3]. Он доказал теорему устойчивости в норме Соболева на областях Джона с порядком близости $O(K-1)$ и показал, что при K, близком к 1, частные производные отображения с K-ограниченным искажением локально суммируемы в степени $\frac{C}{K-1}$.

Мы доказываем устойчивость отображений с ограниченным искажением на группах Гейзенберга $\mathbb{H}^n$. Теорию квазиконформных отображений на группах Гейзенберга развили Коранья и Райманн [4, 5]. Они показали, что квазиконформное отображение удовлетворяет системе Бельтрами, и установили аналог теоремы Лиувилля для C^4-гладких квазиконформных отображений на группах Гейзенберга. Для квазиконформных отображений теорема типа Лиувилля установлена Капоньей [6], для общих отображений с ограниченным искажением теорему типа Лиувилля можно найти в работах С. К. Водопьянова [7] и Н. С. Даирбекова [8].

Данная работа — вторая в цикле работ автора об устойчивости в теореме типа Лиувилля на группах Гейзенберга. В предыдущей работе [9] доказана качественная теорема устойчивости в норме Соболева. А именно, показано, что всякое отображение с K-ограниченным искажением шара $B(a,r)$ при K, близком к 1, аппроксимируется некоторым мёбиусовым отображением на шаре $B(a,r/9)$ в равномерной норме и в норме пространства Соболева W_p^1, причем $p\to\infty$ при $K\to 1$. Цель настоящей работы — найти точный порядок данной близости в зависимости от величины $K-1$. Основной результат работы сформулирован в следующем утверждении[1)].

Теорема 1. *Пусть $n>1$. Тогда существуют константы D_0, $\varepsilon_0>0$ такие, что всякое отображение с ограниченным искажением f открытого множества U из $\mathbb{H}^n$ принадлежит $W^1_{p,\mathrm{loc}}(U,\mathbb{H}^n)$ для всех $p\in\big[\nu,\frac{D_0}{K-1}\big)$ при условии, что $K=K(f)\le 1+\varepsilon_0$. При этом для любого шара $B(a,r)\subset U$ существует мёбиусово отображение φ такое, что $\varphi(x)\neq\infty$ для всех $x\in B\big(a,\frac{5r}{12}\big)$ и*

$$\rho(\varphi^{-1}\circ f(x),x)\le C_1 r\sqrt{K-1},\quad \rho(f(x),\varphi(x))\le C_2\sqrt{K-1}\|D_h\varphi\|_{\nu,B(a,\frac{r}{9})}$$

для всех $x\in B\big(a,\frac{r}{9}\big)$, а для любого числа $p\in\big[\nu,\frac{D_0(1-\delta)}{K-1}\big)$, $\delta>0$, выполнены неравенства

$$\|D_h(\varphi^{-1}\circ f)-I\|_{p,B(a,\frac{r}{9})}\le C_3 r^{\nu/p}(K-1),$$

$$\|D_h f-D_h\varphi\|_{p,B(a,\frac{r}{9})}\le C_4(K-1)\|D_h\varphi\|_{p,B(a,\frac{r}{9})}.$$

Константы C_1, C_2 зависят только от n, константы C_3, C_4 — от n, p и δ.

Заметим, что в отличие от евклидова случая [3] порядки близости в норме Соболева и в равномерной норме различны. Более того, нами построен пример, показывающий асимптотическую точность порядка близости в норме Соболева.

1) В настоящей статье мы следуем всем определениям и обозначениям работы [9].

Известно (см., например, [10]), что всякое квазиконформное отображение f на группе Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}$, если $p < \nu+\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — некоторая постоянная. Теорема 1 оценивает ε при K, достаточно близком к единице. Заметим, что показатель локальной суммируемости частных производных отображения с ограниченным искажением асимптотически совпадает с известным результатом Асталы в $\mathbb{R}^2$ при $K \to 1$ [11].

Доказательство теоремы 1 основывается на методе Ю. Г. Решетняка, разработанном в евклидовом случае [3]. В основе этого метода лежит дифференциальный оператор первого порядка Q_2, ядро которого совпадает с алгеброй Ли мёбиусовых преобразований в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Грубо говоря, этот оператор представляет собой линеаризацию дифференциального оператора, определяющего конформные преобразования.

На группе Гейзенберга горизонтальный дифференциал конформного отображения является общим ортогональным преобразованием и имеет дополнительную структуру: с точностью до множителя он является симплектическим преобразованием. Поэтому оператор Q, «линеаризующий» оператор, определяющий конформные отображения на группе Гейзенберга, состоит в отличие от евклидова случая из двух частей. Одна отвечает за ортогональность, вторая — за симплектичность.

Аналогично евклидову случаю для всякого отображения $f : U \to \mathbb{H}^n$ с K-ограниченным искажением для почти всех точек $x \in U$ выполнено

$$|Qf(x)| \leq C(K-1)(|D_h f(x) - I| + 1) + \beta(D_h f(x) - I), \tag{1}$$

где $\beta(v) = O(|v|^{3/2})$ при $v \to 0$ и $\beta(v) \leq C|v|$ для всех v (лемма 1).

Дальнейший шаг состоит в использовании коэрцитивных оценок для однородных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и с конечномерным ядром. Таковые на группе Гейзенберга доказаны Н. Н. Романовским [12, 13]. Чтобы применить этот результат, мы находим ядро оператора Q (лемма 2). На группах Гейзенберга $\mathbb{H}^n$, $n > 1$, ядро оператора Q конечномерно, на группе $\mathbb{H}^1$ — бесконечномерно. Следовательно, в рамках данного подхода нет возможности применить коэрцитивные оценки при $n = 1$ (рассмотрению этого случая будет посвящена другая работа автора).

Принципиальное наблюдение состоит в том, что отображение из ядра оператора Q всегда можно расширить до элемента алгебры Ли мёбиусовых преобразований на группе Гейзенберга. Это наблюдение дает возможность для всякого отображения f с K-ограниченным искажением найти мёбиусово отображение θ такое, что $Pg = \mathrm{id}$, где $g = \theta^{-1} \circ f$ тоже отображение с K-ограниченным искажением, а P — проектор на ядро оператора Q. Из неравенства (1) и коэрцитивных оценок следует, что

$$\begin{aligned}\|D_h g - I\|_{p,B} &= \|D_h g - D_h(Pg)\|_{p,B} \leq C\|Qg\|_{p,B}\\ &\leq C(K-1)(\|D_h g(x) - I\|_{L_p(B)} + |B|^{1/p}) + C\|\beta(D_h g(x) - I)\|_{L_p(B)}\end{aligned}$$

для всех $p \in [2, \nu]$. Следовательно, для вывода локальной количественной теоремы устойчивости нам надо получить оценку

$$\|\beta(D_h g(x) - I)\|_{L_p(B)} = o(1)\|D_h g(x) - I\|_{L_p(B)}$$

при $K \to 1$. Для этого мы применяем теорию отображений с ограниченным удельным колебанием, развитую автором в [9].

Кратко опишем структуру работы. В § 2 приведены необходимые определения и вспомогательные результаты, в § 3 исследован оператор Q, установлена предварительная теорема устойчивости. В § 4 доказывается теорема 1, в § 5 построен пример, показывающий, что близость отображения с ограниченным искажением к конформному в норме Соболева L_p^1 в теореме 1 не может быть улучшена.

Основные результаты работы сформулированы в работах автора [14, 15].

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю д.ф.-м.н. С. К. Водопьянову за постоянное внимание и помощь в работе.

§ 2. Определения и вспомогательные результаты

Точки группы Гейзенберга $\mathbb{H}^n$, $n \geq 1$, отождествляются с точками пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$. Групповая операция задается по правилу

$$x \cdot y = \left(x_1 + y_1, \dots, x_{2n} + y_{2n}, x_{2n+1} + y_{2n+1} - 2\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+n} - x_{i+n} y_i)\right).$$

Левоинвариантные векторные поля

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2x_{i+n}\frac{\partial}{\partial x_{2n+1}}, \quad X_{i+n} = \frac{\partial}{\partial x_{i+n}} - 2x_i\frac{\partial}{\partial x_{2n+1}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

образуют базис горизонтального подрасслоения V_1 касательного пространства. Вместе с векторным полем $X_{2n+1} = \frac{\partial}{\partial x_{2n+1}}$ они образуют стандартный базис алгебры Ли $V = V_1 \oplus V_2$, где $V_2 = \operatorname{span}\{X_{2n+1}\}$.

Точку x из $\mathbb{H}^n$ можно рассматривать как (z, t), где $z = (x_1 + ix_{n+1}, \dots, x_n + ix_{2n}) \in \mathbb{C}^n$, $t = x_{2n+1} \in \mathbb{R}$. В комплексной форме записи векторные поля

$$Z_j = \frac{1}{2}(X_j - i\,X_{j+n}) = \frac{\partial}{\partial z_j} + i\bar{z}_j\frac{\partial}{\partial t},$$

$$\overline{Z}_j = \frac{1}{2}(X_j + i\,X_{j+n}) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - i\,z_j\frac{\partial}{\partial t},\ j = 1, \dots, n, \quad T = X_{2n+1} = \frac{\partial}{\partial t}$$

образуют левоинвариантный базис алгебры Ли V.

Растяжение δ_s, $s > 0$, действует на группе Гейзенберга по правилу $\delta_s(z,t) = (sz, s^2 t)$ и является гомоморфизмом группы Гейзенберга. *Однородная норма* $\rho(z,t) = (|z|^4 + t^2)^{1/4}$ определяет *метрику Гейзенберга* ρ по правилу $\rho(x,y) = \rho(x^{-1} \cdot y)$, $x, y \in \mathbb{H}^n$.

Мера Лебега $|\cdot|$ на $\mathbb{R}^{2n+1}$ является биинвариантной мерой Хаара. Для шара $B(x,r) = \{y \in \mathbb{H}^n : \rho(x,y) < r\}$ имеем $|B(x,r)| = r^\nu |B(0,1)|$, где $\nu = 2n+2$ — *однородная размерность* группы $\mathbb{H}^n$.

Рассмотрим открытое множество Ω в $\mathbb{H}^n$ и отображение $f : \Omega \to \mathbb{H}^n$ класса Соболева. (Определение класса Соболева приведено, например, в работах [16, 17].) Матрица $D_h f(x) = (X_i f_j(x))_{i,j=1,\dots,2n}$ определяет линейное отображение горизонтального пространства $V_1(x)$ в $V_1(f(x))$ для почти всех $x \in \Omega$, называемое *формальным горизонтальным дифференциалом* (см., например, [17]). В свою очередь, $D_h f$ почти всюду определяет сохраняющий градуировку гомоморфизм алгебр Ли $Df : V \to V$ [8, 16]. Определитель матрицы $Df(x)$ называется (*формальным*) *якобианом* отображения f и обозначается символом $J(x, f)$.

Поскольку гомоморфизм алгебр Ли Df сохраняет градуировку, для почти всех $x \in \Omega$ существует число $\lambda(x, f)$ такое, что

$$Df(x)X_{2n+1} = \lambda(x, f)X_{2n+1}.$$

Более того [5], $\lambda(x, f)^n = \det D_h f(x)$ и $\lambda(x, f)^{n+1} = J(x, f)$. В частности, $J(x, f) \geq 0$ почти всюду в Ω при нечетных n.

Следовательно, классическое понятие ориентации, связанное со знаком якобиана, является малоинформативным на группах Гейзенберга. Приведем определение ориентации, которое ввели Коранья и Райманн в работе [5].

Определение 1 [5]. Отображение f класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{H}^n)$ *сохраняет* (*соответственно меняет*) *KR-ориентацию*, если $\lambda(x, f) > 0$ (соответственно $\lambda(x, f) < 0$) для почти всех $x \in \Omega$.

Отметим, что последняя компонента отображения f класса Соболева должна удовлетворять некоторым дифференциальным уравнениям. А именно, почти всюду выполнено так называемое условие контактности:

$$X_i f_{2n+1} = 2\sum_{j=1}^{n} f_{n+j} X_i f_j - f_j X_i f_{n+j}, \quad i = 1, \dots, 2n. \tag{2}$$

Таким образом, на группах Гейзенберга дифференциал отображения класса Соболева в отличие от евклидова случая не может быть произвольной матрицей. Следующее предложение показывает, какой именно вид имеет этот дифференциал.

Автоморфизм α алгебр Ли V *сохраняет градуировку*, если α переводит V_1 в себя. Известно [18, предложение 1.21], что $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}^n) = \mathrm{Aut}(V)$.

Предложение 1 (см., например, [5, 18]). *Группа сохраняющих градуировку автоморфизмов V представима в виде*

$$R^*_+ \times \{\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) \cup \iota_* \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})\},$$

где R^*_+ действует растяжениями $(\delta_s)_*$, ι — отражение $(z, t) \mapsto (\bar{z}, -t)$, $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ — группа симплектических преобразований.

Определение 2. Пусть U — открытое множество группы Гейзенберга $\mathbb{H}^n$, $f : U \to \mathbb{H}^n$ — непостоянное отображение класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{H}^n)$. Мы называем f *отображением с ограниченным искажением*, если существует постоянная $K \geq 1$ такая, что формальный горизонтальный дифференциал f удовлетворяет неравенству $|D_h f(x)|^\nu \leq K J(x, f)$ для почти всех $x \in U$.

Наименьшая постоянная K в этом неравенстве называется *внешним коэффициентом искажения* отображения f и обозначается через $K_O(f)$. Число $K_O(f)^{\frac{1}{n+1}}$ называется (*линейным*) *коэффициентом искажения* отображения f и обозначается через $K(f)$.

Отображение с ограниченным искажением на группах Гейзенберга непрерывно, открыто и дискретно [7, 8, 19, 20]. Гомеоморфизм с ограниченным искажением называется *квазиконформным*. Примерами отображений с 1-ограниченным искажением являются левые сдвиги $\pi_a : x \mapsto a \cdot x$, $a \in \mathbb{H}^n$, и растяжения δ_t.

В силу аналога теоремы Лиувилля (см. [7, теорема 12; 8]) всякое отображение с 1-ограниченным искажением связной области $U \subset \mathbb{H}^n$ является сужением на U действия элемента группы мёбиусовых преобразований $M_n = M_n^+ \cup M_n^-$, где $M_n^+ = SU(1, n+1)$ и $M_n^- = \begin{cases} SU(1, n+1)\iota & \text{при нечетных } n, \\ \varnothing & \text{при четных } n. \end{cases}$

По предложению 1 работы [9] всякое отображение $\varphi \in M_n^+$ имеет вид $\varphi = \pi_c \circ \varphi_A \circ \delta_\tau \circ j \circ \pi_b \circ j$, где $b, c \in \mathbb{H}^n$, $A \in U(n)$, $\tau \in (0, \infty)$, $\varphi_A(x) = (Az, t)$ — поворот, и $j(x) = \left(\frac{z}{|z|^2 - it}, \frac{-t}{\rho(x)^4}\right)$ — инверсия. Нетрудно показать, что преобразования из M_n^+ сохраняют KR-ориентацию, а из M_n^- — меняют.

Для доказательства теоремы 1 мы построим дифференциальный оператор, ядро которого будет почти совпадать с алгеброй Ли группы мёбиусовых преобразований. Поэтому нам необходимо знать явный вид алгебры Ли M_n. Обозначим через Σ_n^+ алгебру Ли группы M_n^+. В базисе $Z_1, \dots, Z_n, \overline{Z}_1, \dots, \overline{Z}_n, T$ векторное поле $v \in \Sigma_n^+$ записывается в виде $v = (u, p) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k Z_k + \bar{u}_k \overline{Z}_k + pT$, где $u : \mathbb{H}^n \to \mathbb{C}^n$, $p : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$.

В силу леммы 6 работы [9] линейное пространство Σ_n^+ натянуто на следующие подпространства:

1) $(a, b + 4\operatorname{Im}\langle a, z\rangle)$, $a \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{R}$;

2) $(\alpha z, 2\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

3) $(Bz, 2\operatorname{Im}\langle Bz, z\rangle)$, $B + B^* = 0$ — косоэрмитовая $(n \times n)$-матрица;

4) $((|z|^2 - it)(i\gamma z + c) - 2\langle z, c\rangle z, \gamma|x|^4 - 4|z|^2 \operatorname{Im}\langle z, c\rangle - 4t\operatorname{Re}\langle z, c\rangle)$, $c \in \mathbb{C}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

§ 3. Оператор Q

Однородный дифференциальный оператор Q действует на отображении $u : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ следующим образом:

$$Qu = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(D_h u + (D_h u)^t) - \frac{1}{2n}\operatorname{tr}(D_h u) I \\ \frac{1}{2}(D_h u + J D_h u J) \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Здесь $(2n \times 2n)$-матрица $D_h u$ равна $(X_i u_j)_{i,j=1,\dots,2n}$. Оператор Q действует также и на отображениях u из $\mathbb{H}^n$ в $\mathbb{H}^n$. В этом случае $D_h u$ в определении оператора Q — это формальный горизонтальный дифференциал отображения u.

В следующей лемме устанавливается основное неравенство для оператора Q.

Лемма 1. *Существует константа $C > 0$ такая, что для всякого отображения $f : U \to \mathbb{H}^n$, $U \subset \mathbb{H}^n$, с K-ограниченным искажением, которое сохраняет KR-ориентацию, выполнено*

$$|Qf(x)| \le C(K - 1)\big(|D_h f(x) - I| + 1\big) + \beta(D_h f(x) - I)$$

для почти всех точек $x \in U$, где $\beta(v) = O(|v|^{3/2})$ при $v \to 0$ и $\beta(v) \le C|v|$ для всех v.

Доказательство. Из определения отображения с ограниченным искажением имеем $|D_h f(x)|^{2n} \le K^n |\det D_h f(x)|$ для почти всех $x \in U$. В силу [3, гл. 4, соотношения 3.17, 3.18] отсюда следует, что

$$|Q_2 f(x)| \le (K^n - 1)(1 + |D_h f - I|) + \beta(D_h f(x) - I),$$

где

$$Q_2 f(x) = \frac{D_h f(x) + (D_h f(x))^t}{2} - \frac{\operatorname{tr} D_h f(x)}{2n} I$$

— однородный дифференциальный оператор первого порядка, $\beta(v) = O(|v|^{3/2})$ при $v \to 0$ и $\beta(v) \le C|v|$ при всех v.

Отображение f можно рассматривать также в комплексной форме записи. Тогда определены две $(n \times n)$-матрицы $Zf(x)$ и $\overline{Z}f(x)$. При этом

$$D_h f(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} Zf(x) + \operatorname{Re} \overline{Z}f(x) & -\operatorname{Im} Zf(x) + \operatorname{Im} \overline{Z}f(x) \\ \operatorname{Im} Zf(x) + \operatorname{Im} \overline{Z}f(x) & \operatorname{Re} Zf(x) - \operatorname{Re} \overline{Z}f(x) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $|\overline{Z}f| = \left|\frac{1}{2}(D_h f + JD_h fJ)\right|$ и $|Zf| = \left|\frac{1}{2}(D_h f - JD_h fJ)\right| \le |D_h f|$.

Поскольку отображение f сохраняет KR-ориентацию, то в силу системы Бельтрами [5, теорема C] получаем

$$|\overline{Z}f| \le \frac{K-1}{K+1}|Zf| \le \frac{K-1}{K+1}(|D_h f - I| + 1).$$

Осталось заметить, что $|Qf| \le |Q_2 f| + \left|\frac{1}{2}(D_h f + JD_h fJ)\right|$. □

Замечание. В работе [10] система Бельтрами доказана для квазиконформных отображений (т. е. гомеоморфизмов с ограниченным искажением). Однако нетрудно проверить, что система Бельтрами справедлива и для общих отображений с ограниченным искажением.

Ядро оператора Q. На группах Гейзенберга для однородного дифференциального оператора с конечномерным ядром выполняется коэрцитивная оценка [12, теорема 4; 13]. Следовательно, для применения коэрцитивной оценки необходимо проверить конечномерность ядра оператора Q.

Лемма 2. *Ядро оператора Q на отображениях $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{H}^n, \mathbb{R}^{2n})$, $n \ge 2$, $p \ge 1$, конечномерно. В комплексной форме записи: $u \in \ker Q$ тогда и только тогда, когда*

$$u(z,t) = a + (\lambda I + K)z + (t + i|z|^2)(\alpha z + b) + 2i\langle z, b\rangle z,$$

где $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{C}^n$, $K + K^* = 0$. На группе $\mathbb{H}^1$ ядро оператора Q бесконечномерно.

Доказательство. (i) Пусть функция $u : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ лежит в ядре оператора Q и принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{H}^n, \mathbb{R}^{2n})$. Перепишем условие $Qu = 0$ в комплексной форме. Имеем $Q_2 u = \frac{1}{2}(D_h u + (D_h u)^t) - \frac{tr D_h u}{2n} I = 0$ и $\overline{Z}u = 0$, где

$$D_h u = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} Zu + \operatorname{Re} \overline{Z}u & -\operatorname{Im} Zu + \operatorname{Im} \overline{Z}u \\ \operatorname{Im} Zu + \operatorname{Im} \overline{Z}u & \operatorname{Re} Zu - \operatorname{Re} \overline{Z}u \end{pmatrix}$$

и

$$(D_h u)^t = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(Zu)^t + \operatorname{Re}(\overline{Z}u)^t & \operatorname{Im}(Zu)^t + \operatorname{Im}(\overline{Z}u)^t \\ -\operatorname{Im}(Zu)^t + \operatorname{Im}(\overline{Z}u)^t & \operatorname{Re}(Zu)^t - \operatorname{Re}(\overline{Z}u)^t \end{pmatrix}.$$

Отсюда $u \in \ker Q$ равносильно тому, что

$$Z_j u_k = -\overline{Z}_k \bar{u}_j, \quad Z_k u_k + \overline{Z}_k \bar{u}_k = Z_j u_j + \overline{Z}_j \bar{u}_j, \quad k \ne j, \quad \overline{Z}u = Z\bar{u} = 0.$$

(ii) Пусть u не зависит от $t = x_{2n+1}$. Тогда отображение u можно рассматривать как отображение евклидовых пространств: $u : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$. В евклидовом случае известно [3], что $u \in \ker Q_2$ тогда и только тогда, когда

$$u(w,t) = a + (\lambda I + K)w - 2\langle q, w\rangle w + q|w|^2, \quad w \in \mathbb{R}^{2n}, \ t \in \mathbb{R},$$

где $a, q \in \mathbb{R}^{2n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $K + K^t = 0$. Отсюда $u \in \ker Q$ тогда и только тогда, когда

$$u(z,t) = a + (\lambda I + K)z, \quad z \in \mathbb{C}^n,\ t \in \mathbb{C}, \quad \text{где } a \in \mathbb{C}^n,\ K + K^* = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Действительно, в комплексной форме записи $-2\langle q, w\rangle w + q|w|^2 = -(\langle p, z\rangle + \langle z, p\rangle)z + p|z|^2$, где $z = (w_1 + iw_{n+1}, \dots, w_n + iw_{2n})$, $p = (q_1 + iq_{n+1}, \dots, q_n + iq_{2n})$, и

$$\overline{Z}_j(p|z|^2 - (\langle p, z\rangle + \langle z, p\rangle)z)_k = z_j p_k - p_j z_k - (\langle p, z\rangle + \langle z, p\rangle)\delta_{j,k} = 0$$

для всех $j, k = 1, \dots, n$ тогда и только тогда, когда $p = 0$.

(III) Пусть u зависит от $t = x_{2n+1}$. Так как $TQu = QTu$, то Tu тоже принадлежит $\ker Q$. Покажем, что Tu не зависит от t. Имеем

$$-2iTu_k = Z_j\overline{Z}_j u_k - \overline{Z}_j Z_j u_k = -\overline{Z}_j Z_j u_k = \overline{Z}_j \overline{Z}_k \bar{u}_j \quad \text{для всех } j \neq k.$$

Отсюда для трех попарно различных индексов j, k, m получаем

$$-2iZ_m Tu_k = Z_m \overline{Z}_j \overline{Z}_k \bar{u}_j = \overline{Z}_j \overline{Z}_k Z_m \bar{u}_j = 0 \tag{4}$$

и

$$-2iZ_k Tu_k = Z_k \overline{Z}_j \overline{Z}_k \bar{u}_j = \overline{Z}_j Z_k \overline{Z}_k \bar{u}_j = -2i\overline{Z}_j T\bar{u}_j \quad \text{для всех } j \neq k. \tag{5}$$

Если $n > 2$, то для всех $m \neq k$ существует $j \neq m, k$ и, следовательно, $Z_m Tu_k = 0$ для всех $m \neq k$. Тогда

$$-2iTTu_k = Z_m\overline{Z}_m Tu_k - \overline{Z}_m Z_m Tu_k = 0 \quad \text{для всех } k = 1, \dots, n.$$

Если $n = 2$, то $Z_1 Tu_2 = -\overline{Z}_2 T\bar{u}_1$, $Z_1 Tu_1 = \overline{Z}_2 T\bar{u}_2$, откуда

$$Z_1 Z_2 Tu_1 = -Z_1\overline{Z}_1 T\bar{u}_2 = 2iTT\bar{u}_2 = Z_2 Z_1 Tu_1 = Z_2\overline{Z}_2 T\bar{u}_2 = -2iTT\bar{u}_2,$$

$$Z_1 Z_2 Tu_2 = Z_1\overline{Z}_1 T\bar{u}_1 = -2iTT\bar{u}_1 = Z_2 Z_1 Tu_2 = -Z_2\overline{Z}_2 T\bar{u}_1 = 2iTT\bar{u}_1.$$

Следовательно, $TTu = 0$ для всех $n > 1$.

(IV) Так как $Tu \in \ker Q$ и Tu не зависит от t, то, как и в п. (II),

$$Tu = b + (\alpha I + L)z, \quad b \in \mathbb{C}^n,\ L + L^* = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Покажем, что косоэрмитова матрица $L = (L_{ij})_{i,j=1}^n$ нулевая.

Если $n > 2$, то в силу (4)

$$Z_j Tu_k = L_{kj} = 0 \quad \text{для всех } k \neq j.$$

Из (5) имеем

$$Z_k Tu_k = \alpha + L_{kk} = \overline{Z}_j T\bar{u}_j = \alpha + \overline{L}_{jj} \quad \text{для всех } k \neq j.$$

Так как диагональные элементы матрицы L чисто мнимые, то $L_{kk} = 0$ для всех $k = 1, \dots, n$.

Если $n = 2$, то

$$2i\overline{Z}_2 T\bar{u}_1 = -2iZ_1 Tu_2 = -Z_1\overline{Z}_2 Z_2 u_2 = \overline{Z}_2 Z_2 \overline{Z}_2 \bar{u}_1 = -2i\overline{Z}_2 T\bar{u}_1.$$

Следовательно, $Z_1 Tu_2 = Z_2 Tu_1 = 0$. Осталось показать, что диагональные элементы матрицы L равны нулю. Так как они чисто мнимые, достаточно показать, что $Z_i Tu_i = \overline{Z}_i T\bar{u}_i$, $i = 1, 2$. Имеем

$$Z_1 u_1 + \overline{Z}_1 \bar{u}_1 = Z_2 u_2 + \overline{Z}_2 \bar{u}_2.$$

Отсюда

$$Z_1Z_1u_1 = Z_1Z_2u_2 - Z_1\overline{Z}_1\bar{u}_1 = -Z_2\overline{Z}_2\bar{u}_1 + 2iT\bar{u}_1 = 4iT\bar{u}_1,$$

$$Z_2Z_2u_2 = Z_2Z_1u_1 - Z_2\overline{Z}_2\bar{u}_2 = -Z_1\overline{Z}_1\bar{u}_2 + 2iT\bar{u}_2 = 4iT\bar{u}_2$$

и, следовательно,

$$4i\overline{Z}_1T\bar{u}_1 = \overline{Z}_1Z_1Z_1u_1 = Z_1\overline{Z}_1Z_1u_1 + 2iTZ_1u_1 = 4iZ_1Tu_1,$$

$$4i\overline{Z}_2T\bar{u}_2 = \overline{Z}_2Z_2Z_2u_2 = Z_2\overline{Z}_2Z_2u_2 + 2iTZ_2u_2 = 4iZ_2Tu_2.$$

Таким образом, $L = 0$.

(v) Итак, мы показали, что $Tu(z,t) = \alpha z + b$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}^n$, $x = (z,t)$. Осталось доказать, что $u(z,t) = a + (\lambda I + K)z + (t + i|z|^2)(\alpha z + b) + 2i\langle z, b\rangle z$. Для этого достаточно проверить, что $Qu = 0$.

1. Обозначим $v = (t + i|z|^2)z$ и покажем, что $v \in \ker Q$. Действительно,

$$Z_jv_k = (t + i|z|^2)\delta_{jk} + (i\bar{z}_j + i\bar{z}_j)z_k \quad \text{и} \quad \overline{Z}_jv_k = (-iz_j + iz_j)z_k = 0$$

для всех j, $k = 1, \dots, n$. Отсюда $Z_jv_k = -\overline{Z}_k\overline{v}_j$ для всех $j \neq k$ и $\operatorname{Re} Z_jv_j = t$ для всех j. Следовательно, $v \in \ker Q$.

2. Обозначим $v = (t + i|z|^2)b + 2i\langle z, b\rangle z$ и покажем, что $v \in \ker Q$. Так как $Z_jv_k = (i\bar{z}_j + i\bar{z}_j)b_k + 2i\bar{b}_jz_k + 2i\langle b, z\rangle\delta_{jk}$ для всех $j, k = 1, \dots, n$, то нетрудно проверить, что

$$Z_jv_k = -\overline{Z}_k\overline{v}_j, \ j \neq k, \quad \operatorname{Re} Z_jv_j = -2\operatorname{Im}\langle b, z\rangle \quad \text{для всех } j = 1, \dots, n.$$

$$\overline{Z}_jv_k = (-iz_j + iz_j)b_k = 0 \quad \text{для всех } j, k = 1, \dots, n.$$

Следовательно, $v \in \ker Q$.

(vi) Пусть теперь $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{H}^n, \mathbb{R}^{2n})$ и $Qu = 0$ в смысле обобщенных производных. Покажем, что $u \in \ker Q$, где $\ker Q$ — конечномерное пространство, найденное в пп. (i)–(v). Рассмотрим шар $B \subset \mathbb{H}^n$ и построим последовательность $u_k \in C^\infty(\mathbb{H}^n, \mathbb{R}^{2n})$ такую, что $\|u - u_k\|_{W^1_p(B)} \to 0$ при $k \to \infty$. По доказанному выше ядро оператора Q конечномерно на гладких отображениях. Следовательно, мы можем применить теорему 4 работы [12] к последовательности u_k. Имеем

$$\|u_k - Pu_k\|_{W^1_p(B)} \leq C\|Qu_k\|_{p,B},$$

где P — проектор, переводящий гладкие $2n$-вектор-функции в функции из $\ker(Q)$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем $\|u - Pu\|_{W^1_p(B)} \leq C\|Qu\|_{p,B} = 0$, где $Pu = \lim\limits_{k\to\infty} Pu_k$. Поскольку $Pu_k \in \ker Q$, то Pu тоже принадлежит $\ker Q$. Отсюда $u = Pu \in \ker Q$.

(vii) В случае $\mathbb{H}^1$ ядро оператора Q бесконечномерно. Оно содержит все решения системы Коши — Римана, которые не зависят от переменной t. □

Замечания. 1. Можно показать, что если отображение $\varphi : \mathbb{H}^1 \to \mathbb{R}^2$ принадлежит $\ker Q$ и продолжается до контактного отображения $f : \mathbb{H}^1 \to \mathbb{H}^1$, то отображение f мёбиусово.

2. Пусть $n > 1$. Очевидно, что $v = (u, p) \in \Sigma^+_n$ тогда и только тогда, когда $u \in \ker Q$.

3. Коэрцитивные оценки работы [12] доказаны для областей, удовлетворяющих условию конуса. Поскольку шары в метрике Гейзенберга являются областями, удовлетворяющими условию конуса, мы можем применить коэрцитивные оценки на шарах.

Проектор на ядро оператора Q. Далее мы покажем, что коэрцитивная оценка верна для любого проектора на ядро оператора Q (ср. с [3, гл. 3, теорема 3.2], где это утверждение доказывается в евклидовом случае).

Предложение 2. *Пусть B — шар на группе Гейзенберга $\mathbb{H}^n$, $n > 1$, $p > 1$ и Π — любой проекционный оператор из пространства $W_p^1(B, \mathbb{R}^{2n})$ на $\ker(Q)$. Тогда существует константа $C > 0$ такая, что для всякого $u \in W_p^1(B, \mathbb{R}^{2n})$*

$$\|u - \Pi u\|_{W_p^1(B)} \le C\|Qu\|_{p,B}.$$

Доказательство. По теореме 4 работы [12] существует проектор P, переводящий гладкие вектор-функции в функции из $\ker(Q)$, такой, что

$$\|u - Pu\|_{W_p^1(B)} \le C\|Qu\|_{p,B}$$

для всех $u \in C^\infty(B, \mathbb{R}^{2n})$. В силу $u - \Pi u = u - Pu - \Pi u + Pu = u - Pu - \Pi(u - Pu)$ получаем

$$\|u - \Pi u\|_{W_p^1(B)} \le (1 + \|\Pi\|)\|u - Pu\|_{W_p^1(B)} \le C(1 + \|\Pi\|)\|Qu\|_{p,B}.$$

Таким образом, предложение доказано для $u \in C^\infty(B, \mathbb{R}^{2n})$.

Рассмотрим $u \in W_p^1(B, \mathbb{R}^{2n})$. Построим последовательность отображений $u_i \in C^\infty(B, \mathbb{R}^{2n})$ такую, что $\|u - u_i\|_{W_p^1(B)} \to 0$ при $i \to \infty$. Тогда

$$\|u_i - \Pi u_i\|_{W_p^1(B)} \le C_1\|Qu_i\|_{p,B}.$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$, получаем необходимое неравенство. $\square$

Пусть $B = B(0,1) \in \mathbb{H}^n$, $n > 1$, и $\sigma \in (0,1)$. Построим проектор P, переводящий отображения из $W_p^1(B, \mathbb{R}^{2n})$ на ядро оператора Q. Пусть $v_1, \dots, v_d$, $d = \dim\ker Q = \dim \Sigma_n^+ - 1 = n^2 + 4n + 2$, — ортонормированный базис $\ker Q$ относительно скалярного произведения

$$\langle v, y\rangle = \frac{1}{|\sigma B|}\int\limits_{\sigma B}\langle v(x), y(x)\rangle\, dx, \quad v, y \in W_p^1(B, \mathbb{R}^{2n})$$

(под интегралом стоит скалярное произведение в $\mathbb{R}^{2n}$). Для произвольного отображения $\varphi \in W_p^1(B, \mathbb{R}^{2n})$ положим

$$P\varphi = \sum_{i=1}^{d}\langle \varphi, v_i\rangle\, v_i. \tag{6}$$

Легко проверить, что $\|P\varphi\|_{p,B} \le C\|\varphi\|_{1,\sigma B}$.

Для произвольного отображения $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{2n+1}) : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ через $\widetilde{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_{2n})$ будем обозначать его проекцию на первые $2n$ координат.

Очевидно, что любое отображение из Σ_n^+ восстанавливается по первым $2n$ координатным функциям с точностью до сдвига на последнюю координату, т. е. для любого отображения $v \in \ker Q$ существует единственный элемент $u \in \Sigma_n^+$ такой, что $\tilde{u} = v$ и u не содержит сдвига на последнюю координату. Мы будем обозначать его символом $u = \Sigma(v)$.

Пусть $u_0 = (0, \dots, 0, 1) \in \Sigma_n^+$ — сдвиг на последнюю координату. Тогда любой элемент $u \in \Sigma_n^+$ однозначно представляется в виде $hu_0 + \Sigma(\tilde{u})$, $h \in \mathbb{R}$. Более того, элементы $u_0, \dots, u_d$ образуют базис Σ_n^+, где $u_i = \Sigma(v_i)$, $i = 1, \dots, d$.

Для произвольного отображения $\psi \in W_p^1(B, \mathbb{H}^n)$ положим

$$\mathbf{P}\psi = \Sigma(P(\widetilde{\psi})) \in \Sigma_n^+.$$

Легко проверить, что $\|\mathbf{P}\psi\| \le C\|\widetilde{\psi}\|_{C(\sigma B)}$ для непрерывной функции $\psi \in C(\sigma B)$.

Предварительная теорема устойчивости. Рассмотрим отображение $\varphi : B \to \mathbb{H}^n$, $B \subset \mathbb{H}^n$. Обозначим

$$(\varphi)_B = \left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B \varphi_1(x)\,dx, \frac{1}{|B|}\int\limits_B \varphi_2(x)\,dx, \dots, \frac{1}{|B|}\int\limits_B \varphi_{2n+1}(x)\,dx\right).$$

Теорема 2. *Пусть $n > 1$. Существуют константы $C, \varepsilon_1 > 0$ и положительные неубывающие функции μ_i, $\mu_i(t) \to 0$ при $t \to 0$, $i = 1, 2$, такие, что для всякого отображения с ограниченным искажением $f : B = B(a, r) \to \mathbb{H}^n$, $K(f) < 1 + \varepsilon_1$, существует мёбиусово отображение φ такое, что $\varphi \neq \infty$ на шаре $B\left(a, \frac{5r}{12}\right)$, и*

$$\|D_h(\varphi^{-1} \circ f) - I\|_{p, B(a, \frac{r}{8})} \leq C\|Q(\varphi^{-1} \circ f)\|_{p, B(a, \frac{r}{8})},$$

если $\theta^{-1} \circ f \in W_p^1\left(B\left(a, \frac{r}{8}\right), \mathbb{H}^n\right)$,

$$\rho((\varphi^{-1} \circ f)(x), x) \leq r\mu_1(K(f) - 1) \quad \text{для всех } x \in B(a, r/2),$$

$$\|D_h(\varphi^{-1} \circ f) - I\|_{\nu, B(a, \frac{5r}{18})} \leq r\mu_2(K(f) - 1),$$

$$(\psi)_{B(a, \frac{r}{8})} = 0, \quad \text{где } \psi(x) = x^{-1} \cdot (\varphi^{-1} \circ f(x)).$$

Здесь Q — дифференциальный оператор (3) *первого порядка с постоянными коэффициентами.*

Доказательство. (i) Мы рассматриваем группу Гейзенберга $\mathbb{H}^n$, $n > 1$, и отображение $f \in W_p^1(B, \mathbb{H}^n)$ с ограниченным искажением. Пусть $B = B(0, 1)$. По теореме 4 работы [9] существует $\psi \in M_n$ такое, что

$$\rho(\psi^{-1} \circ f(x), x) \leq \mu_0(K(f) - 1) \quad \text{для всех } x \in B(0, 1/2),$$

где μ_0 — положительная неубывающая функция и $\mu_0(t) \to 0$ при $t \to 0$. Обозначим $g = \psi^{-1} \circ f$ и $b = \mu_0(K(f) - 1) + 1/2$. Тогда $g\left(\frac{1}{2}B\right) \subset bB$.

(ii) Мы показали, что $\ker Q$ конечномерно при $n \geq 2$. По предложению 2 для проектора P пространства $W_p^1\left(\frac{1}{8}B, \mathbb{R}^{2n}\right)$ на $\ker Q$, задаваемого соотношением (6) с $\sigma = \frac{1}{4}$, имеем

$$\|Pu\| \leq C\|u\|_{1, \frac{\sigma}{2}B} \quad \text{и} \quad \|D_h u - D_h(Pu)\|_{p, \frac{1}{8}B} \leq C\|Qu\|_{p, \frac{1}{8}B}$$

для любого отображения $u \in W_p^1\left(\frac{1}{8}B, \mathbb{R}^{2n}\right)$.

(iii) M_n^+ является $(d+1)$-мерным многообразием. Рассмотрим окрестность единицы V в M_n^+ и координатную систему $\alpha : V \to \mathbb{R}^{d+1}$, $\alpha(\mathrm{id}) = 0$, $t = (t_0, \dots, t_d) \in \alpha(V)$, $\alpha^{-1}(t) = \varphi_t(x) = \varphi(x, t) \in M_n^+$. Можно считать, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(x, 0) = u_i(x), \quad i = 0, \dots, d.$$

Предположим, что $\alpha(V) = U \supset \overline{B}_{\mathbb{R}^{d+1}}(0, \rho_0)$. Известно, что $\varphi_t \rightrightarrows \mathrm{id}$ при $t \to 0$ на любом компактном подмножестве $\mathbb{H}^n$. Обозначим

$$w(t) = \sup_{x \in \overline{bB}} \rho(\varphi_t(x), x), \ t \in U, \quad \lambda(\rho) = \sup_{t \in \overline{B}_{\mathbb{R}^{d+1}}(0, \rho)} w(t) \to 0 \text{ при } \rho \to 0.$$

Рассмотрим такое число $\rho_1 \in (0, \rho_0)$, что $\lambda(\rho) \leq 1$ для всех $0 < \rho < \rho_1$. В частности, при таком выборе ρ_1 отображение φ_t конечно на шаре $\overline{bB}$ для всякого $t \in B_{\mathbb{R}^{d+1}}(0, \rho_1)$.

Имеем
$$|\widetilde{\varphi}_t(x_1) - \widetilde{\varphi}_t(x_2)| \le C_1\rho(x_1, x_2) \quad \text{для всех } x_1, x_2 \in \overline{bB},$$
где $C_1 = C\sup\{|D_h\varphi_t(x)| : t \in \overline{B}_{\mathbb{R}^{d+1}}(0,\rho_1), x \in \overline{bB}\}$ ($C_1 < \infty$, поскольку отображение $(x,t) \mapsto \|D_h\varphi_t(x)\|$ непрерывно на компактном множестве $\overline{bB} \times \overline{B}_{\mathbb{R}^{d+1}}(0,\rho_1)$).

Очевидно, что для любых двух точек $(w,p),(z,t) \in \mathbb{H}^n$ имеем
$$\rho((w,p),(z,t)) \le |z-w|+|t-p-2\operatorname{Im}\langle w,z\rangle|^{1/2} \le |z-w|+|t-p|^{1/2}+(2|w-z|\,|z|)^{1/2},$$
так как $\operatorname{Im}\langle w,z\rangle = \operatorname{Im}\langle w-z,z\rangle$. Поэтому
$$\rho(\varphi_t(x_1),\varphi_t(x_2)) \le |\widetilde{\varphi}_t(x_1) - \widetilde{\varphi}_t(x_2)| + |[\varphi_t(x_1)]_{2n+1} - [\varphi_t(x_2)]_{2n+1}|^{1/2} + (2|\widetilde{\varphi}_t(x_1) - \widetilde{\varphi}_t(x_2)|\,\|\widetilde{\varphi}_t\|_{C(\overline{bB})})^{1/2} \le C_2\sqrt{\rho(x_2,x_1)}$$
для всех точек $x_1, x_2 \in \overline{bB}$, поскольку из условия контактности (2)
$$\|\nabla_{\mathscr{L}}[\varphi_t]_{2n+1}\|_{C(\overline{bB})} \le 2\|D_h\varphi_t\|_{C(\overline{bB})}\|\widetilde{\varphi}_t\|_{C(\overline{bB})}.$$

(iv) Определим
$$\Lambda(t) = \mathbf{P}(\varphi_t) + t_0u_0, \quad \widetilde{\Lambda}(t) = \mathbf{P}(\varphi_t \circ g) + t_0u_0 \text{ для всех } t \in \overline{B}_{\mathbb{R}^{d+1}}(0,\rho_1).$$
Имеем $\Lambda \in C^\infty(B_{\mathbb{R}^{d+1}}(0,\rho_1),\Sigma_n^+)$ и $\Lambda(0) = \mathbf{P}(\mathrm{id}) = \Sigma(\widetilde{\mathrm{id}}) = \xi \in \Sigma_n^+$, где $\xi(z,t) = (z,2t)$, $(z,t) \in \mathbb{H}^n$, так как $\widetilde{\mathrm{id}} \in \ker Q$.

Найдем дифференциал Λ в точке 0. Для произвольного вектора $h \in \mathbb{R}^{d+1}$
$$d\Lambda(0)h = \lim_{s\to 0}\frac{\Lambda(sh)-\Lambda(0)}{s} = \lim_{s\to 0}\mathbf{P}\left(\frac{\varphi_{sh}-\mathrm{id}}{s}\right) + h_0u_0 = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^d h_iu_i\right) + h_0u_0 = \sum_{i=0}^d h_iu_i.$$
Таким образом, линейное отображение $d\Lambda(0) : \mathbb{R}^{d+1} \to \Sigma_n^+$ невырожденное. Следовательно, существует $\rho_2 \in (0,\rho_1]$ такое, что Λ — взаимно однозначное отображение шара $B_{\mathbb{R}^{d+1}}(0,\rho_2)$ на окрестность отображения $\xi \in \Sigma_n^+$.

Положим
$$\delta(\rho) = \inf\{\|\Lambda(t) - \xi\| : |t| = \rho\} \quad \text{для всех } \rho \in (0,\rho_2].$$
Тогда $\delta(\rho)$ неубывающая, $\delta(\rho) > 0$ и $\delta(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Получаем
$$|\widetilde{\Lambda}(t) - \Lambda(t)| = |\mathbf{P}(\varphi_t \circ g - \varphi_t)| \le \|\mathbf{P}\|\|\widetilde{\varphi_t \circ g} - \widetilde{\varphi_t}\|_{C(\frac{\sigma}{2}B)}.$$
Для точки $x \in \frac{\sigma}{2}\overline{B} \subset \frac{1}{2}B$ имеем $g(x) \in \overline{bB}$ и
$$\|\widetilde{\varphi_t \circ g}(x) - \widetilde{\varphi}_t(x)\| \le C_1\rho(g(x),x) \le C_1\mu_0(K(f)-1).$$

Пусть $K(f) = 1+\tau$. Тогда существует число ε_1 такое, что $\mu_0(\tau) \le \delta(\rho_2)$ для всех $\tau \in (0,\varepsilon_1)$. Пусть
$$\rho(\tau) = \inf\{\rho : \delta(\rho) \ge C_1\|\mathbf{P}\|\mu_0(\tau) + \tau\}, \quad \tau \in (0,\varepsilon_1).$$
Тогда $\rho(\tau)$ неубывающая, $\rho(\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$, $\delta(\rho(\tau)) > C_1\|\mathbf{P}\|\mu_0(\tau)$ и $\rho(\tau) \le \rho_2$ для всех $\tau \in (0,\varepsilon_1]$. Следовательно,
$$|\Lambda(t)| \ge \delta(\rho(\tau)) > 0 \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}^{d+1},\ |t| = \rho(\tau),$$

$$|\widetilde{\Lambda}(t) - \Lambda(t)| < \delta(\rho(\tau)) \quad \text{для всех } t \in \overline{B}_{\mathbb{R}^{d+1}}(0, \rho(\tau)).$$

Таким образом, существует вектор $t_f \in \overline{B}_{\mathbb{R}^{d+1}}(0, \rho(\tau))$ такой, что $\widetilde{\Lambda}(t_f) = \xi$.

(v) Обозначим $\varphi_{t_f} \circ \psi^{-1} \circ f = \varphi_{t_f} \circ g = h$. Тогда $P(\tilde{h}) = \widetilde{\mathrm{id}}$. Поскольку $\widetilde{\mathrm{id}} \in \ker Q$, то $P(\tilde{h} - \widetilde{\mathrm{id}}) = 0$. Следовательно,

$$\int\limits_{\frac{\sigma}{2}B} \big(h_k(x) - x_k\big)\, dx = 0 \quad \text{для всех } k = 1, \dots, 2n,$$

так как постоянные отображения $\tilde{x} \mapsto (0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, \dots, 0)$, $k = 1, \dots, 2n$, принадлежат $\ker Q$. В силу построения

$$\begin{aligned}\rho(h(x), x) = \rho(\varphi_{t_f} \circ g(x), x) &\le \rho(\varphi_{t_f} \circ g(x), \varphi_{t_f}(x)) + \rho(\varphi_{t_f}(x), x)\\ &\le C_2\sqrt{\rho(g(x), x)} + \lambda(\rho(\tau)) \le C_2\mu_0(\tau)^{1/2} + \lambda(\rho(\tau)) = \lambda_1(\tau)\end{aligned}$$

для всех $x \in B\big(0, \frac{1}{2}\big)$, причем $\lambda_1(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Рассмотрим $b = (0, \dots, 0, \beta) \in \mathbb{H}^n$, где $\beta = \frac{1}{|\frac{\sigma}{2}B|} \int\limits_{\frac{\sigma}{2}B} [x^{-1} \cdot h(x)]_{2n+1}\, dx$. Очевидно, $|\beta| \le [\lambda_1(\tau)]^2$.

Положим $\varphi = \psi \circ \varphi_{t_f}^{-1} \circ \pi_b^{-1}$. Нетрудно проверить, что $(\psi)_{B(0, \frac{1}{8})} = 0$ для $\psi(x) = x^{-1} \cdot (\varphi^{-1} \circ f)(x)$ и

$$\rho(\varphi^{-1} \circ f(x), x) \le \rho(h(x), x) + \rho(b \cdot x, x) \le \lambda_1(\tau) + \sqrt{|\beta|} \le C\lambda_1(\tau) \overset{\text{def}}{=} \mu_1(\tau)$$

для всех $x \in B(0, 1/2)$. Из предложения 2 вытекает

$$\|D_h(\varphi^{-1} \circ f) - I\|_{p, \frac{1}{8}B} = \|D_h(\varphi^{-1} \circ f) - D_h(P(\varphi^{-1} \circ f))\|_{p, \frac{1}{8}B} \le C\|Q(\varphi^{-1} \circ f)\|_{p, \frac{1}{8}B},$$

если $\varphi^{-1} \circ f \in W_p^1\big(\frac{1}{8}B, \mathbb{H}^n\big)$. Так как $\varphi^{-1} \circ f$ близко к тождественному отображению в равномерной норме, то, как и в доказательстве теоремы 3 работы [9], имеем

$$\|D_h(\varphi^{-1} \circ f) - I\|_{\nu, \frac{5}{18}B} \le \mu_2[K(f) - 1].$$

(vi) Пусть теперь $B = B(a, r)$ — произвольный шар и $f : B(a, r) \to \mathbb{H}^n$ — отображение с K-ограниченным искажением. Рассмотрим отображение $g = f \circ \pi_a \circ \delta_r : B(0, 1) \to \mathbb{H}^n$, которое тоже является отображением с K-ограниченным искажением. Для отображения g теорема 2 уже доказана в пп. (i)–(v). Следовательно, существует такое мёбиусово преобразование ψ, что для $\psi^{-1} \circ g$ выполнены все условия теоремы.

Нетрудно проверить, что мёбиусово преобразование $\varphi = \psi \circ \delta_r^{-1} \circ \pi_a^{-1}$ является искомым для отображения f. □

§ 4. Доказательство теоремы 1

Покажем, что отображения с ограниченным искажением имеют постоянную KR-ориентацию при достаточно малом коэффициенте искажения. Это свойство является принципиальным для применения леммы 1.

Предложение 3. *Существует число $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$ такое, что всякое отображение с ограниченным искажением $f : U \to \mathbb{H}^n$, определенное на связной* *области $U \subset \mathbb{H}^n$, с коэффициентом искажения $K(f) < 1 + \varepsilon_2$ имеет постоянную KR-ориентацию на U.*

Предложение 3 частично отвечает на вопрос, поставленный в [5]: будет ли отображение класса Соболева иметь постоянную KR-ориентацию?

Доказательство. Рассмотрим отображение с ограниченным искажением $f : U \to \mathbb{H}^n$, $K(f) < 1+\varepsilon_1$, и шар $B\big(a, \frac{18}{5}r\big) \subset U$. Обозначим $\omega = \frac{18}{5}\mu_2(K(f)-1)$, $B = B(a,r)$. Напомним, что по теореме 2 существует конформное отображение θ такое, что

$$\left(\int\limits_B |D_h(\theta^{-1} \circ f)(x) - I|^\nu \, dx\right)^{1/\nu} \le r\omega.$$

Обозначим $g = \theta^{-1} \circ f$, $A(x) = D_h g(x)$, $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. В силу неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} \|A^t JA - J\|_{\nu/2,B} &\le \|A^t JA - JA\|_{\nu/2,B} + \|JA - J\|_{\nu/2,B} \\ &\le \|A^t - I\|_{\nu,B}\|A\|_{\nu,B} + \|A - I\|_{\nu,B}|B|^{1/\nu} \end{aligned}$$

и, следовательно, $\|A^t JA - J\|_{\nu/2,B} \le 3r^2\omega$, если $\omega < 1$. С другой стороны, в силу предложения 1

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} D_h g(x) & 0 \\ 0 & \lambda(x,g) \end{pmatrix}, \quad D_h g(x) = \begin{cases} \sqrt{\lambda(x,g)}\, S(x), & \lambda(x,g) \ge 0, \\ \sqrt{-\lambda(x,g)} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} S(x), & \lambda(x,g) < 0, \end{cases}$$

где $\lambda^n(x,g) = \det D_h g(x)$, $S(x) \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$. Поскольку $S^t JS = J$, получаем $A^t(x)JA(x) = \lambda(x,g)J$, если $\lambda(x,g) > 0$, и

$$A^t(x)JA(x) = -\lambda(x,g)S^t \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} S = -\lambda(x,g)S^t(-J)S = \lambda(x,g)J,$$

если $\lambda(x,g) < 0$. Так как $|\{\lambda(x,g) = 0\}| = |\{J(x,g) = 0\}| = 0$ [17, теорема 4], то

$$\int\limits_B |A^t JA - J|^{\nu/2} \, dx = \int\limits_B |\lambda(x,g) - 1|^{\nu/2} \, dx \le r^\nu/4,$$

если $K(g) = K(f) < 1 + \varepsilon_2$, где $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ такое, что $(3\omega)^{\nu/2} \le \big(\frac{54}{5}\mu_2(\varepsilon_2)\big)^{\nu/2} \le 1/4$.

Предположим, что $|Z| > 0$, где $Z = \{x \in B : \lambda(x,g) < 0\}$. Тогда существует шар $B_1 \subset B$ такой, что

$$2r_1^\nu/5 < |Z \cap B_1| \le 3r_1^\nu/5, \quad r_1 = r(B_1).$$

В силу теоремы 2 существует отображение $\varphi \in M_n$ такое, что

$$\int\limits_{B_1} |\lambda(x, \varphi \circ g) - 1|^{\nu/2} \, dx \le r_1^\nu/4.$$

В случае $\lambda(\varphi) > 0$ имеем $|Z \cap B_1| < r_1^\nu/4$. Случай $\lambda(\varphi) < 0$ влечет $|B_1 \setminus Z| < r_1^\nu/4$. В обоих случаях получаем противоречие с выбором шара B_1.

Таким образом, мы показали, что отображение g сохраняет KR-ориентацию. Для завершения доказательства заметим, что $\operatorname{sign}\lambda(f) \equiv \operatorname{sign}\lambda(g)$ или

$\operatorname{sign}\lambda(f) \equiv -\operatorname{sign}\lambda(g)$, так как $\operatorname{sign}\lambda(\theta) \equiv 1$ для всех $\theta \in M_n^+$ и $\operatorname{sign}\lambda(\theta) \equiv -1$ для всех $\theta \in M_n^-$. Следовательно, отображение f имеет постоянную KR-ориентацию. $\square$

Доказательство теоремы 1. (i) Рассмотрим шар $B(a_0, r_0) \subset U$ и шар $B_0 = B\big(a_0, \frac{r_0}{8}\big)$. По теореме 2 существует мёбиусово отображение θ такое, что

$$\|D_h(\theta^{-1} \circ f) - I\|_{p,B_0} \leq C\|Q(\theta^{-1} \circ f)\|_{p,B_0}, \quad \text{если } \theta^{-1} \circ f \in W_p^1(B_0, \mathbb{H}^n),$$

$$\rho(x, (\theta^{-1} \circ f)(x)) \leq r_0\mu_1(K(f) - 1) \quad \text{для всех } x \in B(a_0, r_0/2)$$

и

$$\|D_h(\theta^{-1} \circ f) - I\|_{\nu,10/9B_0} \leq \|D_h(\theta^{-1} \circ f) - I\|_{\nu,20/9B_0} \leq r_0\mu_2(K(f) - 1),$$

$$\int\limits_{B_0} [x^{-1} \cdot (\theta^{-1} \circ f)(x)]_k \, dx = 0 \quad \text{для всех } k = 1, \dots, 2n+1.$$

Обозначим $\theta^{-1} \circ f = g$. Тогда $g : 4B_0 \to \mathbb{H}^n$ является отображением с ограниченным искажением и $K(g) = K(f) = K$. Более того, по предложению 3 g сохраняет KR-ориентацию на B_0, если $K < 1 + \varepsilon_2$. Следовательно, мы можем применить лемму 1.

В силу (1) имеем

$$\|D_h g - I\|_{p,B_0} \leq C(K-1)(\|D_h g(x) - I\|_{p,B_0} + |B_0|^{1/p}) + \|\beta(D_h g(x) - I)\|_{p,B_0}$$

для всех $p \in [1, \nu]$, где $\beta(v) = O(|v|^{3/2})$ при $v \to 0$ и $\beta(v) \leq C|v|$ для всех v.

(ii) Оценим $\|\beta(D_h g(x) - I)\|_{\frac{\nu}{2},B_0}$. Рассмотрим шар $\frac{10}{9}B_0$.

Так же, как и в доказательстве теоремы 2 работы [9], получаем, что при $K_O = K^{n+1} < 1 + \tilde{\varepsilon}_0$ отображение $D_h g$ принадлежит классу $BSO_{\frac{\nu}{2}}(SM)$ на шаре $\frac{10}{9}B_0$ и $\operatorname{osc}\big(D_h g, \frac{\nu}{2}, SM\big) = \mu_3(K-1)$, где μ_3 — неубывающая положительная функция и $\mu_3(t) \to 0$ при $t \to 0$. Следовательно, по свойствам отображений с ограниченным удельным колебанием (см. [9, теорема 1]) имеем

$$\int\limits_{B_0} |D_h g(x) - I|^{\nu/2+\varepsilon} \, dx \leq C_1(\nu/2 + \varepsilon)\mu_3(K-1)^{\varepsilon} \int\limits_{B_0} |D_h g(x) - I|^{\nu/2} \, dx,$$

где $2\varepsilon + \nu/2 < \frac{\sigma_0(2-\delta)}{\mu_3(\varepsilon_3)} < \frac{\sigma_0(2-\delta)}{\mu_3(K-1)}$, $\varepsilon \in (0,1)$. Здесь $K < 1 + \varepsilon_3$, где $\varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_2]$ и $(1+\varepsilon_3)^{n+1} < 1 + \tilde{\varepsilon}_0$.

Поскольку $\beta(v) = O(|v|^{3/2})$ при $v \to 0$ и $\beta(v) \leq C|v|$ для всех v, существует константа C_2 такая, что $\beta(v) \leq C_2|v|^{3/2}$ при $|v| < 1$ и $\beta(v) \leq C_2|v|$ при $|v| \geq 1$. Пусть $E_1 = \{x \in B_0 : |D_h g(x) - I| < 1\}$ и $E_2 = \{x \in B_0 : |D_h g(x) - I| \geq 1\}$. Тогда

$$\int\limits_{B_0} |\beta(D_h g(x) - I)|^{\nu/2} \, dx \leq C_2^{\nu/2} \int\limits_{E_1} |D_h g(x) - I|^{3\nu/4} \, dx$$

$$+ C_2^{\nu/2} \int\limits_{E_2} |D_h g(x) - I|^{\nu/2} \, dx \leq C_2^{\nu/2} \int\limits_{B_0} |D_h g(x) - I|^{\nu/2+\varepsilon} \, dx$$

$$\leq C_1(\nu/2 + \varepsilon) C_2^{\nu/2} \mu_3(K-1)^{\varepsilon} \int\limits_{B_0} |D_h g(x) - I|^{\nu/2} \, dx.$$

(iii) Имеем

$$\|D_h g - I\|_{\nu/2,B_0} \le C(K-1)(\|D_h g - I\|_{\nu/2,B_0} + |B_0|^{2/\nu}) \\ + C_2(C_1(\nu/2+\varepsilon)\mu_3(K-1)^{\varepsilon})^{2/\nu}\|D_h g(x) - I\|_{\nu/2,B_0}.$$

Рассмотрим $\varepsilon_4 \in (0, \varepsilon_3]$ такое, что

$$\max\{C_2(C_1(\nu/2+\varepsilon_4)\,\mu_3(\varepsilon_4)^{\varepsilon})^{2/\nu}, C\varepsilon_4\} = \frac{1}{4},$$

и положим $K < \varepsilon_4 + 1$. Тогда

$$\|D_h g - I\|_{\nu/2,B_0} \le C(K-1)r_0^2.$$

Используя лемму 12 работы [9], выводим $\operatorname{osc}(D_h g, \nu/4, SM) = C_3(K-1)$. Таким образом, в силу теоремы 1 работы [9] получаем, что $D_h g \in L_{p,\mathrm{loc}}$ для всех $p \in \bigl[1, \frac{C_0}{K-1}\bigr)$, где $C_0 = \frac{2\sigma_0}{C_3}$. Отсюда немедленно вытекает, что $f \in W^1_{p,\mathrm{loc}}$ для всех $p \in \bigl[1, \frac{C_0}{K-1}\bigr)$. При этом для всех $p \in \bigl[\frac{\nu}{4}, \frac{C_0(1-\delta)}{K-1}\bigr)$ имеем

$$\|D_h g - I\|_{p,\frac{9}{10}B_0} \le Cr_0^{\nu/p}(K-1).$$

Пусть $K < \varepsilon_0 + 1$, где $\varepsilon_0 \le \varepsilon_4$, $\frac{C_0(1-\delta)}{\varepsilon_0} > \nu$ и $Cr_0^{\nu/p}\varepsilon_0 < 1$. Близость отображений в норме Соболева L^1_p при $p > \nu$ влечет близость отображений в равномерной норме [9, лемма 11]: для отображения $\pi_{-b} \circ g$, где $b = x_0^{-1} \cdot g(x_0)$, выполнено

$$\rho(\pi_{-b} \circ g(x), x) = \rho((\theta \circ \pi_b)^{-1} \circ f(x), x) \le Cr_0\sqrt{K-1}$$

для всех $x \in \frac{8}{9}B_0 \subset \frac{9}{10}B_0$. Так как $\rho(b) \le r_0\mu_2(K-1)$, то при K, достаточно близком к 1, имеем $\rho(\pi_{-b}\circ g(x), x) \le \upsilon_0 r_0$ (υ_0 из леммы 12 работы [9]). Следовательно [9, лемма 12], из неравенства $\|D_h g - I\|_{p,\frac{9}{10}B_0} \le Cr_0^{\nu/p}(K-1)$ получаем

$$\|D_h f - D_h\theta\|_{p,\frac{8}{9}B_0} \le C(K-1)\|D_h\theta\|_{p,\frac{8}{9}B_0} \quad \text{для всех } p \in \left[\frac{\nu}{4}, \frac{C_0(1-\delta)}{K-1}\right).$$

Как и выше, близость производных влечет близость f к θ в равномерной норме [9, лемма 11]. $\square$

§ 5. Пример

Данный пример показывает, что порядок близости отображения к мёбиусову в норме Соболева L^1_p в теореме 1 не может быть улучшен.

Рассмотрим отображение

$$f(x) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1} + cx_1, x_{n+2}, \dots, x_{2n}, x_{2n+1}) : B = B(0,1) \to \mathbb{H}^n,$$

где $c \in (0,1)$. Отображение f принадлежит классу Соболева $W^1_p(B, \mathbb{H}^n)$ для всех $p \in [1,\infty)$ и является отображением с ограниченным искажением: $J(x,f) = 1$ и $|D_h f(x)| = \sqrt{1 + c^2/4} + c/2$ для всех $x \in U$, поэтому $K = K(f) = 1 + c^2/2 + c\sqrt{1 + c^2/4}$.

Имеем $|D_h f(x) - I| = c \le K - 1$ и $|x_1|\sqrt{K-1} \le \rho(f(x), x) \le \sqrt{2}\sqrt{K-1}$, поскольку

$$\rho(f(x), x) = \rho\bigl((0, \dots, 0, cx_1, 0, \dots, 0, 2cx_1^2)\bigr) = |x_1|(c^4 + 4c^2)^{1/4}.$$

Покажем, что не найдется такого $\varphi \in M_n$, чтобы для $s = \frac{1}{9}$ и для некоторого $p \in [1, \infty)$ выполнялось $\|D_h(\varphi \circ f) - I\|_{p,sB} = o(K-1)$. Проведем доказательство от противного. Пусть такое φ существует. Как и в доказательстве предложения 3, получаем, что $\varphi \in M_n^+$ при достаточно малом c.

Обозначим через A $(n \times n)$-матрицу с элементами a_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$, где $a_{11} = 1$, $a_{ij} = 0$ для всех остальных i и j. Тогда $D_h f(x) = C = I + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}$ для всех $x \in B$. Нетрудно проверить, что $C^{-1} = I - c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}$ и $|C^{-1}| \geq \frac{1}{2}$ при достаточно малом c.

Рассмотрим точку $x \in B\bigl(0, \frac{s}{2}\bigr)$. Тогда $y = f(x) \in B(0, s)$ при достаточно малом c. Имеем

$$D_h(\varphi \circ f)(x) - I = D_h\varphi(y)C - I = (D_h\varphi(y) - C^{-1})C.$$

Поскольку $\frac{C^{-1} + JC^{-1}J}{2} = -c\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ и $D_h\varphi + JD_h\varphi J = 0$, то

$$\frac{|(D_h\varphi(y) - C^{-1}) + J(D_h\varphi(y) - C^{-1})J|}{2} = \frac{c}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\|(D_h\varphi - C^{-1}) + J(D_h\varphi - C^{-1})J\|_{p,\frac{s}{2}B}}{2} &= \frac{c}{2}\Bigl|\frac{s}{2}B\Bigr|^{1/p} \\ &\leq \|D_h\varphi - C^{-1}\|_{p,\frac{s}{2}B} \leq \|D_h(\varphi \circ f) - I\|_{p,sB}|C^{-1}| = o(K-1).\end{aligned}$$

Получаем противоречие при $K \to 1$, так как $c = O(K-1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А.* Sur une classe de représentations continués // Мат. сб. 1935. Т. 42, № 4. С. 407–424.
2. *Лаврентьев М. А.* Об устойчивости в теореме Лиувилля // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95, № 5. С. 925–926.
3. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.
4. *Korányi A., Reimann H. M.* Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Invent. Math. 1985. V. 80. P. 309–338.
5. *Korányi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111, N 1. P. 1–87.
6. *Capogna L.* Regularity of quasilinear equations in the Heisenberg group // Comm. Pure Appl. Math. 1997. V. 50. P. 867–889.
7. *Водопьянов С. К.* Отображения с ограниченным искажением и конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 764–804.
8. *Даирбеков Н. С.* Отображения с ограниченным искажением на группах Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 3. С. 567–590.
9. *Исангулова Д. В.* Класс отображений с ограниченным удельным колебанием и интегрируемость отображений с ограниченным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 312–333.
10. *Heinonen J., Holopainen I.* Quasiregular maps on Carnot groups // J. Geom. Anal. 1997. V. 7, N 1. P. 109–148.
11. *Astala K.* Area distortion of quasiconformal mappings // Acta Math. 1994. V. 173. P. 37–60.
12. *Романовский Н. Н.* Интегральные представления и теоремы вложения для функций, заданных на группах Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16, № 2. С. 82–119.
13. *Романовский Н. Н.* О проблеме Михлина на группах Карно // Сиб. мат. журн. (в печати).

14. *Исангулова Д. В.* Устойчивость в теореме Лиувилля на группах Гейзенберга // Докл. АН. 2005. Т. 405, № 4. С. 448–453.
15. *Исангулова Д. В.* Устойчивость в теореме Лиувилля на группах Гейзенберга. Новосибирск, 2005. 84 с. (Препринт/РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 158).
16. *Водопьянов С. К.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. С. 603–670.
17. *Водопьянов С. К.* О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением групп Карно // Мат. труды. 2002. Т. 5, № 2. С. 92–137.
18. *Folland G. B.* Harmonic analysis in phase space. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1989. (Ann. Math. Stud.; 122).
19. *Водопьянов С. К.* Основания теории отображений с ограниченным искажением на группах Карно // Докл. РАН. 2005. Т. 405, № 1. С. 7–12.
20. *Vodopyanov S. K.* Foundations of the theory of mappings with bounded distortion on Carnot groups // The interaction of analysis and geometry. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. P. 303–344. (Contemp. Math.; 424).

Статья поступила 11 октября 2005 г.

Исангулова Дарья Васильевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
dasha@math.nsc.ru