Сибирский математический журнал
Июль—август, 2007. Том 48, № 4

УДК 519.14

НОВАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ ЧИСЛА ВЕРШИН РЕБЕРНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Аннотация: Пусть Γ является связным реберно регулярным графом с параметрами (v,k,λ) и $b_1 = k-\lambda-1$. Доказано, что в случае $k \geq 3b_1 - 2$ либо для любой вершины u верно неравенство $|\Gamma_2(u)|(k-2b_1+2) < kb_1$, либо Γ является многоугольником, реберным графом тривалентного графа без треугольников, имеющим диаметр, больший 2, графом икосаэдра, полным многодольным графом $K_{r\times 2}$, 3×3-решеткой, треугольным графом $T(m)$, $m \leq 7$, графом Клебша или графом Шлефли.

Ключевые слова: реберно регулярный граф, характеризация по параметрам.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a,b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ), если Γ реберно регулярен и подграф $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин в случае $d(a,b)=2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначим через $\lambda(a,b)$ (через $\mu(a,b)$), если $d(a,b)=1$ (если $d(a,b)=2$), а соответствующий подграф назовем (μ-) λ-*подграфом.*

Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v,k,λ) и $b_1=k-\lambda-1$. Пара вершин u,w называется (*почти*) *хорошей*, если $d(u,w)=2$ и $\mu(u,w)$ равно $k-2b_1+1$ (равно $k-2b_1+2$). Тройка вершин $(u;w,z)$ называется (*почти*) *хорошей*, если $w,z\in\Gamma_2(u)$ и $\mu(u,w)+\mu(u,z)$ не больше $2k-4b_1+3$ (равно $2k-4b_1+4$).

Через $K_{m_1,\dots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф с долями порядков $m_1,\dots,m_n$. Если $m_1=\dots=m_n=m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Граф $K_{1,3}$ называется 3-*лапой.* *Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X|=m$ и пары $\{a,b\},\{c,d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00046) и РФФИ-ГФЕН Китая (код проекта 05–01–39000).

общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется *$m \times n$-решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины (x_1, y_1), (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Для подграфа Δ через $|\Delta|$ обозначим число его вершин, а через $X_i(\Delta)$ — множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных с i вершинами из Δ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами (v, k, λ) значение $b_1(u, w)$ не зависит от выбора ребра $\{u, w\}$ и равно $k - \lambda - 1$.

В [1, лемма 4.2.1] доказано, что если Γ — связный неполный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ), в котором $k \geq 3b_1$, то диаметр Γ равен двум и выполняется неравенство $kb_1 > (v - k - 1)(k - 2b_1 + 1)$.

Теорема. *Пусть Γ — связный неполный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) и $k \geq 3b_1 - 2$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *для любой вершины w верно неравенство $|\Gamma_2(w)|(k - 2b_1 + 2) < kb_1$;*

(2) *для любой вершины w верно неравенство $|\Gamma_2(w)|(k - 2b_1 + 2) > kb_1$ и либо Γ является реберным графом тривалентного графа без треугольников (т. е. $k = 4, \lambda = 1$) и диаметр графа Γ больше двух, либо Γ является n-угольником, $n \geq 5$, или графом икосаэдра;*

(3) *Γ является полным многодольным графом $K_{r \times 2}$, 3×3-решеткой, треугольным графом $T(m)$, $m \leq 7$, графом Клебша или графом Шлефли и для любой вершины w верно равенство $|\Gamma_2(w)|(k - 2b_1 + 2) = kb_1$.*

Доказательство утверждения (2) теоремы из [2] некорректно (не доказано утверждение (3) из [2, лемма 3.3]). Следующий результат уточняет данное утверждение.

Предложение. *Пусть Γ — связный реберно регулярный граф диаметра 2 с параметрами (v, k, λ) и $k = 3b_1 + \delta$, $\delta \geq -2$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Γ содержит такую 3-коклику Δ, что любые ее две вершины образуют хорошие пары, то $\delta = -1$ и Γ является шестиугольником, графом икосаэдра или реберным графом тривалентного графа без треугольников, имеющим диаметр больше двух;*

(2) *если $\delta \geq 0$ и для некоторой вершины w подграф $\Gamma_2(w)$ содержит две вершины, образующие хорошие пары с w, то $\delta < b_1/2 - 2$;*

(3) *если для некоторой вершины w подграф $\Gamma_2(u)$ содержит три вершины f, u, z, образующие хорошие пары с w, то $\delta = -2$, $v - k - 1 = 2b_1 + 2$, $b_1(b_1 - 1)$ делится на 3, подграф $\{f, u, z\}$ является кликой, для $x \in \{f, u, z\}$ подграф $\Gamma_2(w) \cap \Gamma_2(x)$ содержит две вершины x', x'', для различных вершин $x, y \in \{f, u, z\}$ подграф $[w] \cap [x] \cap [y]$ содержит единственную вершину xy, граф $\{fu, uz, fz\}$ является кликой и $|[w] - ([f] \cup [u] \cup [g])| = 4$;*

(4) *если для некоторой вершины w подграф $\Gamma_2(w)$ содержит четыре вершины $\{u, z, f, g\}$, образующие хорошие пары с w, то $b_1 = 6$, $k = 16$, $\lambda = 9$, $v = 31$, подграф $\{u, z, f, g\}$ является кликой и $\mu(w, y) \geq 7$ для любой вершины y из $\Gamma_2(w) - \{u, z, f, g\}$.*

Следующий пример показывает, что для графа Γ с $k \leq 3b_1 - 3$ и его вершины w подграф $\Gamma_2(w)$ может содержать k вершин, образующих хорошие пары с u.

Пример. Пусть Δ_n — граф, вершинами которого являются 4-циклы из S_n и два цикла a, b смежны тогда и только тогда, когда ab является 5-циклом. Тогда Δ_5 — реберно регулярный граф диаметра 3 с параметрами $(30, 12, 6)$ и каждая вершина из $[(1432)]$ образует хорошую пару с (1234).

Имеется немного результатов о единственности сильно регулярного графа с данными параметрами (v, k, λ, μ). В качестве следствия нашей теоремы получена единственность некоторых реберно регулярных графов с данными параметрами (v, k, λ).

Следствие. *Пусть Γ — реберно регулярный граф, имеющий те же параметры (v, k, λ), что и один из следующих графов: полный многодольный граф $K_{r\times s}$, 3×3-решетка, треугольный граф $T(m)$, $m \le 7$, граф Клебша или граф Шлефли. Тогда Γ изоморфен соответствующему графу.*

§ 1. Предварительные результаты

В этом параграфе доказано несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1.1. *Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) и $b_1 = k-\lambda-1$. Если вершины u, w находятся на расстоянии 2 в Γ, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *степень любой вершины в μ-подграфе из Γ не меньше $k - 2b_1$;*

(2) *вершина d имеет степень α в графе $[u] \cap [w]$ тогда и только тогда, когда $[d]$ содержит $\alpha - (k - 2b_1)$ вершин вне $u^\perp \cup w^\perp$;*

(3) *если $\mu(u, w) = k - 2b_1 + 1$, то подграф $[u] \cap [w]$ является кликой и $[d] \subset u^\perp \cup w^\perp$ для любой вершины $d \in [u] \cap [w]$;*

(4) *если $\Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)$ содержит единственную вершину z, то $\mu(u, z) = \mu(w, z)$.*

Доказательство. Пусть $d \in [u] \cap [w]$. Тогда $|[d] - u^\perp| = |[d] - w^\perp| = b_1$. Поэтому по крайней мере $k - 2b_1$ вершин из $[d]$ содержится в $[u] \cap [w]$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $d \in [u] \cap [w]$ и степень d в этом μ-подграфе равна α. Тогда $k = \alpha + 2b_1 - |[d] - (u^\perp \cup w^\perp)|$. Поэтому $[d]$ содержит $\alpha - (k - 2b_1)$ вершин вне $u^\perp \cup w^\perp$. Утверждение (2) доказано.

Утверждение (3) следует из (1), (2).

Пусть $\{z\} = \Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)$. Так как число ребер между $[u] - [w]$ и $[w] - [u]$ равно $b_1|[u] - [w]| - \mu(u, z)$, то $\mu(u, z) = \mu(w, z)$. Лемма доказана.

Лемма 1.2 [3, лемма 3.1]. *Пусть Γ — сильно регулярный граф, имеющий параметры (v, k, λ, μ). Тогда либо $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$ (так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения $n - m$, $-m$ графа Γ — целые числа, где $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$, $n - \lambda + \mu = 2m$ и кратность $n - m$ равна $\frac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. Далее, если m — целое число, большее 1, то $m - 1$ делит $k - \lambda - 1$ и*

$$\mu = \lambda + 2 + (m - 1) - \frac{k - \lambda - 1}{m - 1}, \quad n = m - 1 + \frac{k - \lambda - 1}{m - 1}.$$

Лемма 1.3. *Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ). Если $\lambda \ge k + 1/2 - \sqrt{2k + 2}$, то Γ — дополнительный граф для сильно регулярного графа Δ с $\mu(\Delta) \le 2$.*

Доказательство. Это второе утверждение теоремы 1.4.3 из [1].

Лемма 1.4 [4, предложение 1]. *Пусть* Γ — *связный реберно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ), *в котором* $b_1 = 2$. *Тогда* Γ *является одним из следующих графов:*

(1) *тривалентный граф без треугольников;*

(2) *реберный граф тривалентного графа без треугольников;*

(3) *полный многодольный граф* $K_{r\times 3}$;

(4) 3×3-*решетка, треугольный граф* $T(5)$ *или граф Петерсена;*

(5) *граф икосаэдра.*

Лемма 1.5 [4, предложение 2]. *Пусть* Γ — *связный реберно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ), *в котором* $b_1 = 3$. *Тогда* Γ *является одним из следующих графов:*

(1) *четырехвалентный граф без треугольников;*

(2) *реберный граф четырехвалентного графа без треугольников (в том числе* 4×4-*решетка);*

(3) *локально шестиугольный граф (в том числе граф Пэли с параметрами* $(13, 6, 2, 3)$ *и граф Шрикханде);*

(4) *полный многодольный граф* $K_{r\times 4}$;

(5) *треугольный граф* $T(6)$ *или граф Клебша.*

Пусть $w, z \in \Gamma_2(u)$. Тройку вершин u, w, z назовем (*почти*) *хорошей*, если $\mu(u, w) + \mu(u, z)$ не больше $2k - 4b_1 + 3$ (равно $2k - 4b_1 + 4$). Свойства (почти) хороших троек изучаются в следующих двух леммах.

Лемма 1.6. *Пусть* Γ — *реберно регулярный граф и* $\mu(u, w) = k - 2b_1 + 1$, $\mu(u, z) \le k - 2b_1 + 2$ *для некоторых вершин* w, z *из* $\Gamma_2(u)$. *Тогда* $|[u]\cap[w]\cap[z]| < 2$.

Доказательство. Утверждение следует из [2, леммы 4, 5].

Лемма 1.7. *Пусть* Γ — *реберно регулярный граф с* $k \ge 3b_1 - 3$, $\mu(u, w) + \mu(u, z) = 2k - 4b_1 + 4$ *для двух вершин* w, z *из* $\Gamma_2(u)$, $\Delta = [u]\cap[w]\cap[z]$ *и* $\delta = |\Delta|$. *Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) *вершины* w, z *несмежны и* $\delta \le 1$;

(2) Δ *содержит две несмежные вершины и* $\delta = 2$;

(3) *вершины* w, z *смежны,* Δ *является кликой и если* $\delta > 1$, *то либо*

(i) *подграф* Δ *содержит единственную вершину* d, *смежную с вершиной вне* $u^\perp \cup [w] \cup [z]$, $\delta = 2$ *и для* $e \in \Delta(d)$ *подграф* $[d]\cup[e]$ *содержит* $[w]\cap[z] - [u]$, *а* $[d]\cap[e]$ *содержится в* $\{u, w, z\} \cup ([u]\cap([w]\cup[z])) \cup ([w]\cap[z] - [u])$,

либо

(ii) *подграф* Δ *не содержит вершин, смежных с вершиной вне* $u^\perp\cup[w]\cup[z]$, *и для любых двух вершин* $d, e \in \Delta$ *подграф* $[d]\cap[e]$ *содержит* $\lambda - 1 + \gamma$ *вершин из* $\{u, w, z\} \cup ([u]\cap([w]\cup[z])) \cup ([w]\cap[z] - [u])$, *где* $\gamma = |([w]\cap[z]) - ([d]\cup[e])|$.

Доказательство. Если либо вершины w, z несмежны, либо Δ содержит две несмежные вершины, либо подграф Δ содержит вершину, смежную с вершиной вне $u^\perp \cup [w] \cup [z]$, то $\mu(u, w) = \mu(u, z) = k - 2b_1 + 2$ и лемма следует из [5, теорема 1]. Поэтому можно считать, что вершины w, z смежны и Δ является кликой, не содержащей вершин, смежных с вершиной вне $u^\perp \cup [w] \cup [z]$.

Будем говорить, что вершина d из $[u]\cap[w]\cap[z]$ имеет тип (j), если $[d]$ содержит j вершин из $([w] - [u]\cup[z]) \cup ([z] - [u]\cup[w])$. Ясно, что $0 \le j \le 2$. Если $\mu(u, w) \ne \mu(u, z)$, то без ограничения общности $\mu(u, w) = k - 2b_1 + 1$, $\mu(u, z) = k - 2b_1 + 3$.

Покажем, что для любых двух вершин $d, e \in \Delta(d)$ подграф $[d] \cap [e]$ содержит $\lambda - 1 + \gamma$ вершин из $\{u, w, z\} \cup ([u] \cap ([w] \cup [z])) \cup ([w] \cap [z] - [u])$, где $\gamma = |([w] \cap [z]) - ([d] \cup [e])|$. Доказательство проводится рассмотрением всех возможных случаев. Мы подробно рассмотрим два случая.

Пусть $\mu(u, w) = k - 2b_1 + 1$, $\mu(u, z) = k - 2b_1 + 3$ и вершины d, e типа (1). Тогда $[d] \cap [e]$ содержит u, w, z, $k - 2b_1 - 1$ вершин из $[u] \cap [w]$, $k - 2b_1 + 1 - \delta$ вершин из $[u] \cap [z] - [w]$ и не менее $2b_1 - 6 - (k - b_1 - 1 - \delta - \gamma)$ вершин из $[w] \cap [z] - [u]$. Итого $k - b_1 - 2 + \gamma$ вершин.

Пусть $\mu(u, w) = \mu(u, z) = k - 2b_1 + 2$, вершина d типа (1) (для определенности $[d]$ содержит вершину из $[w] - [u] \cup [z]$), а e типа (2). Тогда $[d] \cap [e]$ содержит u, w, z, $k - 2b_1 - 1$ вершин из $[u] \cap [w]$, $k - 2b_1 + 2 - \delta$ вершин из $[u] \cap [z] - [w]$ и не менее $2b_1 - 7 - (k - b_1 - 1 - \delta - \gamma)$ вершин из $[w] \cap [z] - [u]$. Итого $k - b_1 - 2 + \gamma$ вершин.

Лемма 1.8. *Пусть Γ — связный реберно регулярный граф, содержащий хорошую пару вершин u, w. Тогда либо $k \le 4b_1 - 6$, либо $b_1 = 1$ и Γ — многоугольник, либо $b_1 = 2$ и Γ — граф икосаэдра или реберный граф регулярного графа без треугольников степени 3 (т. е. граф с $k = 4, \lambda = 1$).*

Доказательство. Пусть $\Delta = [u] \cap [w]$, X_i — множество вершин из $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$, смежных с i вершинами из Δ, $x_i = |X_i|$. Положим $k = 3b_1 + i$. Тогда $\lambda = 2b_1 - 1 + i$, $|\Delta| = b_1 - 1 + i$ и выполняются равенства

$$\sum x_i = 4b_1 - 2, \quad \sum i x_i = (b_1 + i + 1)(2b_1 - 2), \quad \sum \binom{i}{2} x_i = \binom{b_1 + i + 1}{2}(b_1 - 2).$$

Отсюда

$$\sum i^2 x_i = (b_1 + i + 1)\big(b_1^2 + i b_1 - 2i - 2\big).$$

Положим $\bar{i} = \sum i x_i / \sum x_i$. Так как $\sum (i - \bar{i})^2 x_i \ge 0$, то $\sum x_i \sum i^2 x_i \ge \big(\sum i x_i\big)^2$, поэтому $b_1^2 - i b_1 - 2b_1 \ge 0$ и $i \le b_1 - 2$. Таким образом, $k \le 4b_1 - 2$.

Пусть $k = 4b_1 - 6 + j$. Тогда ввиду леммы 1.7 имеем $\mu(u, z) \ge 2b_1 - 3 + j$ для любой вершины $z \in [w] - [u]$, смежной по крайней мере с двумя вершинами из Δ. Далее, число ребер между Δ и $[w] - [u]$ равно $(2b_1 - 5 + j)(b_1 - 1)$.

Если $j = 4$, то вершина из $[w] - [u]$ смежна в среднем с $b_1 - 1$ вершинами из Δ и не более чем с b_1 вершинами из $[u] - \Delta$. В этом случае каждая вершина из $[w] - [u]$ образует хорошую пару с u и по лемме 1.7 получим $b_1 = 1$ и $k = 2$.

Пусть $j = 3$. Тогда $\lambda = 3b_1 - 4$ и b_1 четно. Вершина из $[w] - [u]$ смежна в среднем с $(2b_1 - 2)(b_1 - 1)/(2b_1 - 1) = b_1 - 1/2 + 1/(4b_1 - 2)$ вершинами из $[u] - \Delta$. Поэтому $[w] - [u]$ содержит вершину z, смежную не более чем с $b_1 - 1$ вершинами из Δ и $\mu(u, z) \le 2b_1 - 1$. Если z смежна с $b_1 - 2$ вершинами из Δ, то $\mu(u, z) = 2b_1 - 2$ и $b_1 \le 3$. В этом случае $b_1 = 2, k = 5$ и Γ — граф икосаэдра. Если же в $[w] - [u]$ нет вершин, смежных с $b_1 - 2$ вершинами из Δ, то z смежна с $b_1 - 1$ вершинами из Δ и ввиду леммы 1.7 имеем $b_1 = 2, k = 5$; противоречие с тем, что тогда Γ — граф икосаэдра.

Пусть $j = 2$. Тогда вершина из $[w] - [u]$ смежна в среднем с $(2b_1 - 3)(b_1 - 1)/(2b_1 - 1) = b_1 - 2 + 1/(2b_1 - 1)$ вершинами. Поэтому $[w] - [u]$ содержит вершину z, смежную не более чем с $b_1 - 2$ вершинами из Δ и $\mu(u, z) \le 2b_1 - 2$. Если z смежна с $b_1 - 3$ вершинами из Δ, то $\mu(u, z) = 2b_1 - 3$ и $b_1 \le 4$. Если $b_1 = 4$, то $k = 12$ и $\lambda = 7$; противоречие с тем, что степень вершины d из $[u] \cap [w] \cap [z]$ в графе $[u]$ не меньше 8. Если $b_1 = 3$, то $k = 8$ и $\lambda = 4$; противоречие с леммой 1.6. Значит, $[w] - [u]$ не содержит вершин, смежных с $b_1 - 3$ вершинами из Δ, поэтому

z смежна с b_1-2 вершинами из Δ и ввиду леммы 1.7 имеем $b_1\le 3$. Если $b_1=2$, то $k=4,\lambda=1$ и выполняется заключение леммы. Если же $b_1=3$, то $k=8$ и $\lambda=4$; снова противоречие с леммой 1.6.

Пусть $j=1$. Тогда $\lambda=3b_1-6$ и числа v,b_1 четны. Если $b_1=2$, то $k=3,\lambda=0$ и Γ не содержит хороших пар. Значит, $b_1\ge 4$. Далее, вершина из $[w]-[u]$ смежна в среднем с $(2b_1-4)(b_1-1)/(2b_1-1)=b_1-5/2+3/(4b_1-2)$ вершинами из Δ. Поэтому $[w]-[u]$ содержит вершину z, смежную не более чем с b_1-3 вершинами из Δ и $\mu(u,z)\le 2b_1-3$. Если z смежна с b_1-4 вершинами из Δ, то $\mu(u,z)=2b_1-4$. В этом случае $b_1=4$, $k=11$, $\lambda=6$ и по [4, предложение 3] граф Γ сильно регулярен; противоречие. Если же $[w]-[u]$ не содержит вершин, смежных с b_1-4 вершинами из Δ, то z смежна с b_1-3 вершинами из Δ и ввиду леммы 1.7 имеем $b_1\le 4$. Снова $b_1=4$; противоречие, как и выше. Лемма доказана.

§ 2. Хорошие пары в графах с $k\ge 3b_1-2$

В этом параграфе Γ является связным неполным реберно регулярным графом с $k=3b_1+\delta$, $\delta\ge -2$.

Лемма 2.1. *Если $b_1\le 4$ и Γ содержит хорошую пару, то верно одно из следующих утверждений:*

(1) $b_1=1$ *и Γ является n-угольником, $n\ge 4$;*

(2) $b_1=2$ *и Γ является реберным графом тривалентного графа без треугольников диаметра, большего двух, или графом икосаэдра.*

Доказательство. Если $b_1=1$, то Γ является n-угольником, $n\ge 5$, или полным многодольным графом $K_{r\times 2}$. Но в последнем случае в Γ нет хороших пар.

Пусть $b_1=2$. По лемме 1.4 Γ является либо полным многодольным графом $K_{r\times 3}$, треугольным графом $T(5)$, $n\ge 5$, или графом икосаэдра, либо реберным графом тривалентного графа без треугольников.

Допустим, что диаметр Γ равен 2, $k=4$ и $\lambda=1$. Тогда v делится на 3, поэтому либо $v-k-1=4$ и Γ является 3×3-решеткой, либо $v-k-1=7$. В последнем случае для любой вершины a найдется единственная вершина b с $\mu(a,b)=2$ и $\mu(a,x)=1$ для любой вершины $x\in\Gamma_2(a)-\{b\}$. Поэтому множество вершин графа Γ разбивается тремя четырехугольниками Δ_1, Δ_2, Δ_3. Пусть u,x — несмежные вершины из Δ_1. Если $[u]\cap\Delta_2$ содержит две вершины a,b, то они несмежны в Δ_2 и $[a]\cap[b]$ содержит u и две вершины из Δ_2; противоречие. Значит, $[u]$ содержит по вершине из Δ_2 и Δ_3. Но для $a\in[u]\cap\Delta_2$ подграф $[a]$ содержит вершину из $\Delta_1(u)$; противоречие.

Заметим, наконец, что граф $K_{r\times 3}$, треугольный граф $T(5)$ и 3×3-решетка не содержат хороших пар.

Пусть $b_1=3$. По лемме 1.5 Γ является полным многодольным графом $K_{r\times 4}$, треугольным графом $T(6)$ или графом Клебша. Но эти графы не содержат хороших пар.

Пусть $b_1=4$. По [4, предложение 3] Γ является полным многодольным графом $K_{r\times 5}$ или треугольным графом $T(7)$. Снова эти графы не содержат хороших пар. Лемма доказана.

До конца параграфа будем предполагать, что для некоторой вершины $u\in\Gamma$ подграф $\Gamma_2(u)$ содержит две вершины w,z, образующие хорошие пары с u.

Лемма 2.2. *Пусть вершины w, z смежны и $\delta \geq -1$. Тогда $\delta = -1$ и верно одно из следующих утверждений:*

(1) Γ *является пятиугольником или графом икосаэдра;*

(2) *подграф $[u] \cap [w] \cap [z]$ содержит единственную вершину d, $\Gamma_2(u) \subset [w] \cup [z]$, причем $\Gamma_2(u)$ содержит единственную вершину w^* вне $w^\perp$ и единственную вершину z^* вне $z^\perp$, $b_1 - 1$ делится на 6, подграф $[w^*]$ содержит $(b_1 \pm 1)/2$ вершин из $[u] \cup [z]$, где плюс берется, если вершины w^*, z^* смежны, минус — в противном случае и $\mu(u, f) \geq b_1 + 2$ для любой вершины $f \in [w] \cap [z]$;*

(3) *подграф $[u] \cap [z]$ не пересекает $[w]$, $\Gamma_2(u) = \{w, z\} \cup ([w] \cap [z])$, $b_1(b_1 - 1)$ делится на 3, $\mu(u, y) \geq b_1 + 2$ для любой вершины y из $[w] \cap [z]$ и $b_1 \geq 6$.*

Доказательство. Если $k \geq 3b_1$, то диаметр Γ равен 2. Пусть $k = 3b_1 - 1$ и диаметр Γ больше 2. В [6, следствие] показано, что граф Γ является многоугольником или графом икосаэдра. В этом случае любые две вершины, находящиеся на расстоянии 2, образуют хорошую пару и $\Gamma_2(u)$ содержит смежные вершины, только если Γ является пятиугольником или графом икосаэдра. Итак, если $b_1 = 1$ или диаметр Γ больше 2, то выполняется утверждение (1).

Допустим, что диаметр Γ равен 2. Тогда $\mu(u, w) = b_1 + 1 + \delta$ и $|[w] - [u]| = 2b_1 - 1$. Если $\delta \geq 0$, то $[u] \cap [z]$ пересекает $[w]$, иначе $[z] - w^\perp$ содержит $b_1 + 1 + \delta$ вершин; противоречие. Теперь по лемме 1.6 подграф $[u] \cap [w] \cap [z]$ содержит единственную вершину d и степень d в графе $[u]$ не меньше $2b_1 + 2\delta$; противоречие.

Значит, $k = 3b_1 - 1$. Если $[u] \cap [z]$ пересекает $[w]$, то по лемме 1.6 подграф $[u] \cap [w] \cap [z]$ содержит единственную вершину d и $[d] \cap [u]$ содержит по $b_1 - 1$ вершин из $[w]$ и из $[z]$. Для $x \in \Gamma_2(u) - ([w] \cup [z])$ получим $\mu(u, x) \leq b_1 - 1$; противоречие. Поэтому $\Gamma_2(u) \subset [w] \cup [z]$, причем $\Gamma_2(u)$ содержит единственную вершину w^* вне $w^\perp$ и единственную вершину z^* вне $z^\perp$. Итак, $v = 5b_1 + 1$, $\lambda = 2b_1 - 2$ и $vk\lambda$ делится на 3, поэтому $b_1 - 1$ делится на 3.

По лемме 1.1 имеем $\mu(u, w^*) = \mu(w, w^*)$. Пусть $[w^*]$ содержит α вершин из $[u] \cap [z]$. Если вершины w^*, z^* несмежны, то $[w^*]$ содержит b_1 вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$ и $\mu(u, w^*) = \alpha + b_1$. В этом случае $[w] \cap [w^*]$ содержит z и $\alpha + b_1 - 1$ вершин из $[w] \cap [z]$, поэтому $\alpha + (\alpha + b_1 - 1) = 2b_1 - 2$ и $\alpha = (b_1 - 1)/2$. Если же вершины w^*, z^* смежны, то $[w^*]$ содержит $b_1 - 1$ вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$ и $\mu(u, w^*) = \alpha + b_1 - 1$. В этом случае $[w] \cap [w^*]$ содержит z, z^* и $\alpha + b_1 - 3$ вершин из $[w] \cap [z]$. Тогда $\alpha + (\alpha + b_1 - 3) = 2b_1 - 2$ и $\alpha = (b_1 + 1)/2$. Итак, $[w^*]$ содержит $(b_1 \pm 1)/2$ вершин из $[u] \cap [z]$, где знак плюс берется, если вершины w^*, z^* смежны, минус — в противном случае. В частности, b_1 нечетно.

Пусть $f \in [w] \cap [z]$. Если $\mu(u, f) = b_1 + 1$, то $[u] \cap [f]$ содержит вершину e из $[u] \cap [w]$, вершину g из $[u] \cap [z]$ и $b_1 - 1$ вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$. Отсюда $f \notin [w^*] \cup [z^*]$ и $[w] \cap [z] \subset f^\perp$. Далее, любая вершина из $[u] \cap [f] - \{e, g\}$ смежна не более чем с одной из вершин w^*, z^* и $b_1 - 1 \leq 2$; противоречие.

Если $\mu(u, f) = b_1$, то получим противоречие с [5, теорема]. Итак, если $[u] \cap [z]$ пересекает $[w]$, то выполняется утверждение (2).

Пусть $[u] \cap [z]$ не пересекает $[w]$. Тогда $[w] - [z]$ содержит b_1 вершин из $[u]$, поэтому $\Gamma_2(u) = \{w, z\} \cup ([w] \cap [z])$. Отсюда $v = 5b_1$ и $b_1(b_1 - 1)$ делится на 3.

Пусть $y \in [w] \cap [z]$ и $\mu(u, y) \leq b_1 + 1$. Если $\mu(u, y) = b_1$, то ввиду утверждения (2) подграф $[u] \cap [y]$ не пересекает $[w]$ и $[z]$; противоречие. Значит, $\mu(u, y) = b_1 + 1$, и ввиду леммы 1.6 подграф $[u] \cap [y]$ содержит вершину d из $[w]$, вершину e из $[z]$ и $b_1 - 1$ вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$. Далее, $\Gamma_2(u) - y^\perp$ содержит единственную вершину y^*, причем по лемме 1.1 имеем $\mu(u, y^*) = \mu(y, y^*)$. Так как степень

d в графе $[u] \cap [y]$ не меньше $b_1 - 1$, то $[d] \cap [u] \cap [z] \subset \{e\}$ и $\mu(d, z) \leq b_1 + 1$. Заметим, что $[d] - y^{\perp}$ содержит u и $b_1 - 1$ вершин из $[u] \cap [w]$, поэтому вершины d, e несмежны с y^*.

Если $[y^*]$ содержит β вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$, то $[y^*]$ содержит по $b_1 - \beta$ вершин из $[u] \cap [w]$ и $[u] \cap [z]$, в частности, $\mu(u, y^*) = 2b_1 - \beta$. Так как $[w] \cap [y]$ содержит z и $b_1 - \beta$ вершин из $[u]$, то $[y]$ содержит $b_1 - 3 + \beta$ вершин из $[w] \cap [z]$. Теперь $\mu(y, y^*) = 2 + \beta + (b_1 - 3 + \beta)$ и $b_1 + 1 = 3\beta$; противоречие с тем, что $b_1(b_1 - 1)$ делится на 3. Итак, $\mu(u, y) \geq b_1 + 2$ для любой вершины $y \in [w] \cap [z]$.

Число ребер между $[u]$ и $[w] \cap [z]$ равно $3b_1(b_1 - 1)$. По лемме 2.1 имеем $b_1 \geq 5$. Если $b_1 = 5$, то $b_1(b_1 - 1)$ не делится на 3. По лемме 2.1 имеем $b_1 \neq 3$. Лемма доказана.

В леммах 2.3, 2.4 предполагается, что диаметр Γ равен 2 и $k = 3b_1 - 2$. Тогда $\lambda = 2b_1 - 3$ и b_1 четно.

Лемма 2.3. *Пусть $[w] \cap [z]$ содержит вершину d из $[u]$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *подграф $[w] - ([u] \cup z^{\perp})$ (подграф $[z] - ([u] \cup w^{\perp})$) содержит две вершины z', z'' (вершины w', w'');*

(2) *$[d]$ содержит единственную вершину e из $[u] - ([w] \cup [z])$ и $b_1 - 2$ вершин из $[w] \cap [z]$;*

(3) *либо $\Gamma_2(u)$ содержится в $w^{\perp} \cup z^{\perp}$, $v - k - 1 = 2b_1 + 2$ и $b_1(b_1 - 1)$ делится на 3, либо $\Gamma_2(u) - (w^{\perp} \cup z^{\perp})$ содержит единственную вершину x, $\mu(d, x) = b_1 - 1$ и для любой вершины $p \in [d] \cap [w] \cap [z]$ число $|[p] \cap \{z', z''\}| + |[p] \cap \{w', w''\}|$ нечетно, $v - k - 1 = 2b_1 + 3$ и $b_1(b_1 + 1)$ делится на 3.*

Доказательство. Пусть $[w] \cap [z]$ содержит вершину d из $[u]$. Тогда подграф $[w] - z^{\perp}$ содержит $b_1 - 2$ вершин из $[u]$ и две вершины z', z'' из $[w] - [u]$. Симметрично $[z] - w^{\perp}$ содержит $b_1 - 2$ вершин из $[u]$ и две вершины w', w'' из $[z] - [u]$. Утверждение (1) доказано.

Так как $[d]$ содержит по $b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [w]$, $[u] \cap [z]$, то $[d]$ содержит единственную вершину e из $[u] - ([w] \cup [z])$. Далее, ввиду леммы 1.1 подграф $[d] - u^{\perp}$ содержит $b_1 - 2$ вершин из $[w] \cap [z]$. Утверждение (2) доказано.

Если $\Gamma_2(u) \subset [w] \cup [z]$, то $|\Gamma_2(u)| = 2b_1 + 2$ и $v = 5b_1 + 1$, в частности, $b_1(b_1 - 1)$ делится на 3.

Положим $\Omega = \Gamma_2(u) - ([w] \cup [z])$ и $\omega = |\Omega|$. Если $x \in \Omega$, то $\mu(u, x) \leq b_1 + 1$ и $[d] \cap [x]$ содержит не более $b_1 - 2$ вершин из $[w] \cap [z]$ и не более одной вершины из $[u]$. Таким образом, (d, x) — хорошая пара и $[d] \cap [x] = \{e\} \cup ([d] \cap [w] \cap [z])$. Ввиду леммы 1.6 получим $\{x\} = \Omega$, $|\Gamma_2(u)| = 2b_1 + 3$ и $v = 5b_1 + 2$, в частности, $b_1(b_1 + 1)$ делится на 3.

Пусть $p \in [d] \cap [w] \cap [z]$ и $[p]$ содержит γ вершин из $[u] - d^{\perp}$, i вершин из $\{z', z''\}$ и j вершин из $\{w', w''\}$. Тогда $[d] - p^{\perp}$ содержит u и $b_1 - 1$ вершин из $[u] \cap ([w] \cup [z] - \{d\})$ и $[p] - x^{\perp}$ содержит d, w, z и $b_1 - 3$ вершин из $[u] \cap ([w] \cup [z] - \{d\})$. Далее, $[p] - w^{\perp}$ содержит x, e, j вершин из $\{w', w''\}$ и $b_1 - 2 - j - \gamma$ вершин из $([u] \cap [z]) - [w]$. Аналогично $[p] - z^{\perp}$ содержит x, e, i вершин из $\{z', z''\}$ и $b_1 - 2 - i - \gamma$ вершин из $([u] \cap [w]) - [z]$, поэтому $2b_1 - 4 - 2\gamma - i - j = b_1 - 3$. Отсюда $2\gamma = b_1 - 1 - i - j$, числа i, j имеют разную четность и $\mu(u, p) = 3b_1/2 - 2$ или $3b_1/2 - 3$.

Лемма 2.4. *Пусть вершины w, z смежны и $[w] \cap [z]$ не пересекает $[u]$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $[w]-([u]\cup z^\perp)$ *содержит единственную вершину* z^* *и* $[z]-([u]\cup w^\perp)$ *содержит единственную вершину* w^**;*

(2) $\Gamma_2(u)\subset[w]\cup[z]$, $v-k-1=2b_1+1$ *и* b_1 *делится на* 6*;*

(3) *вершины* w^*,z^* *несмежны,* $[w^*]$ *содержит* $b_1/2-1$ *вершин из* $[u]\cap[z]$ *и* b_1 *вершин из* $[u]-[z]$*;*

(4) $\mu(u,y)>b_1$ *для любой вершины* $y\in[w]\cap[z]$.

Доказательство. Если $k=3b_1-2$, то b_1 четно. Пусть вершины w,z смежны и $[w]\cap[z]$ не пересекает $[u]$. Тогда $([w]\cup[z])-(\{w,z\}\cup[u])$ содержит по одной вершине w^*,z^*, несмежной с w,z соответственно. Утверждение (1) доказано.

Допустим, что $\Gamma_2(u)$ не содержится в $[w]\cup[z]$. Пусть $\Omega=\Gamma-(u^\perp\cup[w]\cup[z])$, $\omega=|\Omega|$. Если Ω содержит вершину x, то $[x]$ не пересекает $[u]\cap([w]\cup[z])$ и каждая вершина из $[u]\cap[w]$ смежна по крайней мере с b_1-2 вершинами из $[w]\cap[z]$. Поэтому число ребер между $[u]\cap([w]\cup[z])$ и $([w]\cap[z])-[u]$ не меньше $2(b_1-1)(b_1-2)$. Значит, некоторая вершина f из $([w]\cap[z])-[u]$ смежна по крайней мере с $2(b_1-1)(b_1-2)/(2b_1-3)=b_1-2+(b_1-2)/(2b_1-3)$ вершинами из $[u]\cap([w]\cup[z])$. Поэтому f смежна по крайней мере с b_1-1 вершинами из $[u]\cap([w]\cup[z])$ и ввиду леммы 1.6 получим $\mu(u,f)\geq b_1+1$. Заметим, что f несмежна с вершинами из Ω, иначе для $x\in\Omega\cap[f]$ подграф $[f]-x^\perp$ содержит w,z и не менее b_1-1 вершин из $[u]\cap([w]\cup[z])$.

Положим $\Sigma=\{w^*,z^*\}\cup([w]\cap[z])$. Тогда $|\Sigma|=2b_1-1$. Пусть Ω содержит две вершины x,x'. Если (u,x) — хорошая пара, то $|[u]\cap[x]\cap[x']|\geq 2$ и ввиду леммы 1.6 получим $\mu(u,x')\geq b_1+1$; противоречие. Значит, $\mu(u,x)=\mu(u,x')=b_1$. По лемме 1.7 вершины x,x' смежны, подграф Ω является ω-кликой и $[x]$ содержит $\omega-1$ вершин из Ω, b_1 вершин из $[u]$ и $2b_1-1-\omega$ вершин из $([w]\cup[z])-[u]$. Если Ω содержит две вершины x,x', то $[x]-[x']$ и $[x']-[x]$ содержат по b_1 вершин из Σ. Противоречие с тем, что $|\Sigma|=2b_1-1$. Итак, $|\Omega|\leq 1$.

Пусть $\Omega=\{x\}$. Если $\mu(u,x)=b_1-1$, то $[x]$ содержит Σ; противоречие с тем, что вершина f несмежна с x. Значит, $\mu(u,x)=b_1$, и $[x]$ содержит $\Sigma-\{f\}$. Поэтому каждая вершина из $([w]\cap[z])-\{f\}$ смежна не более чем с b_1-2 вершинами из $[u]\cap([w]\cup[z])$ и число ребер между $([w]\cap[z])-\{f\}$ и $[u]\cap([w]\cup[z])$ не больше $(2b_1-4)(b_1-2)=2b_1^2-8b_1+8$. Отсюда $[f]$ содержит не менее $2b_1-4$ вершин из $[u]\cap([w]\cup[z])$ и $\mu(f,x)=b_1-1$. По лемме 1.6 имеем $|[u]\cap[x]\cap[f]|\leq 1$. Но для каждой несмежной с f вершины g из $[u]\cap[x]$ найдется единственная вершина $g^*\in[u]\cap[x]-g^\perp$ и b_1 четно, поэтому $|[u]\cap[x]\cap[f]|=0$ и $\mu(u,f)=2b_1-4$. Без ограничения общности $[f]$ содержит не более b_1-2 вершин из $[u]\cap[z]$. Тогда $[f]-w^\perp$ содержит, быть может, w^* и не более b_1-2 вершин из $[u]\cap[z]$; противоречие. Итак, $\Gamma_2(u)$ содержится в $w^\perp\cap z^\perp$. Теперь $v=5b_1$, $\lambda=2b_1-3$ и b_1 делится на 3. Утверждение (2) доказано.

Докажем следующее утверждение:

($*$) подграф $[w^*]$ содержит $b_1/2$ вершин ($b_1/2-1$ вершин) из $[u]\cap[z]$ и b_1-1 вершин (b_1 вершин) из $[u]-[z]$, если w^*,z^* смежны (несмежны).

Пусть $[z]\cap[w^*]$ содержит γ вершин из $[u]$. Тогда $[w]\cap[w^*]$ содержит z и $2b_1-3-\gamma$ вершин из $[z]$.

Если вершины w^*,z^* смежны, то $\mu(w,w^*)=2b_1-1-\gamma$. По лемме 1.1 $\mu(u,w^*)=\mu(w,w^*)$. Так как $[w^*]-z^\perp$ содержит z^* и b_1-1 вершин из $[u]$, то $\mu(u,w^*)=b_1-1+\gamma=2b_1-1-\gamma$ и $\gamma=b_1/2$. В этом случае число ребер между $[u]\cap([w]\cup[z])$ и $[w]\cap[z]$ равно $2b_1^2-5b_1+2$.

Если вершины w^*,z^* несмежны, то $\mu(w,w^*)=2b_1-2-\gamma$. По лемме 1.1

имеем $\mu(u,w^*) = \mu(w,w^*)$, поэтому $b_1+\gamma = 2b_1-2-\gamma$ и $\gamma = b_1/2-1$. В этом случае число ребер между $[u]\cap([w]\cup[z])$ и $[w]\cap[z]$ равно $2b_1^2-5b_1+4$. Утверждение $(*)$ доказано.

Пусть вершины w^*, z^* смежны и $[w^*]$ содержит вершину из $[u]-([z]\cup[z^*])$. Тогда $[w^*]-(z^*)^\perp$ содержит $b_1/2-2$ вершин из $[w]\cap[z]$. Противоречие с тем, что $[w^*]\cap[z^*]$ содержит b_1 вершин из $[w]\cap[z]$ и b_1-2 вершин из $[u]-([w]\cup[z])$. Значит, $[w^*]$ не содержит вершин из $[u]-([z]\cup[z^*])$. Тогда $[w^*]-(z^*)^\perp$ содержит $b_1/2-1$ вершин из $[w]\cap[z]$. Противоречие с тем, что $[w^*]\cap[z^*]$ содержит b_1-1 вершин из $[u]$ и b_1-1 вершин из $[u]-([w]\cup[z])$. Утверждение (3) доказано.

Допустим, что $\mu(u,y)=b_1-1$ для некоторой вершины $y\in\Gamma_2(u)-\{w,z\}$. Тогда $[u]\cap[y]$ не пересекает $[w]\cup[z]$, иначе по лемме 2.3 получим $v>5b_1$. Поэтому $[u]-([w]\cup[z]\cup[y])$ содержит единственную вершину a. Далее, $y\in[w^*]\cap[z^*]$, и $[w]\cap[z]-y^\perp$ содержит единственную вершину y^*. По утверждению (3), примененному к паре w^*, y^*, подграф $[w^*]$ содержит $b_1/2-1$ вершин из $[u]\cap[y]$; противоречие.

Допустим, что $\mu(u,y)=b_1$ для некоторой вершины $y\in\Gamma_2(u)-\{w,z\}$. Если $[u]\cap[y]$ не пересекает $[w]\cup[z]$, то вершины w^*, z^* несмежны с y, поэтому степень любой вершины в графе $[u]\cap[y]$ не меньше b_1; противоречие. Пусть $[u]\cap[y]$ содержит b_1-1 вершин вне $[w]\cup[z]$ и вершину d из $[w]$. Тогда $y\in[w^*]-[z^*]$ и $[y]-(w^*)^\perp$ содержит d, w и b_1-2 вершин из $[w]\cap[z]$. Противоречие с тем, что $[z]-(w^*)^\perp$ содержит w, $b_1/2$ вершин из $[u]$ и $b_1/2-1$ вершин из $[w]$. Значит, $[u]\cap[y]$ содержит b_1-2 вершин вне $[w]\cup[z]$, вершину d из $[w]$ и вершину e из $[z]$. Тогда $y\in[w^*]\cap[z^*]$ и $[y]-(w^*)^\perp$ содержит d, w, z^* и b_1-3 вершин из $[w]\cap[z]$. Противоречие с тем, что $[z]-(w^*)^\perp$ содержит $b_1/2-1$ вершин из $[w]$. Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть вершины w, z несмежны, диаметр Γ равен 2 и $\mu = \mu(w,z)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $\Gamma_2(u)-(w^\perp\cup z^\perp)$ содержит вершину x, $k=3b_1-2$, $\mu(u,x)=b_1$, $|\Gamma_2(u)| = 4b_1-\mu+1$, $b_1(\mu-b_1)$ делится на 3, $b_1>5$ и $\Gamma_2(u)-\{w,z\}$ не содержит вершин, образующих хорошие пары с u;

(2) $\Gamma_2(u)\subset w^\perp\cup z^\perp$, $|\Gamma_2(u)| = 4b_1-\mu$, $b_1(\mu+1-b_1)$ делится на 3, $b_1+1+\delta\le \mu(w,z)\le 2b_1-3$ и $\delta<b_1/2-2$.

Доказательство. Пусть w, z — несмежные вершины из $\Gamma_2(u)$ и пары (u,w), (u,z) являются хорошими. Так как $\delta\ge -2$, то ввиду [6, следствие] граф Γ либо является многоугольником, реберным графом тривалентного графа без треугольников или графом икосаэдра, либо имеет диаметр 2.

Допустим, что диаметр Γ равен 2. Положим $\mu=\mu(w,z)$, $\Omega = \Gamma_2(u) - (w^\perp\cup z^\perp)$ и $\omega = |\Omega|$. Тогда $|[w]-([u]\cup[z])| = |[z]-([u]\cup[w])| = 2b_1-1-\mu$ и $|\Gamma_2(u)\cap(w^\perp\cup z^\perp)| = 4b_1-\mu$.

Если Ω содержит вершину x, то $\mu(u,x)\le b_1-2-\delta$, $\delta=-2$ и $\mu(u,x)\le b_1$. Допустим сначала, что $\mu(u,x)=b_1-1$. Тогда $\Omega=\{x\}$ и $[u]-([x]\cup[w]\cup[z])$ содержит единственную вершину d. Заметим, что несмежная с x вершина из $[w]-([u]\cup[z])$ смежна не более чем с b_1 вершинами из $[u]$. Ввиду леммы 1.6 подграф $[x]$ содержит $[w]-([u]\cup[z])$ и $[z]-([u]\cup[w])$. Теперь $4b_1-1-\mu = 3+\nu+(\mu(x,w)-\nu)+(\mu(x,z)-\nu)+(\mu-\nu)$, где $\nu = |[x]\cap[w]\cap[z]|$. Отсюда $4b_1+2\nu-4 = 2\mu+\mu(x,w)+\mu(x,z)$. Так как можно заменить пару w, z на x, w и на x, z, то $\mu(x,w)=\mu(x,z)=\mu$ и $\mu = b_1-1+\nu/2$. С другой стороны, $|[x]\cap\Gamma_2(u)| = 2b_1-1 = 2\mu-\nu = 2b_1-2$; противоречие.

Значит, $\mu(u,x)=b_1$ для любой вершины $x\in\Omega$. Ясно, что $\Gamma_2(u)-\{w,z\}$

не содержит вершин, образующих хорошие пары с u. Ввиду леммы 1.7 граф Ω является ω-кликой. Допустим, что Ω содержит две вершины x, x'. Тогда $([w] \cup [z]) - [u]$ содержит по b_1 вершин из $[x] - (x')^\perp$ и из $[x'] - x^\perp$ и $b_1 - 1 - \omega$ вершин из $[x] \cap [x']$. Поэтому $3b_1 - 1 - \omega \le 4b_1 - 2 - \mu$, $\mu \le b_1 - 1 + \omega$ и $\Gamma_2(u)$ содержит w, z, ω вершин из Ω и не менее $3b_1 - 3 - \omega$ вершин из $[w] \cup [z]$. Противоречие с тем, что по [6, следствие] число вершин в Γ не больше $2k+1$. Итак, $\{x\} = \Omega$ и $v - k - 1 = 4b_1 - \mu + 1$. Так как $vb_1 = (7b_1 - \mu)b_1$ делится на 3, то $b_1(\mu - b_1)$ делится на 3. Поскольку b_1 четно, то по лемме 2.1 имеем $b_1 \ge 6$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $\Gamma_2(u) \subset w^\perp \cup z^\perp$. Тогда $|\Gamma_2(u)| = 4b_1 - \mu$ и $b_1(\mu + 1 - b_1)$ делится на 3. Если $[z] \subset [w] \cup [u]$, то $|\Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)| = 1$ и по лемме 1.1 имеем $\mu(u, z) = \mu(w, z)$, поэтому $3b_1 + \delta = 2(b_1 + 1 + \delta)$ и $\delta = b_1 - 2$. По лемме 1.8 получим $b_1 = 1$ и Γ является n-угольником, $n = 4$ или 5; противоречие.

Пусть $\mu = 2b_1 - 2$. Тогда $[w] - ([u] \cup [z])$ содержит единственную вершину z^* и $[z] - ([u] \cup [w])$ содержит единственную вершину w^*. Если $\delta \ge -1$, то $[z^*] - w^\perp$ содержит, быть может, вершину w^* и не более $b_1 - 1$ вершин из $[u] - [w]$. В этом случае $[z^*] - w^\perp = \{w^*\} \cup ([u] - ([w] \cup [z]))$ и $\delta = -1$. Если $[w^*]$ содержит α вершин из $[u] \cap [z]$, то число ребер между $[u] - [w]$ и $[w] \cap [z]$ равно $(2b_1 - 1)(b_1 - 2) + (b_1 - \alpha)$. С другой стороны, вершина x из $[w] \cap [z]$ смежна с $b_1 - 2$ вершинами из $[u] - [w]$, если x смежна с z^*, и смежна с $b_1 - 1$ вершинами из $[u] - [w]$, если x несмежна с z^*, поэтому указанное число ребер равно $(2b_1 - 2)(b_1 - 2) + \alpha$. Отсюда $\alpha = b_1 - 1$. Симметрично $[z^*]$ содержит по $b_1 - 1$ вершин из $[u] \cap [w]$ и из $[w] \cap [z]$, в частности, пары w, w^* и z, z^* являются хорошими. Положим $\Sigma = [w] \cap [z] \cap [w^*]$, $\{a\} = [u] \cap [z] - [w^*]$, $\{b\} = [u] \cap [w] - [z^*]$. Тогда любая вершина из Σ несмежна ни с a, ни с b. Подграф $[a] - u^\perp$ содержит z и все $b_1 - 1$ вершин из $[w] \cap [z] - \Sigma$. Поэтому $[a] \cap [z^*]$ содержится в $[u]$ и $\mu(a, z^*) \le b_1 - 1$; противоречие.

Пусть $\mu = 2b_1 - 2$ и $\delta = -2$. Тогда либо вершины w^*, z^* несмежны и $[u] - ([w] \cup [z]) \subset [w^*] \cap [z^*]$, либо w^*, z^* смежны и $[u] - ([w] \cup [z])$ содержит по $b_1 - 1$ вершин из $[w^*]$ и из $[z^*]$. Пусть $[w^*]$ содержит α вершин из $[u] \cap [z]$.

Если вершины w^*, z^* несмежны, то число ребер между $[u] - [w]$ и $[w] \cap [z]$ равно $b_1(b_1 - 2) + (b_1 - 1)^2 - \alpha$. С другой стороны, вершина x из $[w] \cap [z]$ смежна с $b_1 - 2$ вершинами из $[u] - [w]$, если x смежна с w^*, и смежна с $b_1 - 1$ вершинами из $[u] - [w]$, если x несмежна с w^*. Поэтому указанное число ребер равно $(2b_1 - 3 - \alpha)(b_1 - 2) + (b_1 - 1)(\alpha + 1)$. Отсюда $\alpha = b_1 - 2$ и пара w, w^* является хорошей.

Если вершины w^*, z^* смежны, то число ребер между $[u] - [w]$ и $[w] \cap [z]$ равно $b_1 + (b_1 - 1)(b_1 - 2) + (b_1 - 1)^2 - \alpha$. С другой стороны, указанное число ребер равно $(2b_1 - 3 - \alpha)(b_1 - 2) + (b_1 - 1)(\alpha + 1)$. Отсюда $\alpha = b_1 - 1$ и $[w^*]$ содержит $b_1 - 2$ вершин из $[w] \cap [z]$, снова пара w, w^* является хорошей. Заменив тройку $(u; w, z)$ на $(w; u, w^*)$, получим вершину z в роли u^* и d в роли $(w^*)^*$, где d — единственная несмежная с w^* вершина из $[u] - ([w] \cup [z])$.

Теперь можно считать, что вершины w^*, z^* несмежны. Положим $\{a\} = [u] \cap [z] - [w^*]$, $\{b\} = [u] \cap [w] - [z^*]$ и заменим тройку $(u; w, z)$ на $(w; u, w^*)$. Тогда получим вершину z в роли u^* и a в роли $(w^*)^*$, в частности, a, w^* — хорошая пара. Далее, $[a]$ содержит $[u] \cap [w]$ и подграф $[a] \cap [b]$ содержит u, $2b_1 - 4$ вершин из $[u] \cap ([w] \cup [z])$ и не пересекает $[w] \cap [z]$. Таким образом, $[a] \cap [w] \cap [z] = [z^*] \cap [w] \cap [z]$ и $\mu(w^*, z^*) = b_1$. Рассмотрев тройку $(w^*; w, a)$, получим, что вершина z^* в роли a^* и $[w^*] \cap [z^*]$ содержит $b_1 - 1$ вершин из $[w] \cap [w^*]$; противоречие с леммой 1.6.

Итак, $b_1 + 1 + \delta \le \mu(w, z) \le 2b_1 - 3$. Для $x \in [z] - ([u] \cup [w])$ подграф

$[x] - z^\perp$ содержит b_1 вершин из $([w] - ([u] \cup [z])) \cup ([u] - ([w] \cup [z]))$. Отсюда $(b_1 - 2 - \delta) + (2b_1 - 1 - \mu) \geq b_1$ и $\delta \leq b_1/2 - 2$.

Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma - \{u, w, z\}$, смежных с i вершинами из $\{u, w, z\}$. В случае равенства $\delta = b_1/2 - 2$ пара вершин w, z также является хорошей, а подграф X_1 оказывается кликой. Действительно, для $a \in [z] - ([u] \cup [w])$ и $b \in [w] - ([u] \cup [z])$ подграф $[a] - b^\perp$ содержит z и не более $b_1 - 1$ вершин из $[u] - ([w] \cup [z])$. Таким образом, $[a] \cap [z]$ содержит не более $b_1 - 1$ вершин в каждом из подграфов $[w] \cap [z]$ и $[w] \cap [z]$ и не более $b_1/2 - 1$ вершин из $[z] - ([u] \cup [w])$. Так как $\lambda = 5b_1/2 - 3$, то $[a] \cap [z]$ содержит $b_1 - 1$ вершин в каждом из подграфов $[w] \cap [z]$ и $[w] \cap [z]$ и $b_1/2 - 1$ вершин из $[z] - ([u] \cup [w])$.

Значит, X_1 — клика, и для $a \in [z] - ([u] \cup [w])$ и $b \in [w] - ([u] \cup [z])$ подграф $[a] \cap [b]$ содержит $3b_1/2 - 2$ вершин из X_1 и $b_1 - 1$ вершин из $[w] \cap [z]$. Теперь для различных вершин $c, d \in [w] \cap [z] \cap [a]$ подграф $[c] \cap [d]$ содержит w, z, b_1 вершин из X_1 и $3b_1/2 - 3$ вершин из $[w] \cap [z]$, итого $5b_1/2 - 1$ вершин; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *В условиях леммы* 2.3 *выполняются следующие утверждения:*

(1) $b_1 \geq 6$;

(2) *если* $\Gamma_2(u) - (w^\perp \cup z^\perp)$ *содержит вершину* x, *то* $[x]$ *содержит* w', w'', z', z'', $b_1 \leq \mu(u, x) \leq b_1 + 1$ *и* $\mu(u, y) \geq 2b_1 - 7$ *для любой вершины* $y \in \{w', w'', z', z''\}$;

(3) *если* $\mu(u, f) = b_1 - 1$ *для некоторой вершины* f *из* $\Gamma_2(u) - \{w, z\}$, *то* $\Gamma_2(u) \subset w^\perp \cup z^\perp$;

(4) *если* $\Gamma_2(u) - \{w, z\}$ *содержит две вершины* f, g, *образующие хорошие пары с* u, X_i — *множество вершин из* $\Gamma - \{w, z, f, g\}$, *смежных с* i *вершинами из* $\{w, z, f, g\}$, $x_i = |X_i|$, *то* $b_1 = 6$, $k = 16$, $\lambda = 9$ *и* $v = 31$, *подграф* $\{w, z, f, g\}$ *является кликой,* $X_4 = \{l, m\}$ *содержится в* $\Gamma_2(u)$, *для любой вершины* y *из* $\{w, z, f, g\}$ *подграф* X_3 *содержит две вершины* y', y'', *несмежных с* y, $[u]$ *содержит две вершины из* X_0, 6 *вершин из* X_2 *и* 8 *из* X_1, X_2 *не является кликой и* $\mu(u, y) \geq 7$ *для любой вершины* y *из* $\Gamma_2(u) - \{w, z, f, g\}$.

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы 2.2. Тогда либо $\Gamma_2(u)$ содержится в $w^\perp \cup z^\perp$ и $b_1(b_1 - 1)$ делится на 3, либо $\Gamma_2(u) - (w^\perp \cup z^\perp)$ содержит единственную вершину x и $b_1(b_1 + 1)$ делится на 3.

По лемме 2.1 имеем $b_1 \geq 5$. Допустим, что $b_1 = 5$. Тогда $\Gamma_2(u) - (w^\perp \cup z^\perp)$ содержит единственную вершину x, $k = 3b_1 - 2 = 13$ и $\lambda = 7$. Противоречие с тем, что число $k\lambda$ четно. Утверждение (1) доказано.

Предположим, что $\Gamma_2(u) - (w^\perp \cup z^\perp)$ содержит вершину x. По лемме 2.3 имеем $v - k - 1 = 2b_1 + 3$.

Если вершины x, w' несмежны, то $[w']$ не пересекает $[d] \cap ([x] \cup [u])$ и $\mu(d, w') = b_1 - 1$. В этом случае $[z] \cap [w']$ содержит w'' и по $b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [z]$ и из $[w] \cap [z] - [d]$. Ввиду леммы 1.6 получим $w'' \in [x]$. Заметим, что $|\Gamma - (x^\perp \cup (w'')^\perp)| = b_1 + 3$, причем $\Gamma - (x^\perp \cup (w'')^\perp)$ содержит u, w и $b_1 - 1$ вершин из $[u] \cap [w]$. Поэтому $|[w''] \cap [u] \cap [z]| \geq b_1 - 4$ и по лемме 1.6 имеем $\mu(u, w'') \geq b_1 + 1$.

Положим $\mu = \mu(x, w')$ и применим лемму 2.5 к тройке $(d; x, w')$. Так как $[d] - ([x] \cup [w']$ содержит u, w и $b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [w]$, то ввиду леммы 2.5 получим $\Gamma_2(d) \subset x^\perp \cup (w')^\perp$, $v - k - 1 = 2b_1 + 3 = 4b_1 - \mu$ и $\mu = 2b_1 - 3$. Если вершины z', z'' несмежны с w', то $[w] \cap [w']$ содержит z и $b_1 - 2$ вершин вне $d^\perp$, поэтому $\mu(w, w') = b_1 - 1$, $\Gamma_2(w') - (d^\perp \cup w^\perp) = \{x\}$ и $\mu(x, z) = b_1 - 1$. Противоречие с тем, что $[x] \cap [z]$ содержит $b_1 - 2$ вершин из $[d] \cap [x]$ и не менее $b_1 - 3$ вершин вне $d^\perp$. Значит, $|[w'] \cap \{z', z''\}| \geq 1$.

В случае $\mu(u,x) = b_1 - 1$ применим лемму 2.2 к тройке $(x; u, d)$. Тогда роли u', u'' играют w, z, роль x играет w' и $[d] \cap [x] \cap [u] = \{e\}$. Но вершины w, w' несмежны, поэтому $\mu(e,w) = \mu(e,w') = b_1 - 1$, причем $\mu(w,w') \le b_1 + 1$. Противоречие с тем, что в этом случае $v - k - 1 = 3b_1 - 1$ и $v = 2k + 2$. Итак, $\mu(u,x) \ge b_1$. Далее, $z', z'' \in [x]$, иначе для вершины z', несмежной с x, получим $\mu(d,z') = b_1 - 1$, $z' \in [w']$ и $[d] \cap [z']$ не пересекает $[w']$; противоречие с леммой 2.4. Если $w' \in [z'] - [z'']$, то $\mu(w,w') = b_1$ и $[w] \cap [w']$ содержит вершину z, несмежную с z'. Противоречие с тем, что z' смежна с вершиной x вне $w^\perp \cup (w')^\perp$ и ее степень в графе $[w] \cap [w']$ равна $b_1 - 1$. Значит, $z', z'' \in [w']$ и $[w] \cap [z] \cap [w'] \subset [z'] \cap [z'']$.

Допустим, что вершины z', z'' смежны. Тогда $[w'] \cap [z']$ содержит z'', $b_1 - 2$ вершин из $[w] \cap [z]$ и либо w'' и $b_1 - 3$ вершин из $[u] \cap [w'] - [z]$, либо $b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [w'] - [z]$. Противоречие с тем, что $[z'] \cap [z'']$ содержит x, w, w', $b_1 - 2$ вершин из $[w] \cap [z]$ и не менее $b_1 - 3$ вершин из $\{w''\} \cup ([u] \cap [w'] - [z])$. Значит, вершины z', z'' несмежны и $[w'] \cap [z']$ содержит w'' и по $b_1 - 2$ вершин из $[w] \cap [z]$ и из $[u] \cap [w'] - [z]$. В частности, вершины z', z'' несмежны с e. Так как $[w] \cap [z']$ содержит $b_1 - 2$ вершин из $[w'] \cap [z]$, то $[d] \cap [z']$ содержит w и $b_1 - 1$ вершин из $[w]$. Симметрично $[d] \cap [z'']$ содержит w и $b_1 - 1$ вершин из $[w]$. Теперь тройка $(d; z', z'')$ является почти хорошей и $|[d] \cap [z'] \cap [z'']| \ge 3$; противоречие с леммой 1.7. Итак, $w', w'', z', z'' \in [x]$.

Пусть $\mu(u,x) = b_1 - 1$. Тогда тройку $(u; w, z)$ можно заменить на $(x; u, d)$, причем в роли вершин u', u'' выступают w, z и $[w] \cap [z]$ не пересекает $[u] \cap [d] - \{e\}$. Положим $\Gamma_2(x) - (u^\perp \cup d^\perp) = \{f\}$. Тогда $[e] \cap [f]$ содержит вершину g из $[x] - [u]$ и $b_1 - 2$ вершин из $[e] \cap [u] \cap [d]$. Как показано выше, $[f]$ содержит обе вершины d', d'' из $[u] - (d^\perp \cup [x])$ и не менее $2b_1 - 7$ вершин из $[u] \cap [d]$.

Если $[f]$ содержит w', w'', z', z'', то без ограничения общности $[f]$ содержит не менее $b_1 - 3$ вершин из $[u] \cap [w]$. Противоречие с тем, что $[f] - z^\perp$ содержит d', d'', z', z'' и не менее $b_1 - 3$ вершин из $[u] \cap [w]$. Если $[f]$ содержит три вершины из $\{w', w'', z', z''\}$, скажем, $\{w', w'', z'\}$, то $[f]$ содержит не менее $2b_1 - 6$ вершин из $[u] \cap [d]$. В этом случае $[f] - w^\perp$ содержит d', d'', w', w'' и $b_1 - 4$ вершин из $[u] \cap [z]$. Поэтому $[f] - z^\perp$ содержит d', d'', z' и $b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [w]$; противоречие. Значит, $[f]$ содержит две вершины из $\{w', w'', z', z''\}$ и $2b_1 - 5$ вершин из $[u] \cap [d]$. Можно считать, что $[f]$ содержит $b_1 - 2$ вершин из $[u] \cap [z]$. Тогда $[f]$ содержит z', z'' и $b_1 - 3$ вершин из $[u] \cap [w]$; противоречие.

Заметим, что $\Gamma - (x^\perp \cup (w')^\perp)$ содержит u, w и $b_1 - 1$ вершин из $[u] \cap [w]$, поэтому $[w']$ содержит не менее $b_1 - 4$ вершин из $[u] \cap [z]$. Далее, $[w'] - z^\perp$ содержит x, не более двух вершин из $\{z', z''\}$ и не менее $b_1 - 3$ вершин из $[u] - [z]$, поэтому $\mu(u,w') \ge 2b_1 - 7$. Утверждение (2) доказано.

Пусть $\mu(u,f) = b_1 - 1$ для некоторой вершины f из $\Gamma_2(u) - \{w, z\}$. Предположим сначала, что $\Gamma_2(u) - (w^\perp \cup z^\perp)$ содержит вершину x. Тогда по лемме 1.6 имеем $\mu(u,x) = b_1 + 1$ и $f \in [x]$. Ввиду утверждения (2) имеем $f \in [w] \cap [z]$. Если $[f]$ не пересекает $[u] \cap [w]$, то по лемме 2.4 имеем $v - k - 1 = 2b_1 + 1$; противоречие. Поэтому $[u] \cap [f]$ содержит вершину a из $[w]$ и вершину b из $[z]$.

Если $a = d$, то степень d в графе u не меньше $3(b_1 - 2)$; противоречие. Поэтому подграф $\{d, a, b\}$ является 3-кликой. Так как $[f] - x^\perp$ содержит две вершины из $[u]$ и не более пяти вершин из $\Gamma_2(u)$, то $b_1 = 6$. Теперь $[x] \cap \Gamma_2(u)$ содержит f, w', w'', z', z'' и четыре вершины из $[d] \cap [w] \cap [z]$, в частности, $\mu(u,y) \ge b_1$ для любой вершины $y \in \Gamma_2(u) - \{f, w, z\}$.

Заметим, что $|\Gamma_2(u) - \{f, w, z\}| = 2b_1 = 12$, число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u) - \{f, w, z\}$ равно 81 и $12 \cdot 7 = 84$. Поэтому $\Gamma_2(u)$ содержит три вершины y_1, y_2, y_3

с $\mu(u,y_i)=6$. Заменив тройку $(u;w,z)$ на $(u;w,f)$, получим вершину w' в роли x, $w''\in[f]$ и $|[w]\cap[z]\cap[f]|=2b_1-6=6$. Заменив тройку $(u;w,z)$ на $(u;z,f)$, получим вершину z' в роли x, $z''\in[f]$ и вершину x в роли f' $(f''\in[w]\cap[z])$.

Если $y_1\in[w]\cap[z]\cap[f]$, то $[y_1]\cap[y_2]$ содержит не менее двух вершин из $[u]\cap[x]$ и две вершины из $\{f,w,z\}$; противоречие с леммой 1.7. Значит, $\{y_1,y_2,y_3\}=\{w'',z'',f''\}$ и $[w'']\cap[z'']\cap[f'']$ содержит все четыре вершины из $[u]-([w]\cup[z]\cup[f])$. Теперь $[f'']$ содержит x и по вершине из $[u]\cap[w]$ и $[u]\cap[z]$. Поэтому $[f'']$ не пересекает $\{w',w'',z',z''\}$; противоречие с тем, что по лемме 2.3 число $|[f'']\cap\{w',w'',z',z''\}|$ нечетно. Итак, $\Gamma_2(u)\subset w^\perp\cup z^\perp$, утверждение (3) доказано.

Допустим, что $\Gamma_2(u)-\{w,z\}$ содержит две вершины f,g с $\mu(u,f)=\mu(u,g)=b_1-1$. Тогда $[u]\cap[g]$ содержит по вершине из $[w],[z],[f]$ и b_1-4 вершин из $[u]-([w]\cup[z]\cup[f])$, поэтому $b_1\le 8$. Но $8\cdot 7$ не делится на 3, поэтому $b_1=6$, $k=16$, $\lambda=9$ и $v=31$.

Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma-\{w,z,f,g\}$, смежных с i вершинами из $\{w,z,f,g\}$, $x_i=|X_i|$. Тогда подграф $\{w,z,f,g\}$ является кликой, $X_4=\{l,m\}$ содержится в $\Gamma_2(u)$, для любой вершины y из $\{w,z,f,g\}$ подграф X_3 содержит две вершины y',y'', несмежных с y, $X_0=\{r,s\}$ содержится в $[u]$ и $[u]$ содержит 6 вершин из X_2 и 8 из X_1. Для двух вершин x,y из $\{w,z,f,g\}$ через xy обозначим единственную вершину из $[u]\cap[x]\cap[y]$ (например, $d=wz$). Заметим, что $[d]-u^\perp$ содержит w,z и четыре вершины из $\{l,m,f',f'',g',g''\}$, а $([d]\cap[wf])-u^\perp$ содержится в $\{w,l,m,g',g''\}$. Если вершины d,fg смежны, то $[d]\cap[fg]$ содержит вне $u^\perp$ лишь l,m, в $u^\perp$ — вершины e,u,fw,gw,fz,gz и вершину из $[u]\cap[fg]-([f]\cup[g])$. Если X_2 — клика, то $[u]\cap[r]=X_1\cup\{s\}$ и $[r]\cap[s]$ содержит u, 8 вершин из X_1 и не менее двух вершин из $\Gamma_2(u)$; противоречие.

Допустим, что $\mu(u,y)\le 6$ для некоторой вершины y из $\Gamma_2(u)$. Тогда $\mu(u,y)=6$, иначе в $\Gamma_2(u)$ нет двух вершин y',y'', не попадающих в $y^\perp$. Далее, $[u]\cap[y]$ содержит r,s и по вершине в каждом из подграфов $[u]\cap[x]$ для $x\in\{w,z,f,g\}$. Поэтому можно считать, что $y=l$. Для $x\in\{w,z,f,g\}$ подграф $[l]\cap[x]$ содержит одну вершину из $[u]\cap X_1$, три вершины из $\{w,z,f,g\}$ и пять вершин из семи в $\{m\}\cup X_3-\{x',x''\}$. Допустим, что вершина l несмежна с m. Тогда $[l]\cap[w]$ не содержит одну вершину из $\{f',f'',z',z'',g',g''\}$, скажем z'. Далее, $[l]\cap[z]$ не содержит одну вершину из $\{w',w''\}$. Противоречие с тем, что $[l]\cap[f]$ не содержит две вершины из $\{w',w'',z',z''\}$. Значит, l смежна с m. Тогда $[l]\cap[w]$ не содержит две вершины из $\{f',f'',z',z'',g',g''\}$. Если эти вершины z',z'', то $[l]\cap[z]$ не содержит обе вершины w',w''. Противоречие с тем, что $[l]\cap[f]$ не содержит четыре вершины w',w'',z',z''. Можно считать, что $[l]\cap[w]$ не содержит f',z'. Тогда $[l]\cap[z]$ не содержит w',f'. Противоречие с тем, что $[l]\cap[g]$ не содержит три вершины w',f',z'. Значит, $\mu(u,y)\ge 7$ для любой вершины y из $X_3\cup X_4$. Лемма доказана.

Завершим доказательство предложения. Если $\Gamma_2(u)$ содержит четыре вершины, образующие хорошие пары с u, то предложение следует из леммы 2.6. Если $\Gamma_2(u)$ содержит три вершины f,w,z, образующие хорошие пары с u, то либо эти вершины попарно смежны и предложение следует из леммы 2.6, либо без ограничения общности вершины w,z несмежны. Ввиду леммы 2.5 можно считать, что $f\in[w]$. Отсюда $k=3b_1-2$ и $v-k-1=2b_1+2$ или $2b_1+3$. По лемме 2.6, примененной к тройке $(u;w,f)$, имеем $f\in[z]$ и $v-k-1=2b_1+2$. Отсюда подграф $\Gamma_2(u)-\{w,z\}$ содержит единственную вершину w^*, несмежную с w, и $\mu(w,z)=2b_1-2$; противоречие с леммой 2.5. Предложение доказано.

§ 3. Доказательство теоремы и следствия

В этом параграфе Γ — связный неполный реберно регулярный граф с $k = 3b_1 + \delta$ и $\delta \geq -2$.

Лемма 3.1. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если диаметр графа Γ больше 2, то либо Γ является многоугольником или графом икосаэдра, либо $k = 4$ и $\lambda = 1$, причем в любом случае $|\Gamma_2(x)|(k - 2b_1 + 2) > kb_1$ для любой вершины x;*

(2) *если диаметр графа Γ равен двум и $(v-k-1)(k-2b_1+2) \geq kb_1$, то либо Γ содержит хорошую пару, либо $(v-k-1)(k-2b_1+2) = kb_1$ и Γ является полным многодольным графом $K_{r\times 2}$, 3×3-решеткой, треугольным графом $T(m)$, $m \leq 7$, графом Клебша или графом Шлефли;*

(3) *если $\delta \geq 0$ и $(v-k-1)(k-2b_1+2) \geq kb_1$, то диаметр Γ равен двум и Γ не содержит хороших пар.*

Доказательство. Пусть диаметр графа Γ больше двух. По [6, следствие] либо граф Γ является многоугольником или графом икосаэдра, либо $k = 4$ и $\lambda = 1$. В первых двух случаях имеем $|\Gamma_2(x)|(k - 2b_1 + 2) > kb_1$ для любой вершины x. Если же $k = 4$, $\lambda = 1$, то $kb_1 = 8$ и $2|\Gamma_2(u)| \geq 8$. Однако в случае равенства получим $\mu(u,w) = 2$ для любой вершины $w \in \Gamma_2(u)$ и $[w] \subset [u] \cup \Gamma_2(u)$. По связности графа $\Gamma = u^\perp \cup \Gamma_2(u)$ и Γ имеет диаметр 2; противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть диаметр Γ равен двум и $(v-k-1)(k-2b_1+2) \geq kb_1$. Если Γ не содержит хороших пар, то Γ является сильно регулярным графом с $\mu = k - 2b_1 + 2$. Заметим, что сильно регулярный граф с $\mu = k - 2b_1 + 2$ имеет собственное значение -2, т. е. является графом Зейделя. Действительно, по лемме 1.2 имеем $\mu = k - 2b_1 + 2 = k - b_1 + 1 + (m-1) - b_1/(m-1)$ и $m = 2$. Если же Γ — граф Зейделя и $k \geq 3b_1 - 2$, то Γ является полным многодольным графом $K_{r\times 2}$, 3×3-решеткой, треугольным графом $T(m)$, $m \leq 7$, графом Клебша или графом Шлефли. Утверждение (2) доказано.

Пусть $\delta \geq 0$. Тогда диаметр Γ равен двум. Допустим, что Γ содержит хорошую пару u, w. Тогда $\mu(u,w) = b_1 + 1 + \delta$ и $|[w] - [u]| = 2b_1 - 1$. По лемме 2.1 $b_1 \geq 5$. Покажем, что $\mu(u,z) \geq b_1 + 3 + \delta$ для любой вершины $z \in [w] - [u]$. По лемме 2.2 имеем $\mu(u,z) > b_1 + 1 + \delta$ для $z \in [w] - [u]$. Если $\mu(u,z) = b_1 + 2 + \delta$ для $z \in [w] - [u]$, то по лемме 1.6 получим $|[u] \cap [w] \cap [z]| \leq 1$ и $|[z] - w^\perp| \geq b_1 + 1 + \delta$; противоречие. Теперь $\mu(u, y_i) \geq b_1 + 3 + \delta$ для трех вершин $y_i \in [w] - [u]$. Отсюда $\Gamma_2(u)$ содержит три вершины f, w, z, образующие хорошие пары с u. Так как подграф $\{f, w, z\}$ является кокликой, то $3(b_1 + \delta + 1) \leq k$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть Γ содержит хорошую пару u, w. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $b_1 \leq 4$, то либо $b_1 = 1$ и Γ является многоугольником, либо $b_1 = 2$ и Γ является графом икосаэдра или реберным графом тривалентного графа без треугольников;*

(2) *если $kb_1 \leq (v-k-1)(k-2b_1+2)$, то $b_1 \leq 4$.*

Доказательство. Если $b_1 \leq 4$, то ввиду леммы 2.1 либо $b_1 = 1$ и Γ — многоугольник, либо $b_1 = 2$ и Γ является графом икосаэдра или реберным графом тривалентного графа без треугольников. Утверждение (1) доказано.

Пусть $kb_1 \leq (v-k-1)(k-2b_1+2)$, Y_i — множество вершин из $\Gamma_2(u)$, смежных с $k - 2b_1 + i$ вершинами из $[u] \cap [w]$, $y_i = |Y_i|$. Если $y_1 \geq 3$, то по предложению имеем $k = 3b_1 - 2$, $v - k - 1 = 2b_1 + 2$ и $(3b_1 - 2)b_1 \leq (2b_1 + 2)b_1$. Отсюда $b_1 \leq 4$.

Пусть $y_1 = 1$. Тогда $y_3 = 1$ и $\Gamma_2(u) = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$. Если $k = 3b_1 - 1$, то число ребер между $[u] \cap [w]$ и $[w] - [u]$ равно $b_1(b_1 - 1)$ но не больше $b_1 + (2b_1 - 2)$. Поэтому $b_1 \leq 3$. Если же $k = 3b_1 - 2$, то число ребер между $[u] \cap [w]$ и $[w] - [u]$ равно $(b_1 - 1)^2$ но не больше $(b_1 - 1) + (2b_1 - 2)$. Поэтому $b_1 \leq 4$.

Пусть $y_1 = 2$. Тогда либо $y_4 = 1$ и $\Gamma_2(u) = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_4$, либо $y_3 = 2$ и $\Gamma_2(u) = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$. Если $k = 3b_1 - 1$, то число ребер между $[u] \cap [w]$ и $[w] - [u]$ равно $b_1(b_1 - 1)$, но не больше $2b_1 + (2b_1 - 3)$. Поэтому $b_1 \leq 3$. Если же $k = 3b_1 - 2$, то число ребер между $[u] \cap [w]$ и $[w] - [u]$ равно $(b_1 - 1)^2$, но не больше $2(b_1 - 1) + (2b_1 - 3)$. Поэтому $b_1 \leq 4$. Лемма доказана.

Теорема следует из лемм 3.1, 3.2. Докажем следствие. Пусть Γ — реберно регулярный граф, имеющий те же параметры, что один из графов: полный многодольный граф $K_{r \times s}$, 3×3-решетка, треугольный граф $T(m)$, $m \leq 7$, граф Клебша или граф Шлефли. В случае полного многодольного графа имеем $s = b_1 + 1$, $v - k - 1 = b_1$ и для любой вершины u число ребер между $[u]$ и $\Gamma - u^\perp$ равно kb_1. Отсюда любая вершина w из $\Gamma - u^\perp$ смежна с k вершинами из $[u]$ и $\Gamma = K_{r \times s}$. В любом из оставшихся случаев имеем равенство $(v-k-1)(k-2b_1+2) = kb_1$ и по теореме Γ является 3×3-решеткой, треугольным графом $T(m)$, $m \leq 7$, графом Клебша или графом Шлефли. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verl., 1989.
2. *Махнев А. А., Веденев А. А., Кузнецов А. Н., Носов В. В.* О хороших парах в реберно регулярных графах // Дискретная математика. 2003. Т. 15, № 1. С. 77–97.
3. *Махнев А. А.* О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы // Дискретный анализ и исследование операций. 1996. Т. 3, № 3. С. 71–83.
4. *Махнев А. А.* О сильной регулярности некоторых реберно регулярных графов // Изв. РАН. Сер. мат. 2004. Т. 68, № 6. С. 159–172.
5. *Белоусов И. Н., Махнев А. А.* О почти хороших парах вершин в реберно регулярных графах О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы // Изв. Уральского гос. ун-та. 2005. Т. 36. С. 35–48.
6. *Махнев А. А., Минакова И. М.* Об одном классе реберно регулярных графов // Изв. Гомельск. гос. ун-та, Вопросы алгебры. 2000. Т. 3. С. 145–154.

Статья поступила 22 ноября 2005 г.

Махнев Александр Алексеевич, Падучих Дмитрий Викторович
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Ковалевской, 16, Екатеринбург 6200219
makhnev@imm.uran.ru paduch@imm.uran.ru