Сибирский математический журнал
Июль—август, 2007. Том 48, № 4

УДК 517.51

$\Lambda(\Psi)$–ФЛУКТУАЦИЯ И РЯДЫ ФУРЬЕ — УОЛША ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

С. Ф. Лукомский

Аннотация: Рассмотрены вопросы сходимости рядов Фурье — Уолша в пространствах Лоренца. Указано условие на функцию f, при котором ее ряд Фурье — Уолша сходится в пространствах Лоренца, «очень близких» к L_∞, и доказана точность полученного результата.

Ключевые слова: ряды Фурье — Уолша, сходимость, пространства Лоренца.

1. Введение. Статья является продолжением статьи автора [1], в которой рассматривались вопросы сходимости рядов Фурье — Уолша в пространствах Лоренца $\Lambda(\psi)$ с условием

$$\int\limits_0^1 \psi(t)\log\frac{2}{t}\,dt = +\infty. \tag{1}$$

В [1] доказано, что если интеграл (1) расходится, то для любой положительной возрастающей на $[0,+\infty)$ функции $\varphi(x)$, для которой $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=0$, существует непрерывная на $[0,1]$ дифференцируемая на $(0,1]$ функция $f(t)$, производная f' которой принадлежит классу $\varphi(L)$, т. е.

$$\int\limits_0^1 \varphi(|f'(t)|)\,dt < +\infty,$$

но ряд Фурье — Уолша которой расходится по норме пространства $\Lambda(\psi)$.

В этой связи в [1] был поставлен вопрос о нахождении условия на функцию f, при котором ее ряд Фурье — Уолша сходится в пространстве $\Lambda(\psi)$ с условием (1). В этой статье мы приведем такое условие и покажем его точность.

2. Основные результаты и их доказательство. Будем использовать обозначения и терминологию работы [1]. Через $\psi(t)$ $(t\in(0,1])$ обозначаем функцию Лоренца, т. е. [2, с. 120] положительную убывающую на $(0,1]$ функцию, у которой

$$\lim_{t\to0+0}\psi(t)=+\infty, \quad \int\limits_0^1 \psi(t)\,dt < +\infty.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00390).

Символом $\Lambda(\psi)$ обозначим пространство всех измеримых на $(0,1]$ функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_{\Lambda(\psi)} = \int\limits_0^1 f^*(t)\psi(t)\,dt \tag{2}$$

(f^* в (2) есть убывающая перестановка функции f). Пространство $\Lambda(\psi)$ является [2, с. 121] банаховым симметрическим пространством.

Функции Уолша — Пэли $(w_n(t))_{n=0}^{\infty}$ будем считать определенными на [0,1), как в [3, с. 10]. Через $\Delta_j^{(n)}$ обозначаем полуинтервал $\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)$ $(j = 0, 1, \dots, 2^n - 1)$, а через $\Delta_x^{(n)}$ — тот из полуинтервалов $\Delta_j^{(n)}$, который содержит точку x. Ядро Дирихле для системы Уолша обозначаем через $D_m(t)$, т. е.

$$D_m(t) = \sum_{k=0}^{m-1} w_k(t),$$

и через $S_m(f,x)$ — частичные суммы ряда Фурье — Уолша функции $f \in L(0,1)$. Для частичной суммы $S_m(f,x)$ справедливо представление

$$S_m(f,x) = \int\limits_0^1 f(t)D_m(x \oplus t)\,dt = \int\limits_0^1 f(x \oplus t)D_m(t)\,dt,$$

где символ $\oplus$ обозначает покоординатное двоичное сложение, перенесенное с двоичной группы G на полуинтервал [0,1) [3, с. 17].

Определение 1. Пусть f — ограниченная на $[0,1)$ функция, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1)$. Положим по определению

$$\omega_n(f,x) = \sup_{t_1,t_2 \in \Delta_x^{(n)}} |f(t_1) - f(t_2)|.$$

Очевидно, что $\omega_n(f,x)$ при каждом n есть ступенчатая функция, постоянная на полуинтервалах $\Delta_j^{(n)}$ $(j = 0, 1, \dots, 2^n - 1)$.

Теорема 1. *Пусть f ограничена на $[0,1)$, ψ удовлетворяет условию* (1). *Если* $\lim\limits_{k\to\infty} k\|\omega_k(f)\|_{\Lambda(\psi)} = 0$, *то* $\lim\limits_{m\to\infty} \|S_m(f) - f\|_{\Lambda(\psi)} = 0$.

Эта теорема является точной по крайней мере для функций

$$\psi(t) = \frac{1}{t\log^{1+\delta}(2/t)} \quad (0 < \delta < 1).$$

Теорема 2. *Пусть $\psi(t) = \frac{1}{t\log^{1+\delta}(2/t)}$ $(0 < \delta < 1)$ — функция Лоренца. Тогда для любой положительной убывающей на $(0,1]$ функции $\varepsilon(x)$, для которой $\lim\limits_{x\to 0+0} \varepsilon(x) = +\infty$ и функция $\tilde{\psi}(x) = \psi(x)\cdot\varepsilon(x)$ есть функция Лоренца, существует функция f, для которой*

$$\lim_{k\to+\infty} k\|\omega_k(f)\|_{\Lambda(\psi)} = 0,$$

но частичные суммы $S_n(f)$ не ограничены по норме пространства $\Lambda(\tilde{\psi})$.

Заметим, что функции $\omega_k(f)$ использовали Оневир и Ватерман [4] при определении p-флуктуации равенством

$$V_{p,k}(f) = \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} \omega_k^p\left(f, \frac{j}{2^k}\right)\right)^{1/p} = \|\omega_k(f,\cdot)\|_{l_p}.$$

Поэтому $\|\omega_k(f)\|_{\Lambda(\psi)}$ можно трактовать как $\Lambda(\psi)$-флуктуацию функции f. Кроме того, следует отметить, что условие

$$\lim_{k\to+\infty} k\|\omega_k(f)\|_{C(0,1)} = 0$$

является достаточным условием равномерной сходимости ряда Фурье — Уолша функции f [3, с. 52]. Впрочем, в [3] условие сформулировано не в терминах функции $\omega_k(f)$, а в терминах двоичного модуля непрерывности $\overset{*}{\omega}(1/2^k, f)$.

Перейдем к доказательствам указанных теорем.

Доказательство теоремы 1. В [3, с. 50] для разности $S_m(f,x) - f(x)$ $(m = 2^k + n)$ получено выражение

$$S_m(f,x) - f(x) = \int_0^1 (f(x\oplus t) - f(x))D_{2^k}(t)\,dt \\ + \sum_{j=0}^{2^k-1} \int\limits_{\Delta_{2j}^{(k+1)}} \left(f(x\oplus t) - f\left(x \oplus t \oplus \frac{1}{2^{k+1}}\right)\right) D_n(t)\,dt. \quad (3)$$

Пусть $x \in \Delta_i^{(k)}$. Тогда $x \oplus t \in \Delta_i^{(k)}$ при $t \in [0, 1/2^k)$. Поэтому

$$\left|\int_0^1 (f(x\oplus t) - f(x))D_{2^k}(t)\,dt\right| = 2^k\left|\int\limits_{\Delta_0^{(k)}} (f(x\oplus t) - f(x))\,dt\right| \le \omega_k(f,x). \quad (4)$$

Если $t \in \Delta_j^{(k)}$, то $x\oplus t \in \Delta_{i\oplus j}^{(k)}$ и $x \oplus t \oplus \frac{1}{2^{k+1}} \in \Delta_{i\oplus j}^{(k)}$, где $i \oplus j$ означает покоординатное сложение по модулю два двоичных разложений чисел i и j [3, с. 16], т. е. если

$$i = \sum_{\nu=0}^{\infty} i_\nu 2^\nu, \quad j = \sum_{\nu=0}^{\infty} j_\nu 2^\nu,$$

то $i\oplus j = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (i_\nu \oplus j_\nu)2^\nu$. Таким образом, $x\oplus t$ и $x\oplus t\oplus \frac{1}{2^{k+1}}$ принадлежат одному и тому же двоичному интервалу $\Delta_{i\oplus j}^{(k)}$. Поэтому

$$\left|\sum_{j=0}^{2^k-1} \int\limits_{\Delta_{2j}^{(k+1)}} \left(f(x\oplus t) - f\left(x\oplus t\oplus \frac{1}{2^{k+1}}\right)\right) D_n(t)\,dt\right| \\ \le \sum_{j=0}^{2^k-1} \omega_k\left(f, \frac{i\oplus j}{2^k}\right) \int\limits_{\Delta_{2j}^{(k+1)}} |D_n(t)|\,dt. \quad (5)$$

Обозначим через $\Omega_k(f)$ функцию, принимающую значения

$$\Omega_k(f,x) = \sum_{j=0}^{2^k-1} \omega_k\left(f, \frac{i\oplus j}{2^k}\right) \int\limits_{\Delta_{2j}^{(k+1)}} |D_n(t)|\,dt$$

при $x \in \Delta_i^{(k)}$, и пусть $\Omega_k^*(f)$ — ее убывающая перестановка. Пусть также $\omega_k^*(f)$ — убывающая перестановка функции $\omega_k(f)$.

Напомним, что перестановки обладают следующими свойствами:

1) если $|x(t)| \le |y(t)|$, то $x^*(t) \le y^*(t)$ [5, с. 88];

2) $\int\limits_0^1 x^*(t)(y(t)+z(t))^*\,dt \le \int\limits_0^1 x^*(t)y^*(t)\,dt + \int\limits_0^1 x^*(t)z^*(t)\,dt$ [5, с. 97];

3) $\int\limits_0^1 |x(t)|y^*(t)\,dt \le \int\limits_0^1 x^*(t)y^*(t)$ [5, с. 94].

Используя два первых из этих свойств, из (3)–(5) получаем

$$\int\limits_0^1 |S_m(f,x)-f(x)|^*\psi(x)\,dx \le \int\limits_0^1 \omega_k^*(f,x)\psi(x)\,dx + \int\limits_0^1 \Omega_k^*(f,x)\psi(x)\,dx = I_1+I_2. \quad (6)$$

Из определения $\Omega_k(f)$ следует, что если $x \in \Delta_\nu^{(k)}$, то

$$\Omega_k^*(f,x) = \sum_{j=0}^{2^k-1} \omega_k\left(f, \frac{i_\nu \oplus j}{2^k}\right) \int\limits_{\Delta_{2j}^{(k+1)}} |D_n(t)|\,dt,$$

причем отображение $\nu \mapsto i_\nu$ есть перестановка множества $\{0,1,\dots,2^k-1\}$. Поэтому

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{\nu=0}^{2^k-1} \int\limits_{\Delta_\nu^{(k)}} \Omega_k^*(f,x)\psi(x)\,dx \\ &= \sum_{\nu=0}^{2^k-1} \int\limits_{\Delta_\nu^{(k)}} \sum_{j=0}^{2^k-1} \omega_k\left(f, \frac{i_\nu \oplus j}{2^k}\right) \int\limits_{\Delta_{2j}^{(k+1)}} |D_n(t)|\,dt\psi(x)\,dx \\ &= \sum_{j=0}^{2^k-1} \int\limits_{\Delta_{2j}^{(k+1)}} |D_n(t)|\,dt \sum_{\nu=0}^{2^k-1} \int\limits_{\Delta_\nu^{(k)}} \omega_k\left(f, \frac{i_\nu \oplus j}{2^k}\right)\psi(x)\,dx. \quad (7) \end{aligned}$$

По этой же причине

$$\sum_{\nu=0}^{2^k-1} \int\limits_{\Delta_\nu^{(k)}} \omega_k\left(f, \frac{i_\nu \oplus j}{2^k}\right)\psi(x)\,dx = \int\limits_0^1 \widetilde{\omega}_k(f,x)\psi(x)\,dx, \quad (8)$$

где $\widetilde{\omega}_k(f,x)$ — некоторая равноизмеримая перестановка $\omega_k(f,x)$, не обязательно в убывающем порядке. Используя третье из отмеченных свойств перестановок, имеем неравенство

$$\int\limits_0^1 \widetilde{\omega}_k(f,x)\psi(x)\,dx \le \int\limits_0^1 \omega_k^*(f,x)\psi(x)\,dx. \quad (9)$$

Так как $|D_n(t)| = \mathrm{const}$ на любом двоичном полуинтервале ранга k, то

$$\int\limits_{\Delta_{2j}^{(k+1)}} |D_n(t)|\,dt = \frac{1}{2} \int\limits_{\Delta_j^{(k)}} |D_n(t)|\,dt,$$

и, соединяя (6)–(9), окончательно получаем

$$\int\limits_0^1 |S_m(f,x) - f(x)|^* \psi(x)\,dx \le \left(1 + \frac{1}{2}L_n\right) \int\limits_0^1 \omega_k^*(f,x)\psi(x)\,dx$$
$$= \left(1 + \frac{L_n}{2}\right) \|\omega_k(f)\|_{\Lambda(\psi)},$$

где L_n — константы Лебега по системе Уолша. Так как $L_n \le k$ [3, с. 46], то окончательно

$$\|S_m(f) - f\|_{\Lambda(\psi)} \le \left(1 + \frac{k}{2}\right) \|\omega_k(f)\|_{\Lambda(\psi)},$$

и теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\varepsilon(x)$ — положительная убывающая на $(0,1]$ функция, для которой $\lim\limits_{x\to 0+0} \varepsilon(x) = +\infty$. Выберем произвольную пока последовательность λ_k такую, что $|\lambda_k| \downarrow 0$ и $\lambda_k = (-1)^{k+1}|\lambda_k|$. Определим функцию $F(x)$ на $(0,1)$ равенством

$$F(x) = \begin{cases} \lambda_k, & x \in [1/2^{k+1}, 1/2^k) \quad (k = 0,1,\dots), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Пусть, далее, $(k_n)_{n=0}^\infty$ — возрастающая последовательность четных натуральных чисел такая, что

$$k_0 = 0,\ k_1 = 2,\ Ck_n \ge k_{n+1} \ge 4k_n \quad (n = 1,2,\dots, C > 4).$$

Функцию $f(x)$ определим равенством

$$f(x) = r_{k_n}(x) r_{k_n+2}(x) \dots r_{k_{n+1}}(x) \cdot F(x) \quad \text{при } x \in [1/2^{k_{n+1}}, 1/2^{k_n}).$$

Рассмотрим частичные суммы $S_m(f)$ при $m = 2^{k_n} + 2^{k_n+2} + \dots + 2^{k_{n+1}}$. В [1] доказано, что если

$$|\lambda_j| = |\lambda_{k_{n+1}-1}| = \mu_n \quad \text{при } k_n \le j \le k_{n+1} - 1$$

и $\tilde\psi$ — функция Лоренца, то

$$\|S_m(f)\|_{\Lambda(\tilde\psi)} \ge \frac{\mu_n}{4} \sum_{j=2k_n+2}^{k_{n+1}-1} \tilde\psi\left(\frac{1}{2^{j+1}}\right) \frac{j}{2^{j+1}}. \tag{10}$$

Числа μ_n подберем так, что

$$\lim_{k\to\infty} k\|\omega_k(f)\|_{\Lambda(\psi)} = 0.$$

По определению функции f при $k_n < k < k_{n+1}$ будет

$$\omega_k(f,x) = \begin{cases} 2\mu_n, & x \in (0, 1/2^{k_n}), \\ 0, & x \ge 1/2^{k_n}, \end{cases}$$

и при $k = k_n$ —

$$\omega_k(f,x) = \begin{cases} 2\mu_n, & x \in (0, 1/2^{k_n}), \\ 2\mu_{n-1}, & x \in [1/2^{k_n}, 1/2^{k_{n-1}}), \\ 0, & x \ge 1/2^{k_{n-1}}. \end{cases}$$

Непосредственные вычисления показывают, что при $k_n < k < k_{n+1}$

$$\|\omega_k(f)\|_{\Lambda(\psi)} = \frac{2\ln 2}{\delta}\frac{\mu_n}{(k_n+1)^\delta}$$

и при $k = k_n$

$$\|\omega_k(f)\|_{\Lambda(\psi)} \le \frac{2\ln 2}{\delta}\frac{\mu_n+\mu_{n-1}}{(k_{n-1}+1)^\delta}.$$

Положим теперь $\mu_n = \frac{k_n^\delta}{k_{n+1}}\alpha_n$ $(\alpha_n \to 0)$. Учитывая неравенства $k_n \le k < k_{n+1}$ и $Ck_n \ge k_{n+1} \ge 4k_n$, убеждаемся, что $k\|\omega_k(f)\|_{\Lambda(\psi)} \to 0$.

Покажем, что нормы $\|S_m(f)\|_{\Lambda(\tilde\psi)}$ не ограничены при $m = 2^{k_n} + 2^{k_n+2} + \dots + 2^{k_{n+1}}$. В самом деле, из равенства $\tilde\psi(x) = \psi(x)\cdot\varepsilon(x)$ находим

$$\mu_n \sum_{j=2k_n+2}^{k_{n+1}-1} \tilde\psi\left(\frac{1}{2^{j+1}}\right)\frac{j}{2^{j+1}} \ge \mu_n\varepsilon\left(\frac{1}{2^{k_n 2}}\right)\sum_{j=2k_n+2}^{k_{n+1}-1}\frac{j}{(j+2)^{1+\delta}} \ge C(\delta)\varepsilon\left(\frac{1}{4^{k_n}}\right)\alpha_n$$

и мы всегда можем выбрать α_n стремящимся к нулю настолько медленно, что $\varepsilon(1/4^{k_n})\alpha_n \uparrow +\infty$. Отсюда с учетом неравенства (10) следует утверждение теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лукомский С. Ф.* О рядах Фурье — Уолша функций, абсолютно непрерывных в обобщенном узком смысле // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 341–352.
2. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. II. Function spaces. Berlin: Springer-Verl., 1973.
3. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды преобразования Уолша. Теория и приложения. М.: Наука, 1987.
4. *Onneweer C., Waterman D.* Uniform convergence of Fourier series on groups. I // Michigan J. Math. 1971. V. 18, N 3. P. 265–273.
5. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

Статья поступила 18 ноября 2005 г.

Лукомский Сергей Федорович
Саратовский гос. университет, механико-математический факультет,
Астраханская, 83, Саратов 410012
LukomskiiSF@info.sgu.ru