Сибирский математический журнал
Июль—август, 2007. Том 48, № 4

УДК 514.77

ГРУППЫ ИЗОМЕТРИЙ РИМАНОВЫХ ОРБИФОЛДОВ

А. В. Багаев, Н. И. Жукова

Аннотация: Доказано, что группа $\mathfrak{I}(\mathcal{N})$ всех изометрий произвольного риманова орбифолда $\mathcal{N}$, наделенная компактно-открытой топологией, — группа Ли, гладко и собственно действующая на орбифолде $\mathcal{N}$, причем в алгебраической группе $\mathfrak{I}(\mathcal{N})$ существует единственная гладкая структура, относительно которой она является группой Ли. Показано, в частности, что группа изометрий компактного риманова орбифолда с отрицательно определенным тензором Риччи конечна. Это обобщает известную теорему Бохнера для римановых многообразий.

Ключевые слова: орбифолд, группа изометрий, группа Ли преобразований, тензор Риччи.

Введение

Орбифолды введены Сатаки [1] как обобщение понятия многообразия. Они появляются естественным образом в различных областях математики и теоретической физики [2]. В теории слоений орбифолды возникают как пространства слоев слоений, локально стабильных в смысле Риба [3]. Орбифолды используются в качестве пространств распространения струн [4]. В [5] развивается теория деформационного квантования на симплектических орбипространствах, включающих в себя симплектические орбифолды.

Первой работой по римановой геометрии орбифолдов является статья Сатаки [6], где доказана теорема Гаусса — Бонне для орбифолдов. Известные результаты Тёрстона о классификации трехмерных многообразий опираются на классификацию двумерных компактных римановых орбифолдов постоянной кривизны [7]. Исследованию строения римановых орбифолдов с ограниченной снизу кривизной Риччи посвящены работы Борзелино [8, 9], а также Борзелино и Жу [10].

В данной работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Группа $\mathfrak{I}(\mathcal{N})$ изометрий n-мерного риманова орбифолда $\mathcal{N}$, наделенная компактно-открытой топологией, является группой Ли размерности $\leq n(n+1)/2$, причем действие группы Ли $\mathfrak{I}(\mathcal{N})$ на орбифолде $\mathcal{N}$ является гладким и собственным, а равенство $\dim \mathfrak{I}(\mathcal{N}) = n(n+1)/2$ достигается тогда и только тогда, когда риманов орбифолд $\mathcal{N}$ изометричен одному из следующих n-мерных римановых многообразий постоянной кривизны:* a) *евклидову пространству $\mathbb{E}^n$;* b) *сфере S^n;* c) *проективному пространству $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$;* d) *односвязному гиперболическому пространству $\mathbb{H}^n$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00331-а).

Теорема 2. *В алгебраической группе всех изометрий риманова орбифолда существует единственная гладкая структура, относительно которой она является группой Ли.*

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{N}$ — компактный риманов орбифолд с неположительно определенным тензором Риччи, причем существует точка, в которой тензор Риччи отрицательно определен. Тогда группа всех изометрий риманова орбифолда $\mathscr{N}$ конечна.*

В случае, когда $\mathscr{N}$ — многообразие, теорема 1 включает в себя классическую теорему Майерса — Стинрода [11]. Теорема 3 является обобщением известной теоремы Бохнера [12] для римановых многообразий.

Из теоремы 2 вытекает, что топология в группе Ли $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ всех изометрий риманова орбифолда $\mathscr{N}$, введенная нами в [13], совпадает с компактно-открытой топологией.

Указана специфика групп изометрий хороших римановых орбифолдов (разд. 6). Приведены примеры, иллюстрирующие содержание работы.

1. Категория орбифолдов

Везде в этой работе под гладкостью понимается гладкость класса C^∞. Если $f : M_1 \to M_2$ — гладкое отображение многообразий, то через f_* (соответственно f^*) мы обозначаем дифференциал (соответственно кодифференциал) отображения f.

Напомним определение гладкого орбифолда [6, 14]. Пусть $\mathscr{N}$ — связное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, U — открытое подмножество в $\mathscr{N}$, n — фиксированное натуральное число. *Картой* на $\mathscr{N}$ называется тройка (Ω, Γ, p), где Ω — связное открытое подмножество в n-мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$, Γ — конечная группа диффеоморфизмов Ω, а $p : \Omega \to \mathscr{N}$ — композиция фактор-отображения $r : \Omega \to \Omega/\Gamma$ и некоторого гомеоморфизма $q : \Omega/\Gamma \to U$ фактор-пространства Ω/Γ на U. Подмножество U называется *координатной окрестностью карты* (Ω, Γ, p). Отметим, что в отличие от Сатаки [6] мы не требуем, чтобы размерность множества неподвижных точек $\operatorname{Fix}\Gamma$ группы Γ была меньше $n-1$.

Инъекцией карты (Ω, Γ, p) *в карту* (Ω', Γ', p'), *соответствующей включению координатных окрестностей* $U \subset U'$, называется вложение $\phi : \Omega \to \Omega'$, удовлетворяющее равенству $p' \circ \phi = p$. Как известно [15], любая инъекция ϕ индуцирует (единственный) мономорфизм групп $\psi : \Gamma \to \Gamma'$, для которого $\phi \circ \gamma = \psi(\gamma) \circ \phi \ \forall \gamma \in \Gamma$, при этом если ϕ — диффеоморфизм, то ψ — изоморфизм групп Γ и Γ'.

Две карты $(\Omega_1, \Gamma_1, p_1)$ и $(\Omega_2, \Gamma_2, p_2)$ с координатными окрестностями U_1 и U_2 называются *согласованными,* если при $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ для любой точки $x \in U_1 \cap U_2$ существуют: а) карта (Ω, Γ, p) с такой координатной окрестностью U, что $x \in U \subset U_1 \cap U_2$, b) инъекции карт $\phi_1 : \Omega \to \Omega_1$ и $\phi_2 : \Omega \to \Omega_2$, соответствующие включениям $U \subset U_1$ и $U \subset U_2$. Множество карт $\mathscr{A} = \{(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \mid i \in J\}$ называется *атласом,* если семейство $\{U_i := p_i(\Omega_i) \mid i \in J\}$ — открытое покрытие топологического пространства $\mathscr{N}$ и любые две карты из $\mathscr{A}$ согласованы. Атлас $\mathscr{A}$ называется *максимальным,* если $\mathscr{A}$ совпадает с любым атласом, его содержащим.

Максимальный атлас называется *гладкой структурой n-мерного орбифолда* на топологическом пространстве $\mathscr{N}$. Пара $(\mathscr{N}, \mathscr{A})$, где $\mathscr{A}$ — максимальный атлас на $\mathscr{N}$, называется *гладким n-мерным орбифолдом.* Заметим, что любой атлас содержится в единственном максимальном атласе и, следовательно, определяет структуру гладкого орбифолда.

Всюду далее орбифолды $\mathscr{N}$ предполагаются гладкими, а через $\mathscr{A} = \{(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \mid i \in J\}$ обозначается максимальный атлас $\mathscr{N}$. Инъекцию ϕ_{ij} карты $(\Omega_i, \Gamma_i, p_i)$ в карту $(\Omega_j, \Gamma_j, p_j)$, соответствующую включению координатных окрестностей $U_i \subset U_j$, будем называть *инъекцией карт* и обозначать через $\phi_{ij} : \Omega_i \to \Omega_j$, $i, j \in J$.

Для карт (Ω, Γ, p) и (Ω', Γ', p') из $\mathscr{A}$ с координатными окрестностями, содержащими $x \in \mathscr{N}$, подгруппы изотропии Γ_y и Γ'_z точек $y \in p^{-1}(x)$ и $z \in p'^{-1}(x)$ соответственно изоморфны. Таким образом, каждой точке x орбифолда $\mathscr{N}$ соответствует единственная (с точностью до изоморфизма групп) абстрактная группа Γ_y, называемая *группой орбифолдности* точки x. Точка x называется *регулярной,* если ее группа орбифолдности тривиальна. Точка, не являющаяся регулярной, называется *орбифолдной.* Как известно (см., например, [16]), множество Δ_n всех регулярных точек n-мерного орбифолда $\mathscr{N}$ с индуцированной топологией является связным открытым n-мерным многообразием, всюду плотным в $\mathscr{N}$.

Для любой точки $x \in \mathscr{N}$ существует [6] такая карта $(\Omega, \Gamma, p) \in \mathscr{A}$, что Ω является n-мерным арифметическим пространством $\mathbb{R}^n$, $p(0) = x$, $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, а Γ — конечной группой ортогональных преобразований $\mathbb{R}^n$. Такая карта $(\mathbb{R}^n, \Gamma, p)$ называется *линеаризованной картой в точке x.*

Непрерывное отображение $f : \mathscr{N} \to \mathscr{N}'$ орбифолда $(\mathscr{N}, \mathscr{A})$ в орбифолд $(\mathscr{N}', \mathscr{A}')$ называется *гладким* [15], если для любой точки $x \in \mathscr{N}$ существуют: a) карта $(\Omega, \Gamma, p) \in \mathscr{A}$ с координатной окрестностью $U \ni x$; b) карта $(\Omega', \Gamma', p') \in \mathscr{A}'$ с такой координатной окрестностью U', что $f(U) \subset U'$; c) гладкое отображение $\tilde{f} : \Omega \to \Omega'$ многообразия Ω в многообразие Ω' такое, что $p' \circ \tilde{f} = f|_U \circ p$. При этом гладкое отображение $\tilde{f}$ называется *локальным лифтом* отображения f.

Категория, объектами которой являются гладкие орбифолды, морфизмами — гладкие отображения орбифолдов, а композицией морфизмов — композиция гладких отображений орбифолдов, называется *категорией орбифолдов* и обозначается через $\mathfrak{Orb}$. Категория гладких многообразий, морфизмами в которой служат гладкие отображения многообразий, является полной подкатегорией категории $\mathfrak{Orb}$.

Действие $\Phi : G \times \mathscr{N} \to \mathscr{N}$ группы Ли G на орбифолде $\mathscr{N}$ будем называть *гладким,* если Φ — гладкое отображение произведения орбифолдов $G \times \mathscr{N}$ в $\mathscr{N}$.

Говорят [6, 14], что орбифолд $(\mathscr{N}, \mathscr{A})$ *ориентирован*, если для каждого $i \in J$ на многообразии Ω_i выбрана ориентация, причем любое преобразование $\gamma \in \Gamma_i$ и любая инъекция $\phi_{ij} : \Omega_i \to \Omega_j$, $i, j \in J$, являются отображениями, сохраняющими ориентацию.

Следующий пример показывает, что в отличие от многообразий и двумерных орбифолдов при $n \geq 3$ топологические пространства n-мерных орбифолдов, вообще говоря, не являются локально евклидовыми.

Пример 1. Пусть действие образующей $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ группы $\Gamma = \langle f \mid f^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ определено равенством $f(x) := -x$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Фактор-пространство $\mathscr{N} := \mathbb{R}^n / \Gamma$ является гладким n-мерным орбифолдом с единственной орбифолдной точкой $a := p(0)$, где 0 — начало координат, а $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n / \Gamma$ — фактор-отображение. Заметим, что топологическое пространство $\mathscr{N}$ стягиваемо. Покажем, что точка a не имеет окрестности, гомеоморфной $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_+$, доказательство приведем для $\mathbb{R}^n$, для $\mathbb{R}^n_+$ оно аналогично. Предположим противное: пусть существуют окрестность U точки a и гомеоморфизм $\chi : \mathbb{R}^n \to U$ на U. Не нарушая общности, можно считать, что $\chi(0) = a$. Тогда сужение $\chi|_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} : \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \to U\setminus\{a\}$ также является гомеоморфизмом и, следовательно, топологические пространства $U\setminus\{a\}$ и $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ имеют изоморфные фундаментальные группы. Поскольку разность $U\setminus\{a\}$ гомеоморфна прямому произведению прямой $\mathbb{R}^1$ и $(n-1)$-мерного проективного пространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$, то $\pi_1(U\setminus\{a\}) \cong \mathbb{Z}_2$, в то время как $\pi_1(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}) \cong 0$ при $n \geq 3$. Противоречие показывает, что топологическое пространство орбифолда $\mathscr{N}$ не является локально евклидовым.

2. Расслоенные пространства над орбифолдами

Напомним, что *антигомоморфизмом* группы Γ в группу G называется такое отображение $b : \Gamma \to G$, что $b(\gamma_1\gamma_2) = b(\gamma_2)b(\gamma_1)$ $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Если, кроме того, b инъективно, то b называется *антимономорфизмом*.

Пусть F — гладкое многообразие, H — группа Ли. Говорят [14], что над орбифолдом $(\mathscr{N}, \mathscr{A})$ определено *расслоенное пространство со стандартным слоем F и структурной группой H*, если

1) для каждой карты $(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \in \mathscr{A}$ заданы

a) расслоенное пространство P_i с проекцией $\pi_i : P_i \to \Omega_i$, стандартным слоем F и структурной группой H;

b) антимономорфизм $b_i : \Gamma_i \to \operatorname{Aut} P_i$ группы Γ_i в группу автоморфизмов $\operatorname{Aut} P_i$ указанного расслоенного пространства, удовлетворяющий равенству $\gamma^{-1} \circ \pi_i = \pi_i \circ b_i(\gamma)$ $\forall \gamma \in \Gamma_i$;

2) для любой инъекции карт $\phi_{ij} : \Omega_i \to \Omega_j$, $i, j \in J$, определен изоморфизм $\bar{\phi}_{ij} : P_j|_{\phi_{ij}(\Omega_i)} \to P_i$ расслоенных пространств (здесь $P_j|_{\phi_{ij}(\Omega_i)}$ — сужение расслоения P_j на $\phi_{ij}(\Omega_i)$), удовлетворяющий условиям:

a) $b_i(\gamma) \circ \bar{\phi}_{ij} = \bar{\phi}_{ij} \circ b_j(\psi_{ij}(\gamma))$ $\forall \gamma \in \Gamma_i$, где $\psi_{ij} : \Gamma_i \to \Gamma_j$ — мономорфизм групп, индуцированный инъекцией ϕ_{ij};

b) если $U_i \subset U_j \subset U_k$, а ϕ_{ij} и ϕ_{jk} — соответствующие инъекции карт, то $\overline{\phi_{jk} \circ \phi_{ij}} = \bar{\phi}_{ij} \circ \bar{\phi}_{jk}$.

Будем обозначать указанное расслоенное пространство над $\mathscr{N}$ через $\xi = \{P_i, b_i, \bar{\phi}_{ij}\}_{i,j\in J}$.

Расслоенное пространство над орбифолдом можно определить, исходя из произвольного атласа (см. [6]). Для любого орбифолда $\mathscr{N}$ существует атлас $\mathscr{B} = \{(\Omega_\beta, \Gamma_\beta, p_\beta) \mid \beta \in B\}$, координатные окрестности карт которого стягиваемы. Для такого атласа расслоенные пространства P_β тривиальны, т. е. $P_\beta = \Omega_\beta \times F$ и $\pi_\beta : P_\beta \to \Omega_\beta$ — каноническая проекция на первый сомножитель.

Если для каждого $i \in J$ расслоенное пространство P_i является главным H-расслоением, то $\xi = \{P_i, b_i, \bar{\phi}_{ij}\}_{i,j\in J}$ будем называть *главным расслоенным пространством над $\mathscr{N}$ со структурной группой H*.

Пусть $\xi = \{P_i, b_i, \bar{\phi}_{ij}\}_{i,j\in J}$ — расслоенное пространство со стандартным слоем F и структурной группой H над орбифолдом $\mathscr{N}$. Для каждой карты $(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \in \mathscr{A}$ антимономорфизм b_i задает гладкое левое действие $\Phi_i : \Gamma_i \times P_i \to P_i : (\gamma, z) \mapsto b_i(\gamma^{-1})(z)$ группы Γ_i на многообразии P_i. Поскольку группа Γ_i конечна, то фактор-пространство $\overline{P}_i := P_i/\Gamma_i$ является гладким орбифолдом размерности $\dim \mathscr{N} + \dim F$, причем имеет место равенство $\bar{\pi}_i \circ \bar{p}_i = p_i \circ \pi_i$, где $\bar{p}_i : P_i \to P_i/\Gamma_i$ — фактор-отображение, а $\bar{\pi}_i : \overline{P}_i \to U_i$ отображает орбиту точки $z \in P_i$ в точку $p_i(\pi_i(z)) \in U_i = p_i(\Omega_i)$. Обозначим через $\overline{P}$ дизъюнктное объединение $\bigsqcup_{i\in J}\overline{P}_i$. Введем в $\overline{P}$ отношение эквивалентности ρ. Будем говорить, что две точки $\bar{z}_i\in\overline{P}_i$ и $\bar{z}_j\in\overline{P}_j$ являются *ρ-эквивалентными*, если: a) $\bar{\pi}_i(\bar{z}_i)=\bar{\pi}_j(\bar{z}_j)=x\in U_i\cap U_j$; b) существуют такие две точки $z_i\in(\bar{p}_i)^{-1}(\bar{z}_i)$ и $z_j\in(\bar{p}_j)^{-1}(\bar{z}_j)$ и карта $(\Omega_k,\Gamma_k,p_k)\in\mathscr{A}$ с координатной окрестностью U_k, что $x\in U_k\subset U_i\cap U_j$ и $z_j=(\bar{\phi}_{kj})^{-1}\circ\bar{\phi}_{ki}(z_i)$. В [16] нами показано, что отношение ρ действительно является отношением эквивалентности, фактор-пространство $\mathscr{P}=\overline{P}/\rho$ естественным образом наделяется структурой гладкого орбифолда, а проекции $\pi_i:P_i\to\Omega_i$ определяют гладкое отображение орбифолдов $\pi:\mathscr{P}\to\mathscr{N}$.

Таким образом, если задано расслоенное пространство со стандартным слоем F и структурной группой H над орбифолдом $\mathscr{N}$, то естественным образом определены гладкий орбифолд $\mathscr{P}$ размерности $\dim\mathscr{N}+\dim F$ и гладкое отображение орбифолдов $\pi:\mathscr{P}\to\mathscr{N}$. Орбифолд $\mathscr{P}$ называется *тотальным пространством, $\pi:\mathscr{P}\to\mathscr{N}$ — проекцией.*

Предположим, что $\xi=\{P_i,b_i,\bar{\phi}_{ij}\}_{i,j\in J}$ — главное расслоенное пространство над $\mathscr{N}$ со структурной группой H. Покажем, что в этом случае определено гладкое правое действие группы Ли H на тотальном пространстве $\mathscr{P}$. Для каждого $i\in J$ на тотальном пространстве P_i главного H-расслоения $\pi_i:P_i\to\Omega_i$ определено гладкое правое действие $\Upsilon_i:P_i\times H\to P_i:(z,h)\mapsto z\cdot h$, $z\in P_i$, $h\in H$, группы Ли H. Так как $b_i(\gamma)$, $\gamma\in\Gamma_i$, — автоморфизм расслоенного пространства P_i, то $b_i(\gamma)(z\cdot h)=(b_i(\gamma)(z))\cdot h$, следовательно, отображение $\bar{\Upsilon}_i:\overline{P}_i\times H\to\overline{P}_i:(\bar{z},h)\mapsto\bar{p}_i(z\cdot h)$, где $\bar{z}\in\overline{P}_i$, $z\in\bar{p}_i^{-1}(\bar{z})$, $h\in H$, задает гладкое правое действие группы Ли H на $\overline{P}_i=P_i/\Gamma_i$. Обозначим через $q:\overline{P}\to\overline{P}/\rho=\mathscr{P}$ естественную проекцию. Композиция $q_i:=q\circ j:\overline{P}_i\to\mathscr{P}$ включения $j:\overline{P}_i\hookrightarrow\overline{P}$ и проекции q является гомеоморфизмом на образ. Пусть $z'\in\mathscr{P}$, $x=\pi(z')$, $(\Omega_i,\Gamma_i,p_i)\in\mathscr{A}$ — карта с координатной окрестностью $U_i\ni x$. Формула $\Upsilon(z',h):=q_i\circ\bar{p}_i(z\cdot h)$, где $z\in(q_i\circ\bar{p}_i)^{-1}(z')$, $h\in H$, определяет гладкое правое действие $\Upsilon:\mathscr{P}\times H\to\mathscr{P}$ группы Ли H на орбифолде $\mathscr{P}$. Пространством орбит $\mathscr{P}/H$ действия Υ является орбифолд $\mathscr{N}$. При этом имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
P_i\times H & \xrightarrow{(\bar{p}_i,\,\mathrm{id}_H)} & \overline{P}_i\times H & \xrightarrow{(q_i,\,\mathrm{id}_H)} & \mathscr{P}\times H\\
\Big\downarrow{\scriptstyle\Upsilon_i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\bar{\Upsilon}_i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\Upsilon}\\
P_i & \xrightarrow{\bar{p}_i} & \overline{P}_i & \xrightarrow{q_i} & \mathscr{P}\\
\Big\downarrow{\scriptstyle\pi_i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\bar{\pi}_i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\pi}\\
\Omega_i & \xrightarrow{p_i} & U_i & \hookrightarrow & \mathscr{N}.
\end{array}$$

Гладким сечением расслоенного пространства $\xi=\{P_i,b_i,\bar{\phi}_{ij}\}_{i,j\in J}$ со стандартным слоем F и структурной группой H над орбифолдом $(\mathscr{N},\mathscr{A})$ называется [14] семейство $\{s_i\}_{i\in J}$, где $s_i:\Omega_i\to P_i$ — гладкое сечение расслоенного пространства P_i, причем выполнены следующие условия: a) $b_i(\gamma)\circ s_i\circ\gamma=s_i$ $\forall\gamma\in\Gamma_i$, $i\in J$; b) $\bar{\phi}_{ij}\circ s_j\circ\phi_{ij}=s_i$ для любой инъекции карт $\phi_{ij}:\Omega_i\to\Omega_j$, $i,j\in J$. Заметим, что семейство $\{s_i\}_{i\in J}$ определяет гладкое отображение орбифолдов $s:\mathscr{N}\to\mathscr{P}$, удовлетворяющее равенству $\pi\circ s=\mathrm{id}_{\mathscr{N}}$.

Пусть $(\mathscr{N},\mathscr{A})$ — n-мерный орбифолд. Обозначим через $\pi_i:T\Omega_i\to\Omega_i$ касательное расслоение над многообразием Ω_i. Для $\gamma\in\Gamma_i$ определим отображение $b_i(\gamma):T\Omega_i\to T\Omega_i$ равенством $b_i(\gamma)(X_x):=(\gamma^{-1})_{*x}(X_x)$, где $X_x\in T_x\Omega_i$ —

касательный вектор в точке $x \in \Omega_i$. Для инъекции карт $\phi_{ij} : \Omega_i \to \Omega_j$, $i, j \in J$, зададим отображение $\bar{\phi}_{ij} : T\Omega_j|_{\phi_{ij}(\Omega_i)} \to T\Omega_i$ формулой $\bar{\phi}_{ij}(X_{\phi_{ij}(x)}) := (\phi_{ij})^{-1}_{*x}(X_{\phi_{ij}(x)})$, $X_{\phi_{ij}(x)} \in T_{\phi_{ij}(x)}\Omega_j$, $x \in \Omega_i$. Таким образом, определено расслоенное пространство со стандартным слоем — векторным пространством, изоморфным $\mathbb{R}^n$, и структурной группой $G = GL(n, \mathbb{R})$, которое называется *касательным расслоением к орбифолду* $\mathscr{N}$. Тотальное пространство $T\mathscr{N}$ этого расслоения представляет собой гладкий $2n$-мерный орбифолд.

Аналогично определяются кокасательное расслоение, тензорное расслоение типа (p, q) над орбифолдом [6, 14]. Гладкое сечение тензорного расслоения типа (p, q) называется *тензорным полем типа* (p, q) на орбифолде. В частности, *гладким векторным полем* на орбифолде $(\mathscr{N}, \mathscr{A})$ называется гладкое сечение касательного расслоения к $\mathscr{N}$, т. е. такое семейство $\{X_i\}_{i \in J}$ Γ_i-инвариантных векторных полей X_i на Ω_i, что для любой инъекции карт $\phi_{ij} : \Omega_i \to \Omega_j$, $i, j \in J$, выполнено равенство $(\phi_{ij})_*(X_i) = X_j$.

Будем говорить, что билинейная симметричная форма $t = \{t_i\}_{i \in J}$ на орбифолде $\mathscr{N}$ *отрицательно* (или *неположительно*) *определена в точке* $x \in \mathscr{N}$, если существует такая карта $(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \in \mathscr{A}$ с координатной окрестностью $U_i \ni x$, что форма t_i отрицательно (соответственно неположительно) определена в точке $x' \in p_i^{-1}(x)$. Условия a) и b) определения сечения влекут независимость приведенного определения от выбора карты $(\Omega_i, \Gamma_i, p_i)$ с координатной окрестностью $U_i \ni x$ и точки $x' \in p_i^{-1}(x)$. Будем также говорить, что билинейная симметричная форма t *отрицательно* (*соответственно неположительно*) *определена на* $\mathscr{N}$, если t обладает этим свойством в каждой точке $x \in \mathscr{N}$. Аналогично определяется равенство нулю произвольного тензора в точке и на орбифолде.

Пример 2. Пусть на евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ действует конечная группа Γ, порожденная изометриями α и β, где α — отражение относительно плоскости Oxy, а β — поворот вокруг оси Oz на угол $2\pi/m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Тогда $\Gamma = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2, \beta^m \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_m$. Пространство орбит $\mathscr{N} := \mathbb{E}^3/\Gamma$ является трехмерным орбифолдом (рис. 1). Обозначим через p фактор-отображение $\mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3/\Gamma$.

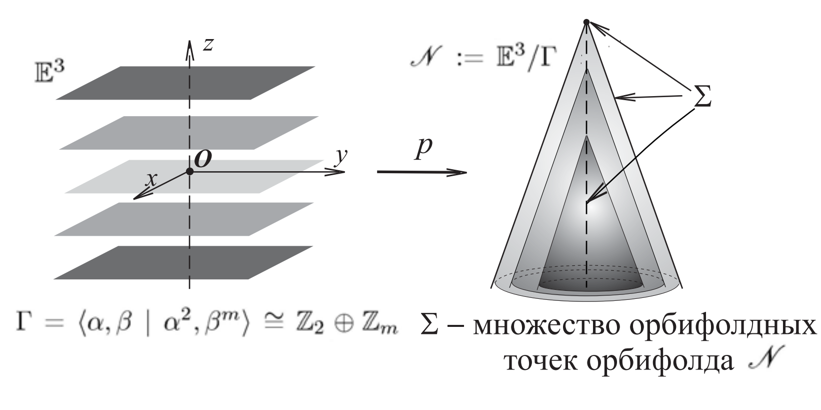


Рис. 1. Некомпактный трехмерный орбифолд.

Построим касательное расслоение над орбифолдом $\mathscr{N}$. Для этого используем атлас, состоящий из одной карты (Ω, Γ, p), где $\Omega = \mathbb{E}^3$, а группа Γ и отображение p определены выше.

Пусть $\bar{\pi} : P = T\mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ — касательное расслоение над $\mathbb{E}^3$. В силу стягиваемости базы $\mathbb{E}^3$ имеем $T\mathbb{E}^3 = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3$ и $\bar{\pi}$ отождествляется с проекцией $T\mathbb{E}^3 = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ на первый сомножитель.

Зададим антимономорфизм $b : \Gamma \to \mathrm{Aut}(T\mathbb{E}^3)$ формулой $b(\gamma) := (\gamma^{-1}, (\gamma^{-1})_*)$, где $(\gamma^{-1}, (\gamma^{-1})_*)(x, v) := (\gamma^{-1}(x), (\gamma^{-1})_*(v))$ $\forall \gamma \in \Gamma$, $\forall x \in \mathbb{E}^3$, $\forall v \in T_x\mathbb{E}^3 = \mathbb{E}^3$, а $(\gamma^{-1})_*$ — дифференциал диффеоморфизма γ^{-1} в точке x. При этом выполняется равенство $\gamma^{-1} \circ \bar{\pi} = \bar{\pi} \circ b(\gamma)$ $\forall \gamma \in \Gamma$. Отображение

$$\Phi : \Gamma \times \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 : (\gamma, (x, v)) \mapsto b(\gamma^{-1})(x, v) = (\gamma(x), \gamma_*(v))$$

определяет гладкое левое действие группы Γ на $T\mathbb{E}^3$. Пространство орбит $T\mathscr{N} := T\mathbb{E}^3/\Gamma = \{\Gamma \cdot (x, v) \mid (x, v) \in T\mathbb{E}^3 = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3\}$ этого действия является тотальным пространством касательного расслоения над орбифолдом $\mathscr{N}$ и представляет собой гладкий 6-мерный орбифолд, а отображение $\pi : T\mathscr{N} \to \mathscr{N} : \Gamma \cdot (x, v) \mapsto p(x)$ является проекцией касательного расслоения на $\mathscr{N}$.

Слой $\pi^{-1}(y)$ касательного расслоения над точкой $y \in \mathscr{N}$ равен $\pi^{-1}(y) = \{\Gamma \cdot (x, v) \mid p(x) = y,\ v \in T_x\mathbb{E}^3\}$ и, следовательно, гомеоморфен трехмерному орбифолду $\mathbb{E}^3/\Gamma_x$, где Γ_x — стационарная подгруппа группы Γ в точке $x \in p^{-1}(y)$. Отсюда вытекает, что для любой орбифолдной точки $y \in \mathscr{N}$ слой $\pi^{-1}(y)$ не является векторным пространством, а для каждой регулярной точки $z \in \mathscr{N}$ группа Γ_x, $x \in p^{-1}(z)$, тривиальна, поэтому слой $\pi^{-1}(z) = \mathbb{E}^3$ естественным образом наделяется структурой трехмерного векторного пространства.

Пусть X — любое гладкое Γ-инвариантное векторное поле на $\mathbb{E}^3$, т. е. $\gamma_*(X_x) = X_{\gamma(x)}$ для любых $x \in \mathbb{E}^3$, $\gamma \in \Gamma$. Примером ненулевого Γ-инвариантного векторного поля может служить векторное поле $Y : \mathbb{E}^3 \to T\mathbb{E}^3 = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 : x \mapsto Y_x = (x, x)$. Отображение $s = s(X) : \mathscr{N} \to T\mathscr{N} = T\mathbb{E}^3/\Gamma : z \mapsto \Gamma \cdot (X_x)$, где $x \in p^{-1}(z)$, определено корректно и является гладким сечением касательного расслоения $\pi : T\mathscr{N} \to \mathscr{N}$, т. е. гладким векторным полем на орбифолде $\mathscr{N}$. Все гладкие векторные поля на $\mathscr{N}$ получаются указанным образом.

3. Римановы орбифолды

Мы предполагаем, что все римановы метрики являются положительно определенными.

Римановой метрикой g на орбифолде $(\mathscr{N}, \mathscr{A})$ называется [6, 14] семейство $\{g_i\}_{i \in J}$ Γ_i-инвариантных римановых метрик g_i на многообразиях Ω_i, причем любая инъекция карт $\phi_{ij} : \Omega_i \to \Omega_j$, $i, j \in J$, является изометрическим отображением римановых многообразий (Ω_i, g_i) и (Ω_j, g_j). Как известно, на любом гладком орбифолде существует риманова метрика.

Пусть $(\mathscr{N}, g)$ — n-мерный риманов орбифолд, $O(n, \mathbb{R})$ — группа ортогональных матриц. Обозначим через $\pi_i : \mathscr{R}_i \to \Omega_i$ расслоение ортонормальных реперов над римановым многообразием (Ω_i, g_i), являющееся главным $O(n, \mathbb{R})$-расслоением, при этом ортонормальный репер $z \in \mathscr{R}_i$ в точке $x \in \Omega_i$ рассматривается как линейный изоморфизм $z : \mathbb{R}^n \to T_x\Omega_i$ векторного пространства $\mathbb{R}^n$ в векторное пространство $T_x\Omega_i$. Антимономорфизм b_i группы Γ_i в группу автоморфизмов расслоенного пространства $\mathscr{R}_i$ зададим равенством $b_i(\gamma)(z) := (\gamma^{-1})_{*x} \circ z$, где $z \in \mathscr{R}_i$ — ортонормальный репер в точке $x \in \Omega_i$. Для инъекции $\phi_{ij} : \Omega_i \to \Omega_j$, $i, j \in J$, определим отображение $\bar{\phi}_{ij}$ по формуле $\bar{\phi}_{ij}(z) := (\phi_{ij}^{-1})_{*\phi_{ij}(x)} \circ z$, где z — ортонормальный репер в точке $\phi_{ij}(x) \in \phi_{ij}(\Omega_i) \subset \Omega_j$. Благодаря согласованности римановых метрик из семейства $g = \{g_i\}_{i \in J}$ имеем $(\phi_{ij})^* g_j = g_i$, поэтому $\bar{\phi}_{ij}$ является изоморфизмом расслоенных пространств $\mathscr{R}_i$

и $\mathscr{R}_j|_{\phi_{ij}(\Omega_i)}$. Заданное таким образом семейство $\xi = \{\mathscr{R}_i, b_i, \bar{\phi}_{ij}\}_{i,j\in J}$ определяет главное расслоенное пространство со структурной группой $O(n,\mathbb{R})$, называемое [6, 14] *расслоением ортонормальных реперов* над римановым орбифолдом $(\mathscr{N}, g)$.

Для карты $(\Omega_i, \Gamma_i, p_i)$ определено гладкое левое действие $\Phi_i : \Gamma_i \times \mathscr{R}_i \to \mathscr{R}_i : (\gamma, z) \mapsto b_i(\gamma^{-1})(z)$ группы Γ_i на многообразии $\mathscr{R}_i$. Если автоморфизм $b_i(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma_i$, оставляет неподвижной точку $z \in \mathscr{R}_i$, то $(\gamma)_{*x}$ — тождественное преобразование касательного пространства $T_x\Omega_i$ в точке $x = \pi_i(z)$. Отсюда, благодаря связности топологического пространства Ω_i и тому, что $O(n,\mathbb{R})$-структура $\mathscr{R}_i$ на многообразии Ω_i есть G-структура первого порядка, следует, что изометрия γ равна тождественному преобразованию id_{Ω_i}. Поэтому группа Γ_i действует свободно на $\mathscr{R}_i$. Следовательно, фактор-пространство $\mathscr{R}_i/\Gamma_i$ является гладким многообразием, а фактор-отображение $\bar{p}_i : \mathscr{R}_i \to \mathscr{R}_i/\Gamma_i$ — регулярным накрытием с группой накрывающих преобразований, изоморфной Γ_i. Поэтому тотальное пространство $\mathscr{R}$ расслоения ортонормальных реперов над $(\mathscr{N}, g)$ является гладким многообразием размерности $n(n+1)/2$.

Согласно предыдущему (см. разд. 2) на $\mathscr{R}$ определено гладкое правое действие группы Ли $O(n,\mathbb{R})$, пространством орбит которого является орбифолд $\mathscr{N}$. Компоненты связности орбит данного действия задают гладкое слоение $\mathscr{F}$ коразмерности n на многообразии $\mathscr{R}$. Если орбифолд $\mathscr{N}$ ориентируем, то многообразие $\mathscr{R}$ имеет две диффеоморфные компоненты связности $\mathscr{R}^+$ и $\mathscr{R}^-$. В этом случае мы обозначаем через $\mathscr{R}$ одну из этих компонент. В случае неориентируемого орбифолда $\mathscr{N}$ пространство расслоения $\mathscr{R}$ является связным.

4. Структура группы Ли в группе изометрий риманова орбифолда

Пусть $(\mathscr{N}, g)$ — риманов орбифолд. Автоморфизм $f : \mathscr{N} \to \mathscr{N}$ орбифолда $(\mathscr{N}, \mathscr{A})$ называется *изометрией,* если для любой точки $x \in \mathscr{N}$ и любых карт $(\Omega_i, \Gamma_i, p_i)$, $(\Omega_j, \Gamma_j, p_j)$ из максимального атласа $\mathscr{A}$ с координатными окрестностями U_i, U_j такими, что $x \in U_i$, $f(U_i) = U_j$, существует локальный лифт $f_{ij} : \Omega_i \to \Omega_j$, являющийся изометрией римановых многообразий (Ω_i, g_i) и (Ω_j, g_j). Из определения римановой метрики g на орбифолде $\mathscr{N}$ вытекает, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора карт в точках x и $f(x)$ и от выбора локального лифта.

Везде в данной работе через $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ мы обозначаем группу всех изометрий риманова орбифолда $(\mathscr{N}, g)$.

Напомним, что *компактно-открытой топологией* в группе H гомеоморфизмов топологического пространства X называется топология, предбазу которой образуют подмножества вида $W(V, V') := \{f \in H \mid f(V) \subset V'\}$, где V — компактное, а V' — открытое подмножества в X.

Абсолютным параллелизмом n-мерного многообразия $\mathscr{M}$ называется набор из n гладких векторных полей на $\mathscr{M}$, линейно независимых в каждой точке многообразия $\mathscr{M}$.

Пусть G — некоторая группа автоморфизмов орбифолда $\mathscr{N}$, допускающая структуру группы Ли. Группа G называется *группой Ли преобразований орбифолда* $\mathscr{N}$, если отображение $\Phi : G \times \mathscr{N} \to \mathscr{N} : (f, x) \mapsto f(x)$ является гладким отображением произведения орбифолдов $G \times \mathscr{N}$ в $\mathscr{N}$. Если отображение $\Pi = (\Phi, \mathrm{id}_{\mathscr{N}}) : G \times \mathscr{N} \to \mathscr{N} \times \mathscr{N} : (f, x) \mapsto (f(x), x)$ является собственным, т. е. прообраз $\Pi^{-1}(K)$ любого компактного подмножества K в $\mathscr{N} \times \mathscr{N}$ компактен, то будем говорить, что действие Φ группы G на $\mathscr{N}$ *собственное.*

Доказательство теоремы 1. Пусть $\pi : \mathscr{R} \to \mathscr{N}$ — расслоение ортонормальных реперов над n-мерным римановым орбифолдом $(\mathscr{N}, g)$ и $o(n,\mathbb{R})$ — алгебра Ли группы Ли $O(n,\mathbb{R})$. Зададим на многообразии $\mathscr{R}$ 1-формы θ и ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ и $o(n,\mathbb{R})$ соответственно следующим образом. Пусть $z' \in \mathscr{R}$, $x := \pi(z')$, $X_{z'} \in T_{z'}\mathscr{R}$, $(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \in \mathscr{A}$ — карта с координатной окрестностью $U_i \ni x$. Обозначим через ω_i форму римановой связности, а через θ_i — каноническую форму на расслоении ортонормальных реперов $\pi_i : \mathscr{R}_i \to \Omega_i$ [17]. Пусть $\bar{p}_i : \mathscr{R}_i \to \mathscr{R}_i/\Gamma_i = \overline{\mathscr{R}}_i$, $q_i : \overline{\mathscr{R}}_i \to \mathscr{R}$ — отображения, определенные в разд. 2, являющиеся регулярным накрытием и диффеоморфизмом на образ соответственно. Положим $\theta_{z'}(X_{z'}) := (\theta_i)_z(\overline{X}_z)$, $\omega_{z'}(X_{z'}) := (\omega_i)_z(\overline{X}_z)$, где $z \in (q_i \circ \bar{p}_i)^{-1}(z')$, $\overline{X}_z \in T_z\mathscr{R}_i$ — некоторый касательный вектор, удовлетворяющий равенству $(q_i \circ \bar{p}_i)_{*z}(\overline{X}_z) = X_{z'}$. Так как для всех $\gamma \in \Gamma_i$ автоморфизм $b_i(\gamma)$ расслоенного пространства $\mathscr{R}_i$ сохраняет ω_i и θ_i, а для любой инъекции карт $\phi_{ij} : \Omega_i \to \Omega_j$, $i, j \in J$, имеют место равенства $(\bar{\phi}_{ij})^*\omega_i = \omega_j$, $(\bar{\phi}_{ij})^*\theta_i = \theta_j$, то формы θ и ω определены корректно. Зафиксируем евклидовы скалярные произведения d_0 и d_1 в векторных пространствах $\mathbb{R}^n$ и $o(n,\mathbb{R})$ соответственно, тогда формула

$$d(X,Y) := d_0(\theta(X), \theta(Y)) + d_1(\omega(X), \omega(Y)),$$

где X, Y — произвольные гладкие векторные поля на многообразии $\mathscr{R}$, определяет риманову метрику в $\mathscr{R}$.

Каждая изометрия $f \in \mathfrak{I}(\mathscr{N})$ индуцирует изометрию $\hat{f}$ риманова многообразия $(\mathscr{R}, d)$ следующим образом. Пусть $z' \in \mathscr{R}$, $x := \pi(z')$. Поскольку изометрия f — автоморфизм орбифолда $\mathscr{N}$, то для точки $x \in \mathscr{N}$ существуют карты $(\Omega_i, \Gamma_i, p_i)$ и $(\Omega_j, \Gamma_j, p_j)$ из $\mathscr{A}$ с такими координатными окрестностями U_i и U_j, что $x \in U_i$, $f(U_i) = U_j$. Так как согласно определению изометрии f ее локальный лифт $f_{ij} : \Omega_i \to \Omega_j$ — изометрия римановых многообразий (Ω_i, g_i) и (Ω_j, g_j), то диффеоморфизм $\hat{f}_{ij} : \mathscr{R}_i \to \mathscr{R}_j : z \mapsto (f_{ij})_* \circ z$, $z \in \mathscr{R}_i$, является изоморфизмом расслоенных пространств, удовлетворяющим равенствам $(\hat{f}_{ij})^*\omega_j = \omega_i$, $(\hat{f}_{ij})^*\theta_j = \theta_i$. Нетрудно проверить, что формула $\hat{f}(z') := q_j \circ \bar{p}_j \circ \hat{f}_{ij}(z)$, где $z \in (q_i \circ \bar{p}_i)^{-1}(z')$, определяет диффеоморфизм $\hat{f} : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ многообразия $\mathscr{R}$ на себя, обладающий следующими свойствами:

$$\hat{f}^*\theta = \theta, \quad \hat{f}^*\omega = \omega, \quad \pi \circ \hat{f} = f \circ \pi. \tag{1}$$

Из первых двух равенств в (1) вытекает, что $\hat{f}^*d = d$, т. е. $\hat{f}$ — изометрия риманова многообразия $(\mathscr{R}, d)$. Согласно теореме Майерса — Стинрода [11, 17] группа $\mathfrak{I}(\mathscr{R})$ всех изометрий риманова многообразия $(\mathscr{R}, d)$, наделенная компактно-открытой топологией, является группой Ли преобразований. Заметим, что изометрия $\hat{f} \in \mathfrak{I}(\mathscr{R})$ индуцирована изометрией $f \in \mathfrak{I}(\mathscr{N})$ тогда и только тогда, когда $\hat{f}$ удовлетворяет равенствам (1). Благодаря этому множество $\mathfrak{K}$ всех таких изометрий $\hat{f}$ образует замкнутое подмножество в $\mathfrak{I}(\mathscr{R})$ и, следовательно, на $\mathfrak{K}$ существует структура группы Ли, превращающая ее в замкнутую подгруппу Ли группы Ли $\mathfrak{I}(\mathscr{R})$. Поскольку $\pi \circ \hat{f} = f \circ \pi$, равенство $\hat{f} = \mathrm{id}_{\mathscr{R}}$ влечет $f = \mathrm{id}_{\mathscr{N}}$. Таким образом, определен изоморфизм групп $\sigma : \mathfrak{I}(\mathscr{N}) \to \mathfrak{K} : f \mapsto \hat{f}$. Посредством биекции σ на множестве $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ определяется структура гладкого многообразия. Так как σ — изоморфизм групп, то относительно введенной гладкой структуры $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ является группой Ли.

Действие $\widehat{\Psi} : \mathfrak{K} \times \mathscr{R} \to \mathscr{R} : (h, z) \mapsto h(z)$ группы Ли $\mathfrak{K}$ на многообразии $\mathscr{R}$ гладко как сужение гладкого действия группы Ли $\mathfrak{I}(\mathscr{R})$ на $\mathscr{R}$. Зададим отображение $\Psi : \mathfrak{I}(\mathscr{N}) \times \mathscr{N} \to \mathscr{N}$ равенством $\Psi(f, x) := f(x)$ $\forall f \in \mathfrak{I}(\mathscr{N})$ $\forall x \in \mathscr{N}$. Тогда гладкость отображений π, σ, $\widehat{\Psi}$ и равенство $\pi \circ \widehat{\Psi} = \Psi \circ (\sigma \times \pi)$ влекут гладкость отображения Ψ.

Любая замкнутая подгруппа группы Ли всех изометрий риманова многообразия действует собственно [18], поэтому действие $\widehat{\Psi}$ группы $\mathfrak{K}$ на $\mathscr{R}$ собственное. Так как $\pi : \mathscr{R} \to \mathscr{N} = \mathscr{R}/O(n, \mathbb{R})$ — фактор-отображение на пространство орбит компактной группы $O(n, \mathbb{R})$, то согласно теореме 3.1 гл. I из [19] оно является собственным. Поскольку π и $\widehat{\Psi}$ — собственные непрерывные отображения, из равенства $\pi \circ \widehat{\Psi} = \Psi \circ (\sigma \times \pi)$ вытекает, что отображение Ψ также собственное, т. е. действие Ψ группы $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ на $\mathscr{N}$ собственное.

Пусть $\{e_m \mid m = 1, \dots, n\}$ и $\{E_{kl} \mid 1 \le k \le l \le n\}$ — ортонормированные базисы в евклидовых пространствах $(\mathbb{R}^n, d_0)$ и $(o(n, \mathbb{R}), d_1)$ соответственно. Так как ω — гладкая форма на многообразии $\mathscr{R}$, то соответствие $\mathfrak{M} : z \mapsto \mathfrak{M}_z := \ker \omega_z$, $z \in \mathscr{R}$, задает гладкое распределение $\mathfrak{M}$ на $\mathscr{R}$, при этом $\mathfrak{M}$ является трансверсальным гладкому распределению $\mathfrak{V}$, касательному к орбитам группы $O(n, \mathbb{R})$, и $\mathfrak{M}_z \oplus \mathfrak{V}_z = T_z\mathscr{R}$, $z \in \mathscr{R}$. Отметим, что $\mathfrak{V}_z = \ker \theta_z$, а сужения $\theta|_{\mathfrak{M}_z} : \mathfrak{M}_z \to \mathbb{R}^n$ и $\omega|_{\mathfrak{V}_z} : \mathfrak{V}_z \to o(n, \mathbb{R})$ являются изоморфизмами векторных пространств. Гладкие векторные поля $\{Z_{(m)}, Z_{(kl)} \mid m = 1, \dots, n, 1 \le k \le l \le n\}$, где $(Z_{(m)})_z := (\theta_z|_{\mathfrak{M}_z})^{-1}(e_m)$, $(Z_{(kl)})_z := (\omega_z|_{\mathfrak{V}_z})^{-1}(E_{kl})$, $z \in \mathscr{R}$, задают базис касательного векторного пространства $T_z\mathscr{R}$ в каждой точке z многообразия $\mathscr{R}$. Это означает, что семейство $\{Z_{(m)}, Z_{(kl)}\}$ определяет абсолютный параллелизм на $\mathscr{R}$. Так как произвольная изометрия h из $\mathfrak{K}$ сохраняет формы θ и ω, то h сохраняет и абсолютный параллелизм $\{Z_{(m)}, Z_{(kl)}\}$. Заметим, что группа $\mathfrak{A}(\mathscr{R})$ автоморфизмов абсолютного параллелизма многообразия $\mathscr{R}$ является замкнутой подгруппой Ли группы Ли $\mathfrak{I}(\mathscr{R})$ изометрий риманова многообразия $(\mathscr{R}, d)$. Как известно, группа $\mathfrak{A}(\mathscr{R})$ действует на $\mathscr{R}$ свободно и $\dim \mathfrak{A}(\mathscr{R}) \le \dim \mathscr{R} = n(n+1)/2$. Поэтому размерность замкнутой подгруппы Ли $\mathfrak{K}$ группы Ли $\mathfrak{A}(\mathscr{R})$ удовлетворяет неравенству $\dim \mathfrak{K} \le n(n+1)/2$, откуда следует, что $\dim \mathfrak{I}(\mathscr{N}) = \dim \mathfrak{K} \le n(n+1)/2$. Таким образом, действие группы Ли $\mathfrak{K}$ на $\mathscr{R}$ является собственным и свободным, следовательно, каждая орбита $\widehat{\Psi}(\mathfrak{K}, z)$, $z \in \mathscr{R}$, представляет собой замкнутое вложенное подмногообразие в $\mathscr{R}$, диффеоморфное $\mathfrak{K}$. Отсюда в случае, когда $\dim \mathfrak{I}(\mathscr{N}) = \dim \mathfrak{K} = n(n+1)/2 = \dim \mathscr{R}$, произвольная орбита $\widehat{\Psi}(\mathfrak{K}, z)$, $z \in \mathscr{R}$, группы $\mathfrak{K}$ открыта в $\mathscr{R}$. В силу связности многообразия $\mathscr{R}$ орбита $\widehat{\Psi}(\mathfrak{K}, z)$ совпадает с $\mathscr{R}$, т. е. группа $\mathfrak{K}$ действует на $\mathscr{R}$ транзитивно, следовательно, группа $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ действует транзитивно на $\mathscr{N}$, что возможно только в случае, когда $\mathscr{N}$ — многообразие. Как известно [17, примечание 10, теорема 1], для n-мерного риманова многообразия $(\mathscr{N}, g)$ равенство $\dim \mathfrak{I}(\mathscr{N}) = n(n+1)/2$ достигается тогда и только тогда, когда $(\mathscr{N}, g)$ изометрично одному из следующих n-мерных римановых многообразий постоянной кривизны: a) $\mathbb{E}^n$; b) S^n; c) $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$; d) $\mathbb{H}^n$.

Покажем, что топология τ группы Ли $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ совпадает с компактно-открытой топологией τ^{co}. Для этого мы будем использовать следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{N}$ — риманов орбифолд с метрикой g, Δ_n — многообразие его регулярных точек с индуцированной римановой метрикой $g|_{\Delta_n}$, $\mathfrak{I}(\Delta_n)$ — группа Ли всех изометрий риманова многообразия $(\Delta_n, g|_{\Delta_n})$ с компактно-открытой топологией, а $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ — группа всех изометрий $(\mathscr{N}, g)$. Тогда определено* *отображение* $\nu : \mathfrak{I}(\mathscr{N}) \to \mathfrak{I}(\Delta_n) : f \mapsto f|_{\Delta_n}$, *индуцирующее изоморфизм алгебраической группы* $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ *на замкнутую подгруппу Ли* $\operatorname{im}\nu$ *группы Ли* $\mathfrak{I}(\Delta_n)$.

Доказательство. Так как каждая изометрия $f \in \mathfrak{I}(\mathscr{N})$ является автоморфизмом орбифолда $\mathscr{N}$, то f переводит регулярную точку в регулярную, т. е. $f(\Delta_n) = \Delta_n$. Следовательно, определено отображение $\nu : \mathfrak{I}(\mathscr{N}) \to \mathfrak{I}(\Delta_n) : f \mapsto f|_{\Delta_n}$. На многообразии регулярных точек Δ_n риманова метрика g естественным образом индуцирует риманову метрику $g|_{\Delta_n}$. Согласно теореме Майерса — Стинрода группа $\mathfrak{I}(\Delta_n)$ всех изометрий риманова многообразия $(\Delta_n, g|_{\Delta_n})$, наделенная компактно-открытой топологией, является группой Ли. Покажем, что образ $\operatorname{im}\nu$ — замкнутая подгруппа в группе Ли $\mathfrak{I}(\Delta_n)$.

Пусть $\{h_n\}$ — последовательность изометрий из $\operatorname{im}\nu$, сходящаяся к $h \in \mathfrak{I}(\Delta_n)$. Тогда существует последовательность $\{f_n\} \subset \mathfrak{I}(\mathscr{N})$ такая, что $f_n|_{\Delta_n} = h_n$. Возьмем произвольную точку $x \in \Delta_n$, тогда $y := h(x) \in \Delta_n$. Для точки y существует такая координатная окрестность V в многообразии Δ_n, замыкание $\overline{V}$ которой компактно в $\mathscr{N}$. Не нарушая общности, можно считать, что $f_n(x) = h_n(x) \in \overline{V}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Как показано выше, действие $\Psi : \mathfrak{I}(\mathscr{N}) \times \mathscr{N} \to \mathscr{N}$ собственное, поэтому последовательность $\{f_n\}$ принадлежит компактному подмножеству $\mathrm{pr}_1 \circ \Psi^{-1}(\overline{V})$ в группе $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$, где $\mathrm{pr}_1 : \mathfrak{I}(\mathscr{N}) \times \mathscr{N} \to \mathfrak{I}(\mathscr{N})$ — проекция на первый сомножитель. Следовательно, существует сходящаяся подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ последовательности $\{f_n\}$. Пусть $f_{n_k} \to f$ при $k \to \infty$. С другой стороны, $f_{n_k}|_{\Delta_n} \to h$. В силу хаусдорфовости Δ_n предел последовательности $\{f_{n_k}(y)\}$ $\forall y \in \Delta_n$ единственный. Отсюда $f(y) = h(y)$, т. е. $f|_{\Delta_n} = h \in \operatorname{im}\nu$. Таким образом, $\operatorname{im}\nu$ — замкнутая подгруппа Ли в группе Ли изометрий $\mathfrak{I}(\Delta_n)$, и лемма 1 доказана.

Изоморфизм групп $\nu^{-1}|_{\operatorname{im}\nu} : \operatorname{im}\nu \to \mathfrak{I}(\mathscr{N})$ задает на $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ топологию τ^0 и гладкую структуру многообразия, относительно которой $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ — группа Ли. Поскольку топология в группе Ли $\mathfrak{I}(\Delta_n)$ компактно-открытая, то предбазу топологии τ^0 образуют подмножества вида $W(V, V') := \{f \in \mathfrak{I}(\mathscr{N}) \mid f(V) \subset V'\}$, где V — компактное, а V' — открытое подмножества в Δ_n. Учитывая, что Δ_n — открытое подмножество в $\mathscr{N}$, получаем включение $\tau^0 \subset \tau^{co}$, где τ^{co} — компактно-открытая топология в группе $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$. Группа Ли $(\mathfrak{I}(\mathscr{N}), \tau)$ действует на $\mathscr{N}$ гладко и, следовательно, непрерывно. Согласно теореме 2 из [20] топология любой группы гомеоморфизмов локально компактного хаусдорфова топологического пространства X, действующей непрерывно на X, содержит все подмножества, открытые в компактно-открытой топологии. Отсюда вытекает, что $\tau^{co} \subset \tau$. Таким образом, $\tau^0 \subset \tau$. Поэтому тождественное отображение $\mathrm{id}_{\mathfrak{I}(\mathscr{N})} : (\mathfrak{I}(\mathscr{N}), \tau) \to (\mathfrak{I}(\mathscr{N}), \tau^0)$ — непрерывный изоморфизм групп Ли. Как известно, непрерывный гомоморфизм групп Ли является аналитическим отображением. Следовательно, $\mathrm{id}_{\mathfrak{I}(\mathscr{N})}$ — аналитическое отображение. Согласно [21, с. 21] биективный (гладкий) гомоморфизм групп Ли является изоморфизмом групп Ли, поэтому $\mathrm{id}_{\mathfrak{I}(\mathscr{N})}$ — изоморфизм групп Ли и $\tau^0 = \tau$. Отсюда, учитывая включения $\tau^0 \subset \tau^{co} \subset \tau$, имеем $\tau^0 = \tau^{co} = \tau$. □

Следствие 1. *Если риманов орбифолд компактен, то его группа изометрий компактна.*

Доказательство. Как указано в доказательстве теоремы 1, отображение $\pi : \mathscr{R} \to \mathscr{N}$ является собственным. Многообразие $\mathscr{R}$ компактно как прообраз компактного топологического пространства $\mathscr{N}$ при собственном отображении π. Поскольку группа $\mathfrak{I}(\mathscr{R})$ изометрий компактного риманова многообразия $(\mathscr{R}, d)$

компактна [17, гл. VI, теорема 3.4], ее замкнутая подгруппа $\mathfrak{K}$ и, следовательно, изоморфная ей группа $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ также компактны. $\square$

5. Единственность структуры группы Ли

Предложение 1. *Пусть G — алгебраическая группа, $\mathfrak{I}(\mathscr{M})$ — группа всех изометрий риманова многообразия $\mathscr{M}$, наделенная компактно-открытой топологией. Если существует изоморфизм группы G на замкнутую подгруппу группы $\mathfrak{I}(\mathscr{M})$, то в алгебраической группе G существует единственная гладкая структура, превращающая ее в группу Ли.*

Доказательство. Пусть τ^{co} — компактно-открытая топология в группе $\mathfrak{I}(\mathscr{M})$ всех изометрий риманова многообразия $\mathscr{M}$. Согласно теореме Майерса — Стинрода на топологическом пространстве $(\mathfrak{I}(\mathscr{M}), \tau^{co})$ существует структура гладкого многообразия, относительно которой $\mathfrak{I}(\mathscr{M})$ представляет собой группу Ли. Как известно, любая замкнутая подгруппа G в $\mathfrak{I}(\mathscr{M})$ с индуцированной топологией является подгруппой Ли. Предположим, что существуют другая топология τ на G и структура гладкого многообразия на топологическом пространстве (G, τ), относительно которой группа G является группой Ли. Чтобы отличить эту группу Ли от предыдущей, будем обозначать ее через G_1. Так как топологическое пространство (G, τ) многообразия G_1 локально-компактно, а группа G действует на $\mathscr{M}$ эффективно, то по теореме Монтгомери — Циппина [22, с. 208, 212] (см. также [17, гл. I, теорема 4.6]) на (G, τ) существует структура группы Ли преобразований G_2. Поскольку на локально-евклидовой топологической группе, удовлетворяющей второй аксиоме счетности, может существовать только одна структура группы Ли, то $G_1 = G_2$. Таким образом, G_1 гладко и, следовательно, непрерывно действует на многообразии $\mathscr{M}$. Согласно теореме 2 из [20] топология τ группы Ли G_1 содержит все подмножества, открытые в компактно-открытой топологии. Отсюда $\tau^{co} \subset \tau$, поэтому тождественное отображение $\mathrm{id}_G : (G, \tau) \to (G, \tau^{co})$ непрерывно. Поскольку id_G — непрерывный изоморфизм групп Ли, то так же, как в доказательстве теоремы 1, получаем, что id_G — изоморфизм групп Ли и $G = G_1$. $\square$

Следствие 2. *В алгебраической группе $\mathfrak{I}(\mathscr{M})$ всех изометрий риманова многообразия $\mathscr{M}$ существует единственная структура группы Ли, при этом топология в группе Ли $\mathfrak{I}(\mathscr{M})$ совпадает с компактно-открытой.*

Следствие 3. *Если группа Ли G действует эффективно, гладко и собственно на многообразии $\mathscr{M}$, то в алгебраической группе G не существует другой структуры группы Ли.*

Доказательство. Как известно, для любого гладкого собственного действия $\Phi : G \times \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ группы Ли G на многообразии $\mathscr{M}$ существует риманова метрика на $\mathscr{M}$, относительно которой каждое преобразование $\Phi_h := \Phi(h, \cdot)$, $h \in G$, является изометрией. В силу эффективности действия Φ группа изометрий $\widetilde{G} := \{\Phi_h \mid h \in G\}$ изоморфна G. Из того, что действие Φ собственное, вытекает замкнутость подгруппы $\widetilde{G}$ в группе Ли $\mathfrak{I}(\mathscr{M})$ всех изометрий $\mathscr{M}$, наделенной компактно-открытой топологией.

Таким образом, группа G изоморфна замкнутой подгруппе $\widetilde{G}$ группы Ли $\mathfrak{I}(\mathscr{M})$ всех изометрий $\mathscr{M}$, поэтому из предложения 1 вытекает требуемое утверждение. $\square$

Следствие 4. *Если G — компактная группа Ли, то в алгебраической группе G не существует другой структуры группы Ли.*

Доказательство. Левое действие $\Phi : G \times G \to G : (h_1, h_2) \mapsto h_1 h_2$ группы Ли G на G является гладким и эффективным. В силу компактности группы Ли G действие Φ собственное, поэтому доказываемое утверждение вытекает из следствия 3. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mathscr{N}$ — риманов орбифолд с метрикой g. Согласно лемме 1 существует изоморфизм алгебраической группы $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ всех изометрий риманова орбифолда $\mathscr{N}$ на замкнутую подгруппу группы Ли $\mathfrak{I}(\Delta_n)$ всех изометрий риманова многообразия $(\Delta_n, g|_{\Delta_n})$, наделенной компактно-открытой топологией. Поэтому утверждение теоремы 2 вытекает из предложения 1. $\square$

6. Накрытия орбифолдов

Гладкое отображение орбифолдов $\kappa : \mathscr{N}' \to \mathscr{N}$ называется *накрытием* [7], если для любой точки $x \in \mathscr{N}$ существует такая карта (Ω, Γ, p) с координатной окрестностью $U \ni x$, что для каждой компоненты связности U' множества $\kappa^{-1}(U)$ существует такой гомеоморфизм $q' : \Omega/\Gamma' \to U'$, что $\kappa|_{U'} \circ p' = p$, где Γ' — некоторая подгруппа группы Γ, а $p' : \Omega \to U'$ — композиция q' и фактор-отображения $\Omega \to \Omega/\Gamma'$. Карта (Ω, Γ, p), указанная в определении, называется *правильно накрытой.*

Накрывающим преобразованием накрытия $\kappa : \mathscr{N}' \to \mathscr{N}$ называется такой автоморфизм $f : \mathscr{N}' \to \mathscr{N}'$ накрывающего орбифолда $\mathscr{N}'$, что $\kappa \circ f = \kappa$. Множество $G(\kappa)$ всех накрывающих преобразований накрытия $\kappa : \mathscr{N}' \to \mathscr{N}$ образует группу. Накрытие $\kappa : \mathscr{N}' \to \mathscr{N}$ называется *регулярным*, если $\mathscr{N} = \mathscr{N}'/G(\kappa)$. В случае, когда группа $G(\kappa)$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$, регулярное накрытие $\kappa : \mathscr{N}' \to \mathscr{N}$ будем называть *двулистным.* Орбифолд $\mathscr{N}$ называется *хорошим*, если существует регулярное накрытие $\kappa : \mathscr{N}' \to \mathscr{N}$, где $\mathscr{N}'$ — гладкое многообразие.

Пусть $\kappa : \mathscr{N}' \to \mathscr{N}$ — накрытие орбифолда $(\mathscr{N}, \mathscr{A})$ орбифолдом $(\mathscr{N}', \mathscr{A}')$, t — произвольный тензор типа (p, q) на $\mathscr{N}$. Напомним, что если $\mathscr{A} = \{(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \mid i \in J\}$ — максимальный атлас орбифолда $\mathscr{N}$, то из определения тензора t вытекает, что для каждого $i \in J$ задан тензор t_i типа (p, q) на многообразии Ω_i. Тензор t индуцирует тензор t' типа (p, q) на орбифолде $\mathscr{N}'$ следующим образом. Пусть x' — произвольная точка $\mathscr{N}'$. Тогда для точки $x := \kappa(x')$ существует правильно накрытая карта $(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \in \mathscr{A}$ с координатной окрестностью $U_i \ni x$. Обозначим через U' компоненту связности $\kappa^{-1}(U_i)$, содержащую x'. При этом согласно определению накрытия существуют подгруппа Γ' группы Γ_i и такой гомеоморфизм $q' : \Omega_i/\Gamma' \to U'$, что $\kappa|_{U'} \circ p' = p$, где $p' : \Omega_i \to U'$ — композиция q' и фактор-отображения $\Omega_i \to \Omega_i/\Gamma'$. Отметим, что $(\Omega_i, \Gamma', p') \in \mathscr{A}'$ — карта с координатной окрестностью U'. Поскольку $\Gamma' \subset \Gamma_i$, то t_i — Γ'-инвариантный тензор типа (p, q) на многообразии Ω_i, который мы обозначим через $t_{x'}$. Следовательно, для каждой точки $x' \in \mathscr{N}'$ существуют карта $(\Omega_i, \Gamma', p') \in \mathscr{A}'$ с координатной окрестностью $U' \ni x'$ и тензор $t_{x'}$ типа (p, q) на Ω_i. Благодаря согласованности тензоров из $t = \{t_i\}_{i \in J}$ семейство тензоров $\{t_{x'}\}_{x' \in \mathscr{N}'}$ корректно определяет тензор t' типа (p, q) на орбифолде $\mathscr{N}'$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 2. *Для произвольного накрытия $\kappa : \mathscr{N}' \to \mathscr{N}$ орбифолда $\mathscr{N}$ тензор t типа (p, q) на $\mathscr{N}$ естественным образом индуцирует тензор t' типа (p, q) на $\mathscr{N}'$.*

Предложение 2. *Пусть* $\kappa : \mathscr{N}' \to \mathscr{N}$ *— произвольное регулярное накрытие риманова орбифолда* $\mathscr{N}$ *орбифолдом* $\mathscr{N}'$ *с группой накрывающих преобразований* Γ. *Тогда:* a) *на* $\mathscr{N}'$ *индуцирована риманова метрика, относительно которой* Γ *— подгруппа группы изометрий* $\mathfrak{I}(\mathscr{N}')$; b) *группа* $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ *изоморфна фактор-группе* $\mathbf{N}(\Gamma)/\Gamma$ *нормализатора* $\mathbf{N}(\Gamma)$ *группы* Γ *в группе изометрий* $\mathfrak{I}(\mathscr{N}')$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из леммы 2. Зададим гомоморфизм групп $\chi : \mathbf{N}(\Gamma) \to \mathfrak{I}(\mathscr{N}) : f' \mapsto f$ равенством $f(x) := \kappa \circ f'(y)$, $y \in \kappa^{-1}(x)$, $x \in \mathscr{N}$. Из определений группы накрывающих преобразований Γ и гомоморфизма χ вытекает, что ядро $\ker\chi$ совпадает с Γ. Заметим, что для каждой изометрии $f \in \mathfrak{I}(\mathscr{N})$ существует изометрия $f' \in \mathfrak{I}(\mathscr{N}')$, накрывающая f, т. е. $\kappa \circ f' = f \circ \kappa$. Накрывающая изометрия f' переводит любую орбиту действия группы Γ в орбиту: $f'(\Gamma(x)) = \Gamma(f'(x))$, $x \in \mathscr{N}'$, отсюда следует, что $f'\Gamma f'^{-1} = \Gamma$, т. е. $f' \in \mathbf{N}(\Gamma)$. Значит, χ сюръективно. Поскольку Γ — замкнутая дискретная подгруппа в $\mathfrak{I}(\mathscr{N}')$, нормализатор $\mathbf{N}(\Gamma)$ является замкнутой подгруппой в $\mathfrak{I}(\mathscr{N}')$. Следовательно, $\mathbf{N}(\Gamma)$ — замкнутая подгруппа Ли в группе Ли $\mathfrak{I}(\mathscr{N}')$. Таким образом, $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ изоморфна фактор-группе Ли $\mathbf{N}(\Gamma)/\Gamma$. $\square$

Предложение 3. *Для любого неориентируемого орбифолда* $\mathscr{N}$ *существует двулистное регулярное накрытие* $\kappa : \mathscr{N}' \to \mathscr{N}$ *ориентируемым орбифолдом* $\mathscr{N}'$. *При этом если* $\mathscr{N}$ *— риманов орбифолд, то на* $\mathscr{N}'$ *индуцируется риманова метрика, относительно которой группа накрывающих преобразований* $\Gamma \cong \mathbb{Z}_2$ *является группой изометрий, а группа* $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ *всех изометрий риманова орбифолда* $\mathscr{N}$ *изоморфна фактор-группе* $\mathbf{N}(\Gamma)/\Gamma$ *нормализатора* $\mathbf{N}(\Gamma)$ *группы* Γ *в группе всех изометрий* $\mathfrak{I}(\mathscr{N}')$ *ориентируемого риманова орбифолда* $\mathscr{N}'$.

Доказательство. Пусть орбифолд $\mathscr{N}$ неориентируем, g — произвольная риманова метрика на $\mathscr{N}$ и $\pi : \mathscr{R} \to \mathscr{N}$ — расслоение ортонормальных реперов над римановым орбифолдом $(\mathscr{N}, g)$. Как отмечено выше, на многообразии $\mathscr{R}$ определено гладкое правое действие $\Upsilon : \mathscr{R} \times O(n,\mathbb{R}) \to \mathscr{R}$ ортогональной группы $O(n,\mathbb{R})$, причем пространство орбит $\mathscr{R}/O(n,\mathbb{R})$ совпадает с $\mathscr{N}$. Сужение $\widetilde{\Upsilon} := \Upsilon|_{\mathscr{R}\times SO(n,\mathbb{R})} : \mathscr{R} \times SO(n,\mathbb{R}) \to \mathscr{R}$ является гладким действием специальной ортогональной группы $SO(n,\mathbb{R})$ на многообразии $\mathscr{R}$, при этом все стационарные подгруппы этого действия конечны, а пространство орбит $\mathscr{N}' := \mathscr{R}/SO(n,\mathbb{R})$ естественным образом наделяется структурой гладкого n-мерного орбифолда, относительно которой отображение $\kappa : \mathscr{N}' \to \mathscr{N}$, переводящее орбиту $\widetilde{\Upsilon}(z, SO(n,\mathbb{R}))$, $z \in \mathscr{R}$, в орбиту $\Upsilon(z, O(n,\mathbb{R}))$, является регулярным накрытием с группой накрывающих преобразований $\Gamma \cong \mathbb{Z}_2$. Так как многообразие $\mathscr{R}$ допускает абсолютный параллелизм, оно ориентируемо. Поскольку каждое преобразование $\widetilde{\Upsilon}(\,\cdot\,, h)$, $h \in SO(n,\mathbb{R})$, сохраняет ориентацию на $\mathscr{R}$, орбифолд $\mathscr{N}' := \mathscr{R}/SO(n,\mathbb{R})$ ориентируем.

Второе утверждение вытекает из предложения 2. $\square$

7. Аналог теоремы Бохнера

Интегрирование на орбифолдах. Пусть $\alpha = \{\alpha_i\}_{i\in J}$ — внешняя форма на орбифолде $(\mathscr{N}, \mathscr{A})$, где $\mathscr{A} = \{(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \mid i \in J\}$ — максимальный атлас. Замыкание множества тех точек из $\mathscr{N}$, в которых форма α отлична от нуля, называется *носителем* α и обозначается через $\operatorname{supp}\alpha$.

Пусть $\mathscr{N}$ — n-мерный ориентированный орбифолд, α — внешняя n-форма с компактным носителем $\operatorname{supp}\alpha$. Если $\operatorname{supp}\alpha$ содержится в координатной окрестности U_i карты $(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \in \mathscr{A}$, то по определению

$$\int\limits_{U_i} \alpha := \frac{1}{|\Gamma_i|} \int\limits_{\Omega_i} \alpha_i,$$

где $|\Gamma_i|$ — порядок группы Γ_i. В общем случае в силу компактности носителя $\operatorname{supp}\alpha$ существуют его конечное покрытие $\mathscr{W} = \{W_k\}_{k=1,\dots,m}$ координатными окрестностями W_k карт из атласа $\mathscr{A}$ и конечное разбиение единицы, подчиненное $\mathscr{W}$, т. е. такое семейство $\{f_k\}_{k=1,\dots,m}$ гладких функций на $\mathscr{N}$, что a) $0 \le f_k(x) \le 1$ для любых $x \in \mathscr{N}$, $k \in \{1,\dots,m\}$; b) $\operatorname{supp} f_k \subset W_k$ для любого $k \in \{1,\dots,m\}$; c) $\sum\limits_{k=1}^{m} f_k(x) = 1$ для любого $x \in \operatorname{supp}\alpha$. Интеграл от внешней n-формы α с компактным носителем по орбифолду $\mathscr{N}$ определяется равенством

$$\int\limits_{\mathscr{N}} \alpha := \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{W_k} f_k\,\alpha. \tag{2}$$

Число $\int\limits_{\mathscr{N}} \alpha$, задаваемое равенством (2), не зависит от выбора покрытия $\mathscr{W}$ и разбиения единицы, подчиненного покрытию $\mathscr{W}$, т. е. определение интеграла корректно. В случае компактности орбифолда $\mathscr{N}$ носитель $\operatorname{supp}\alpha$ любой формы α компактен. Следовательно, интеграл по компактному ориентированному n-мерному орбифолду $\mathscr{N}$ определен для любой внешней n-формы α.

Пусть $\alpha = \{\alpha_i\}_{i\in J}$ — форма объема на компактном ориентированном n-мерном римановом орбифолде $(\mathscr{N}, g)$, определяемая метрическим тензором g, и пусть $X = \{X_i\}_{i\in J}$ — гладкое векторное поле на $\mathscr{N}$. Тогда семейство $\operatorname{div} X = \{\operatorname{div} X_i\}_{i\in J}$, где $\operatorname{div} X_i$ — дивергенция векторного поля X_i на римановом многообразии (Ω_i, g_i), является гладкой функцией на $\mathscr{N}$. Из формулы Стокса для орбифолда $\mathscr{N}$ [6, 14] вытекает равенство

$$\int\limits_{\mathscr{N}} \operatorname{div} X\alpha = 0. \tag{3}$$

Напомним [17], что гладкое векторное поле Y на n-мерном римановом многообразии $(\mathscr{M}, g)$ называется *киллинговым* (или *инфинитезимальной изометрией*), если производная Ли $L_Y g$ метрического тензора g относительно Y тождественно равна нулю. *Тензором Риччи* S на $(\mathscr{M}, g)$ называется тензорное поле типа $(0,2)$, задаваемое равенством $S_x(X,Y) := \sum\limits_{l=1}^{n} R_x(V_l, Y, V_l, X)$ $\forall X, Y \in T_x\mathscr{M}$, $\forall x \in \mathscr{M}$, где R_x — тензор римановой кривизны, а $\{V_l\}_{l=1,\dots,n}$ — произвольный ортонормальный репер в точке x.

Векторное поле $X = \{X_i\}_{i\in J}$ на римановом орбифолде $(\mathscr{N}, g)$ называется *киллинговым,* если для каждого $i \in J$ векторное поле X_i является киллинговым векторным полем на римановом многообразии (Ω_i, g_i). Пусть S_i — тензор Риччи на римановом многообразии (Ω_i, g_i). Из определения римановой метрики $g = \{g_i\}_{i\in J}$ вытекает, что семейство тензоров $S = \{S_i\}_{i\in J}$ является тензором типа $(0,2)$ на орбифолде $\mathscr{N}$. Тензор S называется *тензором Риччи* риманова орбифолда $(\mathscr{N}, g)$.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что орбифолд $\mathscr{N}$ ориентирован. Пусть $X = \{X_i\}_{i\in J}$ — произвольное киллингово векторное поле на компактном римановом орбифолде $(\mathscr{N}, g)$. Тогда ввиду равенства $\operatorname{div}(A_{X_i} X_i) =$

$-S_i(X_i, X_i) - \operatorname{trace}(A_{X_i} A_{X_i})$, где A_{X_i} — оператор Кобаяси, $A_{X_i} A_{X_i}$ — композиция A_{X_i} с A_{X_i}, S_i — тензор Риччи риманова многообразия (Ω_i, g_i) [17, гл. VI, предложение 5.1], получаем

$$\int_{\mathscr{N}} \operatorname{div}(A_X X)\,\alpha = -\int_{\mathscr{N}} (S(X,X) + \operatorname{trace}(A_X A_X))\alpha. \tag{4}$$

Так как оператор A_{X_i} кососимметричен на римановом многообразии (Ω_i, g_i) [17, гл. VI, предложение 3.2], то $\operatorname{trace}(A_{X_i} A_{X_i}) \leq 0$. Поскольку по условию теоремы 3 тензор Риччи S неположительно определен, то $S_i(X_i, X_i) \leq 0$. Следовательно, функция $S(X,X) + \operatorname{trace}(A_X A_X) = \{S_i(X_i, X_i) + \operatorname{trace}(A_{X_i} A_{X_i})\}_{i \in J}$ неположительна на $\mathscr{N}$. Согласно формуле (3) левая часть равенства (4) тождественно равна нулю. Отсюда благодаря неравенствам $S_i(X_i, X_i) \leq 0$, $\operatorname{trace}(A_{X_i} A_{X_i}) \leq 0$ получаем $S_i(X_i, X_i) = 0$, $\operatorname{trace}(A_{X_i} A_{X_i}) = 0$ $\forall i \in J$. Пусть ∇ — связность Леви-Чивита риманова многообразия $(\Delta_n, g|_{\Delta_n})$. Отметим, что сужение $\widetilde{X} := X|_{\Delta_n}$ векторного поля X является гладким векторным полем на многообразии Δ_n. Так как тензор кручения T связности ∇ равен нулю, то для произвольных векторных полей Y, Z на Δ_n имеет имеет место равенство $A_Y Z = -\nabla_Z Y$ [17, гл. VI, предложение 2.5]. Из равенства $\operatorname{trace}(A_{X_i} A_{X_i}) = 0$ вытекает $A_{X_i} = 0$ и, следовательно, $A_{\widetilde{X}} = 0$. Таким образом, $\nabla \widetilde{X} = 0$, т. е. векторное поле $\widetilde{X}$ абсолютно параллельно на Δ_n. По условию теоремы 3 существует точка $x \in \mathscr{N}$, в которой тензор Риччи S отрицательно определен. Отсюда ввиду гладкости тензора S найдется окрестность U в $\mathscr{N}$ точки x, где тензор S отрицательно определен. Так как Δ_n — всюду плотное подмножество в $\mathscr{N}$, существует точка $y \in U \cap \Delta_n$. Из равенства нулю функции $S(X,X) = \{S_i(X_i, X_i)\}_{i \in J}$ в точке $y \in \Delta_n$ и отрицательной определенности тензора S в y вытекает равенство нулю векторного поля $\widetilde{X}$ в y. Так как X — параллельное киллингово векторное поле на Δ_n, то в силу связности Δ_n равенство нулю $\widetilde{X}$ в точке y влечет равенство нулю $\widetilde{X}$ на Δ_n. Отсюда для любой карты $(\Omega_i, \Gamma_i, p_i) \in \mathscr{A}$ и ее координатной окрестности U_i благодаря непрерывности векторного поля X_i на многообразии Ω_i равенство нулю X_i на всюду плотном подмножестве $p_i^{-1}(U_i \cap \Delta_n)$ в Ω_i влечет равенство нулю X_i всюду на Ω_i. Следовательно, любое киллингово векторное поле на ориентируемом римановом орбифолде $(\mathscr{N}, g)$ тождественно равно нулю.

Так как все киллинговы векторные поля на $(\mathscr{N}, g)$ тождественно равны нулю, алгебра Ли группы Ли $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ равна нулю. Поэтому группа $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ не более чем счетна. Согласно предложению 1 группа $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ компактна и, следовательно, конечна.

Пусть теперь риманов орбифолд $\mathscr{N}$ неориентируем. Согласно предложению 3 существует двулистное накрытие $\kappa : \mathscr{N}' \to \mathscr{N}$ орбифолда $\mathscr{N}$ ориентируемым орбифолдом $\mathscr{N}'$. Будем считать, что $\mathscr{N}'$ ориентирован. Поскольку $\mathscr{N}$ компактен, его двулистно накрывающий орбифолд $\mathscr{N}'$ также компактен. Согласно доказательству леммы 2 на $\mathscr{N}'$ таким образом индуцируется риманова метрика, что тензор Риччи S' на $\mathscr{N}'$ неположительно определен, а в точке $x' \in \kappa^{-1}(x)$ тензор Риччи S' отрицательно определен. По доказанному выше группа $\mathfrak{I}(\mathscr{N}')$ изометрий компактного ориентированного риманова орбифолда $\mathscr{N}'$ конечна. Согласно предложению 3 группа $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ изоморфна фактор-группе $\mathbf{N}(\Gamma)/\Gamma$, где $\mathbf{N}(\Gamma) \subset \mathfrak{I}(\mathscr{N}')$, поэтому группа $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ также конечна. $\square$

Замечание 1. Поскольку тензор Риччи одномерного риманова многообразия тождественно равен нулю, то римановы орбифолды, удовлетворяющие теореме 3, имеют размерность $n \geq 2$.

Следствие 5. *Группа изометрий компактного риманова орбифолда с отрицательно определенным тензором Риччи конечна.*

Замечание 2. В случае, когда риманов орбифолд является римановым многообразием, утверждение следствия 3 совпадает с теоремой Бохнера [12] (см. также [17, гл. VI, следствие 5.4]).

Риманов орбифолд $(\mathscr{N}, g)$ называется [7] *гиперболическим,* если для любого $i \in J$ риманово многообразие (Ω_i, g_i) имеет постоянную отрицательную кривизну $\mathbf{k}$.

Как известно, для n-мерного риманова многообразия постоянной кривизны $\mathbf{k}$ имеет место формула $S_{ab} = \mathbf{k}(n-1)g_{ab}$, $a, b = 1, \dots, n$, где g_{ab} и S_{ab} — компоненты метрического тензора g и тензора Риччи S относительно локальной системы координат. Из указанного равенства вытекает, что при $\mathbf{k} = \mathrm{const} < 0$ тензор Риччи отрицательно определен. Поэтому если $\mathscr{N}$ — гиперболический орбифолд, то тензор Риччи $S = \{S_i\}_{i \in J}$ риманова орбифолда $\mathscr{N}$ отрицательно определен. Таким образом, из следствия 5 вытекает

Следствие 6. *Группа изометрий компактного гиперболического орбифолда конечна.*

8. Примеры

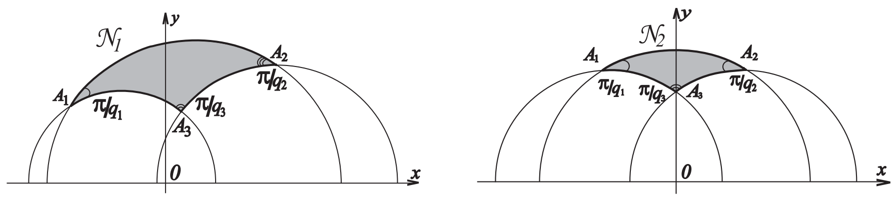
Пример 3. Пусть $\mathscr{N} = \mathbb{E}^3/\Gamma$ — трехмерный орбифолд, построенный в примере 2. Поскольку Γ — группа изометрий евклидова пространства $\mathbb{E}^3$, то $\mathscr{N}$ — плоский риманов орбифолд. Согласно предложению 2 группа изометрий $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ изоморфна фактор-группе $\mathbf{N}(\Gamma)/\Gamma$. Нормализатор $\mathbf{N}(\Gamma) := \{f \in \mathfrak{I}(\mathbb{E}^3) \mid f \circ \Gamma = \Gamma \circ f\}$ состоит из изометрий евклидова пространства $\mathbb{E}^3$ вида $A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & a_{33} \end{pmatrix}$, где $A' \in O(2, \mathbb{R})$, $a_{33} \in \{-1, 1\}$. Из того, что $\mathfrak{I}(\mathscr{N}) \cong O(2, \mathbb{R})/G$, где $G \cong \mathbb{Z}_m$ — подгруппа в $O(2, \mathbb{R})$, порожденная поворотом плоскости Oxy на угол $2\pi/m$, вытекает изоморфность групп Ли $\mathfrak{I}(\mathscr{N})$ и $O(2, \mathbb{R})$.

Пример 4. Пусть гиперболическая плоскость $\mathbb{H}^2$ реализована как верхняя полуплоскость плоскости с координатами $\{x, y\}$ и метрикой $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$, где $y > 0$. Пусть q_i, $i = 1, 2, 3$, — натуральные числа такие, что $\sum\limits_{i=1}^{3} \frac{1}{q_i} < 1$. Как известно [23], для таких чисел q_i существует геодезический треугольник T в $\mathbb{H}^2$ с углами π/q_i, при этом группа Γ изометрий $\mathbb{H}^2$, порожденная отражениями относительно геодезических, ограничивающих треугольник T, является дискретной группой изометрий, а T — ее фундаментальной областью. Фактор-пространство $\mathscr{N}(q_i) := \mathbb{H}^2/\Gamma$ является компактным двумерным гиперболическим орбифолдом, которое можно отождествить с T. Точки внутренности треугольника T являются регулярными точками орбифолда $\mathscr{N}$, а точки границы ∂T — орбифолдными, причем группа орбифолдности вершины $A_i \in T$ изоморфна диэдральной группе порядка q_i, а группы орбифолдности точек ребер (без вершин) изоморфны группе отражений $\mathbb{Z}_2$.

Случай 1. Пусть $\mathscr{N}_1 := \mathscr{N}(q_1, q_2, q_3)$, где натуральные числа q_i попарно различны (см. рис. 2(a)).

Случай 2. Пусть $\mathscr{N}_2 := \mathscr{N}(q_1, q_2, q_3)$, где $q_1 = q_2 \neq q_3$, как на рис. 2(b).

Поскольку любая изометрия сохраняет углы между векторами, то в случае 1 группа $\mathfrak{I}(\mathscr{N}_1)$ изометрий гиперболического орбифолда $\mathscr{N}_1$ тривиальна, а



(a) (b)

Рис. 2. Компактные гиперболические орбифолды

в случае 2 единственная нетривиальная изометрия $\mathcal{N}_2$ является сужением на $\mathcal{N}_2$ глобальной изометрии $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2 : (x, y) \mapsto (-x, y)\ \forall (x, y) \in \mathbb{H}^2$. Таким образом группа $\mathfrak{I}(\mathcal{N}_2)$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$, что согласуется со следствием 6.

Следующий пример показывает, что группа изометрий компактного плоского риманова орбифолда может быть конечной.

Пример 5. Пусть $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ и группа Γ порождена изометриями $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ плоского тора $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^3$, которые задаются равенствами $\gamma_1(z_1, z_2, z_3) := (z_1, \bar{z}_2, -\bar{z}_3)$, $\gamma_2(z_1, z_2, z_3) := (-\bar{z}_1, z_2, \bar{z}_3)$, $\gamma_3(z_1, z_2, z_3) := (\bar{z}_1, -\bar{z}_2, z_3)$, $z_i \in S^1$, $i = 1, 2, 3$, где $\bar{z}$ обозначает число, комплексно сопряженное $z \in \mathbb{C}$. При этом $\gamma_m^2 = \mathrm{id}_{T^3}$, $m = 1, 2, 3$, и $\Gamma \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Изометрия γ_m оставляет инвариантным множество $Q_{(m)}$, состоящее из четырех окружностей, в частности, $Q_{(1)} := \{S^1 \times \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}\}$. При фактор-отображении $\pi : T^3 \to T^3/\Gamma$ окружности из семейства $Q_{(m)}$ склеиваются в одну окружность. Фактор-пространство $\mathcal{N} := T^3/\Gamma$ является компактным плоским трехмерным орбифолдом, гомеоморфным трехмерной сфере S^3, причем множество орбифолдных точек Σ представляет собой дизъюнктное объединение трех зацепленных окружностей, известное под названием «борромеевы кольца» [7].

Согласно предложению 2 группа изометрий $\mathfrak{I}(\mathcal{N})$ изоморфна фактор-группе $\mathbf{N}(\Gamma)/\Gamma$ нормализатора $\mathbf{N}(\Gamma)$ группы Γ в группе $\mathfrak{I}(T^3)$ всех изометрий тора T^3. Нетрудно проверить, что $\mathbf{N}(\Gamma)$ — конечная подгруппа группы $\mathfrak{I}(T^3)$. Поэтому группа изометрий $\mathfrak{I}(\mathcal{N}) \cong \mathbf{N}(\Gamma)/\Gamma$ конечна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Satake I.* On a generalization of the notion of manifold // Proc. Nat. Acad. Sci. 1956. V. 42, N 6. P. 359–363.
2. *Chen W., Ruan Y.* A new cohomology theory of orbifold // Comm. Math. Phys. 2004. V. 248, N 1. P. 1–31.
3. *Жукова Н. И.* Слоения с локально стабильными слоями // Изв. вузов. Математика. 1996. № 7. С. 21–31.
4. *Dixon L., Harwey J. A., Vafa C., Witten E.* Strings on orbifolds (1) // Nucl. Phys. B. 1985. V. 261, N 4. P. 678–686.
5. *Pflaum M. J.* On deformation quantization of symplectic orbispaces // Differential Geom. Appl. 2003. V. 19, N 3. P. 343–368.
6. *Satake I.* The Gauss–Bonnet theorem for V-manifolds // J. Math. Soc. Japan. 1957. V. 9, N 4. P. 464–492.
7. *Thurston W. P.* The geometry and topology of 3-manifolds. Princeton: Princeton Univ., 1978. (Mimeographed Notes).
8. *Borzellino J. E.* Orbifolds of maximal diameter // Indiana U. Math. 1993. V. 42, N 1. P. 37–53.
9. *Borzellino J. E.* Orbifolds with Ricci curvature bounds // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125, N 10. P. 3001–3018.
10. *Borzellino J. E., Zhu S.* The splitting theorem for orbifolds // Illinois J. Math. 1994. V. 38, N 4. P. 679–691.

11. *Myers S. B., Steenrod N.* The group of isometries of a Riemannian manifold // Ann. Math. 1939. V. 40, N 2. P. 400–416.
12. *Bochner S.* Vector fields and Ricci curvature // Bull. Amer. Math. Soc. 1946. V. 52. P. 776–797.
13. *Багаев А. В., Жукова Н. И.* Группы автоморфизмов G-структур конечного типа на орбиобразиях // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 263–278.
14. *Baily W. L. Jr.* The decomposition theorem for V-manifolds // Amer. J. Math. 1956. V. 78, N 4. P. 862–888.
15. *Moerdijk I., Pronk D.* Orbifolds, sheaves and groupoids // K-theory. 1997. V. 12, N 1. P. 3–21.
16. *Bagaev A. V., Zhukova N. I.* Affinely connected orbifolds and their automorphisms // Non-Euclidean geometry in modern physics and mathematics: Proc. of the Intern. conf. BGL-4 (Bolyai–Gauss–Lobachevsky) (Nizhny Novgorod, Sept. 7–11, 2004). Kiev: ІТФ НАН Украіни, 2004. P. 31–48.
17. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 1.
18. *Алексеевский Д. В.* Инвариантная метрика // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1985. Т. 2. С. 529–531.
19. *Бредон Г.* Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980.
20. *Arens R.* A topology for spaces of transformations // Ann. of Math. 1946. V. 47, N 3. P. 480–495.
21. *Винберг Э. Б., Онищик А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: УРСС, 1995.
22. *Montgomery D., Zippin L.* Transformation groups. New York: Interscience, 1955.
23. *Скотт П.* Геометрии на трехмерных многообразиях. М.: Мир, 1986.

Статья поступила 25 апреля 2006 г.

Багаев Андрей Владимирович
Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского,
факультет вычислительной математики и кибернетики,
кафедра теории статистических решений,
пр. Гагарина, 23, корп. 2, Нижний Новгород 603950
an_bagaev@rambler.ru

Жукова Нина Ивановна
Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского,
механико-математический факультет, кафедра геометрии и высшей алгебры,
пр. Гагарина, 23, корп. 2, Нижний Новгород 603950
n.i.zhukova@rambler.ru