Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2007. Том 48, № 2

УДК 512.544

КОНЕЧНЫЕ ПЕРЕКРУЧЕННЫЕ ГРУППЫ

А. Л. Мыльников

Аннотация: Исследуются конечные перекрученные группы, т. е. группы, в которых любое подмножество, содержащее 1 и замкнутое относительно операции $x \circ y = xy^{-1}x$, является подгруппой. Общая проблема изучения таких групп редуцируется к проблеме изучения перекрученных групп нечетного порядка. Классифицируются конечные нильпотентные перекрученные группы.

Ключевые слова: скрученное подмножество, скрученная подгруппа, перекрученная группа.

Основной объект исследований данной работы — понятие скрученного подмножества, которое является обобщением понятия подгруппы.

Определение 0.1. Подмножество K группы G называется *скрученным*, если $1 \in K$ и $xy^{-1}x \in K$ для любых элементов $x, y \in K$.

Очевидно, в произвольной группе любая подгруппа является скрученным подмножеством, но обратное, как показывает следующий пример, неверно.

Пример 0.1. Пусть $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, где $a^2 = b^2 = 1; K = \{1, a, b\}$. Легко показать, что K — скрученное подмножество, но, очевидно, не подгруппа.

Ашбахер в работе [1] показал, что скрученные подмножества связаны с инволютивными автоморфизмами группы. Правда, в своей работе он оперировал не со скрученными подмножествами, а с объектами, названными им *скрученными подгруппами* и определенными следующим образом: подмножество K из группы G называется *скрученной подгруппой*, если $1 \in K$ и $xyx \in K$ для любых $x, y \in K$. Нетрудно показать, что в конечных группах понятия скрученного подмножества и скрученной подгруппы совпадают.

Отметим, что в большинстве случаев построение инволютивных автоморфизмов группы по скрученным подмножествам возможно лишь тогда, когда скрученное подмножество не является подгруппой. Поэтому естественно возникает вопрос: *каково строение групп, у которых любое скрученное подмножество является подгруппой?*

Определение 0.2. Группа называется *перекрученной*, если в ней любое скрученное подмножество является подгруппой.

Основная цель данной работы — доказательство следующих результатов.

Теорема 1. *Для конечной группы G эквивалентны условия:*

1) G — перекрученная группа;

2) $G = O_2(G) \times O(G)$, где $O_2(G)$ — циклическая группа, а $O(G)$ — конечная перекрученная группа нечетного порядка.

Таким образом, исследование конечных перекрученных групп сводится к изучению конечных групп нечетного порядка. В частности, применяя теорему Фейта — Томпсона о разрешимости конечных групп нечетного порядка, получаем

Следствие 1. *Любая конечная перекрученная группа разрешима.*

Теорема 2. *Для конечной нильпотентной группы G нечетного порядка следующие условия эквивалентны:*

1) *G — перекрученная группа;*

2) *G — модулярная группа (т. е. решетка подгрупп группы G модулярна).*

Заметим, что строение конечных модулярных групп известно [2]. Таким образом, получено полное описание конечных нильпотентных перекрученных групп.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. В. Беляеву, под руководством которого выполнена эта работа.

1. Известные результаты

В данном пункте для удобства читателя приведены некоторые результаты, используемые при доказательстве теорем 1, 2.

Лемма 1.1 [2, с. 23, теорема 7]. *Конечная группа квазигамильтонова тогда и только тогда, когда она нильпотентна и ее силовские подгруппы модулярны.* (Определение квазигамильтоновой и модулярной группы см. в [2].)

Лемма 1.2 [2, с. 33, предложение 1.8]. *Пусть G — конечная p-группа. Если при этом G — не модулярная группа, но все ее собственные подгруппы являются модулярными группами, то в G содержится такой нормальный делитель N, фактор-группа G/N по которому имеет порядок p^3 и также не является модулярной группой.*

Лемма 1.3 [2, с. 32, теорема 14]. *Негамильтонова p-группа G тогда и только тогда модулярна, когда в ней содержится абелев нормальный делитель N с циклической фактор-группой G/N и найдутся такой элемент t из G и такое целое число s (не меньше двух при $p = 2$), что $G = \langle N, t\rangle$, и для каждого a из N выполняется соотношение $tat^{-1} = a^{1+p^s}$.*

Лемма 1.4 [2, с. 227]. *Если силовская подгруппа P конечной группы G содержится в центре своего нормализатора, то группа G обладает таким нормальным делителем H, что в качестве представителей смежных классов по H можно взять элементы группы P.*

Лемма 1.5 [5, с. 32]. *Конечная нильпотентная группа G модулярна тогда и только тогда, когда G — прямое произведение своих силовских подгрупп, которые являются модулярными.*

2. Свойства перекрученных групп

В данном пункте излагаются некоторые свойства скрученных подмножеств и перекрученных групп, необходимые для доказательства основных результатов.

Подгруппоид, порожденный некоторым подмножеством $M \cup 1$ группы G, с помощью бинарной операции $x \circ y = xy^{-1}x$, будем обозначать через $Tw(M)$.

Лемма 2.1. *Пусть G — группа, K — скрученное подмножество из G. Тогда для любого элемента x из K множество $\langle x\rangle$ содержится в K.*

Доказательство. Пусть x — элемент из K. Для любого элемента y из K имеем $y^{-1} \in K$, так как $y^{-1} = 1(y)^{-1}1$. Таким образом, достаточно показать, что для любого натурального n будет $x^n \in K$. Доказательство этого факта разбивается на два случая в зависимости от четности n. Оба случая доказываются индукцией по n.

Проведем доказательство в случае, когда n четно. Случай, когда n нечетно, рассматривается аналогично.

База индукции. При $n = 2$ имеем $x^2 = x1x \in K$.

Шаг индукции. Предположим, что $x^k \in K$ для любого четного натурального числа k, меньшего n. Так как $n-2$ четно и $n-2 < n$, по индуктивному предположению $x^{n-2} \in K$. Значит, $x^{-(n-2)} \in K$. Тогда $x^n = x(x^{-(n-2)})^{-1}x \in K$.

Итак, $x^n \in K$ для любого натурального n, и лемма 2.1 доказана. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть G — перекрученная группа. Тогда любая подгруппа из G является перекрученной группой.*

Доказательство легко следует из определения перекрученной группы.

Лемма 2.3. *Пусть G — перекрученная группа. Тогда любой гомоморфный образ группы G является перекрученной группой.*

Доказательство. Пусть H — ядро некоторого гомоморфизма τ группы G, $\overline{K}$ — скрученное подмножество в $\overline{G} := G/H$ и K — полный прообраз $\overline{K}$.

Покажем, что K является скрученным подмножеством.

(1) $1 \in K$, так как $\overline{K}$ содержит 1 группы $\overline{G}$.

(2) Покажем, что $xy^{-1}x \in K$ для любых x, y из K.

Пусть $x, y \in K$ и $\bar{x}$, $\bar{y}$ — образы соответственно элементов x, y. Ясно, что $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{K}$ и, значит, $\bar{x}(\bar{y})^{-1}\bar{x} \in \overline{K}$. Так как $\bar{x}(\bar{y})^{-1}\bar{x} = \overline{xy^{-1}x}$, полный прообраз элемента $\bar{x}(\bar{y})^{-1}\bar{x}$ содержит $xy^{-1}x$.

Итак, K — скрученное подмножество. Поскольку в G любое скрученное подмножество является подгруппой, то K — подгруппа. Но тогда $\overline{K} = K/H$ — подгруппа в $\overline{G}$. Значит, $\overline{G}$ является перекрученной группой. $\square$

Из лемм 2.2, 2.3 и примера 0.1 вытекают

Следствие 2.4. *Любая секция перекрученной группы является перекрученной группой.*

Следствие 2.5. *Перекрученная группа не имеет секций, изоморфных E_4.*

Лемма 2.6. *Пусть G — перекрученная группа. Тогда G содержит не более одной инволюции.*

Доказательство. Пусть E — множество инволюций из G. Нетрудно показать, что $K := E \cup 1$ является скрученным подмножеством. Так как G — перекрученная группа, то K — подгруппа. Таким образом, $xy \in K$ для любых x, y из K. Значит, $xyxy = 1$, т. е. $xy = yx$. Тогда по следствию 2.5 получаем, что G содержит не более одной инволюции. $\square$

Лемма 2.7. *Для конечной 2-группы S следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *S — перекрученная группа;*

(2) *S — циклическая группа.*

Доказательство. Покажем, что из (1) следует (2). Из следствий 2.4 и 2.5 вытекает, что S является группой секционного 2-ранга 1. Значит, $S/\Phi(S)$ — циклическая 2-группа, где $\Phi(S)$ – подгруппа Фраттини группы S. Тогда получаем, что S — циклическая 2-группа.

Теперь покажем, что из (2) следует (1). Пусть K — скрученное подмножество из S. Покажем, что K — подгруппа. Пусть $a, b \in K$. В силу леммы 2.1 достаточно показать, что $ab \in K$. Так как решетка подгрупп циклической 2-группы является цепью, то выполняется одно из включений: $\langle a\rangle \leq \langle b\rangle$ или $\langle b\rangle \leq \langle a\rangle$. В первом случае $ab \in \langle b\rangle$, а во втором $ab \in \langle a\rangle$. По лемме 2.1 $\langle a\rangle \cup \langle b\rangle \subseteq K$, значит, $ab \in K$. $\square$

Лемма 2.8. *Если A, B — периодические перекрученные группы и $\pi(A) \cap \pi(B) = \varnothing$, то $A \times B$ — перекрученная группа.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $2 \in \pi(A)$ и $2 \notin \pi(B)$.

Пусть K — скрученное подмножество из G. Покажем, что K — подгруппа. В силу леммы 2.1 достаточно показать только замкнутость K относительно умножения. Пусть x, y — произвольные элементы из K. Покажем, что $xy \in K$. Имеем $x = a_1b_1$, $y = a_2b_2$, где $a_i \in A$, $b_i \in B$, $i = 1, 2$. Тогда $|x| = |a_1||b_1|$, $|y| = |a_2||b_2|$.

Обозначим через n число $|a_1|$, а через m — число $|b_1|$. Тогда $x^n = (a_1b_1)^n = (b_1)^n$. По лемме 2.1 $(b_1)^n \in K$. Так как $|b_1^n| = |b_1|$, то $\langle b_1\rangle = \langle b_1^n\rangle$, и по лемме 2.1 $b_1 \in K$. Далее, $x^m = (a_1b_1)^m = (a_1)^m$. По лемме 2.1 $(a_1)^m \in K$. Поскольку $|a_1^m| = |a_1|$, имеем $\langle a_1\rangle = \langle a_1^m\rangle$. Тогда по лемме 2.1 $a_1 \in K$.

Аналогично показывается, что $a_2, b_2 \in K$.

Рассмотрим $H := \langle a_1, a_2\rangle$. Поскольку $H \leq A$, то по лемме 2.2 H — перекрученная группа, откуда $H = Tw(a_1, a_2)$. Так как $Tw(a_1, a_2) \subseteq K$, то $a_1a_2 \in K$.

Далее, поскольку $2 \notin \pi(B)$, то для любого b из B существует натуральное число t такое, что $|b| = 2t + 1$. Пусть $|b_1| = 2k + 1$, $|b_2| = 2s + 1$, где k, s — натуральные числа. Тогда для $h := a_1a_2b_1$ имеем $h = a_1a_2b_1^{2k+2} = b_1^{k+1}((a_1a_2)^{-1})^{-1}b_1^{k+1}$. По лемме 2.1 $(a_1a_2)^{-1}$, $b_1^{k+1} \in K$, следовательно, $h \in K$. Тогда $xy = hb_2 = h(b_2)^{2m+2} = (b_2)^{m+1}(h^{-1})^{-1}(b_2)^{m+1} \in K$. Так как по лемме 2.1 h^{-1}, $(b_2)^{m+1} \in K$, то $xy \in K$, и лемма 2.8 доказана. $\square$

Из леммы 2.8 вытекает

Следствие 2.9. *Если G_i, $i = 1, \dots, n$, — периодическая перекрученная группа и $\pi(G_i) \cap \pi(G_j) = \varnothing$ при $i \neq j$, то $G_1 \times \dots \times G_n$ — перекрученная группа.*

3. Редукция к группам нечетного порядка

В данном пункте излагается доказательство теоремы 1.

Покажем, что из (1) следует (2). Пусть S — силовская 2-подгруппа из группы G. По лемме 2.7 S циклическая.

Заметим, что $|G/O_2(G)|$ нечетно. Действительно, в противном случае, применяя лемму 2.6, получаем, что фактор-группа $G/O_2(G)$ содержит ровно одну инволюцию, которая, очевидно, лежит в $Z(G/O_2(G))$. Но тогда получаем противоречие с определением $O_2(G)$.

Далее, в силу нечетности $|G/O_2(G)|$ имеем $S = O_2(G)$. Так как S — циклическая 2-группа, то $\operatorname{Aut} S$ является 2-группой. Поскольку $G/C_G(S)$ изоморфно вкладывается в $\operatorname{Aut} S$, $S \leq C_G(S)$ и $|G/S|$ нечетно, то $|G/C_G(S)| = 1$. Значит, $G = C_G(S)$, т. е. $S \leq Z(G)$. Тогда по лемме 1.4 существует нормальная подгруппа H из G такая, что $G = S \times H$. По лемме 2.2 H — перекрученная группа. Очевидно, что $O(G) = H$. Таким образом, $G = O_2(G) \times O(G)$.

Покажем, что из (2) следует (1). По лемме 2.7 $O_2(G)$ — перекрученная группа, а $O(G)$ — перекрученная группа по условию и $(|O_2(G)|, |O(G)|) = 1$, следовательно, по лемме 2.8 получаем, что G является перекрученной группой. Теорема 1 доказана.

4. Конечные нильпотентные перекрученные группы

В данном пункте излагается доказательство теоремы 2. В силу леммы 1.5 и следствия 2.9 теорема 2 вытекает из теоремы 4.1.

Теорема 4.1. *Для конечной p-группы P, где p — нечетное простое число, следующие условия эквивалентны:*
(1) P — перекрученная группа;
(2) P — модулярная группа.

Доказательство того, что из (1) следует (2), разобьем на ряд утверждений.

Лемма 4.2. *Пусть $G = (\langle a\rangle \times \langle z\rangle)\lambda\langle b\rangle$, где $|a| = |b| = |z| = p$, p простое, $p \neq 2$ и $z = [a, b], [b, z] = 1$. Тогда G не является перекрученной группой.*

Доказательство. Пусть $K := \{a^k b^s a^k \mid k, s \text{ целые}\}$. Покажем, что K является скрученным подмножеством.

1. $1 \in K$, так как $1 = a^0 b^0 a^0$.

2. Покажем, что для любых элементов x, y из K будет $xy^{-1}x \in K$.

Пусть $x, y \in K$. Имеем $x = a^k b^s a^k$, $y = a^m b^t a^m$ для некоторых целых чисел k, s, t, m. Тогда

$$\begin{aligned} xy^{-1}x &= a^k b^s a^k a^{-m} b^{-t} a^{-m} a^k b^s a^k \\ &= a^{2k-m}(a^{-(k-m)} b^s a^{k-m} b^{-s}) b^{2s-t} (b^{-s} a^{k-m} b^s a^{-(k-m)}) a^{2k-m}. \end{aligned}$$

Пусть $h_1 := a^{-(k-m)} b^s a^{k-m} b^{-s}$, $h_2 := b^{-s} a^{k-m} b^s a^{-(k-m)}$. Так как G нильпотентна класса 2, получаем, что $h_1, h_2 \in Z(G)$. Тогда

$$xy^{-1}x = a^{2k-m} h_1 b^{2s-t} h_2 a^{2k-m} = a^{2k-m} b^{2s-t} a^{2k-m} h_1 h_2.$$

Имеем

$$h_2 = b^{-s} a^{k-m} b^s a^{-(k-m)} = a^{k-m} b^{-s} (h_1)^{-1} b^s a^{-(k-m)} = (h_1)^{-1}.$$

Следовательно, $xy^{-1}x = a^{2k-m} b^{2s-t} a^{2k-m} \in K$. Значит, K является скрученным подмножеством.

Далее, $b = a^0 b^1 a^0 \in K$. Так как $p \neq 2$, существует натуральное t такое, что $p = 2t + 1$. Тогда $a = a^{2t+2} = a^{t+1} b^0 a^{t+1} \in K$. Таким образом, $G = \langle K\rangle$.

Очевидно, что $|K| \leq p^2$. Значит, $|G| = p^3 > |K|$. Следовательно, $G \neq K$. Таким образом, получаем, что G не является перекрученной группой, и доказательство леммы 4.2 завершено. $\square$

Лемма 4.3. *Среди групп порядка p^3 только группа, имеющая следующее строение: $(\langle a\rangle \times \langle z\rangle)\lambda\langle b\rangle$, где $|a| = |b| = |z| = p$, p простое, $p \neq 2$, $z = [a, b]$, $[b, z] = 1$, не является модулярной.*

Доказательство. По [4, с. 147] существует пять неизоморфных групп порядка p^3, три из которых абелевы. Среди неабелевых групп порядка p^3 одна имеет строение $(\langle a\rangle \times \langle z\rangle)\lambda\langle b\rangle$, где $|a| = |b| = |z| = p$, p простое, $p \neq 2$, $z = [a, b], [b, z] = 1$, а другая — $\langle a, b : |a| = p^2, |b| = p, b^{-1}ab = a^{1+p}\rangle$. Конечные абелевы группы являются модулярными. Тогда из леммы 1.3 следует, что только группа, указанная в лемме, не является модулярной. $\square$

Приступим теперь к доказательству того, что из (1) следует (2).

Пусть P — минимальный контрпример, т. е. P является перекрученной группой и P не является модулярной, но любая ее собственная подгруппа модулярна. Тогда по лемме 1.2 существует нормальная подгруппа N из P такая, что P/N не является модулярной и $|P/N| = p^3$. Применяя лемму 4.3, получаем, что $P/N \cong (\langle a\rangle \times \langle z\rangle)\lambda\langle b\rangle$, где $|a| = |b| = |z| = p$, p простое, $p \neq 2$, $z = [a, b]$, $[b, z] = 1$. По лемме 4.2 P/N не является перекрученной группой. Тогда по лемме 2.3 P также не перекрученная группа, что противоречит выбору контрпримера.

Теперь покажем, что в теореме 4.1 из (2) следует (1). Доказательство разбивается на ряд утверждений.

Лемма 4.4. *Пусть G — группа и существуют $a, b \in G$ такие, что $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$. Тогда существуют $a' \in \langle a\rangle$, $b' \in \langle b\rangle$ такие, что $Z(G) = \langle a', b'\rangle$.*

Доказательство. Пусть $x \in Z(G)$. Тогда $x = a_1b_1$, где $a_1 \in \langle a\rangle, b_1 \in \langle b\rangle$. Имеем

$$a_1ba_1^{-1}b^{-1} = a_1b_1b_1^{-1}bb_1b_1^{-1}a_1^{-1}b^{-1} = ba_1b_1b_1^{-1}a_1^{-1}b^{-1} = 1,$$

откуда получаем, что $a_1 \in Z(G)$. Тогда $b_1 = a_1^{-1}x \in Z(G)$. Таким образом,

$$Z(G) = \{a_ib_i \mid a_i \in \langle a\rangle,\ b_i \in \langle b\rangle,\ i \in I\}.$$

Рассмотрим подгруппы $A := \langle a_i \mid i \in I\rangle$ и $B := \langle b_i \mid i \in I\rangle$. Ясно, что $A = \langle a'\rangle$ и $B = \langle b'\rangle$, где a' — некоторый элемент из $\langle a\rangle$, b' — некоторый элемент из $\langle b\rangle$. Нетрудно видеть, что $Z(G) = AB$, и лемма 4.4 доказана. □

Лемма 4.5. *Конечная квазигамильтонова p-группа ($p \neq 2$) перекручена.*

Доказательство. Пусть группа G — минимальный контрпример к данной лемме, т. е. G — квазигамильтонова, но не перекрученная группа, и любая квазигамильтонова группа, имеющая меньший порядок, чем G, является перекрученной группой.

Так как G не является перекрученной группой, то существует скрученное подмножество K из G такое, что $K \neq \langle K\rangle$. Таким образом, существуют $a, b \in K$ такие, что $ab \notin K$. Легко видеть, что $G = \langle a, b\rangle$. Так как G квазигамильтонова, для любых подгрупп A, B из G выполняется $\langle A, B\rangle = AB = BA$. Тогда $G = \langle a, b\rangle = \langle a\rangle\langle b\rangle$. По лемме 4.4 существуют $a' \in \langle a\rangle$, $b' \in \langle b\rangle$ такие, что $Z(G) = \langle a', b'\rangle$. По лемме 2.1 $\langle a\rangle \cup \langle b\rangle \subseteq K$, следовательно, $a', b' \in K$.

Покажем, что $Z(G) \subseteq K$, для чего достаточно показать, что для любых элементов x, y из $Tw(a', b')$ справедливо $xy \in Tw(a', b')$.

Так как $|G|$ нечетно, существует целое число m такое, что $|x| = 2m + 1$. Тогда $xy = x^{2m+2}y = x^{m+1}(y^{-1})^{-1}x^{m+1}$. Поскольку по лемме 2.1 $x^{m+1}, y^{-1} \in Tw(a', b')$, получаем, что $xy \in Tw(a', b') \subseteq K$. Тем самым $Z(G) \subseteq K$.

Пусть g — произвольный элемент из K. Тогда $|g| = 2t + 1$ для некоторого целого числа t. Так как по лемме 2.1 $g^{t+1} \in K$, имеем $gZ(G) = g^{2t+2}Z(G) = g^{t+1}Z(G)g^{t+1} \subseteq K$.

Итак, для любого элемента g из K справедливо $gZ(G) \subseteq K$.

Так как G — p-группа, то $Z(G) = \langle a', b'\rangle \neq 1$.

Пусть $\overline{G} := G/Z(G)$ и $\overline{K}$ — образ K в $\overline{G}$. Ясно, что $\overline{G} = \langle \bar{a}, \bar{b}\rangle$, где $\bar{a}, \bar{b}$ — образы элементов a, b. Легко видеть, что $\overline{K}$ — скрученное подмножество в $\overline{G}$.

В силу того, что $|\overline{G}| < |G|$, имеем $\overline{K} = \overline{G}$. Тогда $K = G$, так как полный прообраз $\overline{K}$ в G совпадает с K. Получили противоречие с выбором контрпримера G, которое доказывает лемму 4.5. □

Из леммы 1.1 следует, что классы квазигамильтоновых и модулярных конечных p-групп совпадают. Тогда по лемме 4.5 получаем, что из (2) вытекает (1), и теорема 4.1 доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aschbacher M.* Near subgroups of finite groups // J. Group Theory. 1998. V. 1, N 2. P. 113–129.

2. *Судзуки М.* Строение группы и строение структуры ее подгрупп. М.: Изд-во иностр. лит, 1960.

3. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит, 1962.

4. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. М.* Основы теории групп. М.: Наука, 1972.

Статья поступила 1 апреля 2003 г., окончательный вариант — 24 января 2006 г.

Мыльников Андрей Леонидович
Красноярский гос. университет, факультет математики и информатики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
mylnand@yandex.ru