Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2006. Том 47, № 6

УДК 519.21

ИНТЕГРО–ЛОКАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С СЕМИЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

А. А. Боровков, А. А. Могульский

Аннотация: Получены интегро-локальные и интегральные предельные теоремы для сумм $S(n) = \xi(1) + \dots + \xi(n)$ независимых случайных величин с общим семиэкспоненциальным распределением (т. е. с распределением, правый хвост которого имеет вид $\mathbf{P}(\xi \geq t) = e^{-t^\beta L(t)}$, $\beta \in (0,\ 1)$, $L(t)$ — медленно меняющаяся функция, обладающая некоторыми свойствами гладкости). Эти теоремы описывают асимптотическое поведение при $x \to \infty$ вероятностей

$$\mathbf{P}(S(n) \in [x, x + \Delta)) \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(S(n) \geq x)$$

в зоне нормальных и во всех зонах больших уклонений x: в крамеровской и промежуточной зонах, а также в «крайней» зоне, где распределение $S(n)$ аппроксимируется распределением максимального слагаемого.

Ключевые слова: семиэкспоненциальное распределение, интегро-локальная теорема, функция уклонений, ряд Крамера, отрезок ряда Крамера (урезанный ряд Крамера), случайное блуждание, большие уклонения, крамеровская зона уклонений, промежуточная зона уклонений, зона аппроксимации максимальным слагаемым.

§ 1. Основные обозначения. Постановка задачи

Пусть $\xi, \xi(1), \xi(2), \dots$ — независимые случайные величины с общим распределением $\mathbf{F}(B) = \mathbf{P}(\xi \in B)$, средним $a := \mathbf{E}\xi$, дисперсией $b^2 := \mathbf{D}\xi$ и характеристической функцией $\mathfrak{f}(t) = \mathbf{E}e^{it\xi}$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 1.1. Будем говорить, что распределение $\mathbf{F}$ случайной величины ξ *принадлежит классу* $\mathcal{S}e$ *семиэкспоненциальных распределений*, если его правый хвост $F_+(t) := \mathbf{P}(\xi \geq t)$ имеет вид

$$F_+(t) = V(t) := e^{-l(t)} \quad \text{при } t \geq 0, \tag{1.1}$$

где

$$l(t) = t^\beta L(t), \tag{1.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00810), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–2139.2003.1) и INTAS (N 02–51–5019).

$\beta \in [0,1]$, $L(t)$ — медленно меняющаяся функция (м.м.ф.) при $t \to \infty$; если $\beta = 1$, то $L(t) = o(1)$. При этом предполагается, что при $t \to \infty$, $v = o(t)$

$$l(t+v) - l(t) = v\frac{\beta l(t)}{t}(1 + o(1)) + o(1). \tag{1.3}$$

Соотношение (1.3) означает, что

$$l(t+v) - l(t) = \begin{cases} v\frac{\beta l(t)}{t}(1+o(1)), & \text{если } \liminf\limits_{t\to\infty} \frac{vl(t)}{t} > 0, \\ o(1), & \text{если } \limsup\limits_{t\to\infty} \frac{vl(t)}{t} = 0. \end{cases}$$

Не ограничивая общности, мы можем рассматривать лишь два типа распределений (или случайных величин).

[Z]. *Арифметический*, когда $\mathbf{P}(\xi \in \mathbb{Z}) = 1$ и для некоторого $y_0 \in \mathbb{Z}$ такого, что $\mathbf{P}(\xi = y_0) > 0$, наибольший общий делитель возможных значений $\xi - y_0$ равен 1 ($\mathbb{Z}$ — множество целых чисел).

Ясно, что для арифметических случайных величин выполняется $\mathfrak{f}(2\pi t) = 1$ при любом целом t.

[R]. *Нерешетчатый*, когда никаким линейным преобразованием величина ξ не может быть сделана арифметической.

Для нерешетчатых случайных величин выполняется $|\mathfrak{f}(t)| < 1$ при любом вещественном $t \neq 0$.

Если выполнено условие [R], то достаточным для выполнения (1.3) является условие

[D_1]. *Функция $L(t)$ при некотором $t_0 > 0$ и всех $t \geq t_0 > 0$ дифференцируема, и*

$$L'(t) = o(L(t)/t) \tag{1.4}$$

при $t \to \infty$.

Действительно, в силу [D_1]

$$l'(t) = \frac{l(t)}{t}(\beta + o(1)), \tag{1.5}$$

поэтому, используя (1.5) и равенство

$$l(t+v) - l(t) = \int\limits_t^{t+v} l'(u)\,du,$$

получаем соотношение (1.3), в котором будет отсутствовать последний остаточный член $o(1)$.

Аналогично убеждаемся, что в арифметическом случае для выполнения условия (1.3) (тоже без последнего остаточного члена $o(1)$) достаточно, чтобы

$$L(k+1) - L(k) = o(L(k)/k)$$

при $k \to \infty$. Это условие также можно записать в дифференциальном виде (1.4) для какой-нибудь дифференцируемой (или п. в. дифференцируемой) интерполяции L^* функции L (например, для линейной интерполяции $L^*(t) = L([t])(1 - \{t\}) + L([t]+1)\{t\}$, где $\{t\} := t - [t]$ — дробная часть t).

Отметим также, что если $\mathbf{F} \in \mathcal{S}e$ (выполнено (1.1)–(1.3)), то распределение $\mathbf{F}^*$ с хвостом $F_+^*(t) = e^{-l^*(t)}$, $l^*(t) = l(t) + o(1)$ при $t \to \infty$, также принадлежит $\mathcal{S}e$.

Класс $\mathcal{S}e$ семиэкспоненциальных распределений определен и достаточно полно изучен в [1, 2]. Хорошо известно, что он является подклассом класса

$\mathcal{S}$ *субэкспоненциальных распределений*, которые при $\mathbf{E}\xi \geq 0$ характеризуются соотношением

$$\mathbf{P}(\xi(1) + \xi(2) \geq t) \sim 2\mathbf{P}(\xi \geq t) \quad \text{при } t \to \infty. \tag{1.6}$$

Всюду в настоящей работе мы будем рассматривать только такие семиэкспоненциальные распределения $\mathbf{F}$, для которых параметр β (см. определение 1.1) лежит в интервале $(0, 1)$.

Обозначим через $\Delta[x) = [x, x + \Delta)$ полуинтервал, начинающийся в точке x и имеющий длину $\Delta > 0$, и положим

$$S(n) = \xi(1) + \cdots + \xi(n).$$

В настоящей работе изучается асимптотическое поведение вероятностей

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta[x)), \tag{1.7}$$

где $n \geq 1$, $x \to \infty$ (в «крайних» зонах уклонений (см. ниже) возможность, когда $n \geq 1$ остается ограниченным при $x \to \infty$, не исключается); параметр $\Delta > 0$ может быть любым фиксированным положительным числом в случае [R] и $\Delta = 1$ в случае [Z]. Заметим, что в случае [Z] полуинтервал $\Delta[x)$ для $\Delta = 1$ содержит единственную целочисленную точку и вместо (1.7) будем для целочисленных x изучать вероятности

$$\mathbf{P}(S(n) = x). \tag{1.8}$$

Утверждения об асимптотическом поведении вероятностей (1.7) называют *интегро-локальными теоремами* (иногда — *локальными*, см., например, [3]) в отличие от интегральных теорем, в которых изучаются вероятности вида

$$\mathbf{P}(S(n) \geq x),$$

и локальных теорем, в которых изучается асимптотика плотности случайной величины $S(n)$, если таковая имеется, или вероятности вида (1.8) в арифметическом случае. Как правило, интегральные теоремы можно получить как следствия из соответствующих интегро-локальных (или локальных) теорем, но не наоборот, так что интегро-локальные теоремы являются более сильными. К настоящему времени теория интегральных теорем для сумм случайных величин с распределением из класса $\mathcal{S}e$ развита достаточно полно (см. обзор, приведенный ниже), в то время как о существовании работ, посвященных интегро-локальным теоремам, нам ничего не известно. В то же время есть ситуации, когда, по существу, нужны именно интегро-локальные теоремы, например при изучении вероятностей больших уклонений с помощью преобразования Крамера, при решении некоторых граничных задач для случайных блужданий, при описании асимптотики вероятностей так называемых сверхбольших уклонений и в ряде других случаев. В настоящей работе такие теоремы получены вместе с обобщениями и усилениями известных интегральных теорем.

Для того чтобы сделать краткий обзор известных результатов, касающихся интегральных теорем для сумм $S(n)$ слагаемых из $\mathcal{S}e$, и сформулировать интегро-локальные теоремы, полученные в настоящей работе, нам потребуется еще ряд обозначений. Определим, следуя [1, 2], функции

$$w_1(t) = \frac{l(t)}{t^2} = t^{\beta-2}L(t), \quad w_2(t) = \frac{l^2(t)}{t^2} = t^{2\beta-2}L^2(t),$$

которые сходятся к 0 при $t \to \infty$, при этом, очевидно, $w_1(t) = o(w_2(t))$ при $t \to \infty$. Важную роль в описании зон уклонений играют обратные функции

$$\sigma_i(t) := w_i^{(-1)}(1/t) = \inf\{u : w_i(u) \leq 1/t\}, \quad i = 1, 2,$$

также введенные и изученные в $[1, 2]$ и допускающие представления

$$\sigma_1(t) = t^{\frac{1}{2-\beta}} L_1(t), \quad \sigma_2(t) = t^{\frac{1}{2-2\beta}} L_2(t), \tag{1.9}$$

где $L_1(t), L_2(t)$ — м.м.ф. При этом выполнены соотношения $w_i(\sigma_i(t)) \sim \frac{1}{t}$ при $t \to \infty$, $i = 1, 2$, так что

$$l(\sigma_1(n)) \sim \frac{\sigma_1^2(n)}{n}, \quad l(\sigma_2(n)) \sim \frac{\sigma_2(n)}{\sqrt{n}}, \quad n \to \infty \tag{1.10}$$

(см., например, $[1, 2]$).

Нам понадобится следующее моментное условие (для распределения $\mathbf{F}$ из $\mathcal{S}e$ оно регламентирует убывание его левого хвоста):

$$\mathbf{E}|\xi|^{\kappa} < \infty, \tag{1.11}$$

где $\kappa := \inf\bigl\{j \geq 2 : \limsup\limits_{n\to\infty} \sigma_1^j(n) n^{1-j} < \infty\bigr\}$. Нетрудно видеть, что если $\frac{1}{1-\beta}$ не целое, то $\kappa = \bigl[\frac{1}{1-\beta}\bigr] + 2$. Если $\frac{1}{1-\beta}$ целое и $L(t) \sim L = \mathrm{const}$, то последовательность $\sigma_1(n)$ имеет вид $\sigma_1(n) \sim (Ln)^{\frac{1}{2-\beta}}$ и $\kappa = \bigl[\frac{1}{1-\beta}\bigr] + 1$.

Из условия (1.11) следует, что для центрированной случайной величины $\xi - a$ определены и конечны *семиинварианты* (см., например, [4])

$$\gamma_j = i^{-j} \frac{d^j \ln(\mathfrak{f}(t) e^{-iat})}{dt^j}\Big|_{t=0} \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, \kappa,$$

при этом $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = \mathbf{D}\xi$. С помощью семиинвариантов $\gamma_2, \dots, \gamma_\kappa$ можно построить полином степени κ

$$^{\kappa}\Lambda(\alpha) = \sum_{j=2}^{\kappa} \alpha^j \frac{v_j}{j!}, \tag{1.12}$$

где коэффициенты $v_j = v_j(\gamma_2, \dots, \gamma_j)$ являются «абсолютными» (не зависящими от распределения $\xi - a$) функциями своих аргументов, алгоритм построения которых приведен в п. 4.3. В частности, $v_2 = \frac{1}{\gamma_2}, v_3 = -\frac{\gamma_3}{\gamma_2^3}, v_4 = -\frac{\gamma_4\gamma_2 - 3\gamma_3^2}{\gamma_2^5}$ и т. д. Полином (1.12) называют *отрезком ряда Крамера* (*или урезанным рядом Крамера*) для случайной величины $\xi - a$ (см., например, [4]).

Интегральные теоремы для слагаемых ξ, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{E}(e^{h(\xi)}; \xi \geq 0) < \infty, \tag{1.13}$$

где функция $h(t)$ обладает свойствами, близкими к (1.1), (1.2), получены в [5–7] в области уклонений, в которой действует так называемая «крамеровская аппроксимация» с помощью «урезанного ряда» (1.12) (см. (1.15)). Заметим, что если $\mathbf{F} \in \mathcal{S}e$, то условие (1.13) будет выполнено для функции $h(t) = l(t) - (\beta + \varepsilon)\ln t$ при любом $\varepsilon > 0$. Эта функция «почти совпадает» с $l(t)$.

В работах [8–13] для тех же целей использовалось более сильное двустороннее условие

$$\mathbf{E}e^{h(|\xi|)} < \infty. \tag{1.14}$$

Пусть $g(n)$ — решение уравнения $x^2 = nh(x)$ (если $h(t) \sim l(t)$, где $l(t)$ определено в (1.2), (1.3), то $g(n) \sim \sigma_1(n)$). Из названных работ вытекает равномерное по $x \in [0, g(n)]$ приближение

$$\mathbf{P}(S(n) - an \geq x) = \Phi(-x/b\sqrt{n}) e^{-{}^{\kappa}\Lambda_0(\frac{x}{n})n}(1 + o(1)), \tag{1.15}$$

где

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du, \quad {}^{\kappa}\Lambda_0(t) = {}^{\kappa}\Lambda(t) - \frac{t^2}{2b^2}.$$

Аппроксимацию (1.15) называют «крамеровской». Отметим также, что в работе [5] для заданной функции $g(n)$ найдены необходимые и достаточные условия для справедливости (1.15) в зоне $x \in [0, g(n)]$. Как показано в $[1, 2]$ и как будет видно из дальнейшего, определяющую роль в описании вероятностей больших уклонений вне крамеровской зоны в случае $\mathbf{F} \in \mathcal{S}e$ играет функция

$$M_0(x,n) := \inf_{0 \le t \le x} \{l(x-t) + {}^{\kappa}\Lambda(t/n)n\}. \tag{1.16}$$

Эта функция при $x \gg \sigma_1(n)$, $n \to \infty$, имеет вид $[1, 2]$

$$M_0(x,n) \sim l(x) - (\beta^2/2)nw_2(x)(1+o(1)) = l(x)(1-(\beta^2/2)nw_1(x))(1+o(1)).$$

Поскольку в зоне $x \gg \sigma_1(n)$ выполняется соотношение $nw_1(x) = o(1)$, для таких x

$$M_0(x,n) \sim l(x). \tag{1.17}$$

Если же $x \gg \sigma_2(n)$, то справедливы соотношения $nw_2(x) = o(1)$ и

$$M_0(x,n) = l(x) + o(1). \tag{1.18}$$

Область $\sigma_1(n) \ll x = o(\sigma_2(n))$, где выполняется (1.17), но не выполняется (1.18), названа в $[1, 2]$ *промежуточной зоной.* В ней при некоторых дополнительных условиях на $V(t)$ (см. $[1, 2]$ и обзор в [2])

$$\mathbf{P}(S(n) \ge x) \sim ne^{-M_0(x,n)} \quad \text{при } n \to \infty.$$

Аналогичные результаты получены в $[7, 13, 14]$ при выполнении условий (1.13), (1.14) и подходящих условий на $h(t)$. Область уклонений $x \gg \sigma_2(n)$, где выполняется (1.18), названа в $[1, 2]$ *зоной аппроксимации суммы $S(n)$ максимальным скачком* $\bar{\xi}(n) = \max_{1 \le k \le n} \xi(n)$. В ней при $n \to \infty$ (см. $[7, 15–17, 1, 2]$ и обзор в [2])

$$\mathbf{P}(S(n) \ge x) \sim \mathbf{P}(\bar{\xi}(n) > x) \sim n\mathbf{P}(\xi \ge x).$$

В работе [7] при выполнении условий, близких к (1.13), рассматривались теоремы об асимптотике $\mathbf{P}(S(n) \ge x)$, *действующие на всей оси* (более подробный комментарий см. после теоремы 2.2). Некоторые результаты, касающиеся больших уклонений сумм $S(n)$ для распределений, удовлетворяющих (1.14), можно найти в $[6, 13]$ (там же см. более полную библиографию). Отметим еще, что в работах $[1, 2, 18, 19]$ изучалась близкая к рассматриваемой, но более трудная задача об асимптотике

$$\mathbf{P}(\max_{1 \le k \le n} S(k) \ge x)$$

в некрамеровской зоне уклонений $x \gg \sigma_1(n)$. В [20] эта задача рассматривалась в крамеровской зоне.

Остановимся кратко на основных результатах настоящей работы. В теореме 2.1 найдена логарифмическая асимптотика в интегральной теореме, т. е. асимптотика $\ln \mathbf{P}(S(n) \ge x)$ при $n \to \infty$ в области $x \gg \sqrt{n}$. При этом указана точная граница крамеровской зоны уклонений, т. е. зоны, в которой имеет место соотношение

$$\ln \mathbf{P}(S(n) \ge x) \sim -\frac{x^2}{2n} \quad \text{при } n \to \infty. \tag{1.19}$$

Именно, доказано, что в области $\sqrt{n} \ll x \le s_0\sigma_1(n)$, где

$$s_0 := \frac{(2-\beta)}{(2-2\beta)^{\frac{1-\beta}{2-\beta}}}, \tag{1.20}$$

имеет место соотношение (1.19), а для уклонений $x \ge s\sigma_1(n)$ при любом фиксированном $s > s_0$ соотношение (1.19) уже не верно.

Основные результаты работы относятся к *интегро-локальным теоремам* для любых уклонений $x \ge \sqrt{n}$ (теоремы 2.3, 2.4). Интегро-локальные теоремы получены и «на стыках» рассмотренных выше зон уклонений, а именно для уклонений вида $x \sim s\sigma_1(n)$ и $x \sim s\sigma_2(n)$ для любых фиксированных $s > 0$. Получена также интегральная теорема, действующая «на всей оси» (теорема 2.2), которая обобщает известные теоремы интегрального вида, упомянутые в обзоре, приведенном выше.

Работа имеет следующую структуру. В § 2 содержатся формулировки основных результатов. В § 3 приведены доказательства ряда основных утверждений работы. В их основе лежит тот факт, что основной вклад в вероятность события $\{S(n) \in \Delta[x)\}$ дают суммы, у которых либо все слагаемые «не очень большие» (суммы «срезанных» слагаемых), либо присутствует один «большой» скачок. Интегро-локальное утверждение для сумм срезанных случайных величин приведено в лемме 3.1, доказательство которой содержится в § 4. Отметим, что лемма 3.1 посвящена изучению больших уклонений сумм случайных величин, удовлетворяющих условию Крамера в *схеме серий*, и лежит в русле работ [21–23]. В целом же работа является продолжением исследований, изложенных в [1] и в гл. 5 монографии [2].

§ 2. Формулировки основных результатов

2.1. Теорема о грубой (логарифмической) асимптотике вероятностей больших уклонений сумм $S(n)$. Для упрощения формулировок будем считать, что *выполнено условие*

$$a := \mathbf{E}\xi = 0, \quad b^2 := \mathbf{D}\xi = 1, \tag{2.1}$$

если не оговорено противное. Как отмечено в § 1, определяющую роль в описании больших уклонений сумм $S(n)$ в некрамеровской зоне играет функция $M_0(x, n)$, определенная в (1.16). При $x \gg \sigma_1(n)$ свойства этой функции изучены в [1, 2]. В частности, при $x \gg \sigma_1(n)$, $n \to \infty$, выполняется (1.17). Обозначим

$$M(x, t, n) := l(x - t) + {}^{\kappa}\Lambda(t/n)n. \tag{2.2}$$

Нетрудно видеть, что функция (см. (1.1))

$$l(t) := -\ln \mathbf{P}(\xi \ge t)$$

полунепрерывна снизу: $\liminf_{t\to t_0} l(t) \ge l(t_0)$, а значит, этим же свойством обладает функция $M(x, t, n)$ аргумента t. Следовательно, для фиксированного $\delta \in [0, 1)$ существует точка $t_\delta(x, n)$ из отрезка $[0, (1-\delta)x]$, в которой достигается минимум $M_\delta(x, n)$ функции $M(x, t, n)$ по этому отрезку:

$$M_\delta(x, n) := \min_{0\le t\le(1-\delta)x} M(x, t, n) = M(x, t_\delta(x, n), n). \tag{2.3}$$

При изучении асимптотики $\mathbf{P}(S(n) \ge x)$ в переходной зоне $x = s_1\sigma_1(n)$ при фиксированном $s_1 \in (0, \infty)$ нам понадобятся свойства функции $M_\delta(x, n)$, где δ мы выберем позже. Как и в случае $x \gg \sigma_1(n)$, функция $M_\delta(x, n), \delta > 0$, появляется при оценке главной части свертки крамеровского приближения для $S(n-1)$ и приближения $nV(t)$ для хвоста распределения $\overline{\xi}(n) = \max\limits_{k\le n} \xi(k)$ по области $t > \delta x$; при этом, как правило, значение δx в дальнейших рассмотрениях будет определять уровень срезки случайной величины $\xi(k)$ (подробнее об этом см. ниже, в § 4). Заметим, что в [1, 2] в доказательствах на самом деле тоже фигурирует не функция $M_0(x, n)$, а $M_\delta(x, n)$ при $\delta > 0$. Однако при $x \gg \sigma_1(n)$ асимптотики этих функций, как будет видно из дальнейшего, совпадают (и, стало быть, от δ не зависят); поэтому вместо M_δ иногда проще рассматривать M_0.

Заметим, что асимптотика $M_0(x,n)$ в зоне $x = s_1\sigma_1(n)$ при любом фиксированном $s_1 \in (0,\infty)$ является «переходной» между асимптотиками $l(x)$ и $\frac{x^2}{2n}$, которые соответствуют сходимостям $s_1 \to \infty$ и $s_1 \to 0$. В связи с этим представляют интерес пределы отношений (они, вообще говоря, зависят от δ)

$$G_1(s_1) := \lim_{n\to\infty} \frac{M_\delta(x,n)}{l(x)} \quad \text{и} \quad G_2(s_1) := \lim_{n\to\infty} \frac{2nM_\delta(x,n)}{x^2}, \tag{2.4}$$

где $x = s_1\sigma_1(n)$. Поскольку при $t \gg \sqrt{n}$ выполняется

$$^\kappa\Lambda\left(\frac{t}{n}\right)n \sim \frac{t^2}{2n}, \tag{2.5}$$

полагая $t = px$, $p \in [0, 1-\delta]$, в силу (1.9), (1.10) для $x = s_1\sigma_1(n)$, $n \to \infty$, получаем

$$\begin{aligned} M_\delta(x,n) &\sim \min_{0\le p\le 1-\delta}\left\{(1-p)^\beta l(x) + \frac{p^2x^2}{2n}\right\} \\ &= l(x)\min_{0\le p\le 1-\delta}\left\{(1-p)^\beta + \frac{p^2s_1^2\sigma_1^2(n)}{2nl(s_1\sigma_1(n))}\right\} \sim l(x)\min_{0\le p\le 1-\delta}\left\{(1-p)^\beta + \frac{p^2s_1^{2-\beta}}{2}\right\}; \end{aligned}$$

$$M_\delta(x,n) \sim \frac{x^2}{2n}\min_{0\le p\le 1-\delta}\left\{2s_1^{\beta-2}(1-p)^\beta + p^2\right\}.$$

Отсюда следует, что пределы в (2.4) имеют соответственно вид

$$G_i(s) = \min_{0\le p\le 1-\delta} H_i(s,p) \tag{2.6}$$

при $s = s_1$, $i = 1, 2$,

$$H_1(s,p) := (1-p)^\beta + \frac{p^2s^{2-\beta}}{2}, \quad H_2(s,p) := 2s^{\beta-2}(1-p)^\beta + p^2.$$

Изучим теперь свойства функций $G_1(s)$, $G_2(s)$. Максимальное p из отрезка $[0, 1-\delta]$, для которого достигается минимум в (2.6), обозначим через $p_\delta(s)$, так что $G_i(s) = H_i(s, p_\delta(s))$ для $i = 1, 2$ (очевидно, что $p_\delta(s)$ не зависит от i). Функции $M_\delta(x,n)$ и $p_\delta(s)$ при $\delta = \frac{1-\beta}{2-\beta}$ будем обозначать через $M(x,n)$ и $p(s)$ соответственно.

Лемма 2.1. *При $\delta = \frac{1-\beta}{2-\beta}$ функции $G_1(s)$, $G_2(s)$, $p(s)$ обладают следующими свойствами:*

(a) *функции $G_1(s)$ и $G_2(s)$ связаны между собой соотношением*

$$G_1(s) = G_2(s)\frac{s^{2-\beta}}{2}; \tag{2.7}$$

функция $G_2(s)$ убывает, а функция $G_1(s)$ возрастает при $s > 0$;

$$G_2(s_0) = 1,\ G_2(s) \to \infty \text{ при } s \to 0, \quad G_1(s) \uparrow 1 \text{ при } s \to \infty; \tag{2.8}$$

(b) *функция $p(s)$ непрерывна и положительна при $s \ge 0$, убывает при $s \ge s_0 - \varepsilon$ и постоянна при $s \le s_0 - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$,*

$$p(s_0 - \varepsilon) = \frac{1}{2-\beta}, \quad p(s_0) = \frac{\beta}{2-\beta}, \quad p(s) \sim \frac{\beta}{s^{2-\beta}} \text{ при } s \to \infty,$$

где константа s_0 определена в (1.20).

Сформулируем основную теорему о грубой (логарифмической) асимптотике в интегральной теореме.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathbf{F} \in \mathcal{S}e$ *при некотором* $\beta \in (0,1)$ *и выполнено условие* (2.1). *Тогда при* $x \gg \sqrt{n}$, $x = s_1\sigma_1(n)$

$$\ln \mathbf{P}(S(n) \geq x) \sim \begin{cases} -\frac{x^2}{2n}, & \text{если } x \gg \sqrt{n},\ s_1 \leq s_0, \\ -G_1(s_1)l(x), & \text{если } s_1 \geq s_0, \end{cases} \tag{2.9}$$

где $G_1(s_1)l(x) \sim G_2(s_1)\frac{x^2}{2n}$ *при каждом фиксированном* $s_1 > 0$.

Отметим, что в теореме 2.1 отсутствуют структурные условия [R] или [Z]. Из теоремы 2.1 следует, что «точка» $x = s_0\sigma_1(n)$ разделяет крамеровскую и некрамеровскую зоны уклонений. Теорема 2.1 будет доказана в § 3.

Отметим также, что для правой части в (2.9) можно указать единое представление в виде $-M_0(x,n)$, так как можно показать, что при $x = s_1\sigma_1(n) \gg \sqrt{n}$

$$M_0(x,n) \sim \begin{cases} \frac{x^2}{2n}, & \text{если } x \gg \sqrt{n},\ s_1 \leq s_0, \\ G_1(s)l(x), & \text{если } s_1 \geq s_0, \end{cases}$$

т. е. для $-M_0(x,n)$ справедливо то же представление, что и для левой части (2.9).

Если отказаться от условия (2.1), то при $t \gg \sqrt{n}$ вместо (2.5) будет выполняться

$$^{\kappa}\Lambda\left(\frac{t}{n}\right)n \sim \frac{t^2}{2nb^2}$$

и вместо (2.4) мы получаем для $x = s_1 b^{\frac{2}{2-\beta}}\sigma_1(n)$ и любого фиксированного $s_1 > 0$ соотношения

$$M(x,n) \sim G_1(s_1)l(x) \sim G_2(s_1)\frac{x^2}{2nb^2}.$$

Учитывая это, можно без труда переформулировать теорему 2.1 для случая, когда условие (2.1) не выполнено.

2.2. Интегральная и интегро-локальные теоремы, действующие на всей оси. Начнем с интегральной теоремы. Положим

$$c_1(s) := \left[\frac{H_2''(s,p(s))}{2}\right]^{-1/2} \text{ при } s \geq s_0, \quad c_1(s) = c_1(s_0) \text{ при } s \leq s_0,$$

где $p(s)$ и s_0 определены в (1.20), а функция $H''{}_2(s,p)$ — вторая производная $H_2(s,p)$ по аргументу p:

$$H_2''(s,p) := \frac{\partial^2 H_2(s,p)}{\partial p^2} = -\beta(1-\beta)\frac{2}{s^{2-\beta}}(1-p)^{\beta-2} + 2. \tag{2.10}$$

В силу леммы 2.1 функция $c_1(s)$ непрерывна и положительна для всех $s \geq 0$, $c_1(s) \to 1$ при $s \to \infty$, $p(s_0) = \frac{\beta}{2-\beta}$.

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathbf{F} \in \mathcal{S}e$ *при некотором* $\beta \in (0,1)$ *и выполнены условия* (2.1), (1.11). *Тогда равномерно по* $x = s_1\sigma_1(n) \to \infty$, $x \geq \sqrt{n}$, *справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(S(n) \geq x) \sim \Phi(-x/\sqrt{n})e^{-^{\kappa}\Lambda_0(\frac{x}{n})n} + nc_1(s_1)e^{-M(x,n)}, \tag{2.11}$$

где $\Phi\big(-\frac{x}{\sqrt{n}}\big)e^{-^{\kappa}\Lambda_0(\frac{x}{n})n} \sim \frac{\sqrt{n}}{x\sqrt{2\pi}}e^{-^{\kappa}\Lambda(\frac{x}{n})n}$ *при* $x \gg \sqrt{n}$, $c_1(s_1) \to 1$ *при* $s_1 \to \infty$. *В частности, при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(S(n) \geq x) \sim \begin{cases} \Phi(-\frac{x}{\sqrt{n}})e^{-^{\kappa}\Lambda_0(\frac{x}{n})n}, & \text{если } x \geq \sqrt{n},\ s_1 \leq s_0 - \varepsilon, \\ nc_1(s_1)e^{-M(x,n)}, & \text{если } s_1 \geq s_0 + \varepsilon. \end{cases}$$

В «крайней» зоне уклонений $x = s_2\sigma_2(n) \to \infty$, $s_2 \ge c = \mathrm{const} > 0$, выполняется

$$\mathbf{P}(S(n) \ge x) \sim nc_2(s_2)e^{-l(x)}, \tag{2.12}$$

где $c_2(s_2) := \exp\{\frac{\beta^2}{2s_2^{2-2\beta}}\} \to 1$ *при* $s_2 \to \infty$.

Область нормальных уклонений $x < \sqrt{n}$, $n \to \infty$, очевидно, покрывается центральной предельной теоремой. Теорема 2.2 является аналогом результатов [7][1)], действующих на всей оси, но имеет более простую форму. Она является также аналогом равномерного в области $x \ge \sqrt{n}$ представления

$$\mathbf{P}(S(n) \ge x) \sim \Phi(-x/\sqrt{n}) + nF_+(x)$$

для правильно меняющихся хвостов $F_+(x)$ (см. [24, 25] и библиографические замечания в [2, гл. 4, § 1]).

Перейдем теперь к интегро-локальным теоремам. Здесь нам понадобится дополнительное условие

[D_0]. *В случае* [R] *для любого фиксированного* $\Delta > 0$ *при* $t \to \infty$

$$l(t+\Delta) - l(t) \sim \Delta\beta\frac{l(t)}{t};$$

в случае [Z] *для целых* $k \to \infty$

$$l(k+1) - l(k) \sim \beta\frac{l(k)}{k}.$$

Функция $\beta\frac{l(t)}{t}$ в условии [D_0] «играет роль» производной $l'(t)$ и асимптотически совпадает с ней, если последняя существует и ведет себя достаточно правильно.

Отметим, что в области уклонений, близких к нормальным, это условие не потребуется (см. [22, 26] и теоремы 2.3, 2.4 ниже), а в области больших уклонений может быть ослаблено (ср. с [2, гл. 4, § 8]).

Для $x = s_1\sigma_1(n)$ положим

$$m(x) := c_{(m)}(s_1)\beta\frac{l(x)}{x},$$

где $c_{(m)}(s_1) := (1 - p(s_1))^{\beta-1}$ при $s_1 \ge s_0$ и $c_{(m)}(s_1) := c_{(m)}(s_0)$ при $s_1 \le s_0$. В силу утверждения (b) леммы 2.1 при $s_1 \to \infty$

$$p(s_1) \to 0, \quad c_{(m)}(s_1) \to 1, \quad m(x) \sim \beta\frac{l(x)}{x}.$$

[1)] Статья [7] по своему содержанию наиболее близка к предлагаемой работе. Однако использовать ее или опираться на нее хотя бы в какой-то мере не представляется возможным по следующим причинам. 1. Общая теорема 2 в [7] носит «полуфабрикатный» характер. Она содержит пять сложно определяемых, по существу не изученных неявных функций (Q, h_*, κ_n, ω_n, C_n), а правая часть в представлении для $\mathbf{P}(S(n) \ge x)$ содержит невычисленный интеграл. 2. Более конкретная теорема 4 в [7] предполагает существование трех достаточно гладких производных функции $g(y) = -\ln \mathbf{P}(\xi \ge y) - 2\ln y$ (в этом случае, по-видимому, $\mathbf{F} \in \mathcal{S}e$). Тогда утверждается, что одновременно выполнены два *разных* утверждения: (57) и представление теоремы 4 (это же можно сказать о теореме 5b). Тот факт, что эти утверждения тождественны, вызывает большие сомнения. Оба из них представляют $\mathbf{P}(S(n) \ge x)$ в виде суммы двух слагаемых, и при этом в правую часть представления теоремы 4 (и теоремы 5б) входят значения g''' в некоторых «сложных» точках, что говорит также о неадекватности подхода существу дела (ср. с теоремой 2.2 настоящей работы). 3. В теореме 5а в [7] предполагается существование двух достаточно гладких производных функции g. Видимо, это также с существом дела не связано (ср. с теоремой 2.2). Кроме того, в теореме 5а появляется отрезок ряда Крамера $Q_k(t)$, но отсутствуют моментные условия, необходимые для его существования. Понять весьма сложное условие (23), присутствующее в теореме, нам не удалось.

Кроме того, можно показать, что для фиксированного $\Delta > 0$ в зоне $s_1 \geq s_0$ выполняется

$$M(x+\Delta, n) - M(x, n) \sim \Delta m(x),$$

так что функция $m(x)$ играет роль производной по x функции $M(x, n)$.

Интегро-локальную теорему сформулируем сначала для нерешетчатого случая [R].

Теорема 2.3. *Пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{S}e$ при некотором $\beta \in (0,1)$ и выполнены условия* (2.1), (1.11), [R], [D$_0$]. *Тогда для любого фиксированного $\Delta > 0$ равномерно по $x = s_1\sigma_1(n) \to \infty$, $x \geq \sqrt{n}$, справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta[x)) \sim \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\kappa\Lambda(\frac{x}{n})n} + \Delta n m(x) c_1(s_1) e^{-M(x,n)}. \tag{2.13}$$

В частности, при любом фиксированном $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta[x)) \sim \begin{cases} \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\kappa\Lambda(\frac{x}{n})n}, & \text{если } x \geq \sqrt{n},\ s_1 \leq s_0 - \varepsilon, \\ \Delta n m(x) c_1(s_1) e^{-M(x,n)}, & \text{если } s_1 \geq s_0 + \varepsilon, \end{cases} \tag{2.14}$$

где $m(x)c_1(s_1) \sim \beta\frac{l(x)}{x}$ при $s_1 \to \infty$. В «крайней» зоне уклонений $x = s_2\sigma_2(n) \to \infty$, $s_2 \geq c = \mathrm{const} > 0$, выполняется

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta[x)) \sim \Delta n \beta \frac{l(x)}{x} c_2(s_2) e^{-l(x)}, \tag{2.15}$$

где $\mathrm{c}_2(s_2) := e^{\frac{\beta^2}{2s_2^{2-2\beta}}} \to 1$ *при $s_2 \to \infty$. Если $x = O(\sigma_2(n))$, то условие* [D$_0$] *излишне.*

Рассмотрим теперь арифметический случай [Z]. Тут мы отказываемся от условия (2.1), которое в арифметическом случае ограничивает общность рассмотрений.

Теорема 2.4. *Пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{S}e$ при некотором $\beta \in (0,1)$ и выполнены условия* (1.11), [Z], [D$_0$]. *Тогда равномерно по целым $x = s_1 b^{\frac{2}{2-\beta}}\sigma_1(n) \to \infty$, $x \geq \sqrt{n}$, справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(S(n) - [an] = x) \sim \frac{1}{b\sqrt{2\pi n}} e^{-\kappa\Lambda(\frac{x}{n})n} + n m(x) c_1(s_1) e^{-M(x,n)},$$

где $m(x)c_1(s_1) \sim \beta\frac{l(x)}{x}$ при $s_1 \to \infty$. В частности, при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ для целых $x \geq \sqrt{n}$

$$\mathbf{P}(S(n) - [an] = x) \sim \begin{cases} \frac{1}{b\sqrt{2\pi n}} e^{-\kappa\Lambda(\frac{x}{n})n}, & \text{если } s_1 \leq s_0 - \varepsilon, \\ n m(x) c_1(s_1) e^{-M(x,n)}, & \text{если } s_1 \geq s_0 + \varepsilon. \end{cases}$$

Для целых x из «крайней» зоны уклонений $x = s_2\sigma_2(n) \to \infty$, $s_2 \geq c = \mathrm{const} > 0$, выполняется

$$\mathbf{P}(S(n) - [an] = x) \sim n\beta \frac{l(x)}{x} c_2(s_2) e^{-l(x)}, \tag{2.16}$$

где $\mathrm{c}_2(s_2) := e^{\frac{\beta^2 b^2}{2s_2^{2-2\beta}}} \to 1$ *при $s_2 \to \infty$. Если $x = O(\sigma_2(n))$, то условие* [D$_0$] *излишне.*

Отметим, что из теорем 2.3, 2.4 интегральная теорема 2.2 в области $x \gg \sigma_2(n)$, вообще говоря, не следует (в ней отсутствует условие [D$_0$]).

Отметим еще, что в теоремах 2.1–2.4 случай, когда переменная n не растет, не исключается. В этом случае $s_2 := \frac{x}{\sigma_2(n)} \to \infty$, $\mathrm{c}_2(s_2) \to 1$ при $s_2 \to \infty$, а утверждения (2.12), (2.15), (2.16), где в правых частях $c_2(s_2)$ заменено на 1, можно получить также из известных свойств субэкспоненциальных и локально-субэкспоненциальных распределений (см., например, [27]).

§ 3. Доказательства леммы 2.1 и теорем 2.1–2.4

3.1. Предварительные замечания. Условие (2.1) значительно упрощает многие обозначения, которые появятся в ходе доказательства. Это условие не ограничивает общности рассмотрений для нерешетчатых случайных величин, однако в арифметическом случае [Z] это не так. Поэтому для того, чтобы использовать (2.1) и при этом не исключать арифметические ξ (при доказательстве теоремы 2.4), рассмотрим более широкое условие $[\mathrm{Z}_{h,c}]$ *решетчатости* (*с шагом* $h>0$ *и сдвигом* $c\in(-\infty,\infty)$):

$[\mathrm{Z}_{h,c}]$. *Случайная величина* ξ *представляется в виде* $\xi=c+h\zeta$, *где случайная величина* ζ *является арифметической* (*удовлетворяет условию* [Z]).

Если выполнено $[\mathrm{Z}_{h,c}]$, то условие (2.1) уже не ограничивает общности рассмотрений, так как для арифметического ξ константы c и h всегда можно подобрать так, чтобы (2.1) выполнялось (при этом вероятность (1.7) следует изучать для $\Delta=h$, а вероятность (1.8) — для x вида $x=nc+kh$, $k\in\mathbb{Z}$). Итак, везде в последующем будем считать, что условие (2.1) выполнено.

Доказательства, приведенные ниже в нерешетчатом случае [R], полностью сохранятся и в решетчатом случае $[\mathrm{Z}_{h,c}]$ (т. е. при доказательстве теоремы 2.4)), если в нужном месте доказательств использовать соответствующую версию интегро-локальной теоремы в области нормальных уклонений для схемы серий из работы [23] (в п. 4.2 мы цитируем нужные версии этих теорем как в нерешетчатом, так и в решетчатом случаях). По этой причине мы опускаем доказательство в решетчатом случае $[\mathrm{Z}_{h,c}]$ и начиная с этого места ограничиваемся рассмотрением случайных величин, удовлетворяющих условиям (2.1), [R] (за исключением уже упомянутого п. 4.2, где наряду с нерешетчатым рассмотрен и решетчатый случай).

Отметим еще, что случай, когда переменная n в теоремах 2.1–2.4 не растет, достаточно прост: в этом случае $M(x,n)=l(x)+o(1)$, и, скажем, интегральная теорема является следствием того известного факта, что любое семиэкспоненциальное распределение является субэкспоненциальным (см. (1.6) и [1, 2]). Поэтому ниже, в доказательствах основных утверждений, этот случай мы исключаем и считаем, что переменная n неограниченно растет, а параметр $x=x(n)\to\infty$ есть функция от n.

3.2. Схема доказательства основных утверждений. Для $\Delta\in(0,\infty]$, $x,y\in(0,\infty)$, $i,j\in\{1,\dots,n\}$ обозначим

$$D_n:=\{S(n)\in\Delta[x)\},\quad B_j:=\{\xi(j)<y\},\quad B:=\bigcap_{i\le n}B_i,\quad B^{(j)}:=\bigcap_{i\le n,i\ne j}B_i.$$

Будем использовать очевидные тождества

$$P:=\mathbf{P}(D_n)=P_0+P_{\ge1},\quad P=P_0+P_1+P_{\ge2},\tag{3.1}$$

где

$$P_0:=\mathbf{P}(D_nB),\quad P_1:=\mathbf{P}\Big(D_n\bigcup_{j\le n}\overline{B}_jB^{(j)}\Big)=n\mathbf{P}(D_n\overline{B}_nB^{(n)}),$$

$$P_{\ge1}:=\mathbf{P}\Big(D_n\bigcup_{j\le n}\overline{B}_j\Big)=P_1+P_{\ge2},\quad P_{\ge2}:=\mathbf{P}\Big(D_n\bigcup_{1\le i<j\le n}\overline{B}_i\overline{B}_j\Big).$$

Доказательство каждой из теорем 2.1–2.3 заключается в оценивании слагаемых P_0 и $P_{\geq 1}$ или P_0, P_1 и $P_{\geq 2}$ в правых частях тождеств (3.1).

Как уже отмечалось, значение $y = \delta x$ в дальнейшем будет определять уровень срезки величины $\xi(k)$. Этот уровень будет зависеть от зоны рассматриваемых уклонений $x = s_1\sigma_1(n)$. Другими словами, параметр $\delta = \delta(s_1)$ будет зависеть от s_1 и определяться следующими соотношениями:

$$\delta(s_1) = \begin{cases} \frac{1}{s_1}, & \text{если } s_1 < \left(\frac{\beta}{4}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}, \\ \frac{1}{2}\delta_*, & \text{если } s_1 \in \left[\left(\frac{\beta}{4}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}, s_*\right], \\ \frac{1}{2}, & \text{если } s_1 > s_*, \end{cases} \tag{3.2}$$

где $\delta_* = \delta_*(s_*)$ будет выбрано позже, $s_* > s_0$ — достаточно большое фиксированное число (нетрудно показать, что $s_0 \geq \frac{1}{2}$, $\left(\frac{\beta}{4}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \leq \frac{1}{4}$, так что точка s_0 всегда лежит в интервале $\left(\left(\frac{\beta}{4}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}, s_*\right)\right)$. Из (3.2) видно, что уровень срезки $y = \delta(s_1)x$ в области $s_1 < \left(\frac{\beta}{4}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$ равен $\sigma_1(n)$ и от x (от s_1) не зависит.

В ряде случаев нам будет удобно использовать также «дуальную» форму записи уровней срезки

$$y = \rho(s_1)\sigma_1(n)$$

в «масштабе» $\sigma_1(n)$. Так как $x = s_1\sigma_1(n)$, то очевидно, что $\rho(s_1) = s_1\delta(s_1)$, и наряду с (3.2) мы получаем представление

$$\rho(s_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } s_1 < \left(\frac{\beta}{4}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}, \\ \frac{s_1}{2}\delta_*, & \text{если } s_1 \in \left[\left(\frac{\beta}{4}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}, s_*\right], \\ \frac{s_1}{2}, & \text{если } s_1 > s_*, \end{cases} \tag{3.3}$$

из которого видно, что множитель $\rho(s_1)$ в первой и второй зонах параметра s_1 лежит в ограниченных пределах, отделенных от 0 и ∞. В дальнейшем (см. п. 3.3 и лемму 3.1) для этих двух зон иногда будем использовать единый уровень срезки $y = \rho\sigma_1(n)$, где ρ будет выбираться подходящим образом.

3.3. Изучение слагаемого P_0 в тождествах (3.1) для уклонений $x = O(\sigma_1(n))$. Для изучения асимптотики

$$P_0 = \mathbf{P}(S(n) \in \Delta[x), B) \tag{3.4}$$

построим «срезанную» на уровне y случайную величину $\xi^{(y)}$ с распределением

$$\mathbf{F}^{(y)}(U) = \mathbf{P}(\xi^{(y)} \in U) := \mathbf{P}(\xi \in U \mid \xi < y)$$

и определим преобразование Лапласа над $\mathbf{F}^{(y)}$, его логарифм и функцию уклонений, отвечающую $\xi^{(y)}$, соответственно равенствами

$$\varphi_y(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda\xi^{(y)}}, \quad A_y(\lambda) := \ln\varphi_y(\lambda), \quad \Lambda_y(\alpha) := \sup_{\lambda}\{\lambda\alpha - A_y(\lambda)\}, \quad \lambda, \alpha \in \mathbb{R}.$$

В настоящем пункте мы будем рассматривать уклонения $x = s\sigma_1(n)$, $0 \leq s \leq s_+$, где s_+ — произвольное фиксированное положительное число. Для этих уклонений будем использовать *единый* уровень срезки $y = \rho\sigma_1(n)$ (ср. с (3.3), где $\rho \in (0, \infty)$. Однако константу $\rho = \frac{y}{\sigma_1(n)}$ будем трактовать более широко — не как фиксированную постоянную, а как функцию $\rho = \rho_n$ от n, сходящуюся к конечному пределу $\rho_+ \in (0, \infty)$, так что $y = \rho_n\sigma_1(n) \sim \rho_+\sigma_1(n)$, где $\rho_+ = \rho(s_+) \in (0, \infty)$ будет выбрано в лемме 3.1 ниже. Аналогичное расширительное толкование справедливо для δ (см. (3.2)).

Обозначим через
$$S^{(y)}(n) := \xi^{(y)}(1) + \dots + \xi^{(y)}(n)$$
сумму независимых копий случайной величины $\xi^{(y)}$. Тогда, очевидно, изучаемая вероятность (3.4) представима в виде
$$P_0 = c_n(y)\mathbf{P}(S^{(y)}(n) \in \Delta[x)), \quad c_n(y) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}^n(\xi < y).$$
Для уровней срезки $y = \rho\sigma_1(n) \sim \rho_+\sigma_1(n)$
$$\mathbf{P}(\overline{B}) \le n\mathbf{P}(\xi \ge y) \le ne^{-l(\rho_+\sigma_1(n))(1+o(1))}, \tag{3.5}$$
где $l(\rho_+\sigma_1(n)) \sim \rho_+^\beta l(\sigma_1(n)) \sim \rho_+^\beta \frac{\sigma_1^2(n)}{n} \gg n^\gamma$ при $n \to \infty$, $\gamma \in \left(0, \frac{\beta}{2-\beta}\right)$. Поэтому
$$\mathbf{P}(\overline{B}) \to 0, \quad c_n(y) = \mathbf{P}(B) \to 1, \quad n \to \infty.$$
Стало быть, задача изучения P_0 сводится к задаче изучения вероятности
$$\mathbf{P}(S^{(y)}(n) \in \Delta[x)).$$
Это задача о больших или нормальных уклонениях сумм случайных величин «в схеме серий», когда распределение слагаемого зависит от n. Мы воспользуемся здесь схемой исследования, изложенной в работах [28, 29], которая состоит в последовательном использовании преобразования Крамера и интегро-локальной теоремы в схеме серий в области нормальных уклонений.

Наряду со случайной величиной $\xi^{(y)}$ рассмотрим ее преобразование Крамера $\xi_\lambda^{(y)}$ с распределением
$$\mathbf{P}\big(\xi_\lambda^{(y)} \in U\big) := \frac{\mathbf{E}(e^{\lambda\xi^{(y)}}; \xi^{(y)} \in U)}{\varphi_y(\lambda)}.$$
Обозначим, далее, $\xi^{(y,\alpha)} := \xi^{(y)}_{\lambda_y(\alpha)} - \alpha$, где $\lambda_y(\alpha) := \Lambda'_y(\alpha)$ — решение уравнения $\varphi'_y(\lambda)/\varphi_y(\lambda) = \alpha$ (производные берутся по аргументам α и λ соответственно), так что $\mathbf{E}\xi^{(y,\alpha)} = 0$ для всех α из интервала $(\mathbf{E}\xi^{(y)}, y)$ (отметим, что всегда $\mathbf{E}\xi^{(y)} < 0$). Используя стандартную технику (см., например, [28, равенства (2.4)]), можно записать
$$\mathbf{P}(S^{(y)}(n) \in \Delta[x)) = e^{-n\Lambda_y(\alpha)}\mathbf{E}(e^{-\lambda_y(\alpha)S^{(y,\alpha)}(n)}; S^{(y,\alpha)}(n) \in \Delta[0)), \tag{3.6}$$
где $\alpha = \frac{x}{n}$ и $S^{(y,\alpha)}(n)$ есть сумма n независимых копий $\xi^{(y,\alpha)}$. Если равномерно по $\alpha \in [0, s_+\sigma_1(n)/n]$ справедливы соотношения

(A1) $\lambda_y(\alpha) = o(1)$;

(A2) $\mathbf{P}(S^{(y,\alpha)}(n) \in \Delta[0)) \sim \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}}$;

(A3) $\Lambda_y(\alpha) = {}^\kappa\Lambda(\alpha) + o(1/n)$

(для чего уровень срезки $y = \rho\sigma_1(n)$ следует выбрать специальным образом), то получим из (3.6) следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1, *условие* (2.1) *и фиксированы произвольные положительные числа* $s_+ > 0$ *и* $\Delta > 0$. *Если выбрать уровень срезки* $y = \rho\sigma_1(n)$ *при* $\rho = \rho_n \to \rho_+ := \left(\frac{\beta}{4}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} s_+^{-\frac{1}{1-\beta}} = s_+\delta_*(s_+)$ (*ср. с* (3.2), (3.3)), *то при* $n \to \infty$
$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta[x); B) \sim \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} e^{-{}^\kappa\Lambda(\frac{x}{n})n} \tag{3.7}$$
равномерно в области $x \in [0, s_+\sigma_1(n)]$ (*в области* $s \in [0, s_+]$). *Кроме того, в этой области значений* x
$$\mathbf{P}(S(n) \ge x; B) \le e^{-\frac{x^2}{2n}(1+o(1))}, \quad n \to \infty. \tag{3.8}$$

Замечание 3.1. Если в условиях леммы 3.1 для произвольного фиксированного $q \in (0,1]$ выбрать уровень срезки $y = q\rho\sigma_1(n) \sim q\rho_+\sigma_1(n)$ (т. е. «асимптотически» не выше, чем в лемме 3.1), то утверждения леммы 3.1 сохранятся.

Действительно, выберем $s'_+ = s_+ q^{-(1-\beta)}$, так что $\rho'_+ = \delta_*(s'_+)s'_+ = q\delta_*(s_+)s_+$. Для этого s'_+ в силу леммы 3.1 соотношения (3.7), (3.8) справедливы равномерно в области $x \in [0, s'_+\sigma_1(n)]$. Осталось заметить, что значение $s'_+ = s_+ q^{-(1-\beta)}$ не меньше, чем s_+, так что соотношения (3.7), (3.8) справедливы также равномерно и в области $x \in [0, s_+\sigma_1(n)]$.

Доказательство леммы 3.1, которое состоит, как было отмечено, в основном в доказательстве соотношений (A1)–(A3), помещено нами в § 4.

3.4. Доказательство леммы 2.1. Производная функции $H_2'(s,p)$ по аргументу p имеет вид

$$H_2'(s,p) := \frac{\partial H_2(s,p)}{\partial p} = -2\beta s^{\beta-2}(1-p)^{\beta-1} + 2p.$$

Для отыскания точки минимума $p(s)$ функции $H_2(s,p)$ изучим корни уравнения

$$H_2'(s,p) = 0. \tag{3.9}$$

Нам понадобится следующее утверждение о корнях уравнения (3.9).

(c) *Для некоторой константы $s_- \in (0, s_0)$ (найденной ниже) при $s \in (0, s_-)$ уравнение* (3.9) *не имеет корней на отрезке* $[0,1]$, *а при $s > s_-$ имеет на отрезке* $[0,1]$ *ровно два корня $p_-(s)$, $p_+(s)$, которые сливаются в точке $s = s_-$:*

$$0 < p_-(s) < p_+(s) < 1, \quad p_\mp(s_-) = \frac{1}{2-\beta}.$$

Функция $p_-(s)$ убывает при $s \ge s_-$, $p_-(s_0) = \frac{\beta}{2-\beta}$ и $p_-(s) \sim \frac{\beta}{s^{2-\beta}}$ при $s \to \infty$. Функция $p(s)$, которая изучается в п. (b) *леммы* 2.1, *совпадает при $s \ge s_-$ с $p_-(s)$, а при $s \le s_-$ постоянна и равна $p(s) = p_-(s_-) = \frac{1}{2-\beta}$.*

Доказательство утверждения (c). Для второй и третьей производных функции $H_2(s,p)$ по аргументу p имеем представления (2.10) и

$$H_2'''(s,p) := \frac{\partial^3 H_2(s,p)}{\partial p^3} = -\beta(1-\beta)(2-\beta)\frac{2}{s^{2-\beta}}(1-p)^{\beta-3}$$

соответственно. Функция $H_2'(s,p)$ при всех $s > 0$ строго выпукла по p на отрезке $[0,1]$ (поскольку вторая производная $H_2'''(s,p)$ этой функции отрицательна на полуинтервале $[0,1)$), и $H'(s,0) < 0$, $H'(s,1) < 0$ при всех $s > 0$. Поэтому уравнение (3.9) имеет ровно два корня, если $h(s) > 0$, и не имеет корней, если $h(s) < 0$, где $h(s) := \max\limits_{0 \le p \le 1} H_2'(s,p)$. Функция $h(s)$ возрастает по s (поскольку функция $H_2'(s,p)$ возрастает по s при фиксированном $p \in [0,1)$, а ее максимум достигается в полуинтервале $[0,1)$). Поэтому утверждение о существовании корней уравнения (3.9) для константы s_-, определяемой уравнением

$$h(s) = 0, \tag{3.10}$$

доказано. Рассматривая эквивалентную (3.10) систему из двух уравнений

$$H_2'(s,p) = 0, \quad H_2''(s,p) = 0,$$

убеждаемся (с помощью непосредственной подстановки), что пара

$$(s_-, p_-) = ((\beta(1-\beta))^{\frac{1}{2-\beta}} + \beta(\beta(1-\beta))^{\frac{\beta-1}{2-\beta}}, 1/(2-\beta)),$$

удовлетворяет этой системе (тем самым константа c_- найдена).

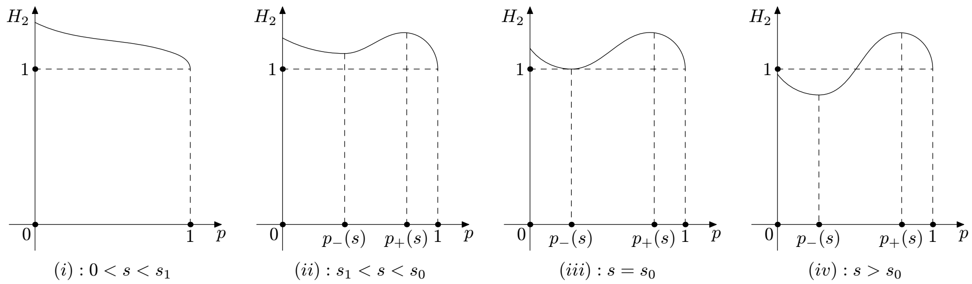

Рис. 1. Графики функции $H_2 = H_2(s,p)$, $0 \le p \le 1$.

Дифференцируя уравнение

$$H_2'(s, p_-(s)) = 0 \tag{3.11}$$

и учитывая, что $H_2''(s, p_-(s)) > 0$ при $s > s_-$, убеждаемся, что $p'(s) < 0$ при $s > s_-$, т. е. функция $p_-(s)$ убывает при $s > s_-$. Аналогично устанавливаем, что функция $p_+(s)$ возрастает при $s > s_-$. Следовательно, при $s > s_-$

$$0 < p_-(s) < \frac{1}{2-\beta} < p_+(s) < 1.$$

Сказанное позволяет утверждать, что при $s \in [0, s_-]$ функция $H_2(s,p)$ убывает на отрезке $[0,1]$, и поэтому $p(s) = \frac{1}{2-\beta}$ (рис. 1(i)). При $s > s_-$ функция $H_2(s,p)$ имеет два локальных минимума на отрезке $[0,1]$ в точках $p = p_-(s)$ и $p = 1$ (см. рис. 1$(ii), (iii), (iv)$). При этом если $s_- < s < s_0$, то первый минимум больше второго (см. рис. 1(ii)), а если $s > s_0$, то, наоборот, первый минимум меньше второго (см. рис. 1(iv)). Точка s_0 определяется совпадением этих локальных минимумов (см. рис. 1(iii)), что соответствует двум равенствам

$$H_2(s_0, \beta/(2-\beta)) = H_2(s_0, 1), \quad H_2'(s_0, \beta/(2-\beta)) = 0, \tag{3.12}$$

которые проверяются непосредственной подстановкой.

Поскольку при $s > s_-$ функция $H_2(s,p)$ возрастает на отрезке $[p_-(s), p_+(s)]$ и точка $\frac{1}{2-\beta}$ лежит в этом отрезке, то $p(s) = p_-(s)$. Из уравнения (3.11) следует, что $p_-(s) \sim \frac{\beta}{s^{2-\beta}}$ при $s \to \infty$. Наконец, мы уже знаем, что $H_2'\big(s_0, \frac{\beta}{2-\beta}\big) = 0$ и $\frac{\beta}{2-\beta} < \frac{1}{2-\beta}$, поэтому $p(s_0) = \frac{\beta}{2-\beta}$. Утверждение (c) доказано.

Утверждение (b) леммы 2.1, в котором $\varepsilon = s_0 - s_-$, следует из утверждения (c). Обратимся теперь к доказательству утверждения (a). Равенство (2.7) вытекает непосредственно из определения (2.6). Поскольку функция $H_2(s,p)$ убывает по p в окрестности точки $p = 0$, значение $p(s)$ лежит в полуинтервале $(0, 1-\delta]$. Функция $H_2(s,p)$ при любом фиксированном $p \in (0, 1-\delta]$ убывает по $s > 0$, поэтому и функция $G_2(s)$ (см. (2.6)) убывает по $s > 0$. Аналогично функция $H_1(s,p)$ при любом фиксированном $p \in (0, 1-\delta]$ возрастает по $s > 0$, тем самым и функция $G_1(s)$ (см. (2.6)) возрастает по $s > 0$. Следовательно, $G_1(s_0) < G_1(\infty) \le H_1(\infty, 0) = 1$. Далее, из (3.12) следует, что

$$H_2(s_0, \beta/(2-\beta)) = H_2(s_0, 1) = 1.$$

Поэтому равенство в (2.8) установлено. Поскольку в силу уже доказанных утверждений (b), (c) при $s \to 0$

$$G_2(s) = H_2(s, p(s)) = 2s^{\beta-2}(1 - 1/(2-\beta))^\beta + 1/(2-\beta)^2 \to \infty$$

и при $s \to \infty$

$$G_1(s) = H_1(s, p(s)) = (1 - p(s))^\beta + \frac{p^2(s)s^{2-\beta}}{2} \uparrow 1,$$

получаем доказательства асимптотических соотношений в (2.8). Утверждения (a), (b) леммы 2.1, а вместе с ними и вся лемма 2.1 доказаны.

3.5. Доказательство теорем 2.1–2.3. Воспользуемся следующим утверждением: *при $x = s_1\sigma_1(n)$, $x \geq \sqrt{n}$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\gamma > 0$ такое, что при $s_1 \in (0, s_0 - \varepsilon]$*

$$M(x,n) \geq (1+\gamma)\frac{x^2}{2n}(1+o(1)), \quad n \to \infty; \tag{3.13}$$

при $s_1 \geq s_0 + \varepsilon$

$$\frac{x^2}{2n} \geq (1+\gamma)M(x,n)(1+o(1)), \quad n \to \infty. \tag{3.14}$$

Докажем это утверждение. Если параметр s_1 лежит в фиксированном компакте $[s_*, s^*]$, не содержащем точку 0, то соотношения (3.13), (3.14) следуют из леммы 2.1. Если же $s_1 = o(1)$ или $s_1 \to \infty$ при $n \to \infty$, то соотношения (3.13), (3.14) вытекают из очевидных соотношений

$$M(x,n) \gg \frac{x^2}{2,n}, \quad M(x,n) = o\left(\frac{x^2}{2,n}\right), \quad n \to \infty,$$

соответственно.

В силу соотношений (3.13), (3.14) для доказательства, скажем, теоремы 2.2 (т. е. для доказательства соотношения (2.13) во всей зоне уклонений) достаточно убедиться в справедливости (2.13) только в зоне $s_2 \in [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$ и в справедливости (2.14). Аналогично можно поступать и при доказательстве теоремы 2.3. Таким образом, соотношения (3.13), (3.14) позволяют выполнять доказательства теорем 2.1–2.3 «по частям», т. е. отдельно в разных зонах уклонений. При этом различные части доказательств названных теорем будут переплетаться между собой. Поэтому структура доказательств этих теорем будет не совсем простой. Сначала, в пп. 3.5.1–3.5.3, докажем интегро-локальную теорему 2.3 в зоне

$$x \geq \sqrt{n}, \quad x \leq s^*\sigma_1(n), \tag{3.15}$$

где s^* — произвольное фиксированное число. Далее, в п. 3.5.4 докажем «грубую» интегральную теорему 2.1. Для этого достаточно будет убедиться в ее справедливости в зоне

$$x \gg \sigma_1(n), \tag{3.16}$$

поскольку интегро-локальная теорема в зоне (3.15) и «грубая» интегральная теорема в зоне (3.16) доказывают «грубую» интегральную теорему 2.1 во всей зоне $x \geq \sqrt{n}$.

В пп. 3.5.5, 3.5.6 будет доказана интегральная теорема 2.2 в зоне $x \gg \sigma_1(n)$, а в п. 3.5.7 — интегро-локальная теорема 2.3 в той же зоне; при этом в доказательствах будут существенно использоваться уже доказанные интегро-локальная теорема в зоне (3.15) и «грубая» интегральная теорема.

Объединяя доказательства для зон (3.15) и $x \gg \sigma_1(n)$, получим доказательства интегральной теоремы 2.2 и интегро-локальной теоремы 2.3 во всей зоне $x \geq \sqrt{n}$.

Для простоты записи условимся в пп. 3.5.1–3.5.7 в обозначении $x = s_1\sigma_1(n)$ нижний индекс у параметра s опускать и писать $x = s\sigma_1(n)$.

3.5.1. Доказательство интегро-локальной теоремы 2.3 в зоне уклонений

$$x \geq \sqrt{n}, \quad x < (\beta/4)^{\frac{1}{1-\beta}}\sigma_1(n) \quad (s < (\beta/4)^{\frac{1}{1-\beta}}), \tag{3.17}$$

которая при достаточно большом s^* составляет часть зоны (3.15). Для фиксированного $\Delta > 0$ и для уровня срезки $y = \sigma_1(n)$ (см. (3.2), (3.3)) воспользуемся первым тождеством в (3.1):

$$P = P_0 + P_{\geq 1},$$

где $P_{\geq 1}$ можно оценить с помощью неравенства (3.5) при $\rho = 1$:

$$P_{\geq 1} \leq ne^{-l(\sigma_1(n))} = ne^{-\frac{\sigma_1^2(n)}{n}(1+o(1))}, \quad n \to \infty. \tag{3.18}$$

Для оценки P_0 воспользуемся леммой 3.1 и замечанием 3.1 при $s_+ = (\frac{\beta}{4})^{\frac{1}{1-\beta}}$. Выбранный уровень срезки $y = \sigma_1(n)$ не превосходит $\delta_*(s_+)s_+\sigma_1(n)$, поэтому в силу (3.7) для уклонений x из зоны (3.17) будем иметь

$$P_0 \sim \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} e^{-{}^{\kappa}\Lambda(\frac{x}{n})n}. \tag{3.19}$$

Поскольку $\frac{s^2}{2} < \frac{1}{2}\bigl(\frac{\beta}{4}\bigr)^{\frac{2}{1-\beta}} < 1 - \gamma$ для некоторого $\gamma > 0$, то ${}^{\kappa}\Lambda\bigl(\frac{x}{n}n\bigr) \sim \frac{x^2}{2n} < (1-\gamma)\frac{\sigma_1^2(n)}{n}$. Сравнивая (3.18), (3.19), получаем

$$P_{\geq 1} = o(P_0), \quad P \sim P_0 \sim \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} e^{-{}^{\kappa}\Lambda(\frac{x}{n})n}.$$

3.5.2. Доказательство интегро-локальной теоремы 2.3 в зоне уклонений, определяемой соотношениями

$$x = s\sigma_1(n), \quad s \in [s_*, s^*], \tag{3.20}$$

где $s_* := \bigl(\frac{\beta}{4}\bigr)^{\frac{1}{1-\beta}}$, $s^* > s_0$ — произвольное фиксированное число. Выберем уровень срезки $y = \delta x$ при $\delta = \frac{q}{2}\delta_*(s^*) = \frac{q}{2}\bigl(\frac{\beta}{4}\bigr)^{\frac{1}{1-\beta}} s^{*\frac{2-\beta}{1-\beta}}$ (см. (3.2)), где константу $q \in (0, 1]$ выберем ниже. В силу второго тождества в (3.1) $P = P_0 + P_1 + P_{\geq 2}$, где P_0 можно оценить с помощью леммы 3.1 при $s_+ > s^*$ таком, что $\delta_*(s_+) = \frac{q}{2}\delta_*(s^*)$. Тогда зона крамеровской аппроксимации для суммы срезанных на выбранном уровне y случайных величин содержит отрезок $[0, s_+\sigma_1(n)]$. Поскольку уклонения (3.20) попадают в этот отрезок, то

$$P_0 \sim \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} e^{-{}^{\kappa}\Lambda(\frac{x}{n})n}.$$

Рассмотрим теперь вероятность P_1. Представим ее в виде суммы

$$P_1 = nP_{(1)} + nP_{(2)}, \tag{3.21}$$

где $P_{(1)} = \mathbf{P}(D_n B^{(n)}; \xi(n) \geq x)$, $P_{(2)} = \mathbf{P}(D_n B^{(n)}; y \leq \xi(n) < x)$, и оценим каждое слагаемое. Очевидно, что

$$P_{(1)} \leq \mathbf{P}(\xi \geq x) \leq e^{-l(x)}.$$

По определению $M_0(x, n) \leq M(x, n)$ и в силу (2.4) и леммы 2.1 $M(x, n) \sim G_1(s)l(x)$, где $G_1(s) < 1$, поэтому для уклонений (3.20) найдется $\gamma > 0$ такое, что $l(x) \geq (1+\gamma)M_0(x, n)(1 + o(1))$ при $n \to \infty$. Тем самым

$$P_{(1)} \leq O(e^{-(1+\gamma)M_0(x,n)(1+o(1))}).$$

Оценим теперь вероятность

$$P_{(2)} = -\int_{\delta x}^{x} \mathbf{P}(S(n-1) \in \Delta[x-t), \max_{1\leq k\leq n-1} \xi(k) < y) d(e^{-l(t)}). \tag{3.22}$$

Для $t \in [\delta x, x]$ величина $x - t$ лежит в отрезке $[0, (1-\delta)x]$, который, в свою очередь, лежит в отрезке $[0, s^*\sigma_1(n-1)]$ крамеровской аппроксимации суммы

$S(n-1)$ срезанных на уровне $y = \delta x \sim \delta_*(s_+)s_+\sigma_1(n-1)$ случайных величин (s_+ мы выбрали при оценивании P_0). Поэтому в силу леммы 3.1 вероятность, стоящая под знаком интеграла (3.22), представляется в виде

$$\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi(n-1)}} e^{-{}^{\kappa}\Lambda(\frac{x-t}{n-1})(n-1)}(1+o(1)) = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} e^{-{}^{\kappa}\Lambda(\frac{x-t}{n})n}(1+o(1)),$$

так что

$$P_{(2)} \sim -\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} \int\limits_{\delta x}^{x} e^{-{}^{\kappa}\Lambda(\frac{x-t}{n})n} d(e^{-l(t)}) := \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} J_1. \tag{3.23}$$

В интеграле J_1 положим $l(x-t) + {}^{\kappa}\Lambda\big(\frac{t}{n}\big)n = M(x,t,n)$ (см. (2.2)) и выполним интегрирование по частям:

$$J_1 = -e^{-M(x,x-t,n)}\big|_{t=\delta x}^{x} + \int\limits_{\delta x}^{x} {}^{\kappa}\lambda\left(\frac{x-t}{n}\right) e^{-M(x,x-t,n)}\,dt = J_2 + J_3,$$

где ${}^{\kappa}\lambda(t) := {}^{\kappa}\Lambda'(t)$,

$$J_2 := e^{-M(x,x-\delta x,n)} - e^{-M(x,0,n)}, \quad J_2 := \int\limits_{\delta x}^{x} {}^{\kappa}\lambda\left(\frac{x-t}{n}\right) e^{-M(x,x-t,n)}\,dt.$$

Имеют место равномерные по $p \in [0, 1-\delta]$, $s \in [s_*, s^*]$ соотношения (ср. с выводом соотношений (2.4))

$$\frac{1}{l(x)} M(x,px,n) \sim H_1(s,p), \quad \frac{2n}{x^2} M(x,px,n) \sim H_2(s,p), \tag{3.24}$$

где $H_1(s,p)$, $H_2(s,p)$ — функции, изученные при доказательстве леммы 2.1. С помощью (3.24) оценим слагаемое

$$J_2 = O(e^{-M^*(x,n)}), \quad M^*(x,n) := \min\{M(x,0,n), M(x,(1-\delta)x,n)\}.$$

В силу (3.24)

$$M^*(x,n) \sim l(x)H_1^*(s), \quad H_1^*(s) = \min\{H_1(s,0), H_1(s,1-\delta)\}.$$

Поскольку (см. доказательство леммы 2.1) минимум $H_1^+(s)$ функции $H_1(s,p)$ на отрезке $[0,1]$ достигается либо в точке $p=1$, либо в точке $p = p(s)$, лежащей в интервале $(0, 1-\delta)$, то для некоторого $\gamma > 0$ получаем неравенство $(1+\gamma)H_1^+(s) < H_1^*(s)$. При этом $M_0(x,n) \sim H_1^+(s)l(x)$, поэтому

$$J_2 = O(e^{-(1+\gamma)M_0(x,n)}).$$

Для оценки интеграла

$$J_3 = \int\limits_{\delta x}^{x} {}^{\kappa}\lambda\left(\frac{x-t}{n}\right) e^{-M(x,x-t,n)}\,dt = \int\limits_{0}^{(1-\delta)x} {}^{\kappa}\lambda\left(\frac{t}{n}\right) e^{-M(x,t,n)}\,dt$$

воспользуемся следующей леммой (которую докажем позже в п. 3.5.3).

Лемма 3.2. *Пусть $s \in [s_*, s^*]$ и фиксировано достаточно малое $\delta > 0$. Тогда для некоторых $u > 0$ и $\gamma > 0$*

(i) *если $x = s\sigma_1(n) \ge (s_0 - u)\sigma_1(n)$, то для всех достаточно больших n*

$$M_\delta(x,n) = M(x,n); \tag{3.25}$$

(ii) *если $x = s\sigma_1(n) \le (s_0 - u)\sigma_1(n)$, то для всех достаточно больших n*

$$M_\delta(x,n) \ge (1+\gamma)M_0(x,n). \tag{3.26}$$

Выберем в соответствии с утверждением леммы 3.2 по заданному s^* достаточно малое $\delta = \frac{q}{2}\delta_*(s^*)$ (т. е. выберем достаточно малое $q > 0$) и числа $u > 0$ и $\gamma > 0$. Тогда в случае $s < s_0 - u$ в силу (3.26) при достаточно больших n

$$M_\delta(x,n) \geq (1+\gamma)M_0(x,n).$$

Отсюда вытекает оценка

$$J_3 = O(x^2 e^{-M_\delta(x,n)}) = O(e^{-(1+\gamma/2)M_0(x,n)}).$$

Если же $s \geq s_0 - u$, то оценим J_3 более точно. Ввиду второго соотношения в (3.24) имеет место равномерное по $p \in [0, 1-\delta]$, $s \in [s_0 - u, s^*]$ соотношение

$$\frac{2n}{x^2}(M(x,px,n) - M_\delta(x,n)) = H_2(s,p) - H_2(s,p(s)) + o(1)$$

при $n \to \infty$. Поэтому в силу (3.25) получаем

$$J_3 \sim e^{-M_\delta(x,n)} J_4 = e^{-M(x,n)} J_4,$$

где

$$J_4 := \int\limits_0^{(1-\delta)} {}^\kappa\lambda\left(\frac{px}{n}\right) e^{-\frac{x^2}{2n}[H_2(s,p)-H_2(s,p(s))](1+o(1))} d(x(p-p(s))).$$

Точка $p(s)$ лежит в интервале $(0, 1-\delta)$ и является единственной точкой минимума функции $H_2(s,p)$ по p из отрезка $[0, 1-\delta]$ (см. лемму 2.1 и ее доказательство). Следовательно, основной вклад в интеграл J_4 дает любая окрестность этой точки, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $J_4 \sim J_5$, где

$$J_5 := \sqrt{n} \int\limits_{p(s)-\varepsilon}^{p(s)+\varepsilon} {}^\kappa\lambda\left(\frac{px}{n}\right) e^{-\frac{x^2}{2n}[H_2(s,p)-H_2(s,p(s))](1+o(1))} d\left(\frac{x(p-p(s))}{\sqrt{n}}\right).$$

При $|p - p(s)| \leq \varepsilon = o(1)$

$$H_2(s,p) - H(s,p(s)) = \frac{(p-p(s))^2}{c^2(s)}(1+o(1)),$$

где $c(s) = \left(\frac{1}{2}H_2''(s,p(s))\right)^{-1/2}$ — функция, определенная перед формулировкой теоремы 2.2, и для ε, стремящегося к нулю достаточно медленно, имеем

$$J_4 \sim J_5 = {}^\kappa\lambda\left(\frac{p(s)x}{n}\right)\sqrt{2\pi n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{p(s)-\varepsilon}^{p(s)+\varepsilon} e^{-\frac{x^2(p-p(s))^2}{2nc^2(s)}(1+o(1))} d\left(\frac{x(p-p(s))}{\sqrt{n}}\right)$$
$$\sim {}^\kappa\lambda\left(\frac{p(s)x}{n}\right)\sqrt{2\pi n}c(s).$$

Заметим, что для $x = s\sigma_1(n)$ в силу первого соотношения в (1.10)

$${}^\kappa\lambda\left(\frac{xp(s)}{n}\right) \sim \frac{x}{n}p(s) \sim s^{2-\beta}\frac{l(x)}{x}p(s),$$

и воспользуемся (см. доказательство леммы 2.1) соотношением $H_1'(s,p(s)) = 0$, из которого вытекает, что

$$p(s) = \beta(1-p(s))^{\beta-1}s^{\beta-2}.$$

Получаем

$${}^\kappa\lambda\left(\frac{xp(s)}{n}\right) \sim \beta(1-p(s))^{\beta-1}\frac{l(x)}{x} = r(x,n), \tag{3.27}$$

где функция $r(x,n)$ определена перед формулировкой теоремы 2.3. Асимптотика вероятности P_1 в силу (3.21)–(3.27) в зоне уклонений (3.20) найдена:

$$P_1 = nP_{(1)} + nP_{(2)} \sim \begin{cases} O(e^{-(1+\gamma/2)M_0(x,n)}), & \text{если } s < s_0 - u, \\ ne^{-M(x,n)}r(x,n), & \text{если } s \geq s_0 - u. \end{cases}$$

Убедимся теперь, что для некоторого $\gamma > 0$

$$P_{\geq 2} = O(e^{(1+\gamma)l(x)} + e^{-\gamma l(x)}P_1). \tag{3.28}$$

Если δ таково, что $2\delta^{1-\beta} > 1$, то для некоторого $\gamma > 0$

$$P_{\geq 2} \leq n^2\mathbf{P}^2(\xi \geq \delta x) = n^2 e^{-2\delta^{1-\beta}l(x)(1+o(1))} = O(e^{-(1+\gamma)l(x)}),$$

так что в этом случае (3.28) установлено. Если δ не достаточно велико, то представим $P_{\geq 2}$ в виде $P_{\geq 2} = P_2 + P_{\geq 3}$, где

$$P_2 := \frac{n(n-1)}{2}\mathbf{P}(D_n B^{[n-1]}\overline{B}_{n-1}\overline{B}_n), \quad B^{[n-1]} := \bigcap_{j \leq n-2} B_j.$$

Грубо говоря, P_2 есть вероятность события $D_n = \{S(n) \in \Delta[x)\}$, когда ровно два слагаемых $\xi(j)$ превышают уровень $y = \delta x$, а $P_{\geq 3}$ — аналогичная вероятность D_n, когда не менее трех слагаемых превышают этот уровень. Вероятность P_2 мы можем оценить по той же схеме, что и вероятность P_1, если осуществить разбиение $S(n)$ на два слагаемых: $S(n-2) + \xi_{(2)}$, где $\xi_{(2)}$ есть сумма двух «больших» слагаемых, имеющая распределение

$$\mathbf{P}(\xi_{(2)} \geq t) = \mathbf{P}(\xi(n-1) + \xi(n) \geq t, \xi(n-1) \geq \delta x, \xi(n) \geq \delta x).$$

Тогда вероятность P_2, как и вероятность P_1, представляется в виде

$$P_2 = \frac{n(n-1)}{2}P_{(1)} + \frac{n(n-1)}{2}P_{(2)},$$

где

$$P_{(1)} = \mathbf{P}(D_n B^{(n-1)}; \xi(n-1) + \xi(n) \geq x, \xi(n-1) \geq y, \xi(n) \geq y),$$

$$P_{(2)} = \mathbf{P}(D_n B^{(n-1)}; y \leq \xi(n-1) + \xi(n) < x, \xi(n-1) \geq y, \xi(n) \geq y),$$

причем для $P_{(1)}$ справедлива полученная ранее оценка. Для $P_{(2)}$ можно использовать представление (3.23), в котором функцию $e^{-l(t)}$ под знаком дифференциала следует заменить функцией

$$e^{-l_{(2)}(t)} := \mathbf{P}(\xi_{(2)} \geq t), \quad t \in [\delta x, x].$$

Воспользуемся далее утверждением, которое докажем позже, в конце настоящего пункта: *для некоторого* $\gamma > 0$ *и всех* $t \in [\delta x, x]$ *выполняется*

$$l_{(2)}(t) \geq \gamma l(x) + l(t). \tag{3.29}$$

В силу (3.29) приведенные ранее оценки для интеграла (3.23) и оценка для $P_{(1)}$ приводят к соотношению (3.28). Если теперь $\delta > 0$ таково, что $3\delta^\beta > 1$, то необходимая оценка для вероятности $P_{\geq 3}$ имеет место; в противном случае следует представить вероятность $P_{\geq 3}$ в виде $P_{\geq 3} = P_3 + P_{\geq 4}$ и повторить с очевидными изменениями предыдущие оценки. Поскольку найдется такое k, для которого выполняется $k\delta^\beta > 1$, то на k-м шаге доказательство завершится. Теорема 2.3 для зоны (3.20) доказана.

Нам осталось доказать (3.29). Воспользуемся неравенством

$$Q := \mathbf{P}(S(2) \geq t, \xi(1) \geq \delta x, \xi(2) \geq \delta x) \leq Q_1 + Q_2, \tag{3.30}$$

где

$$Q_1 := \mathbf{P}(\xi(1) \geq \max\{\delta x, t - \delta x\}, \xi(2) \geq \delta x), \ Q_2 := \mathbf{P}(S(2) \geq t, \delta x \leq \xi(1) \leq t - \delta x).$$

Оценим Q_1:
$$Q_1 \le \mathbf{P}^2(\xi \ge \delta x) \le e^{-2l(\delta x)} = e^{-2\delta^\beta l(x)(1+o(1))},$$
и поскольку для $\delta x \le t \le 2\delta x$ и некоторого $\gamma_1 > 0$
$$2\delta^\beta l(x) \ge l(t)(1+o(1)) + \gamma_1 l(x)(1+o(1)),$$
то
$$Q_1 \le e^{-2\delta^\beta l(x)(1+o(1))} = e^{-l(t)(1+o(1))+\gamma_1 l(x)(1+o(1))}, \quad \delta x \le t \le 2\delta x. \tag{3.31}$$
Для $t \in [2\delta x, x]$
$$Q_1 \le \mathbf{P}(\xi \ge \delta x)\mathbf{P}(\xi \ge t-\delta x) \le e^{-l(\delta x)-l(t-\delta x)},$$
и поскольку для $2\delta x \le t \le x$ и некоторого $\gamma_2 > 0$
$$l(\delta x) + l(t-\delta x) \ge l(t)(1+o(1)) + \gamma_2 l(x)(1+o(1)),$$
то
$$Q_1 \le e^{-l(t)(1+o(1))+\gamma_2 l(x)(1+o(1))}, \quad 2\delta x \le t \le x. \tag{3.32}$$
Оценим Q_2: для $t = px$, $\delta \le p \le 1$
$$\begin{aligned} Q_2 &\le \sum_{\delta x \le j \le (p-\delta)x} \mathbf{P}(\xi \ge px - j)\mathbf{P}(\xi \ge j-1) \\ &\le x \max_{\delta x \le j \le (p-\delta)x} e^{-l(px-j)-l(j-1)} \le x \max_{\delta \le u \le p-\delta} e^{-l((p-u)x)-l(ux-1)} \\ &\le x \max_{\delta \le u \le p-\delta} e^{-[(p-u)^\beta + u^\beta] l(x)(1+o(1))} \le x e^{-T(p)l(x)(1+o(1))}, \end{aligned}$$
где
$$T(p) := \min_{\delta \le u \le p-\delta} r(p,u); \quad r(p,u) := (p-u)^\beta + u^\beta.$$
Функция $r(p,u)$ на отрезке $u \in [0,p]$ выпукла вверх, и при этом $r(p,u) = r(p,p-u)$. Поэтому
$$T(p) = \min_{\delta \le u \le p-\delta} r(p,u) = r(p,\delta),$$
так что для некоторого $\gamma_3 > 0$
$$T(p) \ge p^\beta + \gamma_3.$$
Отсюда следует, что
$$Q_2 \le e^{-2l(\delta x)} = x e^{-l(t)(1+o(1))+\gamma_3 l(x)(1+o(1))}, \quad \delta x \le t \le x. \tag{3.33}$$
Неравенства (3.30)–(3.33) доказывают (3.29).

Число s^*, определяющее зону (3.20), может быть выбрано сколь угодно большим, поэтому, присоединяя к зоне (3.20) зону (3.17), получаем, что *для некоторой последовательности* $s^*(n) \to \infty$ *утверждение интегро-локальной теоремы* 2.3 *имеет место в зоне уклонений*
$$x \ge \sqrt{n}, \quad x \le s^*(n)\sigma_1(n). \tag{3.34}$$

Нам осталось доказать интегро-локальную теорему 2.3 в зоне $x \gg \sigma_1(n)$. Это будет сделано в п. 3.5.7.

3.5.3. Доказательство леммы 3.2. Напомним, что через $t_\delta(x,n)$ мы обозначили точку из отрезка $[0,(1-\delta)x]$, в которой достигается минимум функции $M(x,t,n)$ по t из этого отрезка (см. (2.3)). Обозначим далее $t(x,n) := t_{\frac{1-\beta}{2-\beta}}(x,n)$, так что
$$M_\delta(x,n) = M(x,t_\delta(x,n),n), \quad M(x,n) = M(x,t(x,n),n). \tag{3.35}$$

Пусть число δ лежит в интервале $\left(0, \frac{1-\beta}{2-\beta}\right)$. Тогда (см. рис. 1) найдется $u > 0$ такое, что для любого $s \in [s_0 - u, s^*]$ минимумы функции $H_2(s,p)$ по p из отрезков $[0, 1-\delta]$ и $\left[0, 1 - \frac{1-\beta}{2-\beta}\right]$ совпадают и достигаются в единственной точке $p = p(s) \in \left(0, 1 - \frac{1-\beta}{2-\beta}\right)$:

$$\min_{0 \le p \le 1-\delta} H_2(s,p) = \min_{0 \le p \le 1 - \frac{1-\beta}{2-\beta}} H_2(s,p) = H_2(s, p(s)).$$

Поскольку при этом в силу второго соотношения в (3.24) выполняются равномерные по $s \in [s_0 - u, s^*]$ соотношения асимптотической эквивалентности

$$t_\delta(x,n) \sim xp(s), \quad t(x,n) \sim xp(s), \quad n \to \infty, \tag{3.36}$$

то для всех достаточно больших n имеет место равенство $t_\delta(x,n) = t(x,n)$. Из (3.35) и (3.36) получаем утверждение (i) леммы 3.2.

Далее, по выбранному $u > 0$ можно указать $\gamma > 0$ такое (см. рис. 1), что для любого $s \in [s_*, s_0 - u]$ выполняется

$$\min_{0 \le p \le 1-\delta} H_2(s,p) \ge (1+\gamma) \min_{0 \le p \le 1} H_2(s,p) = (1+\gamma) H_2(s,1) = 1 + \gamma.$$

Поэтому, вновь используя второе соотношение в (3.24), получаем доказательство утверждения (ii) леммы 3.2. Лемма 3.2 доказана.

3.5.4. Доказательство «грубой» интегральной теоремы 2.1. Докажем сначала теорему 2.1 в зоне

$$x \gg \sigma_1(n). \tag{3.37}$$

Для этого обозначим через $r_0 = r_0(x,n)$ наименьшее положительное решение уравнения

$$1 = r - n\frac{l(x)}{x^2} r^{2-\beta},$$

которое существует, если $n\frac{l(x)}{x^2} < 2^{\beta-2}$, причем при $x \gg \sigma_1(n)$ выполняется $r_0 - 1 \sim n\frac{l(x)}{x^2}$ (см. [2, гл. 5, § 2]). Нам понадобится

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и условие* (2.1). *Тогда*

(i) *существует постоянная $c < \infty$ такая, что для всех n и всех достаточно больших $y = \delta x$*

$$\mathbf{P}(S(n) \ge x; B) \le c\bigl[ne^{-l(y)}\bigr]^{\frac{1}{\delta} - n\frac{l(y)}{(y)^2}};$$

(ii) *если $n\frac{l(x)}{x^2} < 2^{\beta-2}$, то для некоторой константы $c_1 < \infty$*

$$\mathbf{P}(S(n) \ge x) \le c_1 n e^{-l(\frac{x}{r_0})}.$$

Утверждения (i) и (ii) леммы 3.3 являются частными случаями теоремы 2.1 и следствия 2.1 в [2, гл. 5, § 2] соответственно.

Из утверждения (ii) леммы 3.3 получаем оценку сверху в области (3.37):

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{l(x)} \ln \mathbf{P}(S(n) \ge x) \le -1. \tag{3.38}$$

Далее, поскольку

$$\mathbf{P}(S(n) \ge x) \ge \mathbf{P}(S(n-1) \ge 0)\mathbf{P}(\xi \ge x),$$

то имеет место оценка снизу в области (3.37):

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{l(x)} \ln \mathbf{P}(S(n) \ge x) \ge -1. \tag{3.39}$$

Из (3.38), (3.39) вытекает утверждение теоремы 2.1 в области (3.37). Утверждение теоремы 2.1 в зоне (3.37) и интегро-локальная теорема 2.3 в зонах (3.17) и (3.34) доказывают теорему 2.1.

3.5.5. Доказательство интегральной теоремы 2.2 в области уклонений

$$x \geq s_* \sigma_1(n), \quad x \leq s^* \sigma_2(n), \tag{3.40}$$

где s_*, s^* — произвольные положительные фиксированные числа. Поскольку интегро-локальная теорема 2.3 доказана в области (3.34), достаточно провести доказательство теоремы 2.2 в части области (3.40), определяемой соотношениями

$$x \gg \sigma_1(n), \quad x \leq s^* \sigma_2(n), \tag{3.41}$$

где s^* — произвольное положительное фиксированное число. Этой области соответствуют соотношения

$$\frac{n}{xz} \to 0, \quad \frac{\sqrt{n}}{z} \geq c > 0, \quad n \to \infty,$$

где $z := \frac{x}{\beta l(x)}$. Воспользуемся первым тождеством в (3.1) для $\Delta = \infty$ и $y = x/2$ (см. (3.2)):

$$P = P_0 + P_{\geq 1}.$$

В силу леммы 3.3 слагаемое P_0 допускает оценку

$$P_0 \leq c[n\mathbf{P}(\xi \geq x/2)]^{2+o(1)} \leq cn^2 e^{-2^{1-\beta} l(x)(1+o(1))} = o\left(\frac{l(x)}{x} e^{-l(x)}\right). \tag{3.42}$$

Оценим слагаемое

$$P_{\geq 1} = n[P_{(1)} + \dots + P_{(5)}], P_{(i)} := \mathbf{P}(D_n \overline{B}_n A_{(i)}), \quad i = 1, \dots, 5,$$

где

$$A_{(1)} := \{3x/4 \leq S(n-1)\}, \quad A_{(2)} := \{\varepsilon x \leq S(n-1) < 3x/4\},$$

$$A_{(3)} := \left\{\frac{s_0}{2}\sigma_1(n) \leq S(n-1) < \varepsilon x\right\}, \quad A_{(4)} := \left\{-N\sqrt{n} \leq S(n-1) < \frac{s_0}{2}\sigma_1(n)\right\},$$

$$A_{(5)} := \{S(n-1) < -N\sqrt{n}\}$$

и где $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ выберем ниже. В силу теоремы 2.1 для некоторого $\gamma > 0$

$$P_{(1)} \leq \mathbf{P}(\xi(n) \geq x/2)\mathbf{P}(S(n-1) \geq 3x/4)$$
$$\leq e^{-l(x/2) - l(3x/4)(1+o(1))} \leq e^{-(1+\gamma) l(x)(1+o(1))}.$$

Поэтому для $P_{(1)}$ тоже справедливо соотношение (3.42):

$$P_{(1)} = o\left(\frac{l(x)}{x} e^{-l(x)}\right). \tag{3.43}$$

Используя рассуждения, которые привели к оценке (3.33), в силу теоремы 2.1 получаем

$$P_{(2)} \leq x e^{-l(x) K_\varepsilon (1+o(1))}, \quad K_\varepsilon := \min_{\varepsilon \leq p \leq 3/4} \{(1-p)^\beta + p^\beta\}.$$

Очевидно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\gamma = \gamma_\varepsilon > 0$ такое, что

$$K_\varepsilon = \min_{\varepsilon \leq p \leq 3/4} \{(1-p)^\beta + p^\beta\} \geq 1 + \gamma.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$

$$P_{(2)} = o\left(\frac{l(x)}{x} e^{-l(x)}\right). \tag{3.44}$$

Следовательно, для некоторого $\varepsilon = \varepsilon_n = o(1)$ соотношение (3.44) сохранится.

Оценим $P_{(3)}$ для уже выбранного $\varepsilon = \varepsilon_n = o(1)$. Обозначим $v = \frac{s_0}{2}\sigma_1(n)$. В силу леммы 2.1 и теоремы 2.1 в области $t \in [v, \varepsilon x]$

$$\mathbf{P}(S(n-1) \geq t) \leq e^{-G_1(s_t)l(t)(1+o(1))},$$

где $s_t = \frac{t}{\sigma_1(n)}$, $G_1(s)$ — положительная возрастающая до 1 функция, изученная в лемме 2.1. Далее, в силу (1.3)

$$\mathbf{P}(\xi \geq x - t - 1) = e^{-l(x-t-1)} = e^{-l(x)+\beta\frac{l(x)}{x}t(1+o(1))+o(1)}.$$

Поэтому, вновь используя рассуждения, которые привели к оценке (3.33), получаем

$$P_{(3)} \leq xe^{-l(x)-K}, \quad K := \min_{v \leq t \leq \varepsilon x}\{G_1(s_t)l(t)(1+o(1)) - zt(1+o(1)) + o(1)\}.$$

Поскольку в области $x \gg \sigma_1(n)$, $t \in [v, \varepsilon x]$ выполняются соотношения

$$\frac{l(t)}{t} \gg \frac{l(x)}{x}, \quad G_1(s_t) \geq G_1\left(\frac{s_0}{2}\right),$$

то в этой области

$$\begin{aligned} G_1(s_t)l(t)(1+o(1)) - zt(1+o(1)) + o(1) &\sim G_1(s_t)l(t)(1+o(1)) \\ &\geq G_1\left(\frac{s_0}{2}\right) l\left(\frac{s_0}{2}\sigma_1(n)\right)(1+o(1)). \end{aligned}$$

Следовательно, для некоторого $\gamma_1 > 0$

$$K \geq G_1\left(\frac{s_0}{2}\right) l\left(\frac{s_0}{2}\sigma_1(n)\right)(1+o(1)) \gg n^{\gamma_1},$$

$$P_{(3)} \leq xe^{-l(x)-K} \ll \frac{l(x)}{x}e^{-l(x)}\frac{x^2}{l(x)}e^{-n^{\gamma_1}}.$$

Поскольку в зоне (3.41) для некоторого γ_2 выполняется неравенство $\frac{x^2}{l(x)} \ll n^{\gamma_2}$, то $\frac{x^2}{l(x)}e^{-n^{\gamma_1}} = o(1)$, и справедлива оценка

$$P_{(3)} = o\left(\frac{l(x)}{x}e^{-l(x)}\right). \tag{3.45}$$

Оценим $P_{(4)}$:

$$\begin{aligned} P_{(4)} &= \mathbf{P}\left(S(n-1) + \xi(n) \geq x, \xi(n) \geq x/2, -N\sqrt{n} \leq S(n-1) < \frac{s_0}{2}\sigma_1(n)\right) \\ &= \mathbf{P}(\xi(n) \geq \max\{x/2, x - S(n-1)\}, -N\sqrt{n} \leq S(n-1) < (s_0/2)\sigma_1(n)) \\ &= \mathbf{P}(\xi(n) \geq x - S(n-1), -N\sqrt{n} \leq S(n-1) < (s_0/2)\sigma_1(n)) \\ &= \int_{-N\sqrt{n}}^{\frac{s_0}{2}\sigma_1(n)} \mathbf{P}(\xi \geq x - t)\mathbf{P}(S(n-1) \in dt). \end{aligned}$$

Важным обстоятельством, позволяющим оценить вероятность $P_{(4)}$, является то, что в зоне $\left[-N_n\sqrt{n}, \frac{s_0}{2}\sigma_1(n)\right]$, где N_n стремится к ∞ достаточно медленно, для суммы $S(n-1)$ справедлива *крамеровская аппроксимация в интегро-локальной теореме* (в силу уже доказанной в зонах (3.17), (3.20) теоремы 2.3 и известной теоремы Шеппа — Стоуна в области нормальных уклонений (см. [26, 21])). Поэтому

$$P_{(4)} \sim J, \quad J := \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_{-N_n\sqrt{n}}^{\frac{s_0}{2}\sigma_1(n)} e^{-M(x,t,n)}\,dt,$$

где, как и ранее, $M(x,t,n) = l(x-t) + {}^{\kappa}\Lambda\big(\frac{t}{n}\big)n$. Прежде чем оценивать J, заметим, что в зоне $x \gg \sigma_1(n)$

$$\frac{nl(x)}{x\sigma_1(n)} = \frac{nl(\sigma_1(n))}{\sigma_1^2(n)}\frac{l(x)}{x}\Big/\frac{l(\sigma_1(n))}{\sigma_1(n)} \sim \frac{l(x)}{x}\Big/\frac{l(\sigma_1(n))}{\sigma_1(n)} = o(1),$$

так что $\frac{n}{z} = o(\sigma_1(n))$. Поэтому для любого $T < \infty$ можно представить интеграл J в виде суммы $J = J_1 + J_2$, где

$$J_1 := \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\int\limits_{-N_n\sqrt{n}}^{Tn/z} e^{-M(x,t,n)}\,dt, \quad J_1 := \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\int\limits_{Tn/z}^{\frac{s_0}{2}\sigma_1(n)} e^{-M(x,t,n)}\,dt.$$

Обозначим

$$M_*(x,n) := \min_{-N_n\sqrt{n}\le t\le Tn/z} M(x,t,n),$$

$$\overline{M}(x,t,n) := M(x,t,n) - l(x), \quad \overline{M}(x,n) := M_*(x,n) - l(x)$$

и представим интеграл J_1 в виде

$$J_1 = e^{-M_*(x,n)}J_3, \quad J_3 := \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\int\limits_{-N_n\sqrt{n}}^{Tn/z} e^{-\overline{M}(x,t,n)+\overline{M}(x,n)}\,dt.$$

Для $R(p) := \frac{p^2}{2} - p$ и любого $T \in (0,\infty)$ имеет место равномерная по $|p| \le T$ сходимость

$$\frac{z^2\overline{M}(x,np/z,n)}{n} \to R(p), \quad \frac{z^2\overline{M}(x,n)}{n} \to \min_p R(p) = R(1) = -\frac{1}{2}. \tag{3.46}$$

Поэтому для любого $T > 1$ точка $t(x,n)$, в которой достигается минимум функции $M(x,t,n)$, удовлетворяет соотношению $t(x,n) \sim n/z$ при $n \to \infty$ и для всех достаточно больших n функции $M_*(x,n)$ и $M(x,n)$ совпадают (ср. с утверждениями леммы 3.2). Далее, можно выбрать последовательность $T_n \to \infty$ таким образом, что равномерно по $p \in [-T_n, T_n]$ соотношения (3.46) сохранятся. При этом всегда можно считать, что $N_n\sqrt{n} \le T_n n/z$, так что, учитывая (3.46) и заменяя $M_*(x,n)$ на $M(x,n)$, получаем

$$J_1 \sim e^{-M(x,n)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\frac{N_n z}{\sqrt{n}}}^{T_n} e^{-nz^{-2}[R(p)-R(1)](1+o(1))}d((p-1)\sqrt{n}/z).$$

Сделаем в последнем интеграле замену $(p-1)\sqrt{n}/z = u$:

$$J_1 \sim e^{-M(x,n)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-N_n-\sqrt{n}/z}^{(T_n-1)\sqrt{n}/z} e^{-\frac{u^2}{2}(1+o(1))}\,du \sim e^{-M(x,n)}.$$

Оценим теперь для выбранного T_n интеграл J_2: с помощью замены $u = \frac{t}{\sqrt{n}}$ имеем

$$J_2 = \frac{e^{-l(x)}}{\sqrt{2\pi n}}\int\limits_{T_n n/z}^{\frac{s_0}{2}\sigma_1(n)} e^{z^{-1}t(1+o(1))+o(1)-\frac{t^2}{2n}(1+o(1))}\,dt$$

$$\le \frac{e^{-l(x)}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{T_n z^{-1}\sqrt{n}}^{\infty} e^{z-1\sqrt{n}u(1+o(1))+o(1)-\frac{u^2}{2}(1+o(1))}\,du(1+o(1))$$

$$\le \frac{e^{-l(x)}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{T_n z^{-1}\sqrt{n}}^{\infty} e^{2z^{-1}\sqrt{n}u - \frac{u^2}{4}}\, du(1+o(1)) \le \frac{e^{-l(x)}}{\sqrt{2\pi}} 2 \frac{e^{-\frac{(T_n-4)^2-16}{4} n z^{-2}}}{(T_n-4)\sqrt{n} z^{-1}} = o(e^{-l(x)}).$$

Наконец, для уже выбранного $N_n \to \infty$ справедливо

$$P_{(5)} \le \mathbf{P}(\xi \ge x)\mathbf{P}(S(n-1) \le -N_n\sqrt{n}) = o(e^{-l(x)}). \tag{3.47}$$

Таким образом, слагаемое $P_{(4)}$ «главное»: $P_{(4)} \sim e^{-M(x,n)} J_1 \sim e^{-M(x,n)}$.

Соотношения (3.42)–(3.47) доказывают утверждение (2.11) теоремы 2.2 в зоне (3.41). Поскольку в зоне (3.34) выполнена интегро-локальная теорема 2.3, утверждение (2.11) теоремы 2.2 в зоне (3.40) доказано.

Для доказательства (2.12) в зоне (3.40), $x = v\sigma_1(n)$, $v \ge c > 0$, заметим, что в этой области точка минимума $t(x,n)$ функции $M(x,t,n)$ имеет вид $t(x,n) \sim \beta n \frac{l(x)}{x}$ при $x \to \infty$. Поэтому

$$M(x,n) = M(x,t(x,n),n) = l(x) - \frac{\beta^2 b^2}{2v^{2\beta-2}}(1+o(1)) + o(1)$$

и соотношение (2.12) следует из (2.11). Интегральная теорема 2.2 в зоне (3.40) доказана.

3.5.6. Доказательство интегральной теоремы 2.2 в зоне уклонений

$$x \gg \sigma_2(n). \tag{3.48}$$

При минимальных предположениях утверждение (2.11) теоремы 2.2 получено в теореме 4.1 в [2, гл. 5, § 4]. Поскольку в зонах (3.17), (3.20) доказана интегро-локальная теорема 2.3, а в зоне (3.37) (состоящей из зон (3.41) и (3.48)) — утверждение (2.11) теоремы 2.2, то утверждение (2.11) интегральной теоремы 2.2 во всех зонах больших уклонений доказано. Так как соотношение (2.12) следует из утверждения (2.11) (см. рассуждения в конце п. 3.5.5), теорема 2.2 доказана.

3.5.7. Доказательство интегро-локальной теоремы 2.3 в зоне

$$x \gg \sigma_1(n) \tag{3.49}$$

(в зоне (3.34) интегро-локальная теорема 2.3 уже доказана). Допустим, что выполнено условие $[\mathrm{D}_0]$, в силу которого для фиксированного $\Delta \in (0,\infty)$

$$\mathbf{P}(\xi \in \Delta[x)) \sim \frac{\Delta\beta l(x)}{x} e^{-l(x)}. \tag{3.50}$$

В этом случае, повторяя дословно приведенное выше доказательство теоремы 2.2 в зоне (3.41) или доказательство теоремы 4.1 в [2, гл. 5, § 4] в зоне (3.48) и используя при этом вместо функции $\mathbf{P}(\xi \ge x) = e^{-l(x)}$ функцию, стоящую в правой части (3.50), получаем утверждение (2.13) теоремы 2.3 в зоне (3.49). Таким образом, осталось убедиться, что для справедливости (2.13) в зоне (3.40) условие $[\mathrm{D}_0]$ излишне. Поскольку в зоне (3.20) это условие излишне, то достаточно доказать, что оно излишне и в зоне (3.41). Для этого вновь воспользуемся первым тождеством в (3.1) для фиксированного $\Delta \in (0,\infty)$ и $y = x/2$. Приведем соотношение

$$P = P_0 + P_{(1)} + \dots + P_{(5)},$$

которое уже применялось при доказательстве теоремы 2.2 в зоне (3.41). Вероятности P_0 и $P_{(i)}$ для $i = 1,2,3$ при этом были оценены с «запасом»:

$$P_0 + P_{(1)} + P_{(2)} + P_{(3)} = o\left(\frac{l(x)}{x} e^{-M(x,n)}\right).$$

Оценим вероятность $P_{(5)}$:

$$P_{(5)} = \mathbf{P}(\xi(n) + S(n-1) \in \Delta[x), S(n-1) \le -N_n\sqrt{n}) \\ \le \mathbf{P}(\xi \ge x + N_n\sqrt{n}) \max_{v \le -N_n\sqrt{n}} \mathbf{P}(S(n-1) \in \Delta[v)).$$

В силу интегро-локальной теоремы для суммы $S(n-1)$ (см. [26])

$$\max_{v \le -N_n\sqrt{n}} \mathbf{P}(S(n-1) \in \Delta[v)) = o(1/\sqrt{n}),$$

поэтому

$$P_{(5)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-M(x,n)}\right) = o\left(\frac{l(x)}{x} e^{-l(x)}\right) \frac{x}{l(x)\sqrt{n}}.$$

Заметим, что в зоне (3.41) выполняется $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}l(x)}{x} > 0$, так что в этой зоне $P_{(5)} = o\left(\frac{l(x)}{x} e^{-M(x,n)}\right)$. Следовательно, $P = P_{(4)} + o\left(\frac{l(x)}{x} e^{-M(x,n)}\right)$, и нам достаточно оценить $P_{(4)}$. Нетрудно видеть, что $P^-_{(4)} \le P_{(4)} \le P^+_{(4)}$, где

$$P^-_{(4)} := \mathbf{P}(S(n-1) \in \Delta[x - \xi(n)), x - (s_0/2)\sigma_1(n) + \Delta < \xi(n) < x + N_n\sqrt{n}) \\ = -\int\limits_{x - \frac{s_0}{2}\sigma_1(n) + \Delta}^{x + N_n\sqrt{n}} \mathbf{P}(S(n-1) \in \Delta[x - t)) d(e^{-l(t)}),$$

$$P^+_{(4)} := \mathbf{P}(S(n-1) \in \Delta[x - \xi(n)), x - (s_0/2)\sigma_1(n) < \xi(n) < x + N_n\sqrt{n} + \Delta) \\ = -\int\limits_{x - \frac{s_0}{2}\sigma_1(n)}^{x + N_n\sqrt{n} + \Delta} \mathbf{P}(S(n-1) \in \Delta[x - t)) d(e^{-l(t)}).$$

Применяя для суммы $S(n-1)$ интегро-локальную теорему, получаем

$$P^-_{(4)} \sim -\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} \int\limits_{x - \frac{s_0}{2}\sigma_1(n) + \Delta}^{x + N_n\sqrt{n}} e^{-\kappa\Lambda(\frac{x-t}{n})n} d(e^{-l(t)}),$$

$$P^+_{(4)} \sim -\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n}} \int\limits_{x - \frac{s_0}{2}\sigma_1(n)}^{x + N_n\sqrt{n} + \Delta} e^{-\kappa\Lambda(\frac{x-t}{n})n} d(e^{-l(t)}).$$

Выполняя интегрирование по частям (повторяя при этом доказательство интегро-локальной теоремы 2.3 в зоне (3.20)), а затем повторяя доказательство интегральной теоремы 2.2 в зоне (3.41), получаем

$$P^{\pm}_{(4)} \sim \Delta\beta \frac{l(x)}{x} e^{-M(x,n)}, \quad P_{(4)} \sim \Delta\beta \frac{l(x)}{x} e^{-M(x,n)}.$$

Мы доказали, что для справедливости (2.13) в зоне (3.40) условие $[\mathrm{D}_0]$ излишне.

Поскольку соотношение (2.15) следует из утверждения (2.13) (см. рассуждения в конце п. 3.5.5), теорема 2.3 доказана.

§ 4. Доказательство леммы 3.1

Прежде чем доказывать лемму 3.1, приведем несколько вспомогательных утверждений.

4.1. Теорема непрерывности для преобразования Лежандра. Пусть для любого $r \in [0,1]$ задана выпуклая вниз функция $A_{(r)}(\lambda)$, $\lambda \in [0,\infty)$, принимающая значения на множестве $(-\infty,\infty]$, зависящая от параметра r и при этом конечная и дважды непрерывно дифференцируемая по λ из множества $\lambda \in [0,\varepsilon]$, где константа $\varepsilon \in (0,1]$ фиксирована. Пусть $A_{(r)}(0) = A_{(0)}(0) = 0$ при всех $r \in [0,1]$, а производная $A'_{(r)}(\lambda)$ функции $A_{(r)}(\lambda)$ по аргументу λ удовлетворяет соотношениям $A'_{(r)}(0) \le 0$ при всех $r \in (0,1]$, $A'_{(0)}(0) = 0$. Обозначим при $\alpha \in \mathbb{R}$, $r \in [0,1]$ через

$$\Lambda_{(r)}(\alpha) := \sup_{\lambda \ge 0}\{\lambda\alpha - A_{(r)}(\lambda)\} \tag{4.1}$$

преобразование Лежандра над функцией $A_{(r)}(\lambda)$. Вторую производную функции $A_{(r)}(\lambda)$ по λ обозначим через $A''_{(r)}(\lambda)$.

Лемма 4.1. *Пусть фиксированы вещественные $\varepsilon \in (0,1]$, $C \in [1/\varepsilon,\infty)$ и целое $N \ge 3$. Пусть для всех $r \in \left(0,\frac{1}{C}\right]$ выполнены неравенства*

$$\sup_{0\le\lambda\le r}|A'_{(r)}(\lambda) - A'_{(0)}(\lambda)| \le Cr^N, \qquad \sup_{0\le\lambda\le r}|A''_{(r)}(\lambda) - A''_{(0)}(\lambda)| \le Cr^{N-1}, \tag{4.2}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le r}|A''_{(0)}(\lambda) - 1| \le Cr. \tag{4.3}$$

Тогда уравнение

$$A'_{(r)}(\lambda) = \alpha \tag{4.4}$$

имеет единственное решение $\lambda_{(r)}(\alpha)$ при $\alpha \in \left[0,\frac{3}{8C}\right]$, если $r = 0$, и при $\alpha \in \left[0,\frac{1}{2}r\right]$, если $r \in \left(0,\frac{1}{3C}\right)$. При этом

$$\Lambda_{(0)}(\alpha) = \int_0^\alpha \lambda_{(0)}(t)\,dt, \quad \alpha \in [0, 3/(8C)], \tag{4.5}$$

и для всех $r \in \left(0,\frac{1}{3C}\right)$

$$\Lambda_{(r)}(\alpha) = -A_{(r)}(\lambda_{(r)}(0)) + \int_0^\alpha \lambda_{(r)}(t)\,dt, \quad 0 \le \alpha \le \frac{1}{2}r; \tag{4.6}$$

$$\sup_{0\le\alpha\le\frac{1}{2}r}|\lambda_{(r)}(\alpha) - \lambda_{(0)}(\alpha)| \le 2\mathrm{C}r^N; \tag{4.7}$$

$$\sup_{0\le\alpha\le\frac{1}{2}r}|\Lambda_{(r)}(\alpha) - \Lambda_{(0)}(\alpha)| \le 2\mathrm{C}r^{N+1}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Обозначим $r_0 := \frac{3}{8C}$. В силу (4.3) для λ из отрезка $\left[0,\frac{4}{3}r_0\right]$ выполняется неравенство

$$A''_{(0)}(\lambda) \ge 1 - C\frac{4}{3}r_0 \ge 1 - C\frac{1}{2C} = \frac{1}{2}, \tag{4.9}$$

поэтому функция $A'_{(0)}(\lambda)$ на этом отрезке возрастает. Следовательно, для $\alpha \in \left[0, A'_{(0)}\left(\frac{4}{3}r_0\right)\right]$ уравнение (4.4) при $r = 0$ имеет единственное решение $\lambda_{(0)}(\alpha)$.

Далее, в силу (4.3)

$$A'_{(0)}\left(\frac{4}{3}r_0\right) \ge \int\limits_0^{\frac{4}{3}r_0} A''_{(0)}(t)\,dt \ge \int\limits_0^{\frac{4}{3}r_0}(1-Ct)\,dt = r_0.$$

Поэтому $[0,r_0] \subseteq \left[0, A'_{(0)}\left(\frac{4}{3}3_0\right)\right]$ и для $\alpha \in [0,r_0]$ уравнение (4.4) при $r=0$ имеет единственное решение $\lambda_{(0)}(\alpha)$.

Пусть теперь $0 \le \lambda \le r \le r_0$. Тогда в силу (4.2), (4.9)

$$A''_{(r)}(\lambda) \ge A''_{(0)}(\lambda) - Cr^{N-1} \ge \frac{1}{2} - \mathrm{C}\left(\frac{3}{8C}\right)^{N-1} \ge \frac{1}{8}.$$

Следовательно, для $\alpha \in [0, A'_{(r)}(r)]$ уравнение (4.4) при $r \in \left(0, \frac{1}{3C}\right)$ имеет единственное решение $\lambda_{(r)}(\alpha)$. Далее, в силу (4.2), (4.3) для $r \in \left(0, \frac{1}{3C}\right]$

$$A'_{(r)}(r) \ge A'_{(0)}(r) - Cr^N \ge \int\limits_0^r A''_{(0)}(t)\,dt - Cr^N$$

$$\ge \int\limits_0^r (1-Ct)\,dt - Cr^N = r - C\left(\frac{r^2}{2} + r^N\right) \ge \frac{1}{2}r.$$

Поэтому при $r \in \left(0, \frac{1}{3\mathrm{C}}\right]$ выполняется $\left[0, \frac{1}{2}r\right] \subseteq [0, A'_{(r)}(r)]$ и, следовательно, для $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}r\right]$ уравнение (4.4) имеет единственное решение $\lambda_{(r)}(\alpha)$.

Единственное решение $\lambda_{(r)}(\alpha)$ уравнения (4.4) является единственной точкой, в которой достигается супремум функции $\lambda\alpha - A_{(r)}(\lambda)$ (см. (4.1)):

$$\Lambda_{(r)}(\alpha) = \lambda_{(r)}(\alpha)\alpha - A_{(r)}(\lambda_{(r)}(\alpha)). \tag{4.10}$$

Дифференцируя тождество (4.10) по α, получаем $\Lambda'_{(r)}(\alpha) = \lambda_{(r)}(\alpha)$ и

$$\Lambda_{(r)}(\alpha) = \Lambda_{(r)}(0) + \int\limits_0^\alpha \lambda_{(r)}(t)\,dt.$$

Поскольку $\Lambda_{(r)}(0) = -A_{(r)}(\lambda_{(r)}(0))$ и $\lambda_{(0)}(0) = 0$, тождества (4.5), (4.6) установлены.

Заметим, что для $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}r\right]$, $r \in \left(0, \frac{1}{3C}\right)$

$$A'_{(0)}(\alpha + C\alpha^2) \ge \int\limits_0^{\alpha+C\alpha^2} (1-Ct)\,dt \ge (\alpha + C\alpha^2) - \frac{1}{2}C(\alpha + C\alpha^2)^2$$

$$\ge \alpha + \frac{1}{2}C\alpha^2 - \alpha^3 - \frac{1}{2}C^3\alpha^4 = \alpha + C\alpha^2\left(\frac{1}{4} - \alpha\right) + \frac{1}{2}C\alpha^2\left(\frac{1}{2} - C\alpha^2\right).$$

Так как для рассматриваемых α выполняются неравенства $\alpha \le \frac{1}{4}$, $C\alpha^2 \le \frac{1}{2}$, мы получили неравенство $A'_{(0)}(\alpha + C\alpha^2) \ge \alpha$, из которого следует, что для $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}r\right]$ выполняется

$$\lambda_{(0)}(\alpha) \le \alpha + C\alpha^2. \tag{4.11}$$

Пусть теперь $m := 2Cr^N$, $r \in \left(0, \frac{1}{3\mathrm{C}}\right]$, $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}r\right]$. Тогда в силу (4.11)

$$\lambda_{(0)}(\alpha) + m \le \alpha + C\alpha^2 + 2Cm^N \le \frac{r}{2} + C\frac{r^2}{4} + 2Cr^N \le r\left(\frac{1}{2} + C\frac{r}{4} + 2Cr^{N-1}\right) \le r,$$

и ввиду (4.2), (4.3)

$$A'_{(r)}(\lambda_{(0)}(\alpha)+m) \ge A'_{(0)}(\lambda_{(0)}(\alpha)+m) - Cr^N$$
$$\ge A'_{(0)}(\lambda_{(0)}(\alpha)) + m(1-Cr) - Cr^N \ge \alpha + 2Cr^N(1-Cr) - Cr^N \ge \alpha.$$

Следовательно, $\lambda_{(r)}(\alpha) \le \lambda_{(0)}(\alpha)+m$. Аналогично

$$A'_{(r)}(\lambda_{(0)}(\alpha)-m) \le A'_{(0)}(\lambda_{(0)}(\alpha)-m) + Cr^N$$
$$\le A'_{(0)}(\lambda_{(0)}(\alpha)) - m(1-Cr) + Cr^N \le \alpha - 2Cr^N(1-Cr) + Cr^N \le \alpha.$$

Поэтому $\lambda_{(r)}(\alpha) \ge \lambda_{(0)}(\alpha) - m$, $|\lambda_{(r)}(\alpha) - \lambda_{(0)}(\alpha)| \le m = 2Cr^N$, т. е. неравенство (4.7) доказано.

В силу тождеств (4.5), (4.6) $\sup\limits_{0\le\alpha\le\frac{1}{2}r} |\Lambda_{(r)}(\alpha) - \Lambda_{(0)}(\alpha)| \le I_1 + I_2$, где

$$I_1 := \sup_{0\le\alpha\le\frac{1}{2}r} \int\limits_0^\alpha |\lambda_{(r)}(t) - \lambda_{(0)}(t)|\,dt, \quad I_2 := |A_{(r)}(\lambda_{(r)}(0))|.$$

С учетом неравенства (4.7)

$$I_1 \le 2Cr^N \int\limits_0^\alpha dt \le 2Cr^N\alpha \le Cr^{N+1}.$$

Для оценки I_2 заметим, что согласно $A'_{(r)}(0) \le 0$ и (4.7) $0 \le \lambda_{(r)}(0) \le 2Cr^N \le r$, поэтому для $\theta \in [0,1]$ в силу первого неравенства в (4.2)

$$I_2 \le |A_{(r)}(0)| + |\lambda_{(r)}(0)||A'_{(r)}(\theta r)| \le 2Cr^N[A'_{(0)}(\theta r) + Cr^N].$$

Далее, ввиду $A'_{(0)}(0) = 0$ и (4.3) для $\theta' \in [0,1]$ выполняется

$$A'_{(0)}(\theta r) \le |A'_{(0)}(0)| + \theta r |A''_{(0)}(\theta' r)| \le 2Cr^N(1+Cr),$$

поэтому

$$I_2 \le 2Cr^N[2Cr^N(1+Cr) + Cr^N] \le Cr^{N+1}.$$

Неравенство (4.8) доказано. Лемма 4.1 доказана.

4.2. Равномерные интегро-локальные теоремы для сумм случайных величин в области нормальных уклонений. Пусть для каждого $n = 1, 2, \dots$ задана случайная величина $\xi_{(n)}$ с распределением $\mathbf{F}_{(n)}$ и характеристической функцией $\mathfrak{f}_{(n)}(t) = \mathbf{E}e^{it\xi_{(n)}}$, $t \in \mathbb{R}$. Будем предполагать, что при всех $n \ge 1$

$$\mathbf{E}\xi_{(n)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\xi^2_{(n)} = 1. \tag{4.12}$$

Обозначим через $S(n) = \xi_{(n)}(1) + \dots + \xi_{(n)}(n)$ сумму независимых случайных величин, распределенных как $\xi_{(n)}$.

Следующее условие для последовательности $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ является аналогом условия [R] (см. § 1) для распределения $\mathbf{F}$ случайной величины ξ.

[R]. Для любых $\delta > 0, N < \infty$

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\delta\le|t|\le N} |\mathfrak{f}_{(n)}(t)| < 1.$$

Будем говорить, что для распределения $\mathbf{F}$ случайной величины ξ *выполнено условие* $[\mathrm{Z}_h]$, если для некоторого вещественного c выполнено условие $[\mathrm{Z}_{h,c}]$ (см. п. 3.1). Следующее условие для последовательности $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ является аналогом условия $[\mathrm{Z}_h]$ для распределения $\mathbf{F}$ случайной величины ξ.

[Z_h]. Для любого $\delta > 0$ при всех $n \geq 1$ выполнены соотношения

$$|\mathfrak{f}_{(n)}(2h^{-1}\pi)| = 1, \quad \limsup_{n\to\infty} \sup_{\delta \leq |t| \leq h^{-1}\pi} |\mathfrak{f}_{(n)}(t)| < 1.$$

Введем в рассмотрение условие равномерной интегрируемости квадрата случайной величины $\xi_{(n)}$.

[I]. Имеет место равенство

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{n\geq 1} \mathbf{E}(|\xi_{(n)}|^2; |\xi_{(n)}| \geq T) = 0.$$

Сформулированная ниже теорема 4.1 является непосредственным следствием теорем 1, 2 из работы [23].

Теорема 4.1. *Пусть последовательность распределений* $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ *удовлетворяет условиям* (4.12), [I] *и либо условию* [R], *либо условию* [Z_h] *этого раздела. Пусть* $\Delta > 0$ *— любое фиксированное число, если выполнено условие* [R], *и* $\Delta = h$, *если выполнено условие* [Z_h]. *Тогда при* $n \to \infty$ *имеет место соотношение*

$$\mathbf{P}(S(n) \in \Delta[x)) = \frac{\Delta}{n^{1/2}}\left[\phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) + \varepsilon_n(x,\Delta)\right],$$

где

$$\phi(t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-|t|^2/2}, \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varepsilon_n(x,\Delta)| = 0.$$

Для распределений $\mathbf{F}$, не зависящих от n (схема серий отсутствует), утверждение теоремы 4.1 установлено Б. В. Гнеденко [30, 31] в арифметическом случае и Л. А. Шеппом и Ч. Стоуном [26, 21] в нерешетчатом. В [23] содержится также обобщение на случай схемы серий аналогичных многомерных утверждений, полученных Е. Л. Рвачевой [32] для арифметических ξ и Стоуном [21] для нерешетчатых.

4.3. Алгоритм вычисления коэффициентов ряда Крамера. Пусть невырожденная случайная величина ξ с нулевым средним удовлетворяет двустороннему условию Крамера: *в некоторой окрестности начала координат конечно преобразование Лапласа* $\varphi(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda\xi}$. Функцию уклонений для ξ обозначим через

$$\Lambda(\alpha) := \sup_{\lambda}\{\lambda\alpha - A(\lambda)\}, \tag{4.13}$$

где $A(\lambda) := \ln\varphi(\lambda)$. Перечислим теперь известные свойства функций $A(\lambda)$, $\Lambda(\alpha)$ (см., например, [33]), которые нам понадобятся. Функции $A(\lambda)$, $\Lambda(\alpha)$ аналитичны в некоторой окрестности начала координат и представляются в виде сходящихся рядов

$$A(\lambda) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\gamma_k, \quad \Lambda(\alpha) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} v_k, \tag{4.14}$$

где $\gamma_k = A^{(k)}(0)$, $v_k = \Lambda^{(k)}(0)$. Второй ряд в (4.14) называют *рядом Крамера*, а полином

$$^{\kappa}\Lambda(\alpha) = \sum_{k=2}^{\kappa} \frac{\alpha^k}{k!} v_k$$

— *отрезком ряда Крамера.* Числа $\gamma_k := A^{(k)}(0)$, $k = 1, 2, \ldots$, называют *семиинвариантами* случайной величины ξ. Мы приведем алгоритм вычисления коэффициента v_k ряда Крамера через семиинварианты $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$.

Обозначим через (λ_-, λ_+) максимальный интервал, во всех точках которого конечна функция $A(\lambda)$, и пусть

$$\alpha_- := \inf_{\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)} A'(\lambda) = \lim_{\lambda \downarrow \lambda_-} A'(\lambda), \quad \alpha_+ := \sup_{\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)} A'(\lambda) = \lim_{\lambda \uparrow \lambda_+} A'(\lambda).$$

Тогда функция $\lambda(\alpha) := \Lambda'(\alpha)$ для всех $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$ удовлетворяет тождеству

$$A'(\lambda(\alpha)) = \alpha. \tag{4.15}$$

Дифференцируя (4.15), получаем тождество $A''(\lambda(\alpha))\lambda'(\alpha) = 1$, из которого находим представление для второй производной

$$\Lambda''(\alpha) = \lambda'(\alpha) = 1/A''(\lambda(\alpha)).$$

Тем самым мы построили непрерывную функцию $\mu_2(u_1) = \frac{1}{u_1}$, отображающую $(0, \infty)$ в $\mathbb{R}$ и такую, что $v_2 = \mu_2(\gamma_2)$. Повторив указанную процедуру еще раз, получим тождество

$$A'''(\lambda(\alpha))(\lambda'(\alpha))^2 + A''(\lambda(\alpha))\lambda''(\alpha) = 0,$$

из которого, используя уже найденное представление для $\lambda'(\alpha)$, находим представление для третьей производной

$$\Lambda'''(\alpha) = \lambda''(\alpha) = -\frac{A'''(\lambda(\alpha))(\lambda'(\alpha))^2}{A''(\lambda(\alpha))} = -\frac{A'''(\lambda(\alpha))}{(A''(\lambda(\alpha)))^3}.$$

Тем самым мы построили непрерывную функцию $\mu_3(u_1, u_2) = -\frac{u_2}{u_1^3}$, отображающую $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ и такую, что

$$v_3 = \mu_3(\gamma_2, \gamma_3).$$

Выполняя указанную процедуру k раз, мы найдем представление для производной $\Lambda^{(k+1)}(\alpha)$ через функции $A''(\lambda(\alpha)), \ldots, A^{(k+1)}(\lambda(\alpha))$. Иначе говоря, указанная процедура позволяет построить непрерывную функцию $\mu_{k+1}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, отображающую $(0, \infty) \times \mathbb{R}^{k-1}$ в $\mathbb{R}$ и такую, что

$$v_{k+1} = \mu_{k+1}(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{k+1}).$$

Очевидно, что так построенные функции μ_k для $k = 2, 3, \ldots$ не зависят от распределения случайной величины ξ и в этом смысле являются «инвариантными». Заметим, что имеет место «формула обращения» (см., например, [33])

$$A(\lambda) = \sup_{\alpha} \{\lambda\alpha - \Lambda(\alpha)\},$$

совершенно симметричная к (4.13). Поэтому, повторяя приведенные выше рассуждения, получаем представления для семиинвариантов $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ в терминах коэффициентов ряда Крамера $v_2, \ldots, v_k$:

$$\gamma_k = \mu_k(v_2, \ldots, v_k), \quad k = 2, 3, \ldots,$$

с теми же функциями μ_k.

Если теперь функция $\Lambda_*(\alpha)$ определяется как преобразование Лежандра

$$\Lambda_*(\alpha) := \sup_{\lambda \geq 0} \{\lambda\alpha - A_*(\lambda)\} \tag{4.16}$$

над выпуклой вниз функцией $A_*(\lambda)$ (которая, вообще говоря, может не быть логарифмом преобразования Лапласа над некоторым распределением), то в широких предположениях полученные выше формулы дадут представление производных функции $\Lambda_*(\alpha)$ порядка $2, \ldots, \kappa$ через производные функции $A_*(\lambda)$ того же порядка:

$$\gamma_j(\alpha) := A_*^{(j)}(\lambda_*(\alpha)) \quad \text{для } \lambda_*(\alpha) := \Lambda_*'(\alpha), \quad j = 2, \ldots, \kappa.$$

Более точно, приведенные выше рассуждения доказывают следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Пусть выпуклая вниз функция $A_*(\lambda)$, $A_*(0)=0$, конечна и имеет на полуинтервале $(0,\lambda_1]$ при некотором $\lambda_1>0$ непрерывную производную $A^{(j)}(\lambda)$, $\lambda\in(0,\lambda_1]$, любого порядка j, причем первая производная $A'_*(\lambda)$ возрастает при $\lambda\in(0,\lambda_1]$ и $A'_*(0+)=0$. Тогда для производных функции $\Lambda_*(\alpha)$, определенной в* (4.16), *справедливы равенства*

$$\Lambda'_*(\alpha)=\lambda_*(\alpha),\quad \Lambda_*^{(j)}(\alpha)=\mu_j(\gamma_2(\alpha),\dots,\gamma_j(\alpha)),\ j=2,3,\dots,\quad \alpha\in(0,A'_*(\lambda_1)),$$

где функция $\lambda_*(\alpha)$ есть единственное решение уравнения

$$A'_*(\lambda)=\alpha,$$

$\gamma_j(\alpha):=A_*^{(j)}(\lambda_*(\alpha))$ *для* $j=2,3,\dots,$ $\alpha>0$, *а алгоритм построения функций* $\mu_j=\mu_j(u_1,\dots,u_{j-1})$, $j=2,3,\dots,$ *приведен выше в настоящем пункте. Если, кроме того, для некоторого целого $\kappa\geq 2$ существуют пределы*

$$\gamma_j(0+):=\lim_{\lambda\downarrow 0}A_*^{(j)}(\lambda),\quad 2\leq j\leq\kappa,$$

и при этом $\gamma_2(0+)>0$, то для функции $\Lambda_*(\alpha)$ справедлива следующее разложение Тейлора:

$$\Lambda_*(\alpha)=\sum_{j=0}^{\kappa}\frac{\alpha^j}{j!}\mu_j(\gamma_2(0+),\dots,\gamma_j(0+))+\alpha^\kappa\varepsilon(\alpha),\quad \alpha\geq 0,\tag{4.17}$$

где $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}\varepsilon(\alpha)=0$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда для распределения $\mathbf{F}$ условие Крамера не выполнено, а вместо него выполнено условие конечности семиинвариантов $\gamma_2,\dots,\gamma_\kappa$ (для этого достаточно условие конечности абсолютного момента $\mathbf{E}|\xi|^\kappa$ порядка κ). Тогда приведенные формулы позволяют построить полином ${}^\kappa\Lambda(\alpha)$ в (1.12) (отрезок ряда Крамера). Функция $A(\lambda)=\ln\varphi(\lambda)$ не существует без условия Крамера, поэтому вместо нее рассмотрим любую функцию $A_*(\lambda)$, выпуклую вниз на правой полуоси, для которой выполнены условия леммы 4.2. Пусть при этом числа $\gamma_j(0+)$ для $j=1,\dots,\kappa$, вычисленные для функции $A_*(\lambda)$, совпадают с соответствующими семиинвариантами распределения $\mathbf{F}$. Тогда функция $\Lambda_*(\alpha)$, определенная формулой (4.16), удовлетворяет соотношению (4.17), в котором полином в его правой части заменен отрезком ряда Крамера ${}^\kappa\Lambda(\alpha)$. Добавим еще, что функция $A_*(\lambda)$, обладающая всеми перечисленными выше свойствами, будет построена ниже (см. формулу (4.32)).

4.4. Доказательство леммы 3.1. Обозначим $\alpha^+:=\frac{s_+\sigma_1(n)}{n}$. Рассуждения, приведенные перед формулировкой леммы 3.1, дают основание утверждать: *если равномерно по $\alpha\in[0,\alpha^+]$ выполнены соотношения* (A1)–(A3), *то соотношение* (3.7) *справедливо равномерно по* $x\in[0,s_+\sigma_1(n)]$. Далее, в силу экспоненциального неравенства Чебышева

$$\mathbf{P}(S(n)\geq x;B)=\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(S(n)\geq x\mid B)\leq\mathbf{P}(B)e^{-n\Lambda_y(\frac{x}{n})},$$

где, напомним, $\Lambda_y(\alpha)$ есть функция уклонений срезанной на уровне y случайной величины $\xi^{(y)}$ (см. определение в п. 3.3). Поэтому равномерное по $x\in[0,s_+\sigma_1(n)]$ неравенство (3.8) следует из (A3) и очевидных соотношений

$$\mathbf{P}(B)\to 1,\quad {}^\kappa\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\sim\frac{x^2}{2n},\quad n\to\infty.$$

Таким образом, для доказательства (3.7) осталось показать, что соотношения (A1)–(A3) выполнены равномерно по $\alpha\in[0,\alpha^+]$.

Напомним, что уровень срезки в лемме 3.1 выбран следующим образом: $y = \rho\sigma_1(n) \sim \rho_+\sigma_1(n)$ при $\rho_+ := \left(\frac{\beta}{4}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} s_+^{\frac{1}{1-\beta}}$; функция

$$\lambda_y(\alpha) = \Lambda'_y(\alpha) := \frac{\partial \Lambda_y(\alpha)}{\partial \alpha}$$

определена наряду с функцией $\Lambda_y(\alpha)$ в п. 3.3. Нам понадобится

Лемма 4.3. *Функции $\lambda_y(\alpha)$, $\Lambda_y(\alpha)$ при $\alpha \in [0, \alpha^+]$ имеют вид*

$$\lambda_y(\alpha) = \alpha[1 + \varepsilon_1^{(y)}(\alpha)] + r_1^{(y)}(\alpha), \quad \Lambda_y(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^2\big[1 + \varepsilon_2^{(y)}(\alpha)\big] + r_2^{(y)}(\alpha), \tag{4.18}$$

где для некоторого $\gamma > 0$ при $n \to \infty$, $i = 1, 2$

$$\sup_{0 \le \alpha \le \alpha^+} \big|r_i^{(y)}(\alpha)\big| = O(e^{-n^\gamma}), \qquad \sup_{0 \le \alpha \le \alpha^+} \big|\varepsilon_i^{(y)}(\alpha)\big| = o(1).$$

Доказательство. Для последовательности $y_0(n) = \frac{n}{\sigma_1(n)\ln n}$ представим вторую производную по λ функции $\varphi_y(\lambda)$ (см. определение в п. 3.3) в виде

$$\varphi''_y(\lambda) = \varphi''_{y-}(\lambda) + \varphi''_{y+}(\lambda),$$

где

$$\varphi''_{y-}(\lambda) = \mathbf{E}(e^{\lambda\xi}\xi^2, \xi < y_0(n)), \quad \varphi''_{y+}(\lambda) = \mathbf{E}(e^{\lambda\xi}\xi^2, y_0 \le \xi < y).$$

Обозначим

$$\lambda^+ := 2\frac{s_+\sigma_1(n)}{n} = 2\alpha^+.$$

Поскольку $\lambda^+ y_0(n) = \frac{O(1)}{\ln n} = o(1)$, очевидно, что

$$\sup_{0 \le \lambda \le \lambda^+} |\varphi''_{y-}(\lambda) - \varphi''_y(0)| = o(1) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{4.19}$$

Убедимся, что для $\lambda \in [0, \lambda^+]$ и для любого $k \ge 2$ при $n \to \infty$

$$\varphi^{(k)}_{y+}(\lambda) = o(1), \tag{4.20}$$

где $\varphi^{(k)}_{y+}(\lambda)$ — производная по λ порядка k. Для этого заметим, что

$$\frac{y_0}{y} = \frac{n}{\delta_*(v)v\sigma_1^2(n)\ln n} \sim \frac{1}{\delta_*(v)vl(\sigma_1(n))\ln n} = o(1)$$

и

$$\varphi^{(k)}_{y+}(\lambda) = -\int\limits_{y_0}^{y} t^k e^{\lambda t} d\mathbf{P}(\xi \ge t) \le -y^k \int\limits_{y_0}^{y} e^{\lambda t} d\mathbf{P}(\xi \ge t)$$

$$= -y^k e^{\lambda t}\mathbf{P}(\xi \ge t)\big|_{t=y_0}^{y} + y^k\lambda\int\limits_{y_0}^{y} e^{\lambda t}\mathbf{P}(\xi \ge t)\,dt \le y^k e^{-h_\lambda(y_0)} + y^k\lambda\int\limits_{y_0}^{y} e^{-h_\lambda(t)}\,dt,$$

где $h_\lambda(t) = -\lambda t + l(t)$. Поэтому справедливы неравенства

$$\sup_{0 \le \lambda \le \lambda^+} \varphi^{(k)}_{y+}(\lambda) \le \varphi^{(k)}_{y+}(\lambda^+) \le y^k e^{-h(y_0)} + y^k\lambda^+\int\limits_{y_0}^{y} e^{-h(t)}\,dt \le y^k(1 + y\lambda^+)e^{-h^*}, \tag{4.21}$$

где $h(t) = h_{\lambda^+}(t)$, $h^* = \min\limits_{y_0 \le t \le y} h(t)$. Убедимся далее, что

$$h^* = l(y_0)(1 + o(1)) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{4.22}$$

Для этого представим h^* в виде

$$h^* = \min\{h_1^*, h_2^*\}, \quad h_1^* = \min_{y_0 \le t \le \varepsilon y} h(t), \quad h_2^* = \min_{\varepsilon y \le t \le y} h(t),$$

где $\varepsilon \in (0,1)$. Нетрудно видеть, что функция

$$\frac{h(py)}{l(\sigma_1(n))} = \frac{l(p\rho\sigma_1(n)) - 2s_+ p\rho\sigma_1^2(n)/n}{l(\sigma_1(n))}$$

сходится при $n \to \infty$ равномерно по $p \in [\varepsilon, 1]$ к функции

$$h_0(p) := p^\beta a - pb, \quad a = \rho^\beta, \quad b = 2s_+\rho.$$

В силу выбора ρ выполняется $\frac{b}{a} = \frac{\beta}{2}$. Далее, при $\frac{b}{a} \le \frac{\beta}{2}$ производная $h_0'(p)$ на отрезке $[0,1]$ положительна и для любого $\varepsilon \in (0,1)$ минимум функции $h_0(p)$ по отрезку $[\varepsilon, 1]$ достигается в единственной точке $p = \varepsilon$. Поэтому можно выбрать $\varepsilon = o(1)$ таким образом, что $h_2^* \sim h(\varepsilon y) \ge h_1^*$ и, следовательно, $h^* \sim h_1^*$. Заметим, что для $t = o(\sigma_1(n))$ выполняется

$$\frac{\lambda^+ t}{l(t)} = \frac{2s_+\rho\sigma_1(n)t}{nl(t)} = 2s_+\rho\frac{\sigma_1^2(n)}{nl(\sigma_1(n))}\frac{l(\sigma_1(n))}{\sigma_1(n)}\Big/\frac{l(t)}{t} \sim 2s_+\rho\frac{l(\sigma_1(n))}{\sigma_1(n)}\Big/\frac{l(t)}{t} = o(1).$$

Поэтому $\lambda^+ t = o(l(t))$, так что $h_1^* \sim \min\limits_{y_0 \le t \le \varepsilon y} l(t) \sim l(y_0)$. Соотношение (4.22) доказано. Из (4.22) и (4.21) следует (4.20).

Продолжим доказательство леммы 4.3. Из (4.19), (4.20) получаем соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le\lambda\le\lambda^+} |\varphi_y''(\lambda) - \varphi_y''(0)| = 0. \tag{4.23}$$

Заметим, что аналогичным образом устанавливается соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le\lambda\le\lambda^+} |\varphi_y(\lambda) - 1| = 0. \tag{4.24}$$

С помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (см., например, [34, с. 139]) получаем

$$\varphi_y(\lambda) = \sum_{i=0}^{2} \lambda^i \frac{a_i(y)}{i!} + \lambda^2 \bar\varepsilon_y(\lambda), \quad \varphi_t'(\lambda) = \sum_{i=0}^{1} \lambda^i \frac{a_{i+1}(y)}{i!} + \lambda\tilde\varepsilon_y(\lambda), \tag{4.25}$$

где $a_i(y) = \mathbf{E}(\xi^i; \xi \le y)$ для $i = 0,1,2$ и в силу (4.23)

$$\sup_{0\le\lambda\le\lambda^+} |\bar\varepsilon_y(\lambda)| + \sup_{0\le\lambda\le\lambda^+} |\tilde\varepsilon_y(\lambda)| \le 2 \sup_{0\le\lambda\le\lambda^+} |\varphi_y''(\lambda) - \varphi_y''(0)| = o(1). \tag{4.26}$$

Из соотношений (4.25), (4.26) вытекает равенство

$$A_y'(\lambda) = \frac{\varphi_y'(\lambda)}{\varphi_y(\lambda)} = \gamma_1^{(y)} + \lambda\bigl(\gamma_2^{(y)} + \varepsilon^{(y)}(\lambda)\bigr), \quad 0 \le \lambda \le \lambda^+, \tag{4.27}$$

где $\gamma_1^{(y)} := \mathbf{E}(\xi; \xi < y) \le 0$, $\gamma_2^{(y)} := \mathbf{E}(\xi^2; \xi < y) - (\gamma_1(y))^2$, а поправочное слагаемое $\varepsilon^{(y)}(\lambda)$ удовлетворяет соотношению

$$\sup_{0\le\lambda\le\lambda^+} |\varepsilon^{(y)}(\lambda)| = o(1) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{4.28}$$

Очевидно, что для некоторого $c > 0$

$$\max_{i=1,2} \bigl|\gamma_i^{(y)} - \gamma_i\bigr| = O(e^{-n^c}), \tag{4.29}$$

где $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$. Функция $\lambda_y(\alpha)$, являясь решением уравнения

$$A_y'(\lambda) = \alpha, \tag{4.30}$$

отображает отрезок $[A'_y(0), A'_y(\lambda^+)]$, где $A'_y(0) < 0$, в отрезок $[0, \lambda^+]$. Поэтому в силу (4.27) и (4.30) получаем $\lambda_y(\alpha) = \alpha\big(1 + \varepsilon_1^{(y)}(\alpha)\big) + r_1^{(y)}(\alpha)$, где

$$\varepsilon_1^{(y)}(\alpha) = K^{(y)}(\lambda_y(\alpha)) - 1, \quad r_1^{(y)}(\alpha) = -\gamma_1^{(y)} K^{(y)}(\lambda_y(\alpha)),$$
$$K^{(y)}(\lambda) := \big(\gamma_2^{(y)} + \varepsilon^{(y)}(\lambda)\big)^{-1}.$$

Применяя (4.28) и (4.29), приходим к соотношениям

$$\sup_{\alpha \in [A'_y(0), A'_y(\lambda^+)]} \big|\varepsilon_1^{(y)}(\alpha)\big| = \sup_{\lambda \in [0, \lambda^+]} \big|(\gamma_2^{(y)} + \varepsilon^{(y)}(\lambda))^{-1} - 1\big| = o(1),$$
$$\sup_{\alpha \in [A'_y(0), A'_y(\lambda^+)]} \big|r_1^{(y)}(\alpha)\big| = \big|\gamma_1^{(y)}\big| \sup_{\lambda \in [0, \lambda^+]} \big|\big(\gamma_2^{(y)} + \varepsilon^{(y)}(\lambda)\big)^{-1}\big| \le Ce^{-n^c}.$$

Напомним, что мы выбрали $\lambda^+ = 2\alpha^+$, поэтому в силу (4.27) для всех достаточно больших n отрезок $[0, \alpha^+]$ содержится в отрезке $[A'_y(0), A'_y(\lambda^+)]$, и, следовательно, первое утверждение (4.18) леммы 4.3 доказано.

Поскольку

$$\lambda_y(\alpha) = \Lambda'_y(\alpha), \Lambda_y(0) = -A_y(\lambda_y(0)),$$

при $\alpha \in [0, \alpha^+]$ справедливо тождество

$$\Lambda_y(\alpha) = \int_0^\alpha \lambda_y(t)\, dt - A_y(\lambda_y(0)).$$

Из последнего и первого утверждений (4.18) получаем второе утверждение (4.18). Лемма 4.3 доказана.

Поскольку $\alpha_+ = o(1)$ при $n \to \infty$, предпосылка (A1) следует из первого соотношения в (4.18).

Рассмотрим теперь предпосылку (A2). Обозначим $\xi_{(n)} := \xi^{(y,\alpha)}$ при $\alpha \in [0, \alpha^+]$, и пусть $\mathbf{F}_{(n)}$ — распределение $\xi_{(n)}$. Для проверки (A2) достаточно показать, что для последовательности $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ выполнены условия теоремы 4.1, приведенной в п. 4.2.

Из соотношений (4.24), (4.23) следует, что при $n \to \infty$ последовательность распределений $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ слабо сходится вместе со вторым моментом к распределению $\mathbf{F}$ случайной величины ξ. Поэтому условия (4.12), [I] выполнены.

Покажем теперь, что если распределение $\mathbf{F}$ случайной величины ξ удовлетворяет условию [R], то последовательность $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ также удовлетворяет условию [R]. Для этого воспользуемся следующим неравенством для модуля характеристической функции случайной величины, подвергнутой «случайному» преобразованию Крамера.

Лемма 4.4 (неравенство Юринского [33, с. 56]). *Пусть Y, Z — две случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве. Пусть $\mathbf{E}e^Z < \infty$. Тогда для $t \in \mathbb{R}$, $p \in (0,1)$, $q = 1 - p$, $h = h_p := p(1 + \mathbf{E}e^{pZ})\mathbf{E}(e^{pZ} + 1)|Z|$*

$$\left(1 - \left|\frac{\mathbf{E}e^{itY+Z}}{\mathbf{E}e^Z}\right|^2\right)^q \ge \frac{1 - |\mathbf{E}e^{itY}| - 2h}{2^p(\mathbf{E}e^Z)^{2q}}. \tag{4.31}$$

Пусть распределение случайного вектора (Y, Z) задается соотношением

$$\mathbf{P}(Y \in U, Z \in V) := \mathbf{P}(\xi^{(y)} \in U, \lambda_y(\alpha)\xi^{(y)} \in V),$$

где $0 \le \alpha \le \alpha^+$. Тогда неравенство (4.31) будет иметь вид

$$(1 - |\mathbf{E}e^{it\xi^{(y,\alpha)}}|^2)^q \ge \frac{1 - |\mathbf{E}e^{it\xi^{(y)}}| - 2h}{2^p(\mathbf{E}e^{\lambda_y(\alpha)\xi^{(y)}})^{2q}}.$$

Из того, что ξ удовлетворяет условию [R], вытекает: для любых $c > 0$, $N < \infty$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\sup_{c \le |t| \le N} |\mathbf{E} e^{it\xi^{(y)}}| \le 1 - \varepsilon < 1.$$

Выбирая $p > 0$ достаточно малым, добиваемся того, что $2h$ будет не больше, чем $\varepsilon/2$. В силу (4.24) для всех $\alpha \in (0, \alpha^+)$ выполняется $\mathbf{E} e^{\lambda_y(\alpha)\xi^{(y)}} \to 1$ при $n \to \infty$. Поэтому для всех достаточно больших n

$$\inf_{0 \le \alpha \le \alpha^+} \inf_{c \le |t| \le N} (1 - |\mathbf{E} e^{it\xi^{(y,\alpha)}}|^2)^q > 0, \qquad \sup_{0 \le \alpha \le \alpha^+} \sup_{c \le |t| \le N} |\mathbf{E} e^{it\xi^{(y,\alpha)}}| < 1.$$

Условие [R] для последовательности $\{\mathbf{F}_{(n)}\}$ установлено, а вместе с ним — и выполнение условий теоремы 4.1 и предпосылки (A2).

Проверим теперь выполнение предпосылки (A3). Для этого воспользуемся леммой 4.2, в которой функцию $A_*(\lambda)$ определим следующим образом. Для произвольного целого $j \ge \kappa$ определим функцию

$$\varphi_{[j]}(\lambda) := \mathbf{E}(e^{\lambda\xi}, \xi \le 0) + \sum_{i=0}^{j} \frac{\lambda^i}{i!} \mathbf{E}(\xi^i; \xi > 0), \quad \lambda \ge 0.$$

Выберем j достаточно большим, например, положим $j = 2\kappa$, так что $n\bigl(\frac{\sigma_1(n)}{n}\bigr)^k = o(1)$ при $n \to \infty$, и для этого j обозначим

$$\varphi_*(\lambda) := \varphi_{[j]}(\lambda), \quad \lambda \ge 0.$$

Функция $\ln \varphi_*(\lambda)$ не является выпуклой вниз на всей полуоси $\lambda \ge 0$ в силу того, что ее первая производная $\frac{\varphi_*'(\lambda)}{\varphi_*(\lambda)}$ положительна в правой полуокрестности нуля и сходится к нулю при $\lambda \to \infty$. Однако можно выбрать $\lambda_1 > 0$ такое, что на отрезке $[0, \lambda_1]$ функция $\ln \varphi_*(\lambda)$ строго выпукла (вторая производная этой функции положительна). Для выбранного λ_1 обозначим

$$A_*(\lambda) = \begin{cases} \ln \varphi_*(\lambda), & \text{если } \lambda \in [0, \lambda_1], \\ \infty, & \text{если } \lambda > \lambda_1. \end{cases} \tag{4.32}$$

Так определенная функция $A_*(\lambda)$ является выпуклой на полуоси $\lambda \ge 0$; это обстоятельство облегчит применение лемм 4.1, 4.2. Определим преобразование Лежандра для $A_*(\lambda)$:

$$\Lambda_*(\alpha) := \sup_{\lambda \ge 0} \{\lambda\alpha - A_*(\lambda)\}.$$

Предположим, что справедливо следующее утверждение: *в зоне $x \in [0, s_+\sigma_1(n)]$ имеют место соотношения*

$$n\Lambda_y\left(\frac{x}{n}\right) = n\Lambda_*\left(\frac{x}{n}\right) + o(1); \tag{4.33}$$

$$n\Lambda_*\left(\frac{x}{n}\right) = {}^{\kappa}\Lambda\left(\frac{x}{n}\right) n + o(1), \quad n \to \infty. \tag{4.34}$$

Очевидно, что предпосылка (A3) вытекает из соотношений (4.33), (4.34), и нам для завершения доказательства леммы 3.1 осталось доказать утверждения (4.33), (4.34).

Доказательство (4.33), (4.34). Напомним, что $\lambda^+ = \frac{2s_+\sigma_1(n)}{n}$. Очевидно, что для $j = 0, 1, 2$, для производной $\varphi_*^{(j)}(\lambda)$ порядка j функции $\varphi_*(\lambda)$ справедливо

$$\sup_{0 \le \lambda \le \lambda^+} \bigl|\varphi_*^{(j)}(\lambda) - \varphi_*^{(j)}(0)\bigr| = O(\lambda^+), \quad n \to \infty, \tag{4.35}$$

при этом

$$\sup_{0\le\lambda\le\lambda^+}|A''_*(\lambda)-1| = O(\lambda^+), \quad n\to\infty. \tag{4.36}$$

Кроме того (см. доказательство леммы 4.3), для $j=0,1,2$

$$\sup_{0\le\lambda\le\lambda^+}\left|\varphi_y^{(j)}(\lambda)-\varphi_y^{(j)}(0)\right| = o(1), \quad n\to\infty, \tag{4.37}$$

где, как и прежде, $\varphi_y^{(j)}(\lambda)$ — производная порядка j по λ.

Заметим, что для $j=0,1,2$

$$\left|\varphi_y^{(j)}(\lambda)-\varphi_*^{(j)}(\lambda)\right| \le I_1(\lambda)+I_2(\lambda),$$

где

$$I_1(\lambda) := \mathbf{P}(\xi\ge y)\left|\varphi_y^{(j)}(\lambda)\right|, \quad I_2(\lambda) := \left|(1-\mathbf{P}(\xi\ge y))\varphi_y^{(j)}(\lambda)-\varphi_*^{(j)}(\lambda)\right|.$$

В силу выбора y и (4.37) для некоторого $\gamma>0$

$$\sup_{0\le\lambda\le\lambda^+} I_1(\lambda) = O(e^{-n^\gamma}), \quad n\to\infty.$$

Оценим $I_2(\lambda)$. В силу формулы Тейлора для $j=1,2,3$

$$I_2(\lambda) \le I_3(\lambda)+\frac{\lambda^{k+1-j}}{(k+1-j)!}I_4(\lambda),$$

где

$$I_3 := \sum_{i=0}^{k-j}\frac{\lambda^i}{(i)!}\mathbf{E}(\xi^{i+j};\xi\ge y), \quad I_4 := \mathbf{E}(e^{\lambda\xi}\xi^{k+1-j};0<\xi<y).$$

Очевидно, что для некоторого $\gamma>0$

$$\sup_{0\le\lambda\le\lambda^+} I_3(\lambda) = I_3(\lambda^+) = O(e^{-n^\gamma}), \quad n\to\infty.$$

Повторяя оценки, которые использовались при доказательстве леммы 4.3, можно получить для $j=1,2,3$ неравенство

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le\lambda\le\lambda^+} I_4(\lambda) \le \mathbf{E}(\xi^{k+1-j};\xi>0)<\infty.$$

Таким образом, для $j=1,2,3$

$$\sup_{0\le\lambda\le\lambda^+}\left|\varphi_y^{(j)}(\lambda)-\varphi_*^{(j)}(\lambda)\right| = O((\lambda^+)^{k+1-j}), \quad n\to\infty. \tag{4.38}$$

Из (4.38), (4.35), (4.37) очевидным образом вытекают для $j=1,2$ соотношения

$$\sup_{0\le\lambda\le\lambda^+}\left|A_y^{(j)}(\lambda)-A_*^{(j)}(\lambda)\right| = O((\lambda^+)^{k-j}), \quad n\to\infty. \tag{4.39}$$

Из соотношений (4.36), (4.39) в силу леммы 4.1 следует, что

$$\sup_{0\le\alpha\le\frac{1}{2}\lambda^+}|\Lambda_y(\alpha)-\Lambda_*(\alpha)| = O((\lambda^+)^{k+1}),$$

поэтому (4.33) доказано.

Заметим, что для функции $A_*(\lambda)$ выполнены условия леммы 4.2, поэтому в силу формулы (4.17) соотношение (4.34) имеет место. Выполнение предпосылки (А3) доказано. Лемма 3.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровков А. А.* Вероятности больших уклонений для для случайных блужданий с семиэкспоненциальными распределениями // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1290–1324.

2. *Боровков А. А., Боровков К. А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Ч. I. Медленно убывающие распределения скачков. М.: Наука (в печати).

3. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие уклонения. I // Теория вероятностей и ее применения. 1998. Т. 43, № 1. С. 3–17.

4. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.

5. *Осипов Л. В.* О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1972. Т. 17, № 2. С. 320–341.

6. *Nagaev S. V.* Large deviations for sums of independent random variables // Ann. Probab. 1979. V. 7, N 5. P. 745–789.

7. *Розовский Л. В.* Вероятности больших уклонений на всей оси // Теория вероятностей и ее применения. 1993. Т. 38, № 1. С. 79–109.

8. *Нагаев С. В.* Некоторые предельные теоремы для больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения. 1965. Т. 10, № 2. С. 231–254.

9. *Петров В. В.* Предельные теоремы для больших уклонений, когда условие Крамера нарушено // Вестн. ЛГУ. I: 1963, № 19. С. 49–68; II: 1968, № 1. С. 58–75.

10. *Вольф В.* О вероятностях больших уклонений в случае нарушения условия Крамера // Math. Nachr. 1975. V. 70. P. 197–215.

11. *Wolf W.* Asymptotische Entwicklungen fer Wahrscheinlichkeiten grosser Abweichungen // Z. Wahrsch. Verw. Geb. 1977. Bd 40. S. 239–256.

12. *Саулис Л., Статулявичус В.* Предельные теоремы о больших уклонениях. Вильнюс: Мокслас, 1989.

13. *Mikosh T., Nagaev A. V.* Large deviations of heavy-tailed sums with applications in insurance // Extremes. 1998. V. 1. P. 81–110.

14. *Нагаев А. В.* Интегральные предельные теоремы, включающие большие уклонения, когда условие Крамера не выполнено // Теория вероятностей и ее применения. I: 1969. Т. 14, № 1. С. 51–64; II: 1969. Т. 14, № 2. С. 203–214.

15. *Нагаев А. В.* Об одном свойстве сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1977. Т. 22, № 2. С. 335–346.

16. *Пинелис И. Ф.* Об асимптотической эквивалентности вероятностей больших уклонений суммы и максимума независимых случайных величин // Тр. Ин-та математики / АН СССР. Сиб. отделение. 1985. С. 144–173.

17. *Боровков А. А.* Оценки для распределений сумм и максимумов сумм случайных величин при невыполнении условия Крамера // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 997–1038.

18. *Коршунов Д. А.* Вероятности больших уклонений максимумов сумм независимых слагаемых с отрицательным средним и субэкспоненциальным распределением // Теория вероятностей и ее применения. 2002. Т. 46, № 1. С. 51–64.

19. *Алешкявичене А. К.* О крамеровском приближении при нарушении условия Крамера // Liet. Mat. Rink. 2005. V. 45, N 4. P. 447–456.

20. *Алешкявичене А. К.* О вероятностях больших уклонений максимума сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1979. Т. 24, № 1. С. 322–337.

21. *Stone C.* On local and ratio limit theorems // Proc. of the Fifth Berkeley sympos. on mathematical statistics and probability. Berkeley and Los Angeles: Univ. California Press, 1966. V. II, part II. P. 217–224.

22. *Stone C.* A local limit theorem for nonlattice multy-dimensional distribution functions // Ann. Math. Statist. 1965. V. 36. P. 546–551.

23. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Интегро-локальные теоремы для сумм независимых случайных векторов в схеме серий // Мат. заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 468–482.

24. *Розовский Л. В.* Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения нормального закона // Теория вероятностей и ее применения. 1989. Т. 34, № 4. С. 686–705.

25. *Пинелис И. Ф.* Одна задача о больших уклонениях в пространстве траекторий // Теория вероятностей и ее применения. 1981. Т. 26, № 2. С. 428–430.

26. *Shepp L. A.* A local limit theorem // Ann. Math. Statist. 1964. V. 35. P. 419–423.

27. *Боровков А. А.* О субэкспоненциальных распределениях и асимптотике распределения максимума последовательных сумм // Сиб. мат. журн. 2002. V. 43, N 6. P. 1253–1364.
28. *Боровков А. А., Могульский А. А.* О больших и сверхбольших уклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. I // Теория вероятностей и ее применения 2006. Т. 51, № 2. С. 260–294.
29. *Боровков А. А., Могульский А. А.* О больших и сверхбольших уклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. II // Теория вероятностей и ее применения. 2006. Т. 51, № 4.
30. *Гнеденко Б. В.* О локальной предельной теореме теории вероятностей // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, № 3. С. 187–194.
31. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.
32. *Рвачева Е. Л.* Об областях притяжения многомерных распределений // Уч. зап. Львовского гос. ун-та. Сер. мех.-мат. 1958. Т. 6. С. 5–44.
33. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Большие уклонения и проверка статистических гипотез. Новосибирск: Наука, 1992.
34. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1972.

Статья поступила 29 августа 2006 г.

Боровков Александр Алексеевич, *Могульский Анатолий Альфредович*
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
borovkov@math.nsc.ru, mogul@math.nsc.ru