Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5

УДК 517.958

ДВУМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЙКОНАЛА

А. В. Боровских

Аннотация: Исследуется двумерное уравнение эйконала $\psi_x^2 + \psi_y^2 = 1/v^2(x,y)$. Осуществлен групповой анализ уравнения, установлена связь групповых свойств с геометрическими характеристиками риманова пространства с метрикой $ds^2 = [dx^2+dy^2]/v^2(x,y)$. Выделены наиболее важные классы уравнений, получены условия приводимости данного уравнения к уравнению одного из этих классов. Установлено условие, при котором два уравнения эквивалентны (теорема о семи инвариантах). Для уравнений, отвечающих римановым пространствам постоянной кривизны, даны явные формулы решений, описывающих фронт волны точечного источника, а также уравнения лучей.

Ключевые слова: уравнение эйконала, неоднородная среда, фронт волны, группы симметрий, группы эквивалентности, явные решения.

§ 1. Групповой анализ

1.1. Двумерное уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x,y)} \tag{1}$$

и трехмерное уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x,y,z)} \tag{2}$$

являются ключевыми в геометрической оптике и акустике неоднородных сред [1–7]: они позволяют описывать фронт распространяющегося возмущения (волны) в виде семейства поверхностей $t = \psi(x,y)$ или $t = \psi(x,y,z)$ соответственно.

К сожалению, «запас» известных явных решений уравнений (1) и (2) крайне мал и сосредоточен в основном вокруг случая однородной среды ($v \equiv \mathrm{const}$), см. [1–7], а также [8–10]. Для неоднородной среды известные решения [5–7, 11, 12], не сводящиеся к случаю однородной среды (как это имеет место, например, в [3]), единичны и не подчинены никакой системе. Единственным, пожалуй, исключением является решение уравнения эйконала для нестационарной среды специального вида в [13, 14].

Существенные продвижения в интегрировании уравнения (2) удалось сделать в [15, 16] на основе группового анализа уравнения (2). Так, для уравнений (2), обладающих максимальными по размерности (15-мерными) группами

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 04–01–00049, 04–01–00697), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–1643.2003.1).

симметрий, получены явные формулы решений, описывающих фронт волны точечного источника, а также уравнения лучей.

Уравнения (2) с группой симметрий меньшей размерности (от четырех до шести) оказались редуцируемы к двумерному уравнению с правой частью, зависящей только от одной переменной: $\psi_\alpha^2+\psi_\beta^2=1/V^2(\alpha)$, что и дало повод для детального исследования двумерного уравнения (1). Еще одной причиной интереса к двумерному уравнению эйконала является то, что анизотропное уравнение эйконала в двумерном случае практически не отличается от изотропного, так как двумерная среда в подходящей системе координат всегда изотропна (этот факт есть просто переформулировка известного свойства метрики в двумерном пространстве быть конформно эквивалентной метрике плоского пространства, см., например, [17]), так что уравнение (1) оказывается «мостом» между уравнением (2) и анизотропным уравнением эйконала $g^{ij}\psi_i\psi_j=1$.

Отметим, что подход, связанный с групповым анализом, реализован и в [18], где изучалось уравнение эйконала с правой частью, зависящей не от пространственных переменных, а от t, ψ и ψ_t (такие уравнения возникают при анализе нелинейных и нестационарных волновых уравнений в однородных средах).

Переходя непосредственно к исследованию уравнения (1), укажем, что соответствующие результаты часто бывает удобно формулировать в терминах двумерного риманова пространства с метрикой

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{v^2(x,y)} \tag{3}$$

и гауссовой кривизной

$$K(x,y)=v(x,y)\Delta v(x,y)-(\nabla v(x,y))^2 \tag{4}$$

(Δ — оператор Лапласа, ∇ — оператор градиента). Это пространство далее называется *пространством лучей*, так как лучи (характеристики уравнения эйконала) являются геодезическими в этой метрике.

Случаи, когда функция в правой части уравнения (1) имеет вид $v(x,y)=V(x)$ или $v(x,y)=e^{\lambda y}V(x)$, будем называть *уравнениями с плоским слоением* (имеется в виду слоение неоднородной среды) и соответственно *уравнениями с квазиплоским слоением.* Функцию $V(x)$ в обоих случаях будем называть *функцией слоения.*

1.2. Группы симметрий и группы эквивалентности. Групповой анализ уравнения (1) осуществляется в основном по традиционной схеме (см., например, [19–22]), включающей вычисление групп симметрий и группы эквивалентности. Симметрии уравнений (1) ищутся среди точечных преобразований (диффеоморфизмов) пространства (x,y,ψ). В предположении, что группа симметрий является группой Ли, для порождающей ее алгебры Ли

$$\Xi=\xi(x,y,\psi)\partial_x+\eta(x,y,\psi)\partial_y+\phi(x,y,\psi)\partial_\psi \tag{5}$$

из уравнения Ли $\Xi^{(1)}E|_{E=0}=0$ (где E — разность между левой и правой частями (1), а через $\Xi^{(1)}$ обозначено продолжение алгебры (5) в пространство переменных (x,y,ψ,ψ_x,ψ_y)) определяются коэффициенты ξ, η и ϕ.

Группа эквивалентности (точнее, обобщенная группа эквивалентности в смысле [23]), также состоящая из точечных преобразований, но уже в пространстве переменных (x,y,ψ,v), порождается алгеброй

$$\overline{\Xi}=\xi(x,y,\psi,v)\partial_x+\eta(x,y,\psi,v)\partial_y+\phi(x,y,\psi,v)\partial_\psi+\omega(x,y,\psi,v)\partial_v, \tag{6}$$

коэффициенты которой также определяются уравнением Ли

$$\Xi^{(1)}E|_{E=0}=0, \tag{7}$$

которое должно обращаться в тождество для всех x, y, ψ, v, удовлетворяющих (1). Уравнение (7) дополняется условием сохранения независимости v от ψ при действии группы, т. е. условием инвариантности уравнения $v_\psi=0$.

Эти группу эквивалентности и алгебру будем называть *общими* в отличие от *частных* групп и алгебр эквивалентности, обслуживающих различные семейства и подсемейства уравнений вида (1).

1.3. Основные результаты параграфа.

Теорема 1. *Общая группа эквивалентности уравнения* (1) *совпадает с прямой суммой группы конформных преобразований двумерного евклидова пространства и группы линейных преобразований переменной ψ. Алгебра Ли* (6) *этой группы бесконечномерна и определяется соотношениями*

$$\xi_y+\eta_x=0,\quad \xi_x=\eta_y,\quad \phi=M\psi+L,\quad \omega=v(\xi_x-M), \tag{8}$$

где M и L — некоторые константы.

Замечание. Конформными являются преобразования, определяемые заменами переменных $(x,y)\to(\alpha,\beta)$, где $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)$ — пара гармонических функций ($\alpha_x=\beta_y$, $\alpha_y=-\beta_x$). Такие замены мы будем называть *гармоническими*, уравнение (1) при такой замене переходит в уравнение

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)^2=\frac{1}{[\alpha_x^2+\alpha_y^2]v^2(x(\alpha,\beta),y(\alpha,\beta))}. \tag{9}$$

Теорема 2. I. *Уравнение* (1) *имеет* 10-*мерную группу симметрий тогда и только тогда, когда пространство лучей имеет постоянную кривизну. Любое такое уравнение некоторой заменой переменных $\hat{x}=\alpha(x,y)$, $\hat{y}=\beta(x,y)$ сводится к некоторому уравнению с плоским слоением.*

II. *Среди уравнений с плоским слоением постоянную кривизну имеют только уравнения с $V\equiv\mathrm{const}$, $V=we^{kx}$ (для которых кривизна $K=0$), $V=wx$ (для которого $K=-w^2$), $V=w\cos(kx+h)$, $V=w\,\mathrm{sh}(kx+h)$ (для которых $K=-k^2w^2$) и $V=w\,\mathrm{ch}(kx+h)$ (для которого $K=k^2w^2$). Алгебры Ли групп симметрий этих уравнений для $k=w=1$, $h=0$ приведены в табл.* 1.

III. *Уравнение* (1) *с пространством лучей непостоянной кривизны имеет нетривиальную группу симметрий (более широкую, чем группа сдвигов переменной ψ, порожденная алгеброй $L\partial_\psi$) тогда и только тогда, когда оно некоторой заменой переменных $\hat{x}=\alpha(x,y)$, $\hat{y}=\beta(x,y)$ сводится к уравнению с плоским или квазиплоским слоением.*

IV. *Среди уравнений с плоским и квазиплоским слоением трехмерную группу симметрий имеют только уравнения с $v(x,y)=w(x+h)^{1+\lambda}$, алгебра Ли этой группы имеет вид*

$$\Xi=A((x+h)\partial_x+y\partial_y-\lambda\psi\partial_\psi)+B\partial_y+L\partial_\psi, \tag{10}$$

и уравнения с $v(x,y)=we^{\lambda y}\cos^{1-\lambda/k}(kx+h)$, алгебра Ли этой группы имеет вид

$$\Xi=Ae^{ky}(\cos(kx+h)\partial_x-\sin(kx+h)\partial_y)+B(\partial_y-\lambda\psi\partial_\psi)+L\partial_\psi. \tag{11}$$

Таблица 1. Алгебры Ли групп симметрий уравнения (1) с пространством лучей постоянной кривизны ($A, B, \ldots, L$ — произвольные постоянные).

$v(x,y)$ / $K(x,y)$	Алгебра Ли Ξ
1 / $(K=0)$	$[A(x^2+\psi^2-y^2)+2Bxy+2Cx\psi]\partial_x$ $+[B(y^2+\psi^2-x^2)+2Axy+2Cy\psi]\partial_y$ $+[C(x^2+y^2+\psi^2)+2Ax\psi+2By\psi]\partial_\psi$ $+D(x\partial_x+y\partial_y+\psi\partial_\psi)+E(x\partial_y-y\partial_x)$ $+F(\psi\partial_x+x\partial_\psi)+G(\psi\partial_y+y\partial_\psi)+H\partial_x+I\partial_y+L\partial_\psi$
e^x / $(K=0)$	$(e^x\psi^2+e^{-x})(A\cos y+B\sin y)\partial_x+(e^x\psi^2-e^{-x})(A\sin y-B\cos y)\partial_y$ $-2e^{-x}(A\cos y+B\sin y)\psi\partial_\psi+e^x\psi[(C\cos y+D\sin y)\partial_x$ $+(C\sin y-D\cos y)\partial_y]-(C\cos y+D\sin y)e^{-x}\partial_\psi$ $+E[(\psi^2+e^{-2x})\partial_\psi-2\psi\partial_x]+e^x[(F\cos y+G\sin y)\partial_x$ $+(F\sin y-G\cos y)\partial_y]+H(\partial_x-\psi\partial_\psi)+I\partial_y+L\partial_\psi$
x / $(K=-1)$	$\operatorname{ch}\psi[(A(x^2-y^2)-By-C)\partial_x+(2Axy+Bx)\partial_y]$ $+\frac{1}{x}[A(x^2+y^2)+By+C]\operatorname{sh}\psi\partial_\psi+\operatorname{sh}\psi[(E(x^2-y^2)-Fy-G)\partial_x$ $+(2Exy+Fx)\partial_y]+\frac{1}{x}[E(x^2+y^2)+Fy+G]\operatorname{ch}\psi\partial_\psi$ $+H(2xy\partial_x+(y^2-x^2)\partial_y)+D(x\partial_x+y\partial_y)+I\partial_y+L\partial_\psi$
$\cos x$ / $(K=-1)$	$\operatorname{ch}\psi[(A\operatorname{ch}y\sin x+B\operatorname{sh}y\sin x+C)\partial_x$ $+(A\operatorname{sh}y\cos x+B\operatorname{ch}y\cos x)\partial_y]+\frac{A\operatorname{ch}y+B\operatorname{sh}y+C\sin x}{\cos x}\operatorname{sh}\psi\partial_\psi$ $+\operatorname{sh}\psi[(E\operatorname{ch}y\sin x+F\operatorname{sh}y\sin x+G)\partial_x$ $+(E\operatorname{sh}y-F\operatorname{ch}y)\cos x\partial_y]+\frac{E\operatorname{ch}y+F\operatorname{sh}y+G\sin x}{\cos x}\operatorname{ch}\psi\partial_\psi$ $+(H\operatorname{ch}y+I\operatorname{sh}y)\cos x\partial_x-[(H\operatorname{sh}y+I\operatorname{ch}y)\sin x+D]\partial_y+L\partial_\psi$
$\operatorname{sh}x$ / $(K=-1)$	$\operatorname{ch}\psi[(A\cos y\operatorname{ch}x+B\sin y\operatorname{ch}x+C)\partial_x$ $+(A\sin y\operatorname{sh}x-B\cos y\operatorname{sh}x)\partial_y]-\frac{A\cos y+B\sin y+C\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}\operatorname{sh}\psi\partial_\psi$ $+\operatorname{sh}\psi[(E\cos y\operatorname{ch}x+F\sin y\operatorname{ch}x+G)\partial_x$ $+(E\sin y\operatorname{sh}x-F\cos y\operatorname{sh}x)\partial_y]-\frac{E\cos y+F\sin y+G\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}\operatorname{ch}\psi\partial_\psi$ $+(H\cos y+I\sin y)\operatorname{sh}x\partial_x++[(H\sin y-I\cos y)\operatorname{ch}x+D]\partial_y+L\partial_\psi$
$\operatorname{ch}x$ / $(K=1)$	$\cos\psi[(A\cos y\operatorname{sh}x+B\sin y\operatorname{sh}x-C)\partial_x$ $+(A\sin y\operatorname{ch}x-B\cos y\operatorname{ch}x)\partial_y]+\frac{A\cos y+B\sin y+C\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\sin\psi\partial_\psi$ $+\sin\psi[(E\cos y\operatorname{sh}x+F\sin y\operatorname{sh}x-G)\partial_x$ $+(E\sin y\operatorname{ch}x-F\cos y\operatorname{ch}x)\partial_y]-\frac{E\cos y+F\sin y+G\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\cos\psi\partial_\psi$ $+(H\cos y+I\sin y)\operatorname{ch}x\partial_x+[(H\sin y-I\cos y)\operatorname{sh}x+D)\partial_y+L\partial_\psi$

Для остальных уравнений группа симметрий двумерна и ее алгебра Ли имеет вид ($\lambda=0$ *для плоского* $\lambda\neq 0$ *для квазиплоского слоения*)

$$\Xi = B(\partial_y-\lambda\psi\partial_\psi)+L\partial_\psi. \tag{12}$$

В формулах (10)–(12) A, B, L — *произвольные постоянные.*

Теорема 3. *Классы эквивалентности, на которые разбивается семейство уравнений* (1)*, являются орбитами общей группы эквивалентности. При этом*

I. *Уравнения с постоянной кривизной пространства лучей, имеющие* 10*-мерную группу симметрий, образуют три класса эквивалентности. Класс оп-*

ределяется знаком кривизны, представителями классов являются уравнения с $v(x,y)=1$ *для* $K=0$, *с* $v(x,y)=x$ *для* $K<0$ *и с* $v(x,y)=\operatorname{ch}x$ *для* $K>0$.

II. *Уравнения с трехмерной группой симметрий сводятся к уравнениям с плоским слоением со степенной функцией слоения и образуют однопараметрическое семейство классов эквивалентности. Каждому классу соответствует свой показатель* λ, *представителем класса является уравнение* $\psi_\alpha^2+\psi_\beta^2=\alpha^{-2(1+\lambda)}$.

III. *Уравнения, имеющие двумерную абелеву группу симметрий (не попадающие в пп.* I, II), *сводятся к уравнениям с плоским слоением и образуют функционально-параметрическое (определяемое функцией слоения* $V(\alpha)$) *семейство классов эквивалентности. Представителями класса являются уравнения вида* $\psi_\alpha^2+\psi_\beta^2=1/V^2(\alpha)$, *причем класс эквивалентности определяет функцию* $V(\alpha)$ *однозначно с точностью до линейных преобразований ее аргумента и умножения этой функции на константу.*

IV. *Уравнения, имеющие двумерную неабелеву группу симметрий (не попадающие в пп.* I, II), *сводятся к уравнениям с квазиплоским слоением и образуют функционально-параметрическое (определяемое функцией слоения* $V(\alpha)$) *семейство классов эквивалентности. Представителями класса являются уравнения вида* $\psi_\alpha^2+\psi_\beta^2=e^{-2\beta}/V^2(\alpha)$, *причем класс эквивалентности определяет функцию* $V(\alpha)$ *однозначно с точностью до сдвигов ее аргумента и умножения этой функции на константу.*

Замечание. Для уравнений общего вида (1), не упомянутых в пп. I–IV теоремы 3 и имеющих только одномерную группу симметрий, разумные соображения, позволяющие выбрать для уравнений этого класса какую-то «каноническую» систему координат (позволяющую представить уравнение в более простом виде) и соответственно какого-то определенного представителя, отсутствуют, поэтому для таких уравнений мы не указываем представителя.

1.4. Доказательство теоремы 1. Уравнение Ли (7) для оператора (6) алгебры эквивалентности приводит к определяющим уравнениям

$$\eta_x+\eta_v v_x+\xi_y+\xi_v v_y=0,\quad \xi_x+\xi_v v_x=\eta_y+\eta_v v_y=\phi_\psi+\omega/v,$$
$$\phi_x+\phi_v v_x=\xi_\psi/v^2,\quad \phi_y+\phi_v v_y=\eta_\psi/v^2.$$

Из этих уравнений, благодаря произволу как в выборе значений v_x и v_y, так и в выборе v, получаем $\xi_v=\eta_v=\phi_v=\phi_x=\phi_y=\xi_\psi=\eta_\psi=0$, что означает разделение переменных: $\phi=\phi(\psi)$, $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$. Учет требования инвариантности при заменах уравнения $v_\psi=0$ дает дополнительное условие $\omega_\psi=0$, из которого следует $\phi_{\psi\psi}=0$, и наши уравнения редуцируются к (8). Теорема доказана.

1.5. Доказательство теоремы 2. Разделение переменных в определяющих уравнениях и условие постоянства кривизны. Для операторов (5) алгебры симметрий уравнение Ли приводит к определяющим уравнениям

$$\eta_x+\xi_y=0,\quad \xi_x=\eta_y=\phi_\psi+(\xi v_x+\eta v_y)/v,\quad \phi_x=\xi_\psi/v^2,\quad \phi_y=\eta_\psi/v^2. \tag{13}$$

Выделение из (13) системы уравнений относительно ϕ:

$$\phi_\psi=\xi_x-(\xi v_x+\eta v_y)/v,\quad \phi_x=\xi_\psi/v^2,\quad \phi_y=\eta_\psi/v^2, \tag{14}$$

и определение условий совместности полученной системы дают соотношения

$$[\xi_\psi/v^2]_\psi=[\xi_x-(\xi v_x+\eta v_y)/v]_x,\quad [\eta_\psi/v^2]_\psi=[\xi_x-(\xi v_x+\eta v_y)/v]_y, \tag{15}$$

$$[\xi_\psi/v^2]_y = [\eta_\psi/v^2]_x.$$

Интегрированием последнего равенства по ψ получаем, что $(\xi/v^2)_y - (\eta/v^2)_x = 2h(x,y)/v^2$, где h — некоторая функция, не зависящая от ψ. Раскрывая здесь производные и пользуясь тем, что $\xi_y + \eta_x = 0$, находим выражения для производных ξ_y и η_x, подстановка которых в уравнения (15) дает равенства

$$\begin{aligned} \xi_{\psi\psi} &= -\xi\big[v(v_{xx}+v_{yy}) - \big(v_x^2+v_y^2\big)\big] - v^2 h_y(x,y), \\ \eta_{\psi\psi} &= -\eta\big[v(v_{xx}+v_{yy}) - \big(v_x^2+v_y^2\big)\big] + v^2 h_x(x,y), \end{aligned} \tag{16}$$

означающие, что ξ и η как функции от ψ являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений с не зависящими от ψ коэффициентами. Величина, стоящая в квадратных скобках, является гауссовой кривизной $K(x,y)$ (см. (4)) двумерного риманова пространства с метрикой (3). Подстановка формулы решения

$$\xi(x,y,\psi) = \xi^1(x,y)\cos(\sqrt{K(x,y)}\psi) + \xi^2(x,y)\sin(\sqrt{K(x,y)}\psi) + \xi^h(x,y),$$

$$\eta(x,y,\psi) = \eta^1(x,y)\cos(\sqrt{K(x,y)}\psi) + \eta^2(x,y)\sin(\sqrt{K(x,y)}\psi) + \eta^h(x,y)$$

системы (16) (где ξ^i, η^i — некоторые функции, $\xi^h = h_y/(Kv^2)$, $\eta^h = -h_x/(Kv^2)$) в (14) показывает, что $\phi(x,y,\psi)$ имеет вид комбинации

$$\phi(x,y,\psi) = \phi^1(x,y)\sin(\sqrt{K(x,y)}\psi) - \phi^2(x,y)\cos(\sqrt{K(x,y)}\psi) + \phi^*(x,y)\psi + \phi^{**}(x,y),$$

причем в силу линейной независимости функций 1, ψ, $\cos\sqrt{K}\psi$, $\psi\cos\sqrt{K}\psi$, $\sin\sqrt{K}\psi$ и $\psi\sin\sqrt{K}\psi$ выполнены равенства $\phi^*_x = \phi^{**}_x = \phi^*_y = \phi^{**}_y = 0$,

$$\phi^1[\sqrt{K}]_x = \phi^1[\sqrt{K}]_y = \phi^2[\sqrt{K}]_x = \phi^2[\sqrt{K}]_y = 0, \quad \xi^i = -\frac{\phi^i_x v^2}{\sqrt{K}}, \quad \eta^i = -\frac{\phi^i_y v^2}{\sqrt{K}}.$$

Из этих равенств следует, что для непостоянной $K(x,y)$ обязательно $\phi^1 = \phi^2 = \xi^1 = \xi^2 = \eta^1 = \eta^2 \equiv 0$, и, значит, преобразования не распадаются на «пространственные» $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ и «временные» $\phi = M\psi + L$ тогда и только тогда, когда пространство лучей имеет постоянную кривизну.

1.6. Случай переменной кривизны. Сначала рассмотрим случай, когда $K(x,y) \neq \mathrm{const}$. В этом случае ξ и η зависят только от x и от y.

Лемма 1. *Пусть уравнение* (1) *имеет одномерную группу симметрий, порожденную оператором вида* $\Xi_0 = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y + (M\psi + L)\partial_\psi$, *где* ξ *и* η *— некоторые функции* ($\xi^2+\eta^2 \neq 0$), *а* M *и* L *— некоторые константы. Тогда замена* $\tilde{x} = \alpha(x,y)$, $\tilde{y} = \beta(x,y)$, *где* α *и* β *определяются системой уравнений*

$$\alpha_x = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}, \quad \alpha_y = -\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad \beta_x = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad \beta_y = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2},$$

приводит уравнение (1) *к уравнению с плоским* (*при* $M = 0$) *или квазиплоским* (*при* $M \neq 0$) *слоением.*

Доказательство сводится с учетом (13) к проверке того, что система для определения α и β совместна и оператор группы Ξ_0 преобразуется в оператор $\widetilde{\Xi}_0 = \partial_\beta + (M\psi + L)\partial_\psi$. Подстановка полученных при такой замене $\tilde{\xi} = 0$, $\tilde{\eta} = 1$, $\tilde{\phi} = M\psi + L$ и новой функции $\tilde{v}(\alpha,\beta)$ в (13) дает $\tilde{v}(\alpha,\beta) = e^{-M\beta}V(\alpha)$, где $V(\cdot)$ — некоторая функция, что и требовалось установить. Лемма доказана.

Следствие. *Если уравнение, для которого* $K(x, y) \neq \mathrm{const}$, *имеет более чем двумерную группу симметрий, то оно сводится к уравнению с плоским слоением.*

Действительно, в этом случае $\phi = M\psi + L$, и для группы симметрий размерности больше двух всегда можно выбрать оператор, у которого $M = L = 0$, а ξ и η не обращаются одновременно в нуль.

Лемма 2. *Пусть* $v(x, y) = V(x)$, *т. е. уравнение* (1) *является уравнением с плоским слоением. Тогда* $K(x, y) = \mathrm{const}$ *для* $V = \mathrm{const}$, $V = wx$, $V = we^{kx}$, $V = w\cos(kx+h)$, $V = w\,\mathrm{sh}(kx+h)$, $V = w\,\mathrm{ch}(kx+h)$, *и только для этих функций. Если* $K(x, y) \neq \mathrm{const}$, *то группа симметрий уравнения* (1) *имеет размерность* 3 *в случае* $V = w(x + h)^{1+\lambda}$ (*с алгеброй симметрий вида* (10)) *и размерность* 2 *во всех остальных случаях* (*с алгеброй симметрий вида* (12) *при* $\lambda = 0$).

Доказательство. Первое утверждение леммы сводится к решению дифференциального уравнения $VV'' - V'^2 = K$, получающегося из формулы кривизны (4) в случае $v(x, y) = V(x)$, в различных случаях: $K > 0$, $K < 0$, $K = 0$.

В случае $K(x, y) \neq \mathrm{const}$, как уже отмечалось, $\phi = M\psi + L$, ξ и η зависят только от x и y и система (13) приводится к виду

$$\xi_y + \eta_x = 0, \quad \xi_x = M + \xi V'(x)/V(x), \quad \eta_y = M + \xi V'(x)/V(x).$$

Решая ее и исключая при решении варианты, приводящие к $K(x, y) = \mathrm{const}$, получаем в случае $M = 0$ решение $\xi = 0$, $\eta = \mathrm{const}$, $\psi = L$, т. е. двумерную алгебру (12). Случай $M \neq 0$ возможен лишь для $V(x) = w(x + h)^{1+\lambda}$ ($\lambda \neq 0, -1$ для непостоянной K), при этом $\xi = A(x + h)$, $\eta = Ay + B$, $\phi = -A\lambda\psi + L$, что и дает алгебру (10). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $v(x, y) = e^{\lambda y}V(x)$, *т. е. уравнение* (1) *является уравнением с квазиплоским слоением* ($\lambda \neq 0$). *Если* $K(x, y) \neq \mathrm{const}$, *то группа симметрий уравнения* (1) *имеет размерность* 3 *в том и только в том случае, когда* $V(x) = w[\cos(kx + h)]^{1-\lambda/k}$, *а ее алгебра Ли имеет вид* (11). *Во всех остальных случаях группа симметрий имеет размерность* 2, *а ее алгебра Ли имеет вид* (12).

Доказательство. То, что уравнение с квазиплоским слоением имеет как минимум двумерную группу симметрий, проверяется непосредственно: компоненты алгебры (12) удовлетворяют уравнениям (13). Если алгебра симметрий двумерна, то она просто совпадает с (12). Если ее размерность больше двух, то в силу следствия из леммы 1 наше уравнение эквивалентно уравнению с плоским слоением и в силу леммы 2 и предположения $K(x, y) \neq \mathrm{const}$ размерность группы симметрий не может быть больше трех. Она может равняться трем, только если уравнение эквивалентно уравнению с плоским слоением и степенной функцией слоения.

Рассмотрение единственной потенциальной возможности — когда группа симметрий трехмерна и ее алгебра имеет вид $\Xi = A(\xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y) + B(\partial_y - \lambda\psi\partial_\psi) + L\partial_\psi$ — приводит к условию на коммутатор первого и второго операторов

$$[\xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y, \partial_y - \lambda\psi\partial_\psi] = -(\xi_y(x, y)\partial_x + \eta_y(x, y)\partial_y),$$

который должен принадлежать алгебре и поэтому обязан быть пропорционален первому оператору $\xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$. Из условий пропорциональности $\xi_y = k\xi$, $\eta_y = k\eta$ получаем в силу уравнений (13), что $v(x, y) = we^{\lambda y}[\cos(kx + h)]^{1-\lambda/k}$

($k \neq 0$), а для соответствующей алгебры Ли приходим к выражению (11). Утверждение леммы доказано.

Замечание. В процессе доказательства мы воспользовались тем, что заменой переменных уравнение с квазиплоским слоением и трехмерной группой симметрий можно свести к уравнению с плоским слоением. Уместно было бы явно предъявить эту замену: она имеет вид $\alpha = e^{-ky}\cos(kx+h)$, $\beta = e^{-ky}\sin(kx+h)$ и приводит уравнение с $v(x,y) = we^{\lambda y}[\cos(kx+h)]^{1-\lambda/k}$ к уравнению с $v(\alpha,\beta) = wk\alpha^{1-\lambda/k}$.

Завершая этот пункт, можно сказать, что в леммах 1–3, по существу, доказаны третье и четвертое утверждения теоремы 2, так что нам осталось только разобраться со случаем постоянной кривизны.

1.7. Случай постоянной кривизны. Пусть $K(x,y) \equiv K = \mathrm{const}$. Рассмотрим три случая: $K = \nu^2 > 0$, $K = -\nu^2 < 0$ и $K = 0$. В первом случае

$$\begin{aligned} \xi(x,y,\psi) &= \xi^1(x,y)\cos(\nu\psi) + \xi^2(x,y)\sin(\nu\psi) + \xi^*(x,y),\\ \eta(x,y,\psi) &= \eta^1(x,y)\cos(\nu\psi) + \eta^2(x,y)\sin(\nu\psi) + \eta^*(x,y),\\ \phi(x,y,\psi) &= -\phi^2(x,y)\cos(\nu\psi) + \phi^1(x,y)\sin(\nu\psi) + M\psi + L. \end{aligned} \tag{17}$$

Подставляя эти функции в уравнения (13) и приравнивая коэффициенты при синусах, косинусах и свободных членах, получаем соотношения

$$\eta^i_x(x,y) + \xi^i_y(x,y) = 0, \quad \xi^i_x(x,y) = \eta^i_y(x,y) = \nu\phi^i + \frac{\xi^i(x,y)v_x + \eta^i(x,y)v_y}{v}, \tag{18}$$

$$\xi^i(x,y) = -\frac{v^2}{\nu}\phi^i_x(x,y), \quad \eta^i(x,y) = -\frac{v^2}{\nu}\phi^i_y(x,y) \tag{19}$$

для ξ^i, η^i, ϕ^i $(i = 1,2)$ и соотношения

$$\eta^*_x(x,y) + \xi^*_y(x,y) = 0, \quad \xi^*_x(x,y) = \eta^*_y(x,y) = M + \frac{\xi^*(x,y)v_x + \eta^*(x,y)v_y}{v} \tag{20}$$

для ξ^* и η^*. Подставляя соотношения (19), явно выражающие ξ^i и η^i через ϕ^i, в (18), получаем систему уравнений относительно $\phi^i(x,y)$:

$$\begin{gathered} \phi^i_{xx} = \frac{1}{v}\big[\phi^i_y v_y - \phi^i_x v_x\big] - \frac{K}{v^2}\phi^i, \quad \phi^i_{yy} = \frac{1}{v}\big[\phi^i_x v_x - \phi^i_y v_y\big] - \frac{K}{v^2}\phi^i,\\ \phi^i_{xy} = -\frac{1}{v}\big[v_x\phi^i_y + v_y\phi^i_x\big]. \end{gathered} \tag{21}$$

Совершенно аналогично в случае $K = -\nu^2 < 0$ подстановка

$$\begin{aligned} \xi(x,y,\psi) &= \xi^1(x,y)\,\mathrm{ch}(\nu\psi) + \xi^2(x,y)\,\mathrm{sh}(\nu\psi) + \xi^*(x,y),\\ \eta(x,y,\psi) &= \eta^1(x,y)\,\mathrm{ch}(\nu\psi) + \eta^2(x,y)\,\mathrm{sh}(\nu\psi) + \eta^*(x,y),\\ \phi(x,y,\psi) &= \phi^2(x,y)\,\mathrm{ch}(\nu\psi) + \phi^1(x,y)\,\mathrm{sh}(\nu\psi) + M\psi + L \end{aligned} \tag{22}$$

в уравнения (13) дает для ξ^i, η^i, ϕ^i $(i = 1,2)$ соотношения (18) и

$$\xi^i(x,y) = \frac{v^2}{\nu}\phi^i_x(x,y), \quad \eta^i(x,y) = \frac{v^2}{\nu}\phi^i_y(x,y), \tag{23}$$

а для для ξ^* и η^* — соотношения (20). Подставляя (23) в (18), приходим снова к уравнениям (21) для ϕ^i.

Наконец, в случае $K=0$ подстановка

$$\begin{aligned}
\xi(x,y,\psi) &= \frac{1}{2}\xi^2(x,y)\psi^2+\xi^1(x,y)\psi+\xi^*(x,y),\\
\eta(x,y,\psi) &= \frac{1}{2}\eta^2(x,y)\psi^2+\eta^1(x,y)\psi+\eta^*(x,y),\\
\phi(x,y,\psi) &= \frac{1}{6}\phi^{**}(x,y)\psi^3+\frac{1}{2}\phi^*(x,y)\psi^2+\phi^2(x,y)\psi+\phi^1(x,y)
\end{aligned}\tag{24}$$

в уравнения (13) дает соотношения $\phi^{**}=L^2\equiv\mathrm{const}$, $\phi^*=L^1\equiv\mathrm{const}$,

$$\eta^i_x(x,y)+\xi^i_y(x,y)=0,\quad \xi^i_x(x,y)=\eta^i_y(x,y)=L^i+\frac{\xi^i(x,y)v_x+\eta^i(x,y)v_y}{v},\tag{25}$$

$$\xi^i(x,y)=v^2\phi^i_x(x,y),\quad \eta^i(x,y)=v^2\phi^i_y(x,y),\tag{26}$$

$$\eta^*_x(x,y)+\xi^*_y(x,y)=0,\quad \xi^*_x(x,y)=\eta^*_y(x,y)=\phi^2(x,y)+\frac{\xi^*(x,y)v_x+\eta^*(x,y)v_y}{v}.\tag{27}$$

Подставляя в (25) выражения для ξ^i и η^i из (26), получаем и здесь систему уравнений для ϕ^i

$$\phi^i_{xx}=\frac{L^i}{v^2}+\frac{1}{v}\big[\phi^i_yv_y-\phi^i_xv_x\big],\quad \phi^i_{yy}=\frac{L^i}{v^2}+\frac{1}{v}\big[\phi^i_xv_x-\phi^i_yv_y\big],\quad \phi^i_{xy}=-\frac{1}{v}\big[v_x\phi^i_y+v_y\phi^i_x\big].\tag{28}$$

Непосредственно проверяется, что во всех трех случаях система уравнений относительно ϕ^i находится в инволюции и поэтому задание для каждого $i=1,2$ трех величин ϕ^i, ϕ^i_x, ϕ^i_y в некоторой точке (x,y) полностью определяет решение как системы (21), так и системы (28).

Предположим теперь, что уравнение (1) с пространством лучей постоянной кривизны является уравнением с плоским слоением. В силу леммы 2 функция слоения может быть только одного из шести видов $V=\mathrm{const}$, $V=wx$, $V=we^{kx}$, $V=w\cos(kx+h)$, $V=w\,\mathrm{sh}(kx+h)$, $V=w\,\mathrm{ch}(kx+h)$. Поскольку за счет сдвигов и растяжений переменных (x,y,ψ) можно в перечисленных функциях избавиться от коэффициентов, ниже будем обсуждать только простейшие случаи, которые будем называть *элементарными*, — функции $V\equiv 1$, $V=x$, $V=e^x$, $V=\cos x$, $V=\mathrm{sh}\,x$ и $V=\mathrm{ch}\,x$.

В случае (соответствующем $K=1$), когда $V(x)=\mathrm{ch}\,x$, система (21) имеет решение

$$\phi^i(x,y)=\frac{A^i\cos y+B^i\sin y+C^i\,\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$$

и по формулам (19) находим

$$\xi^i(x,y)=A^i\cos y\,\mathrm{sh}\,x+B^i\sin y\,\mathrm{sh}\,x-C^i,\ \ \eta^i(x,y)=A^i\sin y\,\mathrm{ch}\,x-B^i\cos y\,\mathrm{ch}\,x,$$

а из уравнений (20) —

$$\xi^*(x,y)=A^*\cos y\,\mathrm{ch}\,x+B^*\sin y\,\mathrm{ch}\,x,\ \ \eta^*(x,y)=A^*\sin y\,\mathrm{sh}\,x-B^*\cos y\,\mathrm{sh}\,x+C^*.$$

Подставляя полученные формулы в (17), выводим, что группа симметрий в случае $v(x,y)=\mathrm{ch}\,x$ оказывается 10-мерной и ее компоненты ξ, η, ϕ определяются формулами, приведенными в табл. 1. Аналогично находятся группы симметрий для остальных случаев, при этом для $V=x$, $V=\cos x$ и $V=\mathrm{sh}\,x$ используем формулы (22), (18)+(23)+(20) и (21), а для $V\equiv 1$ и $V=e^x$ — формулы (24)–(28).

Осталось убедиться в том, что всякое уравнение с пространством лучей постоянной кривизны сводится к уравнению с плоским слоением, а значит, к одному из элементарных уравнений. Этот результат является одним из утверждений следующей леммы об условиях приводимости к уравнению с плоским слоением, которую мы здесь только сформулируем, а докажем в § 2.

Лемма 4. *Для того чтобы уравнение* (1) *было приводимо к уравнению с плоским слоением, необходимо, чтобы функции* $v^2\bigl(K_x^2+K_y^2\bigr)$ *и* $v^2(K_{xx}+K_{yy})$ *были функционально зависимыми с* $K(x,y)$, *т. е. чтобы выполнялись условия*

$$\begin{vmatrix} \bigl[v^2\bigl(K_x^2+K_y^2\bigr)\bigr]_x & \bigl[v^2\bigl(K_x^2+K_y^2\bigr)\bigr]_y \\ K_x & K_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bigl[v^2\bigl(K_{xx}+K_{yy}\bigr)\bigr]_x & \bigl[v^2\bigl(K_{xx}+K_{yy}\bigr)\bigr]_y \\ K_x & K_y \end{vmatrix} = 0. \quad (29)$$

Эти условия являются также достаточными для существования в окрестности точки (x,y) *замены, приводящей к уравнению с плоским слоением, если либо* $K(x,y)=\mathrm{const}$ *в этой окрестности, либо* $K_x^2+K_y^2\neq 0$ *в этой точке.*

Ссылкой на эту лемму мы завершаем доказательство теоремы 2.

Приведенные в лемме 4 условия на кривизну известны в геометрии — они являются условиями реализуемости двумерного риманова пространства в виде поверхности вращения в трехмерном пространстве [24, гл. X, § 50, п. 8].

1.8. Доказательство теоремы 3. Для доказательства первого утверждения прежде всего сошлемся на лемму 4, в силу которой любое уравнение с постоянной кривизной приводится к уравнению с плоским слоением, имеющему в качестве функции $v(x,y)$ одну из функций $v\equiv\mathrm{const}$, $v=w(x+h)$, $v=we^{kx}$, $v=w\cos(kx+h)$, $v=w\,\mathrm{sh}(kx+h)$ и $v=w\,\mathrm{ch}(kx+h)$, где w, k, h — константы, от которых можно избавиться сдвигами и растяжениями пространственных переменных и растяжениями переменной ψ. Таким образом, получаем шесть классов эквивалентности, представителями которых выступают уравнения с $v\equiv 1$, $v=x$, $v=e^x$, $v=\cos x$, $v=\mathrm{sh}\,x$ и $v=\mathrm{ch}\,x$.

Уравнения с $v\equiv 1$ и с $v=e^x$ эквивалентны между собой: замена $\alpha=e^{-x}\cos y$, $\beta=-e^{-x}\sin y$ переводит уравнение $\psi_x^2+\psi_y^2=e^{-2x}$ в уравнение $\psi_\alpha^2+\psi_\beta^2=1$. Уравнения с $v=x$, $v=\cos x$ и $v=\mathrm{sh}\,x$ также эквивалентны между собой: уравнение $\psi_x^2+\psi_y^2=1/\cos^2 x$ преобразуется в уравнение $\psi_\alpha^2+\psi_\beta^2=1/\alpha^2$ заменой $\alpha=e^y\cos x$, $\beta=-e^y\sin x$, а уравнение $\psi_x^2+\psi_y^2=1/\mathrm{sh}^2 x$ — заменой $\alpha=\mathrm{sh}\,x/(\mathrm{ch}\,x+\cos y)$, $\beta=\sin y/(\mathrm{ch}\,x+\cos y)$. Таким образом, различных классов эквивалентности не более трех.

Остается заметить, что для уравнения с $v\equiv 1$ пространство лучей имеет нулевую, для уравнения с $v=\mathrm{ch}\,x$ — положительную, а для уравнения с $v=x$ — отрицательную кривизну, а кривизна является инвариантом при заменах пространственных переменных и умножается на положительный множитель при растяжениях переменной ψ. Значит, уравнения с разным знаком кривизны наверняка попадут в разные классы эквивалентности, и таких классов ровно три. Первое утверждение теоремы 3 доказано.

В случае непостоянной кривизны уравнения с плоским слоением и уравнения с квазиплоским слоением образуют два семейства. Найдем для каждого из семейств соответствующую частную алгебру эквивалентности. Поскольку сравнение утверждений теорем 1 и 2 показывает, что для таких уравнений алгебра симметрий поглощается общей алгеброй эквивалентности, частная алгебра эквивалентности каждого из семейств может быть только подалгеброй общей алгебры эквивалентности уравнения (1).

Для семейства уравнений с плоским слоением ($v(x,y) = V(x)$), в предположении непостоянной кривизны пространства лучей, частная алгебра эквивалентности имеет вид $\overline{\Xi} = (A + Cx)\partial_x + (B + Cy)\partial_y + (C - M)v\partial_v + (M\psi + L)\partial_\psi$, а частная группа эквивалентности оказывается группой сдвигов и растяжений пространственных переменных (плюс линейные преобразования ψ). Действие этой группы на функцию слоения $V(x)$ сводится к линейному преобразованию аргумента под знаком функции и к умножению этой функции на число. Для однозначного выбора представителя класса эквивалентности необходимо задать еще три дополнительных условия (например, $V(0) = V'(0) = V''(0) = 1$). Так, в случае уравнений с трехмерной группой симметрий в качестве представителя можно взять $v(x,y) = x^{1+\lambda}$ и определить класс эквивалентности заданием одного лишь показателя λ.

Таким образом, доказаны второе и третье утверждения теоремы.

Аналогично проводится анализ частной группы эквивалентности для уравнений с квазиплоским слоением. Здесь растяжениями и отражениями показатель λ в экспоненте сводится к единице, а для уравнений с $v(x,y) = V(x)e^y$ (за исключением случаев постоянной кривизны и случая уравнения с $V(x) = w\cos^{1-1/k}(kx + h)$, имеющего трехмерную группу симметрий и уже рассмотренного выше) частная группа эквивалентности оказывается прямой суммой группы сдвигов пространственных переменных и группы линейных преобразований переменной ψ. Действие этой группы на функцию слоения $V(x)$ сводится к сдвигу аргумента и умножению функции на постоянный множитель, поэтому представитель класса эквивалентности можно выбирать, задавая нормировку двумя условиями (например, $V(0) = V'(0) = 1$). На этом доказательство теоремы 3 завершено.

§ 2. Основные семейства двумерных уравнений эйконала. Условия эквивалентности уравнений. Формулы для фронтов и лучей

2.1. Основные семейства уравнений эйконала. В предыдущем параграфе были выделены несколько семейств уравнений, имеющих нетривиальную группу симметрий. Прежде всего это уравнения с постоянной кривизной пространства лучей. Из леммы 4 (доказательство которой мы проведем ниже) следует, что они сводятся заменой переменных к элементарным уравнениям. Далее, выделено семейство уравнений, описывающих плоско-слоистые среды. Также представляющие интерес уравнения со сферическим слоением среды оказываются эквивалентными уравнениям с плоским слоением: замена $\alpha = e^x\cos y$, $\beta = e^x \sin y$ приводит уравнение $\psi_x^2 + \psi_y^2 = 1/V^2(x)$ к уравнению $\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2 = \left[(\alpha^2+\beta^2)V^2\left(\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+\beta^2)\right)\right]^{-1}$. При этом уравнение с $v(x,y) = 1$ переходит в уравнение с $v(\alpha,\beta) = \alpha^2+\beta^2$, уравнение с $v(x) = \operatorname{sh} x$ — в уравнение с $v(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2-1)$, а уравнение с $v(x) = \operatorname{ch} x$ — в уравнение с $v(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+1)$, так что для сферически симметричной среды случаи положительной, отрицательной и нулевой кривизны описываются единообразно функциями вида $v(x,y) = w(x^2+y^2 \pm \nu^2)$.

Уравнения с квазиплоским слоением $\psi_x^2 + \psi_y^2 = e^{-2\lambda y}/V^2(x)$, также выделенные в § 1, заменой $\alpha = e^{-\lambda y}\cos\lambda x$, $\beta = e^{-\lambda y}\sin\lambda x$ преобразуются в уравнения $\psi_\alpha^2+\psi_\beta^2=\bigl[\lambda^2V^2\bigl(\frac{1}{\lambda}\operatorname{arctg}\bigl(\frac{\beta}{\alpha}\bigr)\bigr)\bigr]^{-1}$, которые описывают среду с угловым слоением.

В лемме 1 мы показали, что уравнение, имеющее нетривиальную группу симметрий, приводится к уравнению с плоским или квазиплоским слоением, однако не указали никакого способа проверки этой приводимости. Условия приводимости к уравнению с плоским слоением мы сформулировали в лемме 4, которую и докажем ниже. Условиям приводимости к уравнению с квазиплоским слоением посвящена лемма 5 в п. 2.3.

Поскольку группа эквивалентности является прямой суммой группы преобразований пространственных переменных и группы линейных преобразований переменной ψ, а преобразования ψ не меняют характера слоения (при таких преобразованиях происходит только умножение $v(x,y)$ на некоторый множитель), мы в леммах 4, 5 сосредоточим внимание на преобразованиях пространственных переменных $(x,y)\to(\alpha,\beta)$.

2.2. Доказательство леммы 4. Замена переменных $(x,y)\to(\alpha,\beta)$ оставляет вид уравнения инвариантным тогда и только тогда, когда она гармоническая (т. е. $\alpha_x=\beta_y$ и $\alpha_y+\beta_x=0$), при этом функция $v(x,y)$ в правой части преобразуется в функцию $\sqrt{\alpha_x^2+\alpha_y^2}v(x,y)$ (см. (9)), где x,y выражены через α и β. Значит, чтобы «новая» правая часть была равна $1/V^2(\alpha)$, функция $\alpha(x,y)$ должна удовлетворять соотношению

$$\alpha_x^2+\alpha_y^2=\frac{V^2(\alpha)}{v^2(x,y)}, \tag{30}$$

и задача состоит в нахождении гармонической функции, удовлетворяющей (30).

Продифференцируем (30) по x и по y и из полученных соотношений, пользуясь гармоничностью α и равенством (30), найдем вторые частные производные от α:

$$\alpha_{xx}=-\alpha_{yy}=\bigl(\alpha_x^2-\alpha_y^2\bigr)\frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)}+\frac{\alpha_yv_y-\alpha_xv_x}{v(x,y)},\quad \alpha_{xy}=2\alpha_x\alpha_y\frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)}-\frac{\alpha_yv_x+\alpha_xv_y}{v(x,y)}. \tag{31}$$

Далее нас будет интересовать именно разрешимость системы (31): очевидно, что если у нее есть решение, то это — гармоническая функция; с другой стороны, непосредственным следствием этой системы являются равенства

$$\left[\alpha_x^2+\alpha_y^2-\frac{V^2(\alpha)}{v^2(x,y)}\right]_x=\left[\alpha_x^2+\alpha_y^2-\frac{V^2(\alpha)}{v^2(x,y)}\right]\left[\ln\frac{V^2(\alpha)}{v^2(x,y)}\right]_x,$$

$$\left[\alpha_x^2+\alpha_y^2-\frac{V^2(\alpha)}{v^2(x,y)}\right]_y=\left[\alpha_x^2+\alpha_y^2-\frac{V^2(\alpha)}{v^2(x,y)}\right]\left[\ln\frac{V^2(\alpha)}{v^2(x,y)}\right]_y,$$

так что выполнение для функции α соотношения (30) обеспечивается удовлетворением этого соотношения в одной начальной точке (x_0,y_0).

Специфика системы (31) состоит в том, что сама функция $V(\alpha)$ у нас пока не известна и ее надо определять из условий совместности этой системы, которые дают нам равенство

$$\left(\frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)}\right)'=\frac{K(x,y)}{(\alpha_x^2+\alpha_y^2)v^2(x,y)}, \tag{32}$$

а оно в силу предположения (30) влечет

$$\left(\frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)}\right)' = \frac{K(x,y)}{V^2(\alpha)}. \tag{33}$$

Уравнение (33) является ключевым для решения вопроса о редукции.

Если $K(x,y) \equiv 0$, то либо $V(\alpha) = we^{k\alpha}$, либо $V(\alpha) \equiv w = \text{const}$. Для этих функций условие совместности (32) выполнено автоматически. Значит, приняв в качестве $V(\alpha)$ одну из указанных функций и задав начальные условия для α, α_x, α_y в одной точке так, чтобы в ней выполнялось (30), мы однозначно определим решение системы (31) — функцию α. Сопряженная к ней функция β находится стандартным образом, так что требуемая замена существует.

Если $K(x,y) \equiv \text{const} \neq 0$, то ситуация чуть сложнее: хотя в этом случае также удается определить $V(\alpha)$ из уравнения (33), условие (32) разрешимости (31) возвращает нас назад к тому самому равенству (30), которое мы и доказываем. Однако введением обозначений $p = \alpha_x$, $q = \alpha_y$ и заменой переменных $p = V(\alpha)\cos\theta/v(x,y)$, $q = V(\alpha)\sin\theta/v(x,y)$ система (31) приводится к системе

$$\alpha_x = \frac{V(\alpha)}{v(x,y)}\cos\theta, \quad \theta_x = \frac{V'(\alpha)}{v(x,y)}\sin\theta - \frac{v_y(x,y)}{v(x,y)},$$
$$\alpha_y = \frac{V(\alpha)}{v(x,y)}\sin\theta, \quad \theta_y = -\frac{V'(\alpha)}{v(x,y)}\cos\theta + \frac{v_x(x,y)}{v(x,y)},$$

которая совместна, так что ее решение однозначно определяется заданием начальных условий для α и θ в некоторой точке. Выполнение обратных замен дает решение системы (31).

Самым нетривиальным является случай $K(x,y) \neq \text{const}$, поскольку уравнение (33) приобретает совершенно другой смысл: вместо того, чтобы просто определять функцию $V(\alpha)$, оно теперь означает лишь то, что функция $K(x,y)$, которая пока что зависела от (x,y) произвольным образом, должна совпадать с $VV'' - V'^2$, которая зависит только от α. Это налагает дополнительное требование: функция K должна быть функционально зависимой с α, и это требование сильно осложняет всю картину, так как мы заранее не можем никак определить характер зависимости $K(x,y)$ от неизвестной пока функции $\alpha(x,y)$.

Оказывается, однако, что «распутывать» узел из системы (31) и условия (33) нет необходимости: достаточно, зафиксировав факт функциональной зависимости K и α, вернуться к исходной постановке: α должна быть гармонической функцией и удовлетворять уравнению (30). Подставив сюда $\alpha = a(K)$ (такое представление корректно в любой области, в которой градиент функции K отличен от нуля), где $a(K)$ — неизвестная пока функция, которая должна быть определена, получаем из (30) и условия гармоничности α соответственно

$$v^2(x,y)\big[K_x^2 + K_y^2\big] = \frac{V^2(a(K))}{a'^2(K)}, \quad \frac{v^2(x,y)[K_{xx} + K_{yy}]}{v^2(x,y)\big[K_x^2 + K_y^2\big]} = -\frac{a''(K)}{a'(K)}.$$

Поскольку в обоих равенствах справа стоит функция, зависящая только от K, то и слева должна стоять функция, зависящая только от K, и мы получаем в качестве необходимого условия приводимости к уравнению с плоским слоением два условия функциональной зависимости, которые фигурируют в условии леммы и аналитически записываются в виде (29).

Условия (29) оказываются также достаточными, либо когда $K(x,y) = \text{const}$ (этот случай мы уже обсудили выше), либо когда $K_x^2 + K_y^2 \neq 0$. В последнем случае из (29) следует наличие функциональных зависимостей $v^2\big(K_x^2+K_y^2\big)=f_1^2(K)$, $v^2(K_{xx}+K_{yy})=f_2(K)$. Тогда, определив из уравнения

$$a''(K)/a'(K)=-f_2(K)/f_1^2(K)$$

функцию

$$a(K)=A_1\int\limits_0^K\exp\left(-\int\limits_0^k\frac{f_2(\varkappa)}{f_1^2(\varkappa)}\,d\varkappa\right)\,dk+A_2$$

(эта функция строго монотонна и потому обратима), положив затем $V(\alpha)=f_1(a^{-1}(\alpha))a'(a^{-1}(\alpha))$ и $\alpha(x,y)=a(K(x,y))$, мы получим гармоническую функцию, удовлетворяющую в силу выбранных нами $a(K)$ и $V(\alpha)$ уравнению (31). Лемма 4 доказана.

2.3. Приводимость к уравнению с квазиплоским слоением. В отличие от уравнений с плоским слоением здесь критерии приводимости используют не столько саму функцию $K(x,y)$, сколько вычисляемые по ней величины

$$\begin{aligned}G_1(x,y)&=\frac{v^2(x,y)}{K(x,y)}\left[\left(\frac{K_x}{K}\right)^2+\left(\frac{K_y}{K}\right)^2\right],\\ G_2(x,y)&=\frac{v^2(x,y)}{K(x,y)}\left[\left(\frac{K_x}{K}\right)_x+\left(\frac{K_y}{K}\right)_y\right],\end{aligned}\tag{34}$$

являющиеся инвариантами (так как представляют собой отношение первого и второго параметров Бельтрами для логарифма кривизны к самой кривизне). Поскольку случай нулевой кривизны сводится к уравнению с плоским слоением, будем предполагать здесь, что кривизна ненулевая и даже, более того, непостоянная.

Лемма 5. *Для того чтобы уравнение* (1) *с непостоянной кривизной* $K(x,y)$ *было приводимо к уравнению с квазиплоским слоением* (*с* $\lambda\neq 0$), *необходимо и достаточно, чтобы для функций* G_i, *определяемых формулой* (34), *выполнялись следующие условия.*

1. *Эти функции должны быть функционально зависимы:*

$$\begin{vmatrix}(G_1)_x & (G_1)_y\\ (G_2)_x & (G_2)_y\end{vmatrix}=0.\tag{35}$$

2. *Если при этом они обе являются константами, то должно выполняться соотношение* $2G_2^2=G_1(2-G_2)$; *в противном случае функции* $H^{\pm}$, *определяемые по* G (*где через* G *обозначена та из* G_i, *которая не является константой*) *формулами*

$$\begin{aligned}H^-&=\frac{\big(v^2\big[G_x^2+G_y^2\big]\big)_yG_x-\big(v^2\big[G_x^2+G_y^2\big]\big)_xG_y}{v^2\big[G_x^2+G_y^2\big]^2},\\ H^+&=\frac{\big(v^2\big[G_x^2+G_y^2\big]\big)_xG_x+\big(v^2\big[G_x^2+G_y^2\big]\big)_yG_y}{v^2\big[G_x^2+G_y^2\big]^2},\end{aligned}\tag{36}$$

должны быть функционально зависимыми с $G(x,y)$, *т. е. должны выполняться соотношения*

$$\begin{vmatrix}H_x^{\pm} & H_y^{\pm}\\ G_x & G_y\end{vmatrix}=0,\tag{37}$$

причем H^- должна быть отлична от нуля.

Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей леммы. Для того чтобы замена переменных $(x, y) \to (\alpha, \beta)$ приводила к уравнению с квазиплоским слоением, необходимо и достаточно, чтобы замена была гармонической ($\alpha_x = \beta_y$, $\alpha_y + \beta_x = 0$) и выполнялось равенство

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \frac{e^{2\lambda\beta} V^2(\alpha)}{v^2(x, y)}. \tag{38}$$

Если обозначить $p = \alpha_x = \beta_y$, $q = \alpha_y = -\beta_x$, то это равенство приобретет вид

$$p^2 + q^2 = \frac{e^{2\lambda\beta} V^2(\alpha)}{v^2(x, y)} \tag{39}$$

и его дифференцирование дает систему дифференциальных уравнений относительно α, β, p, q:

$$\begin{aligned}
\alpha_x &= p, \quad & p_x &= -2\lambda pq + (p^2 - q^2)\frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)} + \frac{qv_y - pv_x}{v(x, y)},\\
\alpha_y &= q, \quad & p_y &= \lambda(p^2 - q^2) + 2pq\frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)} - \frac{qv_x + pv_y}{v(x, y)},\\
\beta_x &= -q, \quad & q_x &= \lambda(p^2 - q^2) + 2pq\frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)} - \frac{qv_x + pv_y}{v(x, y)},\\
\beta_y &= p, \quad & p_y &= 2\lambda pq - (p^2 - q^2)\frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)} - \frac{qv_y - pv_x}{v(x, y)},
\end{aligned} \tag{40}$$

отличающуюся от (31) (если ее переписать в терминах p, q) только наличием членов с λ. Нетрудно проверить, что эти дополнительные члены не влияют на условие совместности системы, которое совпадает с (32) и в силу нашего предположения о том, что $\alpha(x, y)$ является решением уравнения (38), влечет

$$\left(\frac{V'(\alpha)}{V(\alpha)}\right)' = \frac{K(x, y)}{e^{2\lambda\beta} V^2(\alpha)}.$$

Это соотношение позволяет выразить β через x, y и α:

$$\beta = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{K(x, y)}{V''(\alpha)V(\alpha) - V'^2(\alpha)}, \tag{41}$$

подстановка выражения (41) для β в соответствующую пару уравнений (40) дает еще два условия:

$$\frac{K_x}{K} = -2\lambda q + \frac{[V''(\alpha)V(\alpha) - V'^2(\alpha)]'}{V''(\alpha)V(\alpha) - V'^2(\alpha)} p, \quad \frac{K_y}{K} = 2\lambda p + \frac{[V''(\alpha)V(\alpha) - V'^2(\alpha)]'}{V''(\alpha)V(\alpha) - V'^2(\alpha)} q,$$

из которых определяются уже p, q. Подстановка найденных p, q в (39) дает уравнение

$$\frac{v^2\big(K_x^2 + K_y^2\big)}{K^3} = \frac{4\lambda^2 + R^2(\alpha)}{(V'(\alpha)/V(\alpha))'}, \tag{42}$$

где через $R(\alpha)$ обозначена функция

$$R(\alpha) = \frac{[V''(\alpha)V(\alpha) - V'^2(\alpha)]'}{V''(\alpha)V(\alpha) - V'^2(\alpha)}. \tag{43}$$

Подстановка p и q в первую пару уравнений (40) приводит к системе

$$\alpha_x = \frac{R(\alpha)K_x + 2\lambda K_y}{K(4\lambda^2 + R^2(\alpha))}, \quad \alpha_y = \frac{R(\alpha)K_y - 2\lambda K_x}{K(4\lambda^2 + R^2(\alpha))}, \tag{44}$$

условием совместности которой оказывается равенство

$$\frac{(K_x/K)_x + (K_y/K)_y}{(K_x/K)^2 + (K_y/K)^2} = \frac{R'(\alpha)}{4\lambda^2 + R^2(\alpha)}. \tag{45}$$

Нетрудно видеть, что левые части (42) и (45) совпадают с функциями G_1 и G_2/G_1, а правые являются функциями только от α. Поскольку $\alpha(x, y)$ имеет в силу (38) ненулевой градиент, обе полученные функции должны быть функциями от α, а значит, функционально зависимы между собой, что и означает необходимость равенства (35) для существования гармонической замены переменных, удовлетворяющей (38).

Возможны несколько вариантов. Первый из них — G_i являются константами. В этом случае (42) и (45) определяют функцию $V(\alpha)$. При этом оказывается, что предположение о непостоянстве кривизны и о том, что $\lambda \neq 0$, исключает возможность этим константам быть нулевыми. Решение пары уравнений (42), (45) с учетом определения (43) функции $R(\alpha)$ дает условие $G_1 + 2G_2^2/(G_2 - 2) = 0$, которое оказывается необходимым, и условие

$$V(\alpha) = C \cos^{1 - G_1/(2G_2)} \left(2\lambda \frac{G_2}{G_1}\alpha + h\right), \tag{46}$$

т. е. этот случай соответствует уравнению с трехмерной группой симметрий.

Достаточность полученного условия (в случае, если G_i являются константами) проверяется непосредственно. Условие (35) при этом выполняется автоматически, а подстановка $V(\alpha)$, определяемой (46), в систему (44) позволяет найти α (система оказывается совместной в силу выполнения (45)). Определяемая (41) функция β, как легко проверяется, удовлетворяет условиям $\beta_y = \alpha_x$ и $\beta_x + \alpha_y = 0$, и, наконец, в силу (42) и определения β

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \frac{K_x^2 + K_y^2}{K^2(4\lambda^2 + R^2(\alpha))} = \frac{K}{v^2(x, y)(V'(\alpha)/V(\alpha))'} = \frac{e^{2\lambda\beta}V^2(\alpha)}{v^2(x, y)},$$

т. е. $\alpha(x, y)$ удовлетворяет (38).

Во втором варианте — когда одна из функций G_i не является константой — в любой области, где эта функция регулярна (непрерывно дифференцируема и ее градиент отличен от нуля), можно считать, что $\alpha = a(G)$, где $a(G)$ — некоторая функция. Подставляя эту функцию и функцию

$$\beta = \frac{1}{2\lambda} \ln \left(\frac{v^2(x, y)\left[\alpha_x^2 + \alpha_y^2\right]}{V^2(\alpha)}\right), \tag{47}$$

определяемую равенством (38), в условия гармоничности, получаем систему уравнений

$$a'(G)G_x = \frac{1}{2\lambda}\left(\ln\left[v^2(x, y)\left(G_x^2 + G_y^2\right)\right]\right)_y + \frac{1}{\lambda}\left(\ln \frac{a'(G)}{V(a(G))}\right)_G G_y,$$

$$-a'(G)G_y = \frac{1}{2\lambda}\left(\ln\left[v^2(x, y)\left(G_x^2 + G_y^2\right)\right]\right)_x + \frac{1}{\lambda}\left(\ln \frac{a'(G)}{V(a(G))}\right)_G G_x,$$

которая, очевидно, эквивалентна

$$2\lambda a'(G) = \frac{\left[v^2\left(G_x^2+G_y^2\right)\right]_y G_x - \left[v^2\left(G_x^2+G_y^2\right)\right]_x G_y}{v^2\left(G_x^2+G_y^2\right)^2},$$

$$-2\left(\ln\frac{a'(G)}{V(a(G))}\right)_G = \frac{\left[v^2\left(G_x^2+G_y^2\right)\right]_y G_y + \left[v^2\left(G_x^2+G_y^2\right)\right]_x G_x}{v^2\left(G_x^2+G_y^2\right)^2}$$

и которая может выполняться, только если правые части (совпадающие с функциями (36)) функционально зависят от G, что аналитически записывается в виде условий (37). Таким образом, и в случае переменных G_i необходимость условий леммы установлена.

Для обоснования достаточности отметим, что при выполнении условий (37) и условия $H^- \neq 0$ (из которого следует регулярность соответствующей G) можно, выразив функции $H^\pm$ через G, определить $a(G)$ и $V(G)$ формулами

$$a(G) = \frac{1}{2\lambda}\int\limits_0^G H^-(\gamma)\,d\gamma, \quad V(\alpha) = (H^-)'(a^{-1}(\alpha))\exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_0^{a^{-1}(\alpha)} H^+(\gamma)\,d\gamma\right],$$

обеспечив для пары функций $\alpha(x,y) = a(G(x,y))$ и $\beta(x,y)$, определяемой (47), выполнение условия гармоничности и равенства (38). Лемма доказана.

2.4. Теорема о семи инвариантах. Укажем условие, при котором уравнение с функцией $v(x,y)$ приводится заменой пространственных переменных к уравнению с функцией $V(\alpha,\beta)$.

Теорема 4. *Для того чтобы уравнение* (1) *с функцией* $v(x,y)$ *некоторой точечной заменой* $\alpha = \alpha(x,y)$, $\beta = \beta(x,y)$ *приводилось к уравнению с функцией* $V(\alpha,\beta)$, *необходимо, чтобы семь функций*

$$K(x,y) = v(v_{xx}+v_{yy}) - \left(v_x^2+v_y^2\right),$$
$$S^1(x,y) = v^2(x,y)\left(K_x^2+K_y^2\right), \quad S^2(x,y) = v^2(x,y)(K_{xx}+K_{yy}),$$
$$D^{i+} = v^2(x,y)\left(S_x^i K_x + S_y^i K_y\right), \quad D^{i-} = v^2(x,y)\left(S_y^i K_x - S_x^i K_y\right)$$

находились между собой в тех же функциональных зависимостях, что и семь функций

$$\varkappa(\alpha,\beta) = V(V_{\alpha\alpha}+V_{\beta\beta}) - \left(V_\alpha^2+V_\beta^2\right),$$
$$\sigma^1(\alpha,\beta) = V^2(\alpha,\beta)\left(\varkappa_\alpha^2+\varkappa_\beta^2\right), \quad \sigma^2(\alpha,\beta) = V^2(\alpha,\beta)(\varkappa_{\alpha\alpha}+\varkappa_{\beta\beta}),$$
$$\delta^{i+} = V^2(\alpha,\beta)\left(\sigma_\alpha^i\varkappa_\alpha + \sigma_\beta^i\varkappa_\beta\right), \quad \delta^{i-} = V^2(\alpha,\beta)\left(\sigma_\beta^i\varkappa_\alpha - \sigma_\alpha^i\varkappa_\beta\right).$$

Это условие является также достаточным для существования в окрестности точки (x^*,y^*) *соответствующей замены в случаях, когда*

- $S^1(x,y) \equiv 0$ (*т. е.* $K(x,y) \equiv \mathrm{const}$) *в окрестности* (x^*,y^*);
- $S^1(x^*,y^*) \neq 0$, *но* $D^{i-}(x,y) \equiv 0$ *в окрестности* (x^*,y^*) (*т. е.* S^i *функционально зависимы с* K) *и* $K(x^*,y^*)$ *принадлежит множеству значений* $\varkappa(\alpha,\beta)$;
- *по крайней мере одна из* $D^{i-}(x^*,y^*)$ *отлична от нуля и система* $\varkappa(\alpha,\beta) = K(x^*,y^*)$, $\sigma^i(\alpha,\beta) = S^i(x^*,y^*)$ *для соответствующего* i *имеет хотя бы одно решение* (α,β).

Замечание 1. В части достаточности теоремы обсуждаются только случаи «общего положения». Остальные (например, когда градиент K в точке обращается в нуль, но в ее окрестности не является константой) являются пограничными: невыполнение условий общности положения характерно для точек, лежащих на границе областей, в которых имеют место случаи общего положения. Эти пограничные случаи требуют особого анализа, который выходит за рамки целей данной работы, поэтому мы их не рассматриваем.

Замечание 2. Когда исследуется сводимость к уравнению с квазиплоским слоением, в случае непостоянной кривизны предположение о функциональной зависимости σ^i от $\varkappa$ может выполняться, только если $\sigma^1/\varkappa^3 = \mathrm{const}$ и $\sigma^2/\varkappa^2 = \mathrm{const}$, что соответствует случаям постоянства G^i в лемме 5. Предположение о функциональной независимости одной из σ^i с $\varkappa$ может выполняться, только если функции $\sigma^1/\varkappa^3$ и $\sigma^2/\varkappa^2$ функционально зависимы между собой. В этом случае условия одинаковой функциональной зависимости для семи инвариантов и дают условия леммы 5.

Доказательство. Необходимость следует из того, что всякое преобразование, переводящее уравнение $\psi_x^2 + \psi_y^2 = 1/v^2(x,y)$ в уравнение $\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2 = 1/V^2(\alpha,\beta)$, одновременно приводит метрику $ds^2 = (dx^2+dy^2)/v^2(x,y)$ к метрике $ds^2 = (d\alpha^2 + d\beta^2)/V^2(\alpha,\beta)$. Поскольку кривизна является инвариантом, имеем

$$K(x,y) = \varkappa(\alpha,\beta). \tag{48}$$

Функции S^i суть первый и второй параметры Бельтрами от инварианта K, поэтому они тоже являются инвариантами и, значит,

$$S^i(x,y) = \sigma^i(\alpha,\beta). \tag{49}$$

Наконец, каждая из величин $D^{i\pm}$ также получается с помощью инвариантной процедуры дифференцирования из двух инвариантов: K и соответствующей S^i. Поэтому они тоже являются инвариантами и

$$D^{i\pm}(x,y) = \delta^{i\pm}(\alpha,\beta). \tag{50}$$

Из соотношений (48)–(50) немедленно следует утверждение теоремы о необходимости.

Для доказательства достаточности нам понадобится рассмотреть случаи, перечисленные в формулировке теоремы. Первый случай: $K(x,y) \equiv K = \mathrm{const}$. В этом случае условие одинаковой функциональной зависимости тривиализуется до условия $\varkappa(\alpha,\beta) \equiv K$, а существование соответствующей замены переменных вытекает из леммы 4, так как оба уравнения сводятся к уравнению с плоским слоением и одной и той же кривизной, а все такие уравнения эквивалентны между собой (соответствующие замены приведены в доказательстве теоремы 3).

Второй случай: $S^1(x^*,y^*) \neq 0$ (отсюда градиент K нетривиален и поэтому $K(x,y) \not\equiv \mathrm{const}$), и обе функции S^i функционально зависимы с K. В этом случае из невырожденности градиента функции K в точке (x^*,y^*) следует, что функциональную зависимость можно разрешить относительно S^i: $S^i(x,y) = F^i(K(x,y))$. Но тогда из условия одинаковой функциональной зависимости вытекает, что $\sigma^i(\alpha,\beta) = F^i(\varkappa(\alpha,\beta))$.

Выберем пару (α^*,β^*) так, чтобы $\varkappa(\alpha^*,\beta^*) = K(x^*,y^*)$. Тогда $\sigma^1(\alpha^*,\beta^*) = S^1(x^*,y^*) \neq 0$ и оба уравнения (с $v(x,y)$ и с $V(\alpha,\beta)$) приводятся к уравнению с плоским слоением в силу леммы 4, причем из доказательства леммы следует, что функция слоения определяется только функциями F^i и поэтому оба уравнения заменами переменных приводятся к одному и тому же уравнению. Обращение одной из замен в суперпозиции с другой дает искомое преобразование $(x,y) \to (\alpha,\beta)$.

Наконец, в случае, когда одна из $D^{i-}(x^*, y^*)$ ненулевая, якобиан функции K и соответствующей S^i (мы далее будем обозначать ее просто через S) в точке (x^*, y^*) отличен от нуля и поэтому в окрестности этой точки можно выразить x и y через K и S, а значит, явно описать выражение всех S^i и $D^{i\pm}$ через K и S. В силу условия одинаковой функциональной зависимости соответствующие величины σ^i и $\delta^{i\pm}$ теми же соотношениями выражаются через $\varkappa$ и σ (равную соответствующей σ^i), и тем самым все равенства (48)–(50) являются следствием системы

$$\varkappa(\alpha, \beta) = K(x, y), \quad \sigma(\alpha, \beta) = S(x, y). \tag{51}$$

Пусть (α^*, β^*) — некоторое решение системы (51) при $(x, y) = (x^*, y^*)$. Тогда для того i, для которого $S = S^i$, из (50) получаем, что $\delta^{i-}(\alpha^*, \beta^*) = D^{i-}(x^*, y^*) \neq 0$, и поэтому систему (51) можно в окрестности (x^*, y^*) разрешить относительно (α, β), получив выражения $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$.

Покажем, что полученная замена переменных преобразует уравнение $\psi_x^2 + \psi_y^2 = 1/v^2(x, y)$ в уравнение $\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2 = 1/V^2(\alpha, \beta)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы α и β образовывали пару гармонических функций и $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 = V^2(\alpha, \beta)/v^2(x, y)$.

Вычисляя из (51) для указанной нами замены производные

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{S_x \varkappa_\beta - K_x \sigma_\beta}{\varkappa_\beta \sigma_\alpha - \varkappa_\alpha \sigma_\beta}, \quad \alpha_y = \frac{S_y \varkappa_\beta - K_y \sigma_\beta}{\varkappa_\beta \sigma_\alpha - \varkappa_\alpha \sigma_\beta}, \\ \beta_x &= \frac{K_x \sigma_\alpha - S_x \varkappa_\alpha}{\varkappa_\beta \sigma_\alpha - \varkappa_\alpha \sigma_\beta}, \quad \beta_y = \frac{K_y \sigma_\alpha - S_y \varkappa_\alpha}{\varkappa_\beta \sigma_\alpha - \varkappa_\alpha \sigma_\beta}, \end{aligned} \tag{52}$$

видим, что для выполнения условия гармоничности ($\alpha_x = \beta_y$, $\alpha_y = -\beta_x$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$S_x \varkappa_\beta - K_x \sigma_\beta = K_y \sigma_\alpha - S_y \varkappa_\alpha, \quad S_y \varkappa_\beta - K_y \sigma_\beta = S_x \varkappa_\alpha - K_x \sigma_\alpha,$$

которые, будучи приведены к виду

$$S_x = \frac{K_x(\sigma_\alpha \varkappa_\alpha + \sigma_\beta \varkappa_\beta) + K_y(\sigma_\alpha \varkappa_\beta - \sigma_\beta \varkappa_\alpha)}{\varkappa_\alpha^2 + \varkappa_\beta^2},$$

$$S_y = \frac{K_y(\sigma_\alpha \varkappa_\alpha + \sigma_\beta \varkappa_\beta) - K_x(\sigma_\alpha \varkappa_\beta - \sigma_\beta \varkappa_\alpha)}{\varkappa_\alpha^2 + \varkappa_\beta^2},$$

удовлетворяются тождественно: достаточно заменить выражения с σ и $\varkappa$ выражениями с S и K по формулам (49), (50).

С другой стороны, заменяя в силу доказанной гармоничности α_x на β_y и α_y на β_x, из (52) получаем, что

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x = \frac{S_x K_y - K_x S_y}{\varkappa_\beta \sigma_\alpha - \varkappa_\alpha \sigma_\beta} = \frac{V^2(\alpha, \beta)}{v^2(x, y)}$$

в силу опять же (50). Теорема доказана.

2.5. Явные формулы решений двумерного уравнения эйконала. Формулы фронта волны мы приведем для случая точечного источника (когда $\psi^{-1}(0)$ состоит из единственной точки (x_0, y_0)). В явном виде это удается сделать лишь для уравнений, отвечающих постоянной $K(x, y)$ (см. (4)). Поскольку запас таких уравнений весьма велик, приведем эти формулы в случаях наиболее интересных — для уравнений с плоским слоением

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)^2=\frac{1}{V^2(\alpha)} \tag{53}$$

и для уравнений с радиальным слоением.

Мы приведем также формулы для лучей. Под лучами мы понимаем, как обычно, семейство кривых, ортогональных фронту (семейству кривых $\psi(x,y)=t$ для некоторого решения ψ уравнения (1)). Лучи, параметризованные значениями времени t (эйконала), являются экстремалями функционала

$$J=\int\limits_{r^1}^{r^2}\frac{|dr|}{v(r)},$$

вычисляемого по кривым, соединяющим точки r^i, и могут быть найдены из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot r=v(r)\tau,\quad \dot\tau=-\nabla v(r)+(\nabla v(r),\tau)\tau, \tag{54}$$

где r — радиус-вектор, τ — единичный вектор касательной к лучу (так что первое уравнение (54) — это просто определение τ), ∇ — оператор градиента, а дифференцирование осуществляется по времени. Второе уравнение (54) — инфинитезимальный аналог закона Снеллиуса преломления лучей. В двумерном случае $r=(x,y)$, $\tau=(\cos\theta,\sin\theta)$, и (54) переписывается в виде системы

$$\dot x=v(x,y)\cos\theta,\quad \dot y=v(x,y)\sin\theta,\quad \dot\theta=v_x\sin\theta-v_y\cos\theta.$$

Теорема 5. *Решение уравнения* (53), *удовлетворяющее условию* $\psi^{-1}(0)=(\alpha_0,0)$, *получается исключением параметра* C *из пары квадратур*

$$\pm\psi=\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{V(\alpha)\sqrt{1-C^2V^2(\alpha)}},\quad \pm\beta=C\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{V(\alpha)d\alpha}{\sqrt{1-C^2V^2(\alpha)}}. \tag{55}$$

В случае, когда для уравнения (53) *кривизна* (4) *постоянна, фронты и лучи описываются явными формулами, приведенными в табл.* 2, 3. *В табл.* 2 *приводится уравнение фронта, разрешенное относительно* t, *и уравнение лучей, в табл.* 3 *— уравнение фронта, разрешенное относительно* β.

Доказательство. Решение (53) производится по стандартной схеме через нахождение интеграла системы характеристик, что приводит к формуле

$$\psi=\pm\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\sqrt{\frac{1}{V^2(\alpha)}-C^2}\,d\alpha+C\beta,$$

где константа C должна определяться из условия $d\psi/dC=0$, которое приводит к соотношению

$$\pm\beta=C\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{V^2(\alpha)}-C^2}}d\alpha,$$

совпадающему со второй формулой (55). Подстановка этого выражения для β в формулу для ψ дает в точности первую формулу (55).

Таблица 2. Формулы для фронта волны, разрешенные относительно t.

$V(\alpha)$	Уравнение фронта	Уравнение лучей
$w = \mathrm{const}$	$(\alpha-\alpha_0)^2+\beta^2 = w^2t^2$	$\alpha-\alpha_0 = C\beta$
$w\alpha$	$\operatorname{ch} wt = \frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha_0^2}{2\alpha\alpha_0}$	$\alpha^2+(\beta-C)^2 = \alpha_0^2+C^2$
$w\cos(k\alpha)$	$\operatorname{ch} kwt = \frac{\operatorname{ch} k\beta-\sin k\alpha\sin k\alpha_0}{\cos k\alpha\cos k\alpha_0}$	$\sin k\alpha = \sin k\alpha_0 \operatorname{ch} k\beta + C\operatorname{sh} k\beta$
$we^{k\alpha}$	$\frac{1}{2}k^2w^2t^2 = \frac{\operatorname{ch} k(\alpha-\alpha_0)-\cos k\beta}{e^{k(\alpha+\alpha_0)}}$	$e^{k(\alpha-\alpha_0)} = \cos k\beta + C\sin k\beta$
$w\operatorname{sh}(k\alpha)$	$\operatorname{ch} kwt = \frac{\operatorname{ch} k\alpha\operatorname{ch} k\alpha_0-\cos k\beta}{\operatorname{sh} k\alpha\operatorname{sh} k\alpha_0}$	$\operatorname{ch} k\alpha = \operatorname{ch} k\alpha_0\cos k\beta + C\sin k\beta$
$w\operatorname{ch}(k\alpha)$	$\cos kwt = \frac{\operatorname{sh} k\alpha\operatorname{sh} k\alpha_0+\cos k\beta}{\operatorname{ch} k\alpha\operatorname{ch} k\alpha_0}$	$\operatorname{sh} k\alpha = \operatorname{sh} k\alpha_0\cos k\beta + C\sin k\beta$

Таблица 3. Формулы для фронта волны, разрешенные относительно β.

$V(\alpha)$	Уравнение фронта
$w = \mathrm{const}$	$\beta^2 = w^2t^2-(\alpha-\alpha_0)^2$
$w\alpha$	$\beta^2 = \alpha_0^2\operatorname{sh}^2 wt-(\alpha-\alpha_0\operatorname{ch} wt)^2$
$w\cos(k\alpha)$	$\operatorname{ch} k\beta = \cos k\alpha\cos k\alpha_0\operatorname{ch} kwt+\sin k\alpha\sin k\alpha_0$
$we^{k\alpha}$	$\cos k\beta = \operatorname{ch} k(\alpha-\alpha_0)-\frac{1}{2}k^2w^2t^2e^{k(\alpha+\alpha_0)}$
$w\operatorname{sh}(k\alpha)$	$\cos k\beta = \operatorname{ch} k\alpha\operatorname{ch} k\alpha_0-\operatorname{ch} kwt\operatorname{sh} k\alpha\operatorname{sh} k\alpha_0$
$w\operatorname{ch}(k\alpha)$	$\cos k\beta = \operatorname{ch} k\alpha\operatorname{ch} k\alpha_0\cos kwt-\operatorname{sh} k\alpha\operatorname{sh} k\alpha_0$

Формулы второй части теоремы удается получить, вычисляя с учетом специфики функций $V(\alpha)$ квадратуры (55) и исключая из них константу C. Впрочем, то, что приведенные функции дают решение, проще убедиться прямой проверкой.

Формулы для лучей также проверяются непосредственно: то, что указанные семейства кривых при любом C проходят через точку $(\alpha_0, 0)$, очевидно, а в том, что это семейство ортогонально фронтам, проще всего убедиться вычислением скалярного произведения градиентов. Теорема доказана.

Внешний вид фронтов и лучей, описываемых формулами теоремы 5, приведен на рис. 1.

Из формул теоремы 5 следует, что в первых трех случаях ($V(\alpha)$ постоянная, линейная и косинус) фронт всегда остается замкнутой поверхностью. Первый случай соответствует однородной среде и хорошо известен. Во втором случае, хотя среда уже неоднородная, фронт остается окружностью, но с «плывущим центром». Система лучей порождает классическую геометрию Лобачевского в полуплоскости. Третий случай от второго отличается только тем, что $V(\alpha)$ обращается в нуль не на одной, а на двух параллельных прямых, поэтому процесс распространения волны происходит не в полуплоскости, а в полосе между этими двумя прямыми. Здесь мы имеем дело с еще одной моделью геометрии Лобачевского.

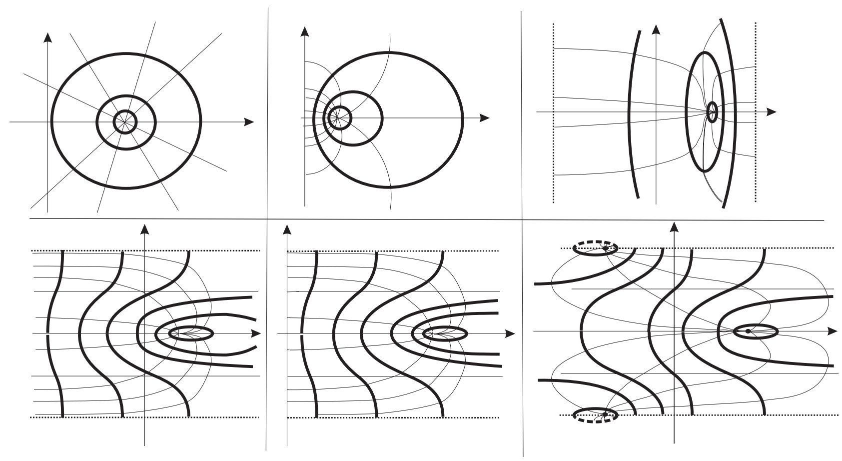

Рис. 1. Фронты (жирные линии) и лучи (тонкие линии)
для уравнений постоянной кривизны с плоским слоением.
Вверху слева $v \equiv w$, по центру $v = wx$, справа $v = w\cos kx$;
внизу слева $v = we^{kx}$, по центру $v = w\,\mathrm{sh}\,kx$, справа $v = w\,\mathrm{ch}\,kx$.

Более экзотическим является поведение фронта и лучей в случаях, когда $V(\alpha)$ имеет экспоненциальный рост. Здесь фронт остается замкнутой поверхностью только в течение конечного промежутка времени ($t < e^{-k\alpha_0}/kw$ для случая экспоненты, $t < \frac{1}{kw}\,\mathrm{arcch}\,\mathrm{cth}\,k\alpha_0$ для гиперболического синуса и $t < \frac{1}{kw}\arccos\mathrm{th}\,k\alpha_0$ для гиперболического косинуса), по истечении которого размыкается, приобретая форму неограниченной кривой с асимптотами $\beta = \pm\frac{\pi}{2k}$, а затем снова превращается в ограниченную кривую. Но теперь эта кривая уже не замкнута, ее концевые точки лежат на прямых $\beta = \pm\pi/k$, а сама она находится внутри полосы, ограниченной этими прямыми, и перемещается вдоль этой полосы в направлении убывания α. В случае, когда $V(\alpha)$ — экспонента, эта кривая, постепенно выпрямляясь, уходит в «бесконечно удаленный» конец полосы, соответствующий $\alpha = -\infty$; в случае гиперболического синуса она бесконечно приближается (при $t \to +\infty$) к отрезку $\alpha = 0$; в случае же $V(\alpha) = w\,\mathrm{ch}\,k\alpha$ поведение более сложное. При $t = \frac{1}{kw}[\pi - \arccos\mathrm{th}\,k\alpha_0]$ происходит вторичный разрыв фронта, он снова приобретает асимптоты $\beta = \pm\frac{\pi}{2k}$, однако находится уже не внутри, а снаружи полосы, ограниченной этими асимптотами, распадаясь на две ветви. Затем фронт снова становится ограниченным и представляет собой пару дуг с концевыми точками на прямых $\beta = \pm\pi/k$ и эти дуги при $t = \frac{\pi}{kw}$ стягиваются к точкам $\alpha = -\alpha_0$, $\beta = \pm\pi/k$. В этот момент фронт покидает полосу $|\beta| \le \pi/k$ и переходит в две полосы $\pi/k < |\beta| < 2\pi/k$, чтобы еще через период стянуться в следующую пару точек: $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \pm 2\pi/k$, и т. д. Лучи в случае гиперболического синуса образуют геометрию Лобачевского, в случае гиперболического косинуса — геометрию Римана, а в случае экспоненты — геометрию Евклида (правда, с нарушением как первого, так и пятого постулатов).

Отметим, что описанный эффект локализации возмущения внутри полосы никак не связан ни с распределением нулей функции $v(\alpha,\beta)$ (когда эти нули разбивают плоскость на области, в каждой из которых волновой процесс происходит независимо), ни с распределением ее экстремумов (изучаемым в теории

Таблица 4. Формулы для фронта волны для случая постоянной кривизны в радиально-слоистых средах.

$v(x,y)$	Уравнение фронта
wr	$\ln^2 \frac{r}{r_0} + \phi^2 = w^2 t^2$
$wr \ln r$	$\operatorname{ch} wt = \frac{\ln^2 r + \ln^2 r_0 + \phi^2}{2 \ln r \ln r_0}$
$wr \cos(k \ln r)$	$\operatorname{ch} kwt = \frac{\operatorname{ch} k\phi - \sin(k \ln r) \sin(k \ln r_0)}{\cos(k \ln r) \cos(k \ln r_0)}$
wr^{k+1}	$\frac{1}{2} k^2 w^2 t^2 = \frac{r^{2k} + r_0^{2k} - 2r^k r_0^k \cos k\phi}{2r^{2k} r_0^{2k}}$
$wr^{1-k}(r^{2k} - \nu^2)$	$\operatorname{ch} 2kw\nu^2 t = \frac{(r^{2k}+\nu^2)(r_0^{2k}+\nu^2) - 4\nu^2 r^k r_0^k \cos k\phi}{(r^{2k}-\nu^2)(r_0^{2k}-\nu^2)}$
$wr^{1-k}(r^{2k} + \nu^2)$	$\cos 2kw\nu^2 t = \frac{(r^{2k}-\nu^2)(r_0^{2k}-\nu^2) + 4\nu^2 r^k r_0^k \cos k\phi}{(r^{2k}+\nu^2)(r_0^{2k}+\nu^2)}$

Таблица 5. Уравнения лучей для случая постоянной кривизны в радиально-слоистых средах.

$v(x,y)$	Уравнение лучей
wr	$r = r_0 e^{C\phi}$
$wr \ln r$	$\ln^2 r + (\phi - C)^2 = \ln^2 r_0 + C^2$
$wr \cos(k \ln r)$	$\sin(k \ln r) = \sin(k \ln r_0) \operatorname{ch} k\phi + C \operatorname{sh} k\phi$
wr^{k+1}	$r^k = r_0^k (\cos k\phi + C \sin k\phi)$
$wr^{1-k}(r^{2k} - \nu^2)$	$\operatorname{ch} k \ln r = \operatorname{ch} k \ln r_0 \cos k\phi + C \sin k\phi$
$wr^{1-k}(r^{2k} + \nu^2)$	$r_0^k (r^{2k} - \nu^2) = r^k [(r_0^{2k} - \nu^2) \cos k\phi + C \sin k\phi]$

волноводов, когда возмущение локализуется, например, в полосе, играющей для функции $v(\alpha, \beta) = V(\alpha)$ роль «потенциальной ямы»). Напротив, описанная локализация является, в определенном смысле, «самопроизвольной», область локализации зависит от начального условия и определяется только наличием интенсивного (экспоненциального) роста функции v, из-за чего лучи достаточно быстро разворачиваются в сторону антиградиента этой функции и превращаются в практически параллельный пучок, лежащий внутри указанной полосы.

Формулы решения для уравнений с радиальным слоением получаются с помощью замены $x = e^\alpha \cos\beta$, $y = e^\alpha \sin\beta$, которая приводит уравнение (53) к уравнению $\psi_x^2 + \psi_y^2 = [(x^2+y^2) V^2(\ln\sqrt{x^2+y^2})]^{-1}$. Подстановка в формулы для $V(\alpha)$ функций $w = \mathrm{const}$, $w\alpha$, $w\cos(k\alpha + h)$, $we^{k\alpha}$, $w \operatorname{sh}(k\alpha + h)$, $w \operatorname{ch}(k\alpha + h)$ дает формулы для лучей и фронтов, приведенные в табл. 4, 5. Для большего удобства мы эти формулы приводим в полярных координатах ($x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$). При этом, как нетрудно видеть, эффект локализации фронта также присутствует, только локализация обнаруживается не в полосе, а в угле, рис. 2.

2.6. Замечания. К сожалению, уравнения с квазиплоским слоением автору не удалось свести даже к паре квадратур.

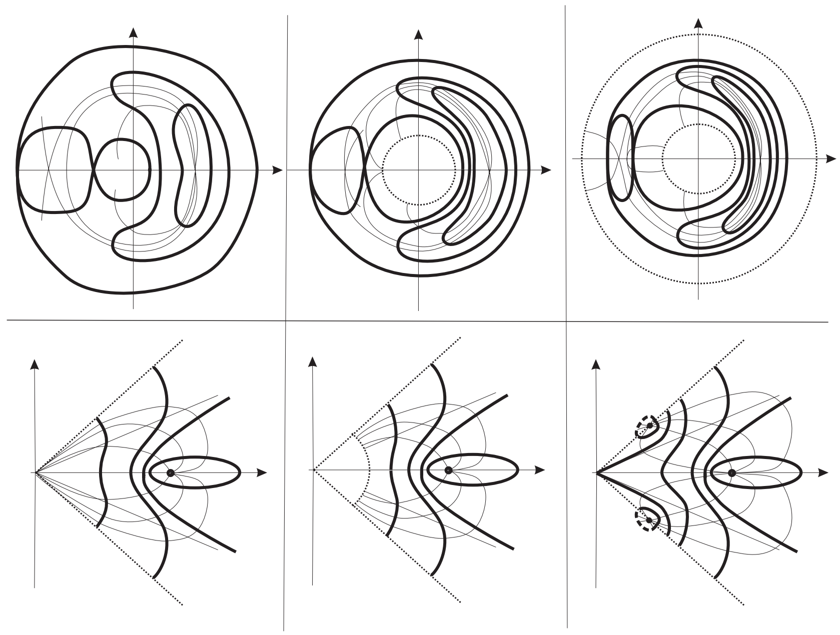

Рис. 2. Фронты (жирные линии) и лучи (тонкие линии) для уравнений постоянной кривизны в радиально-слоистых средах.
Вверху слева $v = wr$, по центру $v = wr \ln r$, справа $v = w \cos k \ln r$;
внизу слева $v = wr^{1+k}$, по центру $v = wr^{1-k}(r^{2k} - \nu^2)$,
справа $v = wr^{1-k}(r^{2k} + \nu^2)$.

Еще один класс уравнений, для которых не удается сделать то, что хотелось бы, — это уравнения с $v(x, y) = x^{1+\lambda}$, где $\lambda \neq 0, 1$. Пара квадратур, к которой сводится решение этого уравнения, содержит неполные бета-функции, не выражающиеся через элементарные функции. За счет тождеств для бета-функций одну из квадратур можно заменить соотношением

$$\pm[\lambda\psi + C\beta] = \sqrt{\alpha_0^{-2\lambda} - C^2\alpha_0^2} - \sqrt{\alpha^{-2\lambda} - C^2\alpha^2},$$

но в присутствии второй квадратуры исключение отсюда константы C все равно не дает сколь-нибудь приемлемой формулы. Единственным исключением является случай, когда $\lambda + 1 = 1/n$ (n целое). Тогда квадратуры выражаются в элементарных функциях, но и в этом случае решение оказывается достаточно обозримым только для $n = 3$ ($\lambda = -2/3$):

$$\frac{27\beta^2}{(\alpha^{2/3} + \alpha_0^{2/3})^3} = \left[2\frac{\sqrt{\psi^2 + 9\alpha^{2/3}\alpha_0^{2/3}}}{\alpha^{2/3} + \alpha_0^{2/3}} - 3\right]\left[\frac{\sqrt{\psi^2 + 9\alpha^{2/3}\alpha_0^{2/3}}}{\alpha^{2/3} + \alpha_0^{2/3}} + 3\right]^2,$$

и для $n = -2$ ($\lambda = -3/2$):

$$\frac{9\psi^2}{(\alpha + \alpha_0)^3} = 4 - 3\frac{4\alpha\alpha_0 - \beta^2}{(\alpha + \alpha_0)^2} - \frac{(4\alpha\alpha_0 - \beta^2)^{3/2}}{(\alpha + \alpha_0)^3}.$$

В последнем случае имеет место локализация фронта в области $4\alpha\alpha_0 - \beta^2 > 0$, ограниченной параболической каустикой. Аналогичный эффект должен иметь место и для других отрицательных степеней, но пока нет никакого общего принципа, позволяющего определять форму области локализации.

Отметим, что среди двумерных уравнений эйконала с известными решениями бо́льшая часть является либо уравнениями с нулевой кривизной (например, в справочнике [11] это уравнения 6.55, 6.56, 6.59), либо уравнениями с плоским слоением со степенной функцией слоения (например, уравнения 6.57 и 6.58 из [11], соответствующие случаю $v(x,y) = 1/\sqrt{x}$, т. е. в наших обозначениях $\lambda = -3/2$, для которого решение приведено выше). Для остальных уравнений, упомянутых в [11], решение в конечном виде получить не удается (например, уравнение (6.60)), поскольку исключение постоянных из квадратур приводит к трансцендентным уравнениям. Аналогичная ситуация складывается и с проинтегрированной в [12] системой уравнений, описывающей лучи. Хотя там для лучей удалось описать явно их форму (циклоида), оказывается, что исключить из уравнений циклоиды параметры так, чтобы получить явное соотношение только между x, y и ψ, невозможно, так как получающиеся уравнения тоже оказываются трансцендентными.

Автор благодарит Л. В. Овсянникова, А. С. Алексеева, А. П. Чупахина, А. Г. Никитина, Р. О. Поповича, а также участников семинара Л. В. Овсянникова (Институт гидродинамики СО РАН), семинара А. С. Алексеева (Институт вычислительной математики и математических методов геофизики СО РАН) и семинара А. Г. Никитина (Институт математики НАН Украины) за обсуждения результатов и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
2. *Соболев С. Л.* Волновое уравнение для неоднородной среды // Тр. Сейсмологического ин-та. 1930. Вып. 6. С. 1–57.
3. *Гоголадзе В. Г.* Волновое уравнение для неоднородных и анизотропных сред // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1935. Т. 9. С. 107–166.
4. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
5. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.
6. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
7. *Бреховских Л. М., Годин О. А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989.
8. *Friedlander F. G.* Simple progressive solutions of the wave equation // Proc. Camb. Phil. Soc. 1947. V. 43, N 3. P. 360–373.
9. *Киселев А. П., Перель М. В.* Относительно неискажающиеся волны для m-мерного волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 8. С. 1128–1129.
10. *Баранник А. Ф., Баранник Л. Ф., Фущич В. И.* Редукция и точные решения уравнения эйконала // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 4. С. 461–474.
11. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966.
12. *Марчук А. Н., Чубаров Л. Б., Шокин Ю. И.* Численное моделирование волн цунами. М.: Наука, 1983.
13. *Ибрагимов Н. Х., Мамонтов Е. В.* О задаче Коши для уравнения $u_{tt} - u_{xx} - \sum\limits_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x-t) \times u_{y_i y_j} = 0$ // Мат. сб. 1977. Т. 102, № 3. С. 391–409.
14. *Ибрагимов Н. Х., Оганесян А. О.* Иерархия гюйгенсовых уравнений в пространствах с нетривиальной конформной группой // Успехи мат. наук. 1991. Т. 46, № 2. С. 111–146.
15. *Боровских А. В.* Уравнение эйконала в неоднородной среде // Докл. РАН. 2003. Т. 391, № 5. С. 587–590.
16. *Боровских А. В.* Групповая классификация уравнений эйконала для трехмерной неоднородной среды // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 4. С. 23–64.

17. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
18. *Popovich R. O., Yegorchenko I. A.* Group classification of generalised eikonal equation // arXiv:math-ph/0112055. V. 1. 22 Dec 2001.
19. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
20. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
21. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
22. *Овсянников Л. В.* Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
23. *Мелешко С. В.* Однородные автономные системы с тремя независимыми переменными // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 5. С. 97–102.
24. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. Т. 1.

Статья поступила 2 апреля 2005 г., окончательный вариант — 22 апреля 2006 г.

Боровских Алексей Владиславович
Московский гос. университет,
механико-математический факультет, кафедра дифференциальных уравнений,
Ленинские Горы, Москва 119992
bor.bor@mail.ru