*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5*

*УДК 512.542+512.544.6*

# О СТРОГОЙ ВЕЩЕСТВЕННОСТИ УНИПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП ГРУПП ЛИЕВА ТИПА НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

**М. А. Газданова, Я. Н. Нужин**

**Аннотация:** Группу $G$ назовем *строго вещественной,* если любой ее неединичный элемент строго вещественный, т. е. сопряжен некоторой инволюцией из $G$ со своим обратным элементом. Для классических групп лиева ранга $l$ при $l \leq 4$ и $l \geq 13$ над произвольным полем и исключительных групп лиева типа над полем $K$, в котором существует элемент $\eta$ такой, что многочлен $X^2+X+\eta$ неприводим в $K[X]$ или $K_0[X]$ (в частности, если $K$ — конечное поле), получен ответ на следующий вопрос. Какие унипотентные подгруппы групп лиева типа над полем характеристики 2 являются строго вещественными?

**Ключевые слова:** группа лиева типа, унипотентная подгруппа, регулярный унипотентный элемент, строго вещественный элемент, граф коммутативности.

## Введение

Назовем группу $G$ *строго вещественной,* если любой ее неединичный элемент строго вещественный, т. е. сопряжен некоторой инволюцией из $G$ со своим обратным элементом. Основным результатом работы является

**Теорема 1.** *Пусть $U$ — унипотентная подгруппа группы лиева типа $G$ ранга $l$ над полем $K$ характеристики 2.*

*Подгруппа $U$ не является строго вещественной, если*

*1) тип $G$ равен ${}^2A_{2l}$, $l \geq 1$, ${}^2B_2$, ${}^2F_4$;*

*2) $l \geq 13$ и тип $G$ равен $A_{l-1}$, $B_l$, $C_l$, $D_l$, ${}^2A_{2l-1}$, ${}^2D_{l+1}$;*

*3) в поле $K$ существует элемент $\eta$ такой, что многочлен $X^2+X+\eta$ неприводим в $K[X]$ (в частности, если $K$ — конечное поле) и тип $G$ равен $F_4$, $E_6$, $E_7$, $E_8$;*

*4) в подполе неподвижных элементов $K_0$ существует элемент $\eta_0$ такой, что многочлен $X^2+X+\eta_0$ неприводим в $K_0[X]$ (в частности, если $K$ — конечное поле) и тип $G$ равен ${}^2E_6$.*

*Подгруппа $U$ является строго вещественной, если $l \leq 4$ и тип $G$ отличен от типов из пп.* 1, 3, 4.

В [1–5] описаны строго вещественные группы среди конечных простых групп, кроме ортогональных групп и исключительных групп лиева типа над конечными полями. В теореме 2 данной работы описываются строго вещественные регулярные унипотентные элементы групп лиева типа над конечными

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки (грант № 12F021M), второго — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00824).

полями характеристики 2. Из этого описания, в частности, вытекает, что простые группы исключительных типов $^2B_2$, $^2F_4$, $F_4$, $^2E_6$, $E_6$, $E_7$, $E_8$ над конечным полем характеристики 2 не являются строго вещественными. В недавно вышедшей статье [6] показано, что все исключительные группы лиева типа над любым конечным полем не являются даже вещественными.

Результаты статьи частично анонсированы в [7].

## § 1. Свойства строго вещественных групп

Пусть $G$ — строго вещественная группа, тогда по определению для любого ее неединичного элемента $g$ существует инволюция $i \in g$ такая, что $igi = g^{-1}$. Отсюда $g$ — произведение двух инволюций $i$ и $ig$ или $g = i$. Обратно, если $g = ij$, где $i, j$ — две различные инволюции, то элемент $g$ является строго вещественным. Следующие три леммы почти очевидны, и поэтому их доказательства мы опускаем.

**Лемма 1.** *Класс строго вещественных групп замкнут относительно гомоморфных образов и центральных произведений.*

**Лемма 2.** *Пусть $G$ — конечная строго вещественная группа. Тогда для любого ее элемента $g$ и любого ее (комплексного) характера $\xi$ все числа $\xi(g)$ вещественные.*

Обычно элемент $g$ (характер $\xi$) группы $G$ называют *вещественным*, если числа $\xi(g)$ являются вещественными для любого характера $\xi$ (соответственно для любого элемента $g$) группы $G$. Отметим, что вещественность и даже рациональность всех характеров группы $G$ не влекут ее строгую вещественность.

**Лемма 3.** *Пусть $A$ — нормальная подгруппа группы $G$. Тогда для любого $a \in A$ и любого $g \in G$ если элемент $gag^{-1}$ строго веществен в $A$, то и элемент $a$ строго веществен в $A$.*

**Лемма 4** [8, с. 146]. *Пусть $X$ — множество вершин конечного леса, $x \to g_x$ — отображение $X$ в группу $G$ такое, что $g_x$ и $g_y$ коммутируют всякий раз, когда вершины $x$ и $y$ не соединены в этом лесе. Пусть $T$ — множество все линейных порядков на $X$. Для любого $\tau \in T$ обозначим символом $p_\tau$ произведение в $G$ последовательности элементов $(g_x)_{x\in X}$, определенной порядком $\tau$. Тогда все произведения $p_\tau$ сопряжены в группе $G$.*

Для произвольной группы $G$ и любого ее элемента

$$g = g_1 \dots g_n, \quad g_i \in G \tag{1}$$

по представлению (1) определим простой граф $\Gamma(g) = \Gamma(g, g_1, \dots, g_n)$ на вершинах $g_1, \dots, g_n$. По определению вершины $g_i$ и $g_j$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $g_i g_j \neq g_j g_i$. Граф $\Gamma(g)$ будем называть *графом коммутативности* элемента $g$ в представлении (1).

**Лемма 5.** *Пусть в представлении (1) все $g_i$ — инволюции и граф коммутативности $\Gamma(g)$ является лесом. Тогда $g$ — строго вещественный элемент.*

Доказательство. Множество вершин $X = \{g_1, \dots, g_n\}$ любого леса можно разбить на два подмножества $X_1$ и $X_2$ таким образом, что если $g, f \in X_i$, $i = 1, 2$, то вершины $g, f$ не соединены в этом лесе. Поэтому элемент

$$\prod_{g_i \in X_1} g_i \prod_{g_j \in X_2} g_j$$

раскладывается в произведение двух инволюций и, следовательно, является строго вещественным элементом. Осталось воспользоваться леммой 4. Лемма доказана.

## § 2. Обозначения в группах лиева типа

Далее всюду с нескрученной группой лиева типа $G$ над полем $K$ ассоциируется система корней $\Phi$. Обозначения подгрупп и элементов группы $G$ стандартные, например, такие, как в книге Картера [9]. В частности, $\Phi^+$ — множество положительных корней системы $\Phi$; $x_r(t)$ — корневые элементы, $r \in \Phi$, $t \in K$; $X_r$ — корневая подгруппа, порожденная корневыми элементами $x_r(t)$, $t \in K$; $U$ — унипотентная подгруппа, порожденная подгруппами $X_r$, $r \in \Phi^+$; $B$ — борелевская подгруппа, содержащая подгруппу $U$; $U_i$ — унипотентная подгруппа, порожденная подгруппами $X_r$ для корней $r$ высоты больше $i-1$ (в наших обозначениях $U_1 = U$); $\Pi = \{r_1, r_2, \ldots, r_l\}$ — база системы $\Phi$, и мы фиксируем расположение фундаментальных корней на схеме Дынкина такое, как в [8].

Со скрученной группой $G$ типа ${}^n\Phi$ часто бывает удобно ассоциировать скрученную систему корней ${}^n\Phi$ (исключая тип ${}^2F_4$), в частности, при таком подходе естественно определяются ее корневые подгруппы $X_r$, $r \in {}^n\Phi$, и подгруппы $U_i$ и $B$. Далее, если не оговаривается противное, мы связываем со крученной группой $G$ типа ${}^n\Phi$ систему корней ${}^n\Phi$. Более точно, группе $G$ типа ${}^n\Phi$ соответствует система корней типа

- $B_l$, если $G$ типа ${}^2A_{2l}$ или ${}^2D_{l+1}$;
- $C_l$, если $G$ типа ${}^2A_{2l-1}$;
- $F_4$, если $G$ типа ${}^2E_6$;
- $G_2$, если $G$ типа ${}^3D_4$;
- $A_1$, если $G$ типа ${}^2B_2$ или ${}^2G_2$.

Группа $G$ типа ${}^2F_4$ имеет 16 корневых подгрупп, каждая из которых изоморфна унипотентной подгруппе группы типа $A_1$ или типа ${}^2B_2$.

Для любого непустого подмножества $J \subset \Pi$ через $\Phi_J$ обозначим подсистему корней с базой $J$ и положим

$$G_J = \langle X_r \mid r \in \Phi_J \rangle, \quad U_J = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ - \Phi_J^+ \rangle \text{ (подгруппа Леви)},$$

$$L_J = \langle X_r \mid r \in \Phi_J^+ \rangle \quad (= U \cap G_J).$$

Следующая лемма вытекает из разложения Леви для параболических подгрупп (см., например, [9, теорема 8.5.2]).

**Лемма 6.** 1. *$U_J$ — нормальная подгруппа группы $U$.*
2. *$U = U_J L_J$.*
3. *$U_J \cap L_J = 1$.*

В силу леммы 6 можно говорить о проекции $\bar{u}$ элемента $u \in U$ на подгруппу $L_J$, а именно элемент $\bar{u}$ получается вычеркиванием всех корневых сомножителей $x_r$, $r \in \Phi^+ - \Phi_J^+$, из канонического представления элемента $u$ в виде произведения корневых элементов в некотором порядке. Проекция $\bar{u}$ определяется однозначно, т. е. не зависит от представления элемента $u$. Ясно также, что оператор проектирования является гомоморфизмом групп. Поэтому справедлива

**Лемма 7.** *Пусть $\bar{g}, \bar{g}_1, \bar{g}_2$ — проекции на подгруппу $L_J$ элементов $g, g_1, g_2 \in U$ соответственно. Тогда если $gg_2g^{-1} = g_1$, то $\bar{g}\bar{g}_2\bar{g}^{-1} = \bar{g}_1$.*

## § 3. Регулярные унипотентные элементы

В простой линейной алгебраической группе $\overline{G}$, ассоциированной с системой корней $\Phi$ с базой $\Pi = \{r_1, r_2, \dots, r_l\}$, элементы, сопряженные с элементами вида

$$x_{r_1}(t_1)x_{r_2}(t_2)\dots x_{r_l}(t_l)x_{s_1}(u_1)\dots x_{s_k}(u_k), \quad t_i \neq 0,\ r_i < s_j, \tag{2}$$

называются *регулярными унипотентными элементами.* Такие элементы естественно определяются для любой группы лиева типа $G$ над произвольным полем, а именно регулярными унипотентными элементами группы $G$ объявляются те регулярные унипотентные элементы группы $\overline{G}$, которые лежат в группе $G$. Число классов сопряженности регулярных унипотентных элементов $d = d(G)$ группы $G$ над конечным полем известно, см., например, [10, лемма 5.2], в частности, справедлива

**Лемма 8.** *Пусть $G$ — расширенная группа лиева типа над конечным полем характеристики 2. Тогда*
1) *$d = 1$, если $G$ типа $A_l$, ${}^2A_l$;*
2) *$d = 4$, если $G$ типа ${}^2F_4$, $F_4$, $E_7$, $E_8$;*
3) *$d = 2$ в остальных случаях.*

**Лемма 9.** *Пусть $G$ — группа лиева типа над произвольным полем $K$, $B$ — ее борелевская подгруппа, $U$ — унипотентная подгруппа из $B$. Пусть $g \in G$, $u$ — регулярный элемент из $U$. Тогда если $gug^{-1} \in U$, то $g \in B$. Более того, если $\operatorname{char} K = 2$ и $g$ — инволюция, то $g \in U$. Таким образом, регулярный унипотентный элемент группы $U$ над полем характеристики 2 является строго вещественным в $U$ тогда и только тогда, когда он строго вещественный во всей группе $G$.*

Доказательство. Представим элемент $g$ в каноническом виде $u_1 n_\omega u_2$, где $u_1, u_2 \in U$, а $n_\omega$ — мономиальный элемент. По условию леммы

$$n_\omega u_2 u u_2^{-1} n_\omega^{-1} = u_1^{-1} u^{-1} u_1.$$

Очевидно, элемент $u_2 u u_2^{-1}$ также является регулярным. Отсюда $w(\Pi) = \Pi$. Тогда $\omega = 1$ и, следовательно, $g \in B$. При $\operatorname{char} K = 2$ все инволюции из $B$ лежат в ее подгруппе $U$. Поэтому если $gug^{-1} \in U$ и $g$ — инволюция, то $g \in U$. Лемма доказана.

**Лемма 10.** *Если $u$ — строго вещественный регулярный унипотентный элемент группы лиева типа $G$ над полем характеристики 2, то для любого $J \subset \Pi$ его проекция $\bar{u}$ на подгруппу $L_J$ является строго вещественным элементом группы $G_J$.*

Доказательство. По лемме 9 существует инволюция $i \in U$ такая, что $iui = u^{-1}$. В силу леммы 6

$$u = u'\bar{u},\ u' \in U_J,\ \bar{u} \in L_J, \quad i = i'\bar{i},\ i' \in U_J,\ \bar{i} \in L_J,$$

причем $\bar{i}$ — инволюция и $\bar{i}\bar{u}\bar{i} = \bar{u}^{-1}$. Лемма доказана.

**Лемма 11.** *В простой линейной алгебраической группе $\overline{G}$ над полем характеристики 2 все регулярные унипотентные элементы строго вещественны.*

Доказательство. В группе $\overline{G}$ все регулярные унипотентные элементы сопряжены [11, с. 212, п. 1.8(б)]. Граф коммутативности регулярного унипотентного элемента

$$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1) \tag{3}$$

совпадает с графом Дынкина, если в последнем отождествить кратные ребра, и, следовательно, является деревом. Так как основное поле имеет характеристику 2, корневые элементы в представлении элемента (3) суть инволюции. Поэтому в силу леммы 5 элемент (3) строго вещественный. Лемма доказана.

**Лемма 12.** *Пусть $G$ — группа Шевалле типа $D_4$ над полем $K$ характеристики 2, $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ — база системы корней типа $D_4$, причем $r_1 + r_2$, $r_2 + r_3$, $r_2 + r_4$ — корни, и*

$$g_1 = x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1),$$
$$g_2 = x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta), \quad \eta \in K,$$
$$g = x_{r_1}(t_1)x_{r_2}(t_2)x_{r_3}(t_3)x_{r_4}(t_4)u_2, \quad t_i \in K,\ u_2 \in U_2.$$

*Тогда равенство $gg_2g^{-1} = g_1$ возможно только при $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t$ и $t^2 + t + \eta = 0$.*

Доказательство. Из коммутаторной формулы Шевалле легко получаем равенство

$$gg_2g^{-1} = g_1x_{r_1+r_2}(t_1 + t_2)x_{r_3+r_2}(t_3 + t_2)x_{r_4+r_2}(t_4 + t_2)u_3$$

для некоторого $u_3 \in U_3$. Поэтому из условия $gg_2g^{-1} = g_1$ сразу следуют равенства $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t$. Таким образом,

$$g = x_{r_1}(t)x_{r_2}(t)x_{r_3}(t)x_{r_4}(t)x_{r_1+r_2}(t_5)x_{r_3+r_2}(t_6)x_{r_4+r_2}(t_7)u_3$$

для некоторых $t_5, t_6, t_7 \in K$ и подходящего $u_3 \in U_3$. Снова только из коммутаторной формулы Шевалле вытекает равенство

$$gg_2g^{-1} = g_1x_{r_1+r_2+r_3}(t_5+t_6+t)x_{r_1+r_2+r_4}(t_5+t_7+t)x_{r_2+r_3+r_4}(t_6+t_7+t^2+t+\eta)u_4$$

для некоторого $u_4 \in U_4$. Отсюда и из условия $gg_2g^{-1} = g_1$ получаем, что $t^2 + t + \eta = 0$. Лемма доказана.

**Теорема 2.** *Пусть $G$ — расширенная группа лиева типа над конечным полем характеристики 2.*

1. *В группе $G$ типа $A_l$, ${}^2A_{2l-1}$, $B_l$, $C_l$, $D_l$, ${}^2D_l$, ${}^3D_4$, $G_2$ все регулярные унипотентные элементы строго вещественны.*

2. *В группе $G$ типа ${}^2A_{2l}$, ${}^2B_2$, ${}^2F_4$ все регулярные унипотентные элементы не строго вещественны.*

3. *Группа $G$ типа $E_6$, ${}^2E_6$ содержит один класс строго вещественных и один класс не строго вещественных сопряженных регулярных унипотентных элементов.*

4. *Группа $G$ типа $E_7$, $E_8$, $F_4$ содержит два класса строго вещественных и два класса не строго вещественных сопряженных регулярных унипотентных элементов.*

Доказательство. Для нескрученных групп в качестве представителя первого класса сопряженных регулярных унипотентных элементов можно всегда взять элемент (3). Рассуждения из доказательства леммы 11 для элемента (3) проходят и в этом случае.

**Тип** $A_l$. В группе $G$ один класс сопряженных регулярных унипотентных элементов с представителем (3), который строго вещественный.

**Тип** ${}^2A_{2l-1}$, $l \geq 2$. В группе $G$ все регулярные унипотентные элементы сопряжены и в качестве представителя можно взять элемент

$$(x_{r_1}(1)x_{r_{2l-1}}(1))(x_{r_2}(1)x_{r_{2l-2}}(1))\dots(x_{r_{l-1}}(1)x_{r_{l+1}}(1))x_{r_l}(1). \tag{4}$$

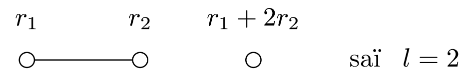


Рис. 1.

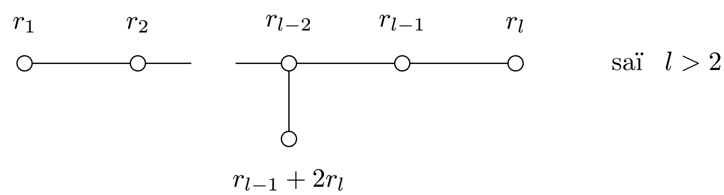


Рис. 2.

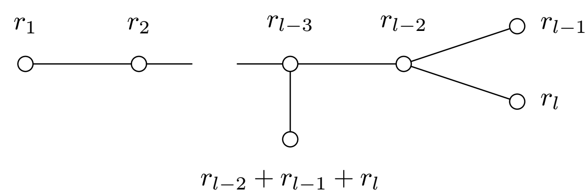


Рис. 3.

Все сомножители $(x_{r_1}(1)x_{r_{2l-1}}(1))$, $(x_{r_2}(1)x_{r_{2l-2}}(1))$, $\dots$ , $(x_{r_{l-1}}(1)x_{r_{l+1}}(1))$, $x_{r_l}(1)$ в представлении элемента (4) лежат в группе $G$ и являются инволюциями (именно здесь отличие типа ${}^2A_{2l-1}$ от типа ${}^2A_{2l}$), а его граф коммутативности является цепью. Поэтому в силу леммы 5 элемент (4) строго вещественный.

**Тип** $B_l$, $l \geq 2$. В группе $G$ типа $B_l$ два класса сопряженных регулярных унипотентных элементов и в качестве представителя второго класса можно взять элемент

$$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)x_{r_{l-1}+2r_l}(\eta), \tag{5}$$

где многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в $K[X]$. Действительно, по лемме 9 если элементы (3) и (5) сопряжены в $G$, то они сопряжены и в $U$. Пусть $l = 2$. Сопрягая (5) произвольным элементом

$$x_{r_1}(x)x_{r_2}(y)x_{r_1+r_2}(z)x_{r_1+2r_2}(t),$$

из $U$ получим

$$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_1+r_2}(x + y)x_{r_1+2r_2}(x^2 + x + \eta).$$

Приравнивая последний элемент к элементу (3), получаем равенство $x^2+x+\eta = 0$. Общий случай следует из случая $l = 2$ по лемме 7.

Граф коммутативности элемента (5) изображен на рис. 1, 2 и является лесом. Здесь вершины, соответствующие корневым элементам $x_r(t)$, нумеруются корнями $r$. Поэтому в силу леммы 5 элемент (5) строго вещественный.

**Тип** $\mathrm{C}_l$, $l \geq 2$. Здесь нужно лишь отметить, что группы типа $B_l$ и $C_l$ над полем характеристики 2 изоморфны.

**Тип** $D_l$, $l \geq 4$. В группе $G$ типа $D_l$, $l \geq 4$, два класса сопряженных регулярных унипотентных элементов и в качестве представителя второго класса можно взять элемент

$$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)x_{r_{l-2}+r_{l-1}+r_l}(\eta), \tag{6}$$

где многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в $K[X]$. Действительно, при $l = 4$ по леммам 9 и 12 элементы (3) и (6) не сопряжены. Общий случай следует из случая $l = 4$ по лемме 7.

Граф коммутативности элемента (6) имеет вид, изображенный на рис. 3, и является деревом. Поэтому в силу леммы 5 элемент (6) строго вещественный.

**Тип** ${}^2D_l$, $l \geq 4$. В группе $G$ типа ${}^2D_l$, $l \geq 4$, два класса сопряженных регулярных унипотентных элементов.

В качестве представителя первого класса можно взять элемент (3). Все сомножители $x_{r_1}(1), x_{r_2}(1), \dots, x_{r_{l-2}}(1), (x_{r_{l-1}}(1)x_{r_l}(1))$ в представлении элемента (3) лежат в группе $G$ и являются инволюциями, а его граф коммутативности в этом представлении — цепь. Поэтому в силу леммы 5 элемент (3) является строго вещественным элементом в группе $G$.

В качестве представителя второго класса можно взять элемент

$$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_{l-2}}(1)(x_{r_{l-1}}(1)x_{r_l}(1))x_{r_{l-2}+r_{l-1}+r_l}(\eta), \tag{7}$$

где многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в $K_0[X]$. Здесь $K_0$ — поле неподвижных элементов относительно полевого автоморфизма, участвующего в построении группы $G$. Действительно, пусть $g_1, g_2, g, t, \eta$ такие, как в лемме 12. Если $g_1, g_2, g \in {}^2D_4(K)$, то по лемме 12 $gg_2g^{-1} = g_1$ тогда и только тогда, когда $t \in K_0$ и $t^2 + t + \eta = 0$. Отсюда при $l = 4$ по леммам 9 и 12 существует такое $\eta \in K_0$, что элементы (3) и (7) не сопряжены. Общий случай следует из случая $l = 4$ по лемме 7.

Все сомножители $x_{r_1}(1), x_{r_2}(1), \dots, x_{r_{l-2}}(1), (x_{r_{l-1}}(1)x_{r_l}(1)), x_{r_{l-2}+r_{l-1}+r_l}(\eta)$ в представлении элемента (7) лежат в группе $G$ и являются инволюциями, а его граф коммутативности в этом представлении такой, как на рис. 2, поэтому в силу леммы 5 элемент (7) строго вещественный.

**Тип** ${}^3D_4$. В группе $G$ типа ${}^3D_4$ два класса сопряженных регулярных унипотентных элементов. В качестве представителя первого класса можно взять элемент

$$x_{r_1}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1), \tag{8}$$

который строго веществен, так как является произведением двух инволюций $x_{r_1}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)$ и $x_{r_2}(1)$ из $G$. В качестве представителя второго класса можно взять элемент

$$x_{r_1}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(\eta), \tag{9}$$

где $\eta \in K_0$ и многочлен $X^2+X+\eta$ неприводим в $K_0[X]$. Граф коммутативности элемента (9) является цепью с тремя вершинами $x_{r_2}(1)$, $x_{r_1}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)$ и $x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(\eta)$. Так же, как и для типа ${}^2D_l$, можно показать, что элементы (8) и (9) не сопряжены.

**Тип** $G_2$. В группе $G$ типа $G_2$ два класса сопряженных регулярных унипотентных элементов. В качестве представителя второго класса можно взять элемент

$$x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{3r_1+r_2}(\eta), \tag{10}$$

где $\eta \in K$ и многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в $K[X]$. Граф коммутативности элемента (10) является цепью. Если при построении группы типа ${}^3D_4$ взять тривиальный полевой автоморфизм, то получим группу, изоморфную группе типа $G_2$. Поэтому элементы (3) и (10) не сопряжены.

**Типы** ${}^2A_{2l}$, ${}^2B_2$, ${}^2F_4$. Подгруппа $U$ типа ${}^2A_2$ и ${}^2B_2$ имеет ступень нильпотентности 2, и все ее инволюции лежат в центре, поэтому все ее регулярные элементы не могут быть строго вещественными, так как они имеют порядок 4. Отсюда по лемме 10 все регулярные унипотентные элементы группы $G$ типа ${}^2A_{2l}$, ${}^2F_4$ также не могут быть строго вещественными.

**Тип** $E_6$. В группе $G$ типа $E_6$ два класса сопряженных регулярных унипотентных элементов. В качестве представителя второго класса можно взять элемент

$$g = x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1), \tag{11}$$

где многочлен $X^2+X+\eta$ неприводим в $K[X]$. Действительно, корни $r_2, r_3, r_4, r_5$ составляют фундаментальную систему типа $D_4$, поэтому так же, как и для типа ${}^2D_l$, можно показать, что элементы (3) и (11) не сопряжены. Граф коммутативности элемента (11) содержит циклы. Покажем, что он не является строго вещественным.

Предположим, что элемент $g$ инвертируется некоторой инволюцией $i \in U$, т. е.

$$g^i = g^{-1}. \tag{12}$$

Для подходящих $t_i \in K$ и подходящего $u_2 \in U_2$

$$i = x_{r_2}(t_2)x_{r_4}(t_4)x_{r_3}(t_3)x_{r_5}(t_5)x_{r_1}(t_1)x_{r_6}(t_6)u_2.$$

Представим элементы $g$ и $g^{-1}$ в виде произведения корневых элементов, согласованного с высотой корней:

$$\begin{aligned} g = x_{r_2}(1)&x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1) \\ &= x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1) \\ &\times x_{r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)x_{r_1+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{-1} = x_{r_6}(1)&x_{r_1}(1)x_{r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_5}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1) \\ &= x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1) \\ &\times x_{r_1+r_3}(1)x_{r_5+r_6}(1)x_{r_2+r_4}(1)x_{r_3+r_4}(1)x_{r_4+r_5}(1) \\ &\qquad \times x_{r_3+r_4+r_5}(\eta+1)x_{r_2+r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_2+r_3+2r_4+r_5}(1). \end{aligned}$$

Используя указанные выше представления элементов $i$, $g$ и $g^{-1}$, получаем, что

$$\begin{aligned} (g^{-1})^i = g&x_{r_1+r_3}(t_1+t_3+1)x_{r_5+r_6}(t_5+t_6+1) \\ &\times x_{r_2+r_4}(t_2+t_4+1)x_{r_3+r_4}(t_3+t_4+1)x_{r_4+r_5}(t_4+t_5+1)u_3 \end{aligned}$$

для некоторого $u_3 \in U_3$. В силу равенства (12) имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} t_1+t_3=1, \quad t_5+t_6=1, \quad t_2+t_4=1, \\ t_3+t_4=1, \quad t_4+t_5=1. \end{gathered}$$

Решая эту систему, получим равенства $t_1=t_4=t_6=t$, $t_2=t_3=t_5=t+1$ для некоторого $t \in K$. Поэтому

$$\begin{aligned} i = x_{r_2}(t+1)&x_{r_4}(t)x_{r_3}(t+1)x_{r_5}(t+1)x_{r_1}(t)x_{r_6}(t) \\ &\times x_{r_1+r_3}(v_1)x_{r_5+r_6}(v_2)x_{r_2+r_4}(v_3)x_{r_3+r_4}(v_4)x_{r_4+r_5}(v_5)u_3 \end{aligned}$$

для некоторых $v_i \in K$ и подходящего $u_3 \in U_3$. Отсюда

$$(g^{-1})^i = gx_{r_1+r_3+r_4}(v_1+v_4+1+t)x_{r_2+r_3+r_4}(v_3+v_4+t)x_{r_3+r_4+r_5}(v_4+v_5+t^2+t) \\ \times x_{r_2+r_4+r_5}(v_3+v_5+t)x_{r_4+r_5+r_6}(v_2+v_5+1+t)u_4$$

для подходящего $u_4 \in U_4$. В силу равенства (12) имеем следующую систему уравнений:

$$v_1+v_4+1+t=0, \quad v_3+v_4+t=0, \quad v_4+v_5+t^2+t=0, \\ v_3+v_5+t=0, \quad v_2+v_5+1+t=0.$$

Решая эту систему, получаем $v_1 = v_2 = v$, $v_4 = v_5 = v+1+t$, $v_3 = v+1$ для некоторого $v \in K$ и, следовательно, $t^2+t = t(t+1) = 0$. Далее рассмотрим два случая: 1) $t = 0$; 2) $t = 1$.

1. Пусть $t = 0$. Тогда для некоторых $p_i \in K$ и подходящего $u_4 \in U_4$

$$i = x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1+r_3}(v)x_{r_5+r_6}(v)x_{r_2+r_4}(v+1)x_{r_3+r_4}(v+1)x_{r_4+r_5}(v+1) \\ \times x_{r_1+r_3+r_4}(p_1)x_{r_2+r_3+r_4}(p_2)x_{r_3+r_4+r_5}(p_3)x_{r_2+r_4+r_5}(p_4)x_{r_4+r_5+r_6}(p_5)u_4.$$

Отсюда для подходящего $u_5 \in U_5$ получаем, что

$$(g^{-1})^i = gx_{r_1+r_2+r_3+r_4}(p_1+p_2) \\ \times x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(p_1+p_3+v+1+\eta)x_{r_2+r_3+r_4+r_5}(p_2+p_3+p_4+v+1) \\ \times x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(p_3+p_5+v+1+\eta)x_{r_2+r_4+r_5+r_6}(p_4+p_5)u_5.$$

Снова в силу равенства (12) имеем следующую систему уравнений:

$$p_1+p_2=0, \quad p_1+p_3+v+1+\eta=0, \quad p_2+p_3+p_4+v+1=0, \\ p_3+p_5+v+1+\eta=0, \quad p_4+p_5=0.$$

Решая эту систему, получаем $p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = \eta$, $p_3 = v+1$. Следовательно,

$$i = x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1+r_3}(v)x_{r_5+r_6}(v)x_{r_2+r_4}(v+1)x_{r_3+r_4}(v+1)x_{r_4+r_5}(v+1) \\ \times x_{r_1+r_3+r_4}(\eta)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_3+r_4+r_5}(v+1)x_{r_2+r_4+r_5}(\eta)x_{r_4+r_5+r_6}(\eta)u_4.$$

Ввиду выбора элемент $i$ является инволюцией. Вычисления показывают, что

$$i^2 = x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(v^2+v+\eta)x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(v^2+v+\eta) \\ \times x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(v^2+v+\eta)x_{r_2+r_4+r_5+r_6}(v^2+v+\eta)u_5$$

для подходящего $u_5 \in U_5$. Отсюда $v^2+v+\eta = 0$. Но в силу выбора $\eta \in K$ многочлен $X^2+X+\eta$ неприводим в кольце $K[X]$; противоречие.

2. Пусть $t = 1$. Тогда для некоторых $p_i \in K$ и подходящего $u_4 \in U_4$

$$i = x_{r_4}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1)x_{r_1+r_3}(v)x_{r_5+r_6}(v)x_{r_2+r_4}(v+1)x_{r_3+r_4}(v)x_{r_4+r_5}(v) \\ \times x_{r_1+r_3+r_4}(p_1)x_{r_2+r_3+r_4}(p_2)x_{r_3+r_4+r_5}(p_3)x_{r_2+r_4+r_5}(p_4)x_{r_4+r_5+r_6}(p_5)u_4.$$

Отсюда для подходящего $u_5 \in U_5$ получаем, что

$$(g^{-1})^i = gx_{r_1+r_2+r_3+r_4}(p_1+p_2)x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(p_1+p_3+v) \\ \times x_{r_2+r_3+r_4+r_5}(p_2+p_3+p_4+v+\eta)x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(p_3+p_5+v)x_{r_2+r_4+r_5+r_6}(p_4+p_5)u_5.$$

В силу равенства (12) имеем следующую систему уравнений:

$$p_1+p_2=0, \quad p_1+p_3+v=0, \quad p_2+p_3+p_4+v+\eta=0, \quad p_3+p_5+v=0, \quad p_4+p_5=0.$$

Решая эту систему, получаем равенства $p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = \eta$, $p_3 = v + \eta$. Следовательно,

$$i = x_{r_4}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1)x_{r_1+r_3}(v)x_{r_5+r_6}(v)x_{r_2+r_4}(v+1)x_{r_3+r_4}(v)x_{r_4+r_5}(v) \times x_{r_1+r_3+r_4}(\eta)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_3+r_4+r_5}(v+\eta)x_{r_2+r_4+r_5}(\eta)x_{r_4+r_5+r_6}(\eta)u_4.$$

Ввиду выбора элемент $i$ является инволюцией. Вычисления показывают, что

$$i^2 = x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(v^2+v+\eta)x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(v^2+v+\eta) \times x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(v^2+v+\eta)x_{r_2+r_4+r_5+r_6}(v^2+v+\eta)u_5$$

для подходящего $u_5 \in U_5$. Отсюда $v^2 + v + \eta = 0$. Но в силу выбора $\eta \in K$ многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в кольце $K[X]$; противоречие.

**Тип** ${}^2E_6$. В группе $G$ типа ${}^2E_6$ два класса сопряженных регулярных унипотентных элементов. В качестве представителя первого класса можно взять элемент

$$x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1). \tag{13}$$

Действительно, все четыре сомножителя $x_{r_2}(1)$, $x_{r_4}(1)$, $x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)$, $x_{r_1}(1)x_{r_6}(1)$ в представлении элемента (13) лежат в группе $G$ и являются инволюциями. Граф коммутативности элемента (13) является цепью. Поэтому в силу леммы 5 он строго веществен в группе $G$. Так же, как и для типа $E_6$, в качестве представителя второго класса можно взять элемент

$$g = x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1) \tag{14}$$

с той лишь разницей, что многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим уже в $K_0[X]$, где $K_0$ — поле неподвижных элементов относительно полевого автоморфизма. То, что элементы (13) и (14) не сопряжены в группе $G = {}^2E_6(K)$, следует из леммы 12 так же, как и для типа ${}^2D_l$, но они могут быть сопряжены в группе $E_6(K)$, например, при $K = GF(4)$ это легко проверяется. Поэтому нестрогую вещественность элемента (14) в группе $G$ нельзя получить из аналогичного результата для типа $E_6$. Покажем, что элемент $g$ не является строго вещественным в группе $G$.

Предположим, что элемент $g$ инвертируется некоторой инволюцией $i \in U$, т. е.

$$g^i = g^{-1}. \tag{15}$$

Для подходящих $t_2, t_4 \in K_0$, $t_1, t_3 \in K$ и подходящего $u_2 \in U_2$

$$i = x_{r_2}(t_2)x_{r_4}(t_4)x_{r_3}(t_3)x_{r_5}(\bar{t}_3)x_{r_1}(t_1)x_{r_6}(\bar{t}_1)u_2.$$

Представим элементы $g$ и $g^{-1}$ в виде произведения корневых элементов, согласованного с высотой корней:

$$\begin{aligned} g &= x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1) \\ &= x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1) \\ &\quad \times x_{r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)x_{r_1+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{-1} &= x_{r_6}(1)x_{r_1}(1)x_{r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_5}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1) \\ &= x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1) \\ &\quad \times x_{r_1+r_3}(1)x_{r_5+r_6}(1)x_{r_2+r_4}(1)x_{r_3+r_4}(1)x_{r_4+r_5}(1) \\ &\quad \times x_{r_3+r_4+r_5}(\eta+1)x_{r_2+r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_2+r_3+2r_4+r_5}(1). \end{aligned}$$

Используя указанные выше представления элементов $i$, $g$ и $g^{-1}$, получаем, что

$$(g^{-1})^i = gx_{r_1+r_3}(t_1+t_3+1)x_{r_5+r_6}(\bar{t}_1+\bar{t}_3+1) \times x_{r_2+r_4}(t_2+t_4+1)x_{r_3+r_4}(t_3+t_4+1)x_{r_4+r_5}(\bar{t}_3+t_4+1)u_3$$

для некоторого $u_3 \in U_3$. В силу равенства (15) имеем следующую систему уравнений:

$$t_1+t_3=1, \quad \bar{t}_1+\bar{t}_3=1, \quad t_2+t_4=1, \quad t_3+t_4=1, \quad \bar{t}_3+t_4=1.$$

Решая эту систему, получим равенства $t_1=\bar{t}_1=t_4=t$, $t_3=\bar{t}_3=t_2=t+1$ для некоторого $t \in K_0$. Поэтому

$$i = x_{r_2}(t+1)x_{r_4}(t)x_{r_3}(t+1)x_{r_5}(t+1)x_{r_1}(t)x_{r_6}(t) \times x_{r_1+r_3}(v_1)x_{r_5+r_6}(\bar{v}_1)x_{r_2+r_4}(v_3)x_{r_3+r_4}(v_4)x_{r_4+r_5}(\bar{v}_4)u_3$$

для некоторых $v_1, v_4 \in K$, $v_2, v_3 \in K_0$ и подходящего $u_3 \in U_3$. Отсюда

$$(g^{-1})^i = gx_{r_1+r_3+r_4}(v_1+v_4+1+t)x_{r_2+r_3+r_4}(v_3+v_4+t)x_{r_3+r_4+r_5}(v_4+\bar{v}_4+t^2+t) \times x_{r_2+r_4+r_5}(v_3+\bar{v}_4+t)x_{r_4+r_5+r_6}(\bar{v}_1+\bar{v}_4+1+t)u_4$$

для подходящего $u_4 \in U_4$. В силу равенства (15) имеем следующую систему уравнений:

$$v_1+v_4+1+t=0, \quad v_3+v_4+t=0, \quad v_4+\bar{v}_4+t^2+t=0,$$
$$v_3+\bar{v}_4+t=0, \quad \bar{v}_1+\bar{v}_4+1+t=0.$$

Решая эту систему, получаем $v_1=\bar{v}_1=v$, $v_4=\bar{v}_4=v+1+t$, $v_3=v+1$ для некоторого $v \in K_0$ и, следовательно, $t^2+t=t(t+1)=0$. Далее рассмотрим два случая: 1) $t=0$; 2) $t=1$.

1. Пусть $t=0$. Тогда для некоторых $p_1, p_2 \in K$, $p_3 \in K_0$ и подходящего $u_4 \in U_4$

$$i = x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1+r_3}(v)x_{r_5+r_6}(v)x_{r_2+r_4}(v+1)x_{r_3+r_4}(v+1)x_{r_4+r_5}(v+1) \times x_{r_1+r_3+r_4}(p_1)x_{r_2+r_3+r_4}(p_2)x_{r_3+r_4+r_5}(p_3)x_{r_2+r_4+r_5}(\bar{p}_2)x_{r_4+r_5+r_6}(\bar{p}_1)u_4.$$

Отсюда для подходящего $u_5 \in U_5$ получаем, что

$$(g^{-1})^i = gx_{r_1+r_2+r_3+r_4}(p_1+p_2) \times x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(p_1+p_3+v+1+\eta)x_{r_2+r_3+r_4+r_5}(p_2+p_3+\bar{p}_2+v+1) \times x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(p_3+\bar{p}_1+v+1+\eta)x_{r_2+r_4+r_5+r_6}(\bar{p}_1+\bar{p}_2)u_5.$$

Снова в силу равенства (15) имеем следующую систему уравнений:

$$p_1+p_2=0, \quad p_1+p_3+v+1+\eta=0, \quad p_2+p_3+\bar{p}_2+v+1=0,$$
$$\bar{p}_1+p_3+v+1+\eta=0, \quad \bar{p}_1+\bar{p}_2=0.$$

Решая эту систему, получаем $p_1=\bar{p}_1=p_2=\bar{p}_2=\eta$, $p_3=v+1$. Следовательно,

$$i = x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1+r_3}(v)x_{r_5+r_6}(v)x_{r_2+r_4}(v+1)x_{r_3+r_4}(v+1)x_{r_4+r_5}(v+1) \times x_{r_1+r_3+r_4}(\eta)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_3+r_4+r_5}(v+1)x_{r_2+r_4+r_5}(\eta)x_{r_4+r_5+r_6}(\eta)u_4.$$

Ввиду выбора элемент $i$ является инволюцией. Вычисления показывают, что

$$i^2 = x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(v^2+v+\eta)x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(v^2+v+\eta) \\ \times x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(v^2+v+\eta)x_{r_2+r_4+r_5+r_6}(v^2+v+\eta)u_5$$

для подходящего $u_5 \in U_5$. Отсюда $v^2+v+\eta = 0$ и, как было доказано выше, $v \in K_0$. Но с учетом выбора $\eta \in K_0$ многочлен $X^2+X+\eta$ неприводим в кольце $K_0[X]$; противоречие.

2. Пусть $t = 1$. Тогда для некоторых $p_1, p_2 \in K$, $p_3 \in K_0$ и подходящего $u_4 \in U_4$

$$i = x_{r_4}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1)x_{r_1+r_3}(v)x_{r_5+r_6}(v)x_{r_2+r_4}(v+1)x_{r_3+r_4}(v)x_{r_4+r_5}(v) \\ \times x_{r_1+r_3+r_4}(p_1)x_{r_2+r_3+r_4}(p_2)x_{r_3+r_4+r_5}(p_3)x_{r_2+r_4+r_5}(\bar{p}_2)x_{r_4+r_5+r_6}(\bar{p}_1)u_4.$$

Отсюда для подходящего $u_5 \in U_5$ получаем, что

$$(g^{-1})^i = gx_{r_1+r_2+r_3+r_4}(p_1+p_2)x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(p_1+p_3+v) \\ \times x_{r_2+r_3+r_4+r_5}(p_2+p_3+\bar{p}_2+v+\eta)x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(\bar{p}_1+p_3+v)x_{r_2+r_4+r_5+r_6}(\bar{p}_1+\bar{p}_2)u_5.$$

В силу равенства (15) имеем следующую систему уравнений:

$$p_1+p_2 = 0, \quad p_1+p_3+v = 0, \quad p_2+p_3+\bar{p}_2+v+\eta = 0, \quad \bar{p}_1+p_3+v = 0, \quad \bar{p}_1+\bar{p}_2 = 0.$$

Решая эту систему, получаем равенства $p_1 = p_2 = \eta$, $p_3 = v+\eta$. Следовательно,

$$i = x_{r_4}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1)x_{r_1+r_3}(v)x_{r_5+r_6}(v)x_{r_2+r_4}(v+1)x_{r_3+r_4}(v)x_{r_4+r_5}(v) \\ \times x_{r_1+r_3+r_4}(\eta)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_3+r_4+r_5}(v+\eta)x_{r_2+r_4+r_5}(\eta)x_{r_4+r_5+r_6}(\eta)u_4.$$

В силу выбора элемент $i$ является инволюцией. Вычисления показывают, что

$$i^2 = x_{r_1+r_2+r_3+r_4}(v^2+v+\eta)x_{r_1+r_3+r_4+r_5}(v^2+v+\eta) \\ \times x_{r_3+r_4+r_5+r_6}(v^2+v+\eta)x_{r_2+r_4+r_5+r_6}(v^2+v+\eta)u_5$$

для подходящего $u_5 \in U_5$. Отсюда $v^2+v+\eta = 0$ и, как доказано выше, $v \in K_0$. Но в силу выбора $\eta \in K_0$ многочлен $X^2+X+\eta$ неприводим в кольце $K_0[X]$; противоречие.

**Тип** $E_7$. В группе $G$ типа $E_7$ четыре класса сопряженных регулярных унипотентных элементов, их представители явно выписаны в [12] и они следующие:

$$g_1 = x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_7}(1)x_{r_1}(1),$$

$$g_2 = x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_7}(1)x_{r_1}(1),$$

$$g_3 = x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)x_{r_7}(1)x_{r_1}(1),$$

$$g_4 = x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)x_{r_7}(1)x_{r_1}(1),$$

где многочлен $X^2+X+\eta$ неприводим в $K[X]$. Граф коммутативности элемента $g_1$ является лесом, поэтому он является строго вещественным. Элемент $g_3$ инвертируется инволюцией

$$i = x_{r_3}(1)x_{r_2}(1)x_{r_5}(1)x_{r_7}(1)x_{r_5+r_6}(1)x_{r_6+r_7}(1)x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)x_{r_2+r_4+r_5+r_6+r_7}(\eta) \\ \times x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)x_{r_1+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7}(\eta)x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7}(\eta) \\ \times x_{r_1+r_2+r_3+2r_4+2r_5+2r_6+r_7}(\eta^2)x_{r_1+r_2+2r_3+2r_4+2r_5+2r_6+r_7}(\eta^2).$$

Следовательно, элемент $g_3$ также является строго вещественным. Элементы $g_2$ и $g_4$ не являются даже вещественными. Это следует из [10, следствие 5.11], где утверждается, что группа $E_7(2^n)$ содержит два класса сопряженных невещественных регулярных унипотентных элементов.

**Тип** $E_8$. В группе $G$ типа $E_8$ четыре класса сопряженных регулярных унипотентных элементов. В силу леммы 10 в качестве их представителей можно взять элементы $g_i x_{r_8}(1)$, $i = 1,2,3,4$, где все $g_i$ — аналогичные представители для типа $E_7$ из предыдущего пункта. Далее действуем так же, как и для типа $E_7$, только при

$$
\begin{gathered}
i = x_{r_3}(1)x_{r_2}(1)x_{r_5}(1)x_{r_7}(1)x_{r_5+r_6}(1)x_{r_6+r_7}(1)x_{r_5+r_6+r_7+r_8}(1)x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5}(\eta) \\
\times x_{r_2+r_3+2r_4+r_5}(\eta)x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)x_{r_2+r_3+2r_4+r_5+r_6}(\eta) \\
\times x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7}(\eta)x_{r_2+r_3+2r_4+r_5+r_6+r_7}(\eta)x_{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7+r_8}(\eta) \\
\times x_{r_2+r_3+2r_4+r_5+r_6+r_7+r_8}(\eta)x_{r_1+2r_2+2r_3+3r_4+2r_5+r_6+r_7}(\eta^2) \\
\times x_{r_1+2r_2+2r_3+3r_4+2r_5+2r_6+r_7+r_8}(\eta^2)x_{r_1+2r_2+2r_3+3r_4+2r_5+2r_6+2r_7+r_8}(\eta^2).
\end{gathered}
$$

**Тип** $F_4$. В группе $G$ типа $F_4$ четыре класса сопряженных регулярных унипотентных элементов, их представители явно выписаны в [13] и они следующие:

$$
\begin{gathered}
g_1 = x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1), \\
g_2 = x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2+2r_3}(\eta), \\
g_3 = x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2+2r_3+2r_4}(\eta), \\
g_4 = x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2+2r_3}(\eta)x_{r_2+2r_3+2r_4}(\eta),
\end{gathered}
$$

где многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в $K[X]$. Графы коммутативности элементов $g_1$ и $g_3$ являются лесами (и даже цепями), так что эти элементы строго вещественны. Элементы $g_2$ и $g_4$ не являются даже вещественными. Это следует из [10, следствие 5.11], где утверждается, что группа $F_4(2^n)$ содержит два класса сопряженных невещественных регулярных унипотентных элементов. Теорема доказана.

По теореме 2 группы типа ${}^2A_{2l}$, $l \geq 1$, ${}^2B_2$, ${}^2F_4$, $F_4$, ${}^2E_6$, $E_6$, $E_7$, $E_8$ над конечным полем характеристики 2 содержат хотя бы один не строго вещественный класс сопряженных регулярных унипотентных элементов. Таким образом, из теоремы 2 вытекает

**Следствие.** *Группы Шевалле типа* ${}^2A_{2l}$, $l \geq 1$, ${}^2B_2$, ${}^2F_4$, $F_4$, ${}^2E_6$, $E_6$, $E_7$, $E_8$ *над конечным полем характеристики* 2 *не являются строго вещественными.*

## § 4. Доказательство теоремы 1

**Типы** ${}^2A_{2l}$, ${}^2B_2$, ${}^2F_4$. Унипотентная подгруппа типа ${}^2A_2$ и ${}^2B_2$ имеет ступень нильпотентности 2, и все ее инволюции лежат в центре, поэтому она не может быть строго вещественной. В подгруппе $U$ типа ${}^2A_{2l}$ и ${}^2F_4$ существует корневая подгруппа $X_S$, изоморфная унипотентной подгруппе типа ${}^2A_2$ и ${}^2B_2$ соответственно. Здесь $S$ — класс эквивалентности типа $A_2$ или $B_2$, состоящий из фундаментальных корней изначальной системы корней типа $A_{2l}$ или $F_4$ соответственно. Пусть $J = S$, тогда $U$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы $U_J$ и подгруппы $L_J = X_S$. Поэтому в силу леммы 1 $U$ не может быть строго вещественной группой. Таким образом, справедлива

**Лемма 13.** *Унипотентная подгруппа $U$ типа ${}^2A_{2l}$, $l \geq 1$, ${}^2B_2$, ${}^2F_4$ над полем характеристики 2 не является строго вещественной.*

**Типы** $A_{l-1}$, $C_l$, $D_l$, ${}^2A_{2l-1}$, ${}^2D_{l+1}$ при $l \geq 13$. Через $U_n(K)$ обозначим группу унитреугольных $n \times n$-матриц над полем $K$ и положим $U_n(q) = U_n(K)$ при $K = GF(q)$. В 1998 г. в [14] был приведен пример матрицы

$$A = E + E_{1,2} + E_{2,3} + E_{3,4} + E_{3,6} + E_{4,9} + E_{5,6} + E_{6,7} + E_{7,8} \\ + E_{8,9} + E_{8,10} + E_{9,11} + E_{10,11} + E_{10,12} + E_{11,12} + E_{12,13}$$

из группы $U_{13}(2)$, которая не сопряжена со своей обратной. (Опечатки из [14] устраняются в [15].) Вычисления проводились на компьютере, а именно было показано, что система линейных однородных уравнений $AXA - X = 0$ с 78 неизвестными $x_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, 13$, $i < j$, не имеет решений в поле $GF(2)$. В [14] также отмечается, что Вера-Лопэз и Ареги, опираясь на свои результаты из [16, 17], установили вещественность характеров группы $U_n(2)$ при $n \leq 12$. Вычисления также проводились на компьютере. В [18] установлено даже, что в группе $U_{13}(2)$ существует единственная пара обратных сопряженных классов (с представителями $A$ и $A^{-1}$, где $A$ такая, как и выше). Таким образом, $n = 13$ является минимальной размерностью, для которой существует унитреугольная матрица, не сопряженная в группе $U_n(2)$ со своей обратной.

**Лемма 14.** *При $l \geq 13$ унипотентная подгруппа $U$ типа $A_{l-1}$, $C_l$, $D_l$, ${}^2A_{2l-1}$, ${}^2D_{l+1}$ над полем $K$ характеристики 2 не является строго вещественной.*

Доказательство. Пусть $U_J$ и $L_J$ такие же, как в лемме 6. При указанных ограничениях на лиев ранг $l$ существует $J$ такое, что подгруппа $L_J$ изоморфна группе $U_{13}(K)$ и группа $U$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы $U_J$ и подгруппы $L_J$. Очевидно, что система линейных однородных уравнений с коэффициентами из некоторого поля $F$ имеет ненулевое решение в поле $F$ тогда и только тогда, когда она имеет ненулевое решение в любом его расширении. Поэтому указанный выше пример из [14] приводит к тому, что группа $U_{13}(K)$ не может быть строго вещественной для любого поля $K$ характеристики 2. Отсюда в силу леммы 1 группа $U$ не является строго вещественной. Лемма доказана.

**Тип** $E_6$. Если $K$ — конечное поле, то утверждение теоремы 1 следует из теоремы 2, согласно которой в этом случае унипотентная подгруппа $U$ содержит регулярный не строго вещественный элемент. В доказательстве теоремы 2 выбирался конкретный регулярный унипотентный элемент (11) и устанавливалось, что он не является строго вещественным, при этом в действительности на основное поле $K$ накладывалось только следующее ограничение: многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в кольце $K[X]$ для некоторого $\eta \in K$. В конечном поле всегда найдется такой элемент $\eta$. Поэтому, используя доказательство нестрогой вещественности элемента (11), получаем следующее утверждение: если в поле $K$ существует элемент $\eta$ такой, что многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в кольце $K[X]$, то подгруппа $U$ не является строго вещественной. Это и есть утверждение теоремы 1 для типа $E_6$.

**Типы** $E_7$, $E_8$. По лемме 10 утверждение теоремы 1 для этих типов следует из утверждения теоремы 1 для типа $E_6$.

**Тип** ${}^2E_6$. Так же, как и для типа $E_6$, получаем следующее утверждение: если в поле $K_0$ существует элемент $\eta$ такой, что многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в кольце $K_0[X]$, то подгруппа $U$ не является строго вещественной.

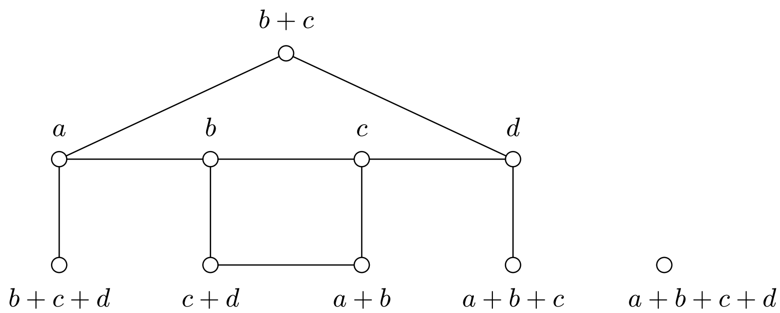


Рис. 4.

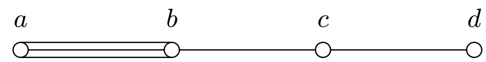


Рис. 5.

**Тип** $F_4$. Элемент $g_2$, указанный в доказательстве теоремы 2, не является строго вещественным, если в поле $K$ существует элемент $\eta$ такой, что многочлен $X^2+X+\eta$ неприводим в кольце $K[X]$. Это можно проверить так же непосредственно, как и при доказательстве теоремы 2 для типа $E_6$. Поэтому подгруппа $U$ не является строго вещественной.

**Группы малых рангов.** Здесь теорема 1 доказывается для групп лиева типа ранга $l \leq 4$. В силу леммы 10 достаточно исследовать только предельные случаи. Так как типы ${}^2A_{2l}$, ${}^2B_2$, ${}^2F_4$, $F_4$ уже изучены выше, остается рассмотреть только следующие типы: $A_4$, $B_4$, $C_4$, $D_4$, ${}^2A_7$, ${}^2D_5$, $G_2$, ${}^3D_4$. Далее каждый из этих восьми типов рассматривается отдельно, хотя схема доказательства общая, а именно следующая. Пусть

$$v = \prod_{r\in\Phi^+} x_r(k_r), \quad k_r \neq 0.$$

Для элемента $v$ строим его граф коммутативности $\Gamma(v)$. Очевидно, граф коммутативности $\Gamma(u)$ любого другого элемента

$$u = \prod_{r\in\Phi^+} x_r(k_r)$$

из $U$ будет его подграфом. Достаточно найти такой элемент $g \in B$, чтобы граф $\Gamma(u^g)$ являлся лесом, потому что тогда по леммам 3 и 5 группа $U$ должна быть строго вещественной.

**Тип** $A_4$. Пусть $\{a,b,c,d\}$ — база системы корней типа $A_4$, причем $a+b$, $b+c$, $c+d$ — корни. В этом случае граф $\Gamma(v)$ имеет вид, представленный на рис. 4.

Если $t_b = 0$, то граф $\Gamma(u)$ является лесом. Если $t_b \neq 0$, то для подходящих $t$ и $s$ коэффициенты при $x_{a+b}$ и $x_{b+c}$ у элемента $u^{x_a(t)x_c(s)}$ равны нулю и его граф коммутативности является лесом.

**Тип** ${}^2D_5$. С группой $G$ типа ${}^2D_5$ естественно связана система корней типа $B_4$ с базой $\{a,b,c,d\}$. Мы фиксируем следующее расположение фундаментальных корней на схеме Дынкина, рис. 5. В этом случае граф коммутативности $\Gamma(v)$ имеет вид, показанный на рис. 6.

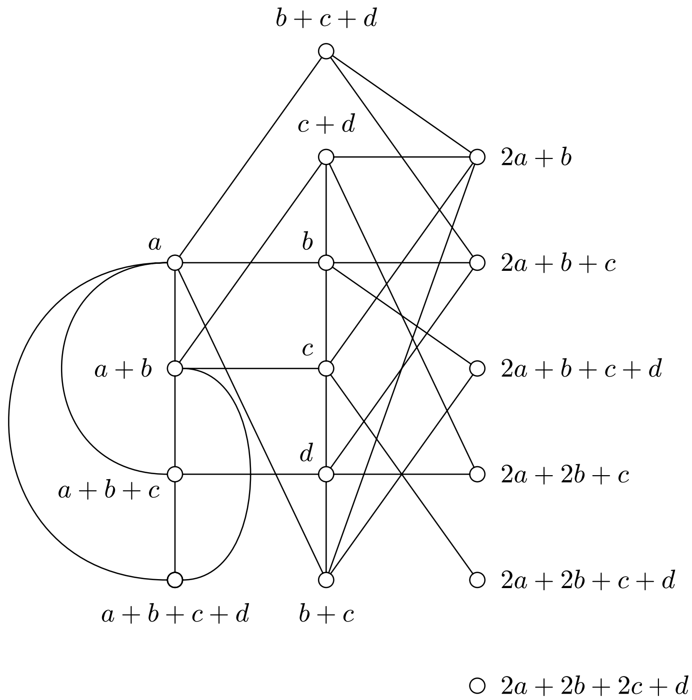


Рис. 6.

Далее фраза «сопрягая элементом $x_r$, получим $t_s = 0$» означает, что сопрягая корневым элементом $x_r(t_r)$ для подходящего $t_r$ исходный элемент $u$, получим нулевой коэффициент $t_s$ у $x_s(t_s)$ в разложении $u$. После сопряжения новый элемент также обозначаем через $u$. По теореме 2 регулярные унипотентные элементы группы $G$ строго вещественные. Поэтому далее считаем, что хотя бы один из коэффициентов $t_a$, $t_b$, $t_c$, $t_d$ равен нулю.

1. Пусть $t_a \neq 0$. Сопрягая последовательно элементами $x_b$, $x_{b+c}$, $x_{b+c+d}$, получим соответственно

$$t_{a+b} = t_{a+b+c} = t_{a+b+c+d} = 0.$$

1а. Пусть $t_b \neq 0$. Сопрягая последовательно элементами $x_c$, $x_{c+d}$, $x_{2a+b+c}$, получим соответственно $t_{b+c} = t_{b+c+d} = t_{2a+2b+c} = 0$. Если $t_c = 0$, то $\Gamma(u)$ — лес. Если $t_c \neq 0$, то $t_d = 0$. Сопрягая элементом $x_d$, получим $t_{c+d} = 0$, и, следовательно, $\Gamma(u)$ — лес.

1б. Пусть $t_b = 0$. Тогда $\Gamma(u)$ — лес.

2. Пусть $t_a = 0$, $t_{a+b} \neq 0$. Сопрягая последовательно элементами $x_{b+c}$, $x_{b+c+d}$, получим соответственно $t_{a+b+c} = t_{a+b+c+d} = 0$.

2а. Пусть $t_c \neq 0$. Сопрягая последовательно элементами $x_d$, $x_b$, получим соответственно $t_{c+d} = t_{b+c} = 0$, и, следовательно, $\Gamma(u)$ — лес.

2б. Пусть $t_c = 0$. Если $t_{c+d} = 0$, то $\Gamma(u)$ — лес. Пусть $t_{c+d} \neq 0$. Сопрягая элементом $x_b$, получим $t_{b+c+d} = 0$, и граф $\Gamma(u)$ становится лесом.

3. Пусть $t_a = 0$, $t_{a+b} = 0$. Заметим, что здесь одновременно рассматривается и случай $D_4$, потому что длинные корни в системе корней типа $B_4$

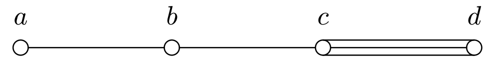


Рис. 7.

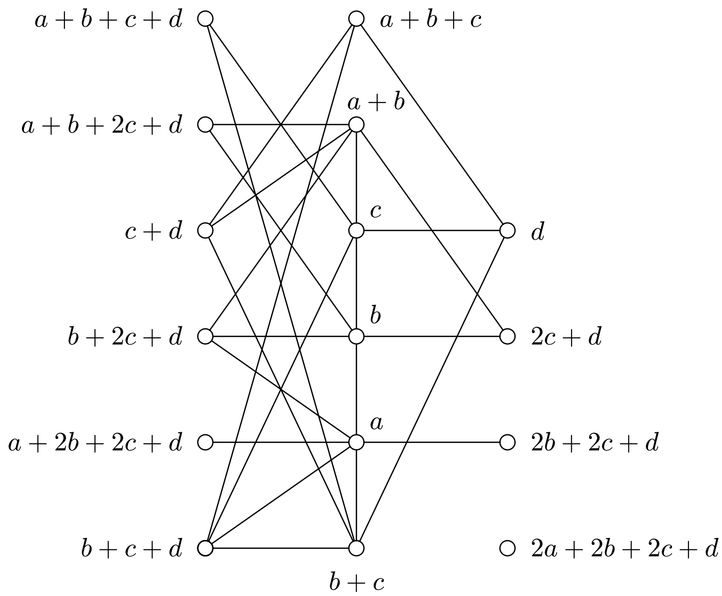


Рис. 8.

составляют систему корней типа $D_4$, а «висячая цепь» с короткими корнями $a+b+c$, $a+b+c+d$ в этом случае никак не влияет на то, будет ли граф $\Gamma(u)$ лесом или нет.

3а. Пусть $t_{2a+b} \neq 0$. Сопрягая последовательно элементами $x_c$, $x_{c+d}$, $x_{b+c}$, получим соответственно $t_{2a+b+c} = t_{2a+b+c+d} = t_{2a+2b+c} = 0$. Если $t_c = 0$, то $\Gamma(u)$ — лес. Если $t_c \neq 0$, то, сопрягая элементом $x_d$, получим $t_{c+d} = 0$, и, следовательно, $\Gamma(u)$ — лес.

3б. Пусть $t_{2a+b} = 0$. Если $t_c = 0$, то $\Gamma(u)$ — лес. Пусть $t_c \neq 0$. Сопрягая последовательно элементами $x_b$, $x_d$, $x_{2a+b}$, получим соответственно $t_{b+c} = t_{c+d} = t_{2a+b+c} = 0$, и граф $\Gamma(u)$ становится лесом.

**Типы** $B_4$**,** $C_4$ **и** $D_4$. Прежде всего отметим, что унипотентные подгруппы типа $B_l$ и $C_l$ над полем характеристики 2 изоморфны. Граф коммутативности элемента $u$ для типа $B_4$ получается из графа на рис. 6 стиранием ребер, соединяющих короткие корни $a$, $a+b$, $a+b+c$, $a+b+c+d$. Поэтому доказательство, приведенное для типа ${}^2D_5$, проходит и для типа $B_4$. В п. 3 этого же доказательства отмечается, что одновременно охватывается и случай $D_4$. Таким образом, унипотентные подгруппы типа $B_4$, $C_4$ и $D_4$ также являются строго вещественными.

**Тип** ${}^2A_7$. С группой $G$ типа ${}^2A_7$ естественно связана система корней типа $C_4$ с базой $\{a,b,c,d\}$. Мы фиксируем следующее расположение фундаментальных корней на схеме Дынкина, рис. 7.

В этом случае граф коммутативности $\Gamma(v)$ имеет вид, изображенный на рис. 8.

Далее приняты такие же сокращения, как и в доказательстве для типа ${}^2D_5$.

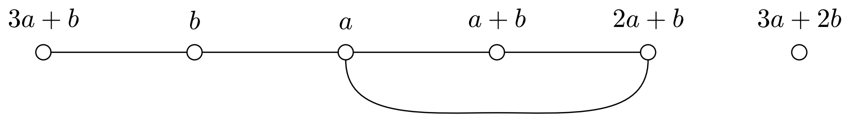


Рис. 9.

По теореме 2 регулярные унипотентные элементы группы $G$ строго вещественные. Поэтому далее считаем, что хотя бы один из коэффициентов $t_a$, $t_b$, $t_c$, $t_d$ равен нулю.

1. Пусть $t_a \neq 0$. Сопрягая последовательно элементами $x_b$, $x_{b+c}$, $x_{b+c+d}$, $x_{b+2c+d}$, получим соответственно $t_{a+b} = t_{a+b+c} = t_{a+b+c+d} = t_{a+b+2c+d} = 0$.

1а. Пусть $t_b = 0$. Если $t_{b+c} = 0$, то $\Gamma(u)$ — лес. Пусть $t_{b+c} \neq 0$. Сопрягая элементом $x_d$, получим $t_{b+c+d} = 0$. Если $t_d = 0$, то $\Gamma(u)$ — лес. Если $t_d \neq 0$, то, сопрягая элементом $x_c$, получим $t_{c+d} = 0$, и граф $\Gamma(u)$ снова становится лесом.

1б. Пусть $t_b \neq 0$. Сопрягая последовательно элементами $x_c$, $x_{c+d}$, $x_{2c+d}$, получим соответственно $t_{b+c} = t_{b+c+d} = t_{b+2c+d} = 0$, и граф $\Gamma(u)$ становится лесом.

2. Пусть $t_a = 0$, $t_b = 0$. Если $t_c = t_d = 0$, то $\Gamma(u)$ — лес. Если $t_c \neq 0$, то, сопрягая последовательно элементами $x_d$, $x_{a+b}$, получим соответственно $t_{c+d} = t_{a+b+c} = 0$. В этом случае граф $\Gamma(u)$ также является лесом. Если $t_c = 0$, $t_d \neq 0$, то, сопрягая последовательно элементами $x_c$, $x_{b+c}$, получим соответственно $t_{c+d} = t_{b+c+d} = 0$, и граф $\Gamma(u)$ становится лесом.

3. Пусть $t_a = 0$, $t_b \neq 0$. Сопрягая последовательно элементами $x_c$, $x_a$, получим соответственно $t_{b+c} = t_{a+b} = 0$. Если $t_c = 0$, то $\Gamma(u)$ — лес. Если $t_c \neq 0$, то, сопрягая элементом $x_{a+b}$, получим $x_{a+b+c} = 0$, и граф $\Gamma(u)$ становится лесом.

**Тип** $G_2$. Пусть $\{a, b\}$ — база системы корней типа $G_2$, причем корень $a$ короткий. В этом случае граф $\Gamma(v)$ имеет вид, как на рис. 9.

Если $t_a = 0$, то граф $\Gamma(u)$ является лесом. Если $t_a \neq 0$, то для подходящего $t$ коэффициент при $x_{a+b}$ у элемента $u^{x_b(t)}$ равен нулю и его граф коммутативности является лесом.

**Тип** ${}^3D_4$. В этом случае корневые элементы также индексируются корнями из системы типа $G_2$ и граф $\Gamma(v)$ имеет такой же вид, как и на рис. 9.

Если $t_b \neq 0$, то при подходящем $t$ коэффициент при $x_{a+b}$ у элемента $u^{x_a(t)}$ равен нулю и граф $\Gamma(u^{x_a(t)})$ является лесом.

Пусть $t_b = 0$ и все $t_a$, $t_{a+b}$, $t_{2a+b}$ ненулевые. С точностью до сопряжения диагональным элементом можно считать, что $t_a = 1$. Эту возможность обеспечивает лемма 3. Очевидно, остается доказать строгую вещественность элемента

$$u = x_a(1)x_{a+b}(t)x_{2a+b}(s)$$

при ненулевых $t$ и $s$. Коммутаторная формула Шевалле в этом случае дает следующие равенства:

$$u^{x_a(y)} = x_a(1)x_{a+b}(t+y)x_{2a+b}(s+y)u_4,$$

$$u^{x_{a+b}(z)} = x_a(1)x_{a+b}(t)x_{2a+b}(s+z+\bar{\bar{z}})u_4$$

для любых $y \in K_0$, $z \in K$ и подходящего $u_4 \in U_4$. Отсюда

$$u^{x_b(y)x_{a+b}(z)} = x_a(1)x_{a+b}(t+y)x_{2a+b}(s+z+\bar{\bar{z}}+y)u_4.$$

**Таблица 1.**

| тип группы | представители классов сопряженных регулярных унипотентных элементов | |
|---|---|---|
| $A_l$, $l \geq 1$ | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)$ | $+$ |
| $^2A_{2l-1}$, $l \geq 2$ | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)$ | $+$ |
| $^2A_{2l}$, $l \geq 1$ | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_{l-1}}(1)x_{r_l}(1,t)$ | $-$ |
| $B_l$, $l \geq 2$ | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)$ | $+$ |
| | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)x_{r_{l-1}+2r_l}(\eta)$ | $+$ |
| $C_l$, $l \geq 2$ | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)$ | $+$ |
| | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)x_{r_1+2r_2}(\eta)$ | $+$ |
| $D_l$, $l \geq 4$ | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)$ | $+$ |
| | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)x_{r_{l-2}+r_{l-1}+r_l}(\eta)$ | $+$ |
| $^2D_l$, $l \geq 4$ | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)$ | $+$ |
| | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)\dots x_{r_l}(1)x_{r_{l-1}+2r_l}(\eta)$ | $+$ |
| $F_4$ | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)$ | $+$ |
| | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2+2r_3}(\eta)$ | $-$ |
| | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2+2r_3+2r_4}(\eta)$ | $+$ |
| | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2+2r_3}(\eta)x_{r_2+2r_3+2r_4}(\eta)$ | $-$ |
| $E_6$ | $x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1)$ | $+$ |
| | $x_{r_2}(1)x_{r_4}(1)x_{r_3}(1)x_{r_5}(1)x_{r_3+r_4+r_5}(\eta)x_{r_1}(1)x_{r_6}(1)$ | $-$ |
| $E_7$ | $x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_7}(1)x_{r_1}(1)$ | $+$ |
| | $x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_7}(1)x_{r_1}(1)$ | $-$ |
| | $x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)x_{r_7}(1)x_{r_1}(1)$ | $+$ |
| | $x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)$ | $-$ |
| | $\times x_{r_7}(1)x_{r_1}(1)$ | $-$ |
| $E_8$ | $x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_7}(1)x_{r_1}(1)x_{r_8}(1)$ | $+$ |
| | $x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_7}(1)x_{r_1}(1)x_{r_8}(1)$ | $-$ |
| | $x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)$ | $+$ |
| | $\times x_{r_7}(1)x_{r_1}(1)x_{r_8}(1)$ | $+$ |
| | $x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)x_{r_2}(1)x_{r_2+r_3+r_4}(\eta)x_{r_5}(1)x_{r_6}(1)x_{r_2+r_3+r_4+r_5+r_6}(\eta)$ | $-$ |
| | $\times x_{r_7}(1)x_{r_1}(1)x_{r_8}(1)$ | $-$ |
| $^2E_6$ | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_4}(1)$ | $+$ |
| | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{r_3}(1)x_{r_2+2r_3}(\eta)x_{r_4}(1)$ | $-$ |
| $G_2$, $^3D_4$ | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)$ | $+$ |
| | $x_{r_1}(1)x_{r_2}(1)x_{3r_1+r_2}(\eta)$ | $+$ |
| $^2B_2$ | $g_1$, $g_2$ | $-$ |
| $^2F_4$ | $g_1$, $g_2$, $g_3$, $g_4$ | $-$ |

Очевидно, элемент $u$ будет строго вещественным, если выражение $s + z + \bar{\bar{z}} + y$ обратится в нуль. Для этого достаточно доказать следующее равенство:

$$\{z + \bar{z} + y \mid z \in K, \quad y \in K_0\} = K. \tag{16}$$

Пусть $z \in K$ и $z+\bar{z} \in K_0$. Тогда $z+\bar{z} = \bar{z}+\bar{\bar{z}}$. Отсюда $z = \bar{\bar{z}}$ и, следовательно, $z \in K_0$. Так как $\operatorname{char} K = 2$, то $z + \bar{z} = 0$. Таким образом, имеем

$$\{z + \bar{z} \mid z \in K\} \cap K_0 = \{0\}. \tag{17}$$

Так как поле, допускающее автоморфизм порядка 3, имеет размерность 3 над подполем неподвижных элементов, то в силу (17) для доказательства равенства (16) достаточно показать, что в множестве $\{z + \bar{z} \mid z \in K\}$ есть два линейно независимых элемента над подполем $K_0$. Пусть $z \notin K_0$ и существует ненулевой элемент $\alpha \in K_0$ такой, что $\alpha(z + \bar{z}) = z^2 + \bar{z^2}$. Тогда $\alpha(z + \bar{z}) = (z + \bar{z})^2$ и, следовательно, $(z+\bar{z}) = \alpha$, но это противоречит равенству (17). Таким образом, элементы $(z + \bar{z})$ и $z^2 + \bar{z^2}$ линейно независимы над полем $K_0$.

В табл. 1 для каждого типа (исключая типы ${}^2B_2$ и ${}^2F_4$) явно выписаны представители каждого класса сопряженных регулярных унипотентных элементов расширенной группы лиева типа над конечным полем $K$ характеристики 2 и указано, является ли данный класс строго вещественным. Строгая вещественность сопряженного класса отмечена знаком «+» в третьем столбце. Для групп нормального типа $\eta \in K$ и многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в кольце $K[X]$. Со скрученными группами типа ${}^2A_{2l}$, ${}^2A_{2l-1}$, ${}^2D_{l+1}$, ${}^2E_6$, ${}^2D_4$ мы ассоциируем системы корней типа $B_l$, $C_l$, $B_l$, $F_4$, $G_2$ соответственно, и в этих случаях $\eta \in K_0$ и многочлен $X^2 + X + \eta$ неприводим в кольце $K_0[X]$.

Авторы признательны Е. П. Вдовину за предоставленные копии статей и полезные обсуждения вопросов, затронутых в данной работе.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Gow R.* Products of two involutions in classical groups of characteristic 2 // J. Algebra. 1981. V. 71. P. 583–591.
2. *Elers E. W., Nolte W.* Bireflectional of orthogonal and symplectic groups // Arch. Math. 1982. V. 39. P. 113–118.
3. *Gow R.* Commutators in the symplectic group // Arch. Math. 1988. V. 50. P. 204–209.
4. *Baginski C.* On sets of elements of the same order in the alternating group $A_n$ // Publ. Math. 1987. V. 34. P. 313–315.
5. *Kolesnikov S. G., Nuzhin Ya. N.* On strong reality of finite simple groups // Acta Appl. Math. 2005. V. 85, N 1–3. P. 195–203.
6. *Tiep P. H., Zalesskii A. E.* Real conjugacy classes in algebraic groups and finite groups of Lie type // J. Group Theory. 2005. V. 8. P. 291–315.
7. *Газданова М. А., Нужин Я. Н.* О строгой вещественности унипотентных подгрупп групп лиева типа над полем характеристики 2 // Междунар. алгебраическая конф.: Тез. докл. Екатеринбург, 2005. С. 46–47.
8. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. IV–VI. М.: Мир, 1972.
9. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London: Wiley and Sons, 1972.
10. *Tiep P. H., Zalesskii A. E.* Unipotent elements of finite groups of Lie type and realization fields of their complex representations // J. Algebra. 2004. V. 271. P. 327–390.
11. *Семинар* по алгебраическим группам / Борель А. и др. М.: Мир, 1973.
12. *Mizuno K.* The conjugate classes of unipotent elements of the Chevalley groups $E_7$, $E_8$ // Tokyo J. Math. 1980. V. 3, N 2. P. 391–459.
13. *Shinoda K.* The conjugacy classes of Chevalley groups of type $F_4$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 1974. V. 21. P. 133–159.
14. *Isaacs I. M., Karagueuzian D.* Conjugacy in groups of upper triangular matrices // J. Algebra. 1998. V. 202. P. 704–711.

**15.** *Isaacs I. M., Karagueuzian D.* Erratum (Isaacs I. M., Karagueuzian D. Conjugacy in groups of upper triangular matrices // J. Algebra. 1998. V. 202. P. 704–711.) // J. Algebra. 1998. V. 208. P. 722.

**16.** *Arregi J. M., Vera-Lopez A.* Conjugacy classes in Sylow $p$-subgroups of $GL(n, q)$ // J. Algebra. 1992. V. 152. P. 1–19.

**17.** *Arregi J. M., Vera-Lopez A.* Some algorithms for the calculation conjugacy classes in the Sylow $p$-subgroups of $GL(n, q)$ // J. Algebra. 1995. V. 177. P. 899–925.

**18.** *Vera-Lopez A., Arregi J. M.* Computing in unitriangular matrices over finite fields // J. Linear Algebra Appl. 2004. V. 387. P. 193–219.

*Статья поступила 11 октября 2005 г.*

*Газданова Марина Алтеговна, Нужин Яков Нифантьевич*
*Красноярский гос. технический университет,*
*ул. Киренского, 26, Красноярск 660074*
`nuzhin@fipu.kgtu.runnet.ru`, `nuzhin@fipu.krasnoyarsk.edu`