Сибирский математический журнал
Июль—август, 2006. Том 47, № 4

УДК 517.44+517.5

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ N–ФУНКЦИЙ. II

А. Е. Мамонтов

Аннотация: Изучается вопрос о восстановлении интегрального преобразования типа свертки по заданному его поведению на степенных функциях. Даются ответы на дополнительные вопросы из первой части статьи.

Ключевые слова: экстраполяция операторов, пространства Орлича, N-функции, функции Юнга, интегральные преобразования Меллина и Лапласа, интегральные преобразования типа свертки.

§ 3. Восстановление $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ по его характеристике φ

Нас интересует вопрос: какие измеримые функции φ являются образами преобразования $\mathscr{M}_\sigma$ от функций $\psi \geq 0$? При этом считаем φ определенной на интервале (α, β), где $\beta \leq +\infty$ задано, а (как показано в § 1, 2) выбор $\sigma \geq 0$ и $\alpha \in [-\infty, \beta)$ не играет роли, как несущественно и изменение φ с точностью до $\overset{\mathscr{L}}{\sim}$, поскольку при этом соответствующий оператор $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ остается в определенном смысле тем же. В отличие от аналогичной задачи, решавшейся в § 1, нас будет интересовать не только описание классов для φ, где представление (2.2) (с точностью до $\overset{\mathscr{L}}{\sim}$) возможно, но и сам вид прообразов ψ. Процедура восстановления ядра ψ должна выражаться в терминах асимптотики φ в левой окрестности точки β в отличие от классических методов обращения преобразования Меллина, в которых φ обязана быть аналитической функцией, а обращение совершается в терминах ее поведения в $\mathbb{C}$.

Поставленная задача во многом схожа с той, которая решалась в § 1 для преобразования Лапласа, поэтому естественно обратиться к тем же трем основным приемам:

1) построение набора эталонных пар φ, ψ с различными асимптотиками $\varphi(p)$ при $p \to \beta \leq +\infty$;

2) «размножение» эталонных примеров — свертка функций ψ с помощью (2.11), соответствующая перемножению (2.12) образов φ;

3) использование утверждений, позволяющих обращать оператор $\mathscr{M}_\sigma$ на классах измеримых функций φ с определенными асимптотиками.

Учитывая неубывание функции φ как необходимое условие для (2.2), видим, что все возможные φ разбиваются на следующие группы:

А) $\varphi \overset{\mathscr{L}}{\sim} \mathrm{const}$, заданные на конечном ($\beta < +\infty$) или бесконечном ($\beta = +\infty$) интервале;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00131).

B) определенные на конечном интервале (α, β), $\beta < +\infty$, причем $\varphi(p) \to +\infty$ при $p \to \beta$;

C) определенные вплоть до $+\infty$ и растущие (к $+\infty$).

Описание класса A тривиально: как указывалось в § 2, интегрируемые финитные ядра ψ (обозначим $\operatorname{supp}\psi = [\sigma, \sigma_*]$, $\sigma_* < +\infty$) дают образы (т. е. характеристики преобразования $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$), удовлетворяющие оценке $C\sigma^p \le \varphi^p(p) \le C\sigma_*^p$, где $C = \int\limits_\sigma^{\sigma_*} \psi(s)\, ds$. Тем самым при любом $\beta \le +\infty$ класс A содержит (с точностью до $\overset{\mathscr{L}}{\sim}$) только одну функцию: $\varphi \equiv 1$, и в качестве ее прообраза можно взять любую финитную интегрируемую ψ.

Описание класса B удобно проводить в рамках следующих обозначений и договоренностей[1]:

$$\psi(s) = s^{-(\beta+1)}\nu(\ln s), \quad \beta > 1,\ \sigma = 1,\ \forall \alpha < \beta,\ \text{где} \int^{+\infty} \nu(\xi)\, d\xi = +\infty, \quad \nu(\xi) \le e^{\varepsilon\xi}. \tag{3.1}$$

Тогда нетрудно подсчитать, что

$$\varphi(p) = \left(\int\limits_0^{+\infty} \nu(\xi) e^{-(\beta-p)\xi}\, d\xi\right)^{1/p} \equiv (\mathscr{L}[\nu](\beta - p))^{1/p}. \tag{3.2}$$

Обращаясь к таблицам преобразований Лапласа (прямых и обратных), можно построить примеры пар (2.2) класса B. Специфика нашей ситуации в том, что в отличие от § 1 и классической задачи об обращении $\mathscr{L}$ нас интересует только поведение *образа* преобразования Лапласа в окрестности нуля (при этом на асимптотику $\varphi(p)$ при $p \to +\infty$ влияет только поведение $\nu(\xi)$ при $\xi \to +\infty$), в то время как в таблицах преобразований разные асимптотики такого рода представлены слабо. Приведем табличные примеры.

Пример 3.1. $\nu(\xi) = \xi^{\gamma-1}$, $\gamma > 0$, дает [1, с. 127, п. (1)] $\varphi(p) = \Gamma^{1/p}(\gamma)(\beta - p)^{-\gamma/p}$, т. е. при $p \to \beta$ имеем $\varphi(p) \overset{\mathscr{L}}{\sim} (\beta - p)^{-\gamma/\beta}$. Так получаются все функции вида $\varphi(p) \overset{\mathscr{L}}{\sim} (\beta - p)^{-\theta}$ с $\theta > 0$.

Замечание 3.2. В примере 3.1 и далее используется то элементарное соображение, что $r^{1/p}(p) \overset{\mathscr{L}}{\sim} r^{1/\beta}(p)$, если $1 \le r(p) \le \exp\bigl(\frac{C}{\beta - p}\bigr)$.

Пример 3.3 [1, с. 220, п. (32)]. Полагая $\nu(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi\xi}} \operatorname{ch}(2\sqrt{\gamma\xi})$, $\gamma > 0$, получаем функцию $\varphi(p) = (\beta - p)^{-1/(2p)} \exp\bigl(\frac{\gamma}{p(\beta - p)}\bigr)$, которая при $p \to \beta$ имеет асимптотику $(\beta - p)^{-1/(2\beta)} \exp\bigl(\frac{\gamma/\beta}{\beta - p}\bigr)$, т. е., комбинируя этот класс с классом из примера 3.1 с целью устранения степенного множителя, получаем все функции $\varphi(p)$, эквивалентные $\exp\bigl(\frac{\theta}{\beta - p}\bigr)$ с $\theta > 0$.

Пример 3.4. Элементарная модификация примера из [2, с. 385, п. 9.917] показывает, что функция $\nu(\xi) = 2\theta^{-1}\pi^{-1/2}(\exp(\theta\sqrt{\xi}) - 1)$ с $\theta > 0$ дает образ

$$\varphi(p) = (\beta - p)^{-\frac{3}{2p}} \exp\left(\frac{\theta^2}{4p(\beta - p)}\right) \operatorname{erfc}^{1/p}\left(-\frac{\theta}{2\sqrt{\beta - p}}\right),$$

[1] Последние два условия в (3.1) необходимы для класса B с фиксированным β: нарушение первого влечет $\varphi \overset{\mathscr{L}}{\sim} \mathrm{const}$, а второго — изменение β.

который имеет асимптотику $(\beta-p)^{-\frac{3}{2\beta}}\exp\bigl(\frac{\theta^2}{4\beta(\beta-p)}\bigr)$, близкую к таковой из примера 3.3 при $\theta=2\sqrt{\gamma}$, хотя и другую (в силу того, что соответствующие ядра ψ близки, но не эквивалентны). Более того, можно (например, с помощью пакета Mathematica) выразить в специальных функциях образ функции ψ из (3.1) с $\nu(\xi)=\exp(\theta\xi^\omega)$ и при некоторых других $\omega\in(0,1)$, но получаемые при этом примеры с трудом поддаются анализу на предмет их асимптотики.

Кроме того, в § 2 нами был построен пример 2.15, в нынешних обозначениях выглядящий следующим образом (с учетом замечания 3.2 и леммы 2.20).

Пример 3.5. Положив $\nu(\xi)=\xi^{-1}\ln^{\gamma-1}\xi$ с $\gamma\in\mathbb{N}$, а $\sigma=e$, получим образ $\varphi(p)$ с асимптотикой $\ln^{\gamma/\beta}\frac{1}{\beta-p}$, отсутствующий в таблицах преобразований.

Из приведенных примеров видно, что класс B естественным образом разбивается на следующие подклассы:

B1) $\varphi(p)$, растущие медленнее (в смысле $\overset{\varphi}{\prec}$), чем $(\beta-p)^{-\varepsilon}$ с любыми $\varepsilon>0$ (такие, как в примере 3.5);

B2) $\varphi(p)$, растущие со степенной — порядка $(\beta-p)^{-\theta}$ — скоростью (как в примере 3.1);

B3) $\varphi(p)$, растущие быстрее всех $(\beta-p)^{-N}$ с $N<+\infty$ (как в примерах 3.3 и 3.4).

Наша задача теперь — указать как можно более полные достаточные условия принадлежности каждому из этих подклассов. Опираясь на построенные базовые представители каждого подкласса, мы можем размножить представители, комбинируя (т. е. применяя процедуру (2.11), (2.12)) их с представителями младших подклассов (в смысле более медленной асимптотики). Однако прежде полезно по возможности заполнить имеющиеся пробелы, доказав общие утверждения о достаточных признаках принадлежности функций подклассам B1 и B3.

Так, существенную часть подкласса B1 удается «заполнить», рассматривая $\nu(\xi)$, убывающие на $+\infty$ «приблизительно как» $1/\xi$ (нижняя граница допустимых ν).

Утверждение 3.6. *Пусть $F\in C^1(1,+\infty)$, $F(1)=0$; F не убывает, причем при больших s*

$$F'(s)\ \textit{не возрастает;}\quad \frac{F'(s)}{F(s)}\to 0\ \textit{при}\ s\to+\infty. \tag{3.3}$$

Тогда представление (3.2) с

$$\nu(\xi)=\begin{cases}0, & \xi\le e,\\ \frac{F'(\ln\xi)}{\xi}, & \xi>e,\end{cases}$$

т. е. здесь $\sigma=e^e$, дает $\varphi(p)\overset{\mathscr{L}}{\sim}F^{1/\beta}\bigl(\ln\frac{1}{\beta-p}\bigr)$.

Доказательство. При $q\ll 1$ имеем

$$\mathscr{L}[\nu](q)=\left(\int\limits_e^{1/q}+\int\limits_{1/q}^{+\infty}\right)\frac{e^{-q\xi}F'(\ln\xi)}{\xi}\,d\xi\equiv I_1+I_2.$$

В первом интеграле справедлива оценка $e^{-1} \le e^{-q\xi} \le 1$, в то время как

$$\int\limits_e^{1/q} \frac{F'(\ln\xi)}{\xi}\,d\xi = F\left(\ln\frac{1}{q}\right),$$

т. е. $e^{-1} \le \frac{I_1(q)}{F(\ln\frac{1}{q})} \le 1$. Во втором интеграле ввиду $(3.3)_1$ верно $F'(\ln\xi) \le F'(\ln\frac{1}{q})$, поэтому $I_2(q) \le CF'(\ln\frac{1}{q}) = o(I_1(q))$ в силу $(3.3)_2$. Полагая $q = \beta - p$, получим $\varphi(p) \overset{\mathcal{L}}{\sim} F^{1/p}(\ln\frac{1}{\beta-p})$, что ввиду замечания 3.2 дает требуемое благодаря малой скорости роста F. $\square$

Пример 3.7. $F(\xi) = \xi^\gamma - 1$, $\gamma \in (0,1]$. Тогда $\varphi(p) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \ln^{\gamma/\beta}\frac{1}{\beta-p}$.

Пример 3.8. $F(\xi) = \ln^\gamma\xi$, $\gamma > 0$. Тогда $\varphi(p) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \ln^{\gamma/\beta}\ln\frac{1}{\beta-p}$.

Утверждение 3.6 означает, что в подкласс B1 заведомо входят «почти все» измеримые функции с асимптотиками не быстрее $\ln^{1/\beta}\left(\frac{1}{\beta-p}\right)$. Более быстро растущие характеристики, такие как $\varphi_\gamma(p) = \ln^{\gamma/\beta}\left(\frac{1}{\beta-p}\right)$ с $\gamma > 1$, можно получить сверткой ядер-прообразов уже изученных медленно растущих функций. Тем самым подкласс B1 будет «заполнен». Так, в частности, в примерах 3.5 и 3.7 построены прообразы

$$\psi_\gamma(s) = \frac{s^{-(\beta+1)}\ln^{\gamma-1}\ln s}{\ln s} \tag{3.4}$$

характеристик φ_γ для всех $\gamma \in \mathbb{N}$ и $\gamma \in (0,1]$ (при этом σ можно произвольно менять по лемме 2.20). Следовательно, φ_γ содержатся в B1 и при всех $\gamma \in (1,+\infty)$, а соответствующие прообразы могут быть найдены из формулы

$$\psi_\gamma = \mathbf{C}(\sigma_1,\sigma_2;\psi_{[\gamma]},\psi_{\{\gamma\}}) \tag{3.5}$$

с произвольно выбранными $\sigma_{1,2}$.

Замечание 3.9. Интересно было бы убедиться, что ψ_γ, подсчитанные по формуле (3.5), имеют вид (3.4) при всех $\gamma \in (1,+\infty)$, но это представляется техническим упражнением и мы не будем этим заниматься.

Аналогично класс B2 (в котором до сих пор предъявлены лишь чисто степенные функции из примера 3.1) можно заполнить, комбинируя класс из примера 3.1 с построенным классом B1, и т. д. Наконец, частичное описание подкласса B3 дается следующим утверждением.

Предложение 3.10. *Пусть в* (3.2) $\nu(\xi) = e^{\mu(\xi)}$, *где* $\mu \in C^1(\mathbb{R}^+)$, *причем*

$$\mu(\xi)\quad \text{не убывает},\quad \mu'(\xi)\downarrow 0,\quad \xi\mu'(\xi) - \mu(\xi) \le C \quad \text{при } \xi \to +\infty \tag{3.6}$$

(что согласуется с последним ограничением в (3.1)*), т. е. в правой окрестности нуля определена убывающая функция* $\varkappa = (\mu')^{-1}$. *Пусть существуют числа* $A > 0$, $B > 1$ *такие, что*

$$\int\limits_0^{+\infty} \exp(\mu(\xi) - \mu(B\xi))\,d\xi = A < +\infty.$$

Тогда функция φ *в* (3.2) *допускает оценку*

$$(\beta-p)^{-1/p}\exp\left(\frac{\mu(\varkappa(q)) - Bq\varkappa(q)}{p}\right)\Bigg|_{q=\frac{\beta-p}{B}} \overset{\varphi}{\prec} \varphi(p) \overset{\varphi}{\prec} \exp\left(\frac{\mu(\varkappa(q)) - q\varkappa(q)}{p}\right)\Bigg|_{q=\frac{\beta-p}{B}}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Пусть ξ_0 — постоянная такая, что при $\xi \geq \xi_0$ выполнены все условия (3.6). Легко видеть, что величина $\exp(\mu(\eta) - q\eta)$ при $\eta \geq \xi_0$ и $q \ll 1$ имеет единственный максимум по η при $\eta = \varkappa(q)$, поэтому при $\xi \geq \xi_0/B$, $q \ll 1$ будет

$$\exp(\mu(\xi) - Bq\xi) \leq \exp(\mu(\xi) - \mu(B\xi))\exp(\mu(\varkappa(q)) - q\varkappa(q)).$$

Поскольку условие $(3.6)_3$ означает $\varkappa(q)q - \mu(\varkappa(q)) \leq C$, то при $\xi \leq \xi_0/B$, $q \ll 1$ мы можем написать $\exp(\mu(\xi) - Bq\xi) \leq C_1 \exp(\mu(\varkappa(q)) - q\varkappa(q))$. В итоге

$$\mathscr{L}[\nu](Bq) \leq (C_2 + A)\exp(\mu(\varkappa(q)) - q\varkappa(q)),$$

т. е. верна вторая оценка в (3.7). С другой стороны, при $\xi \geq \varkappa(q)$ в силу $(3.6)_1$ имеем $\exp(\mu(\xi) - Bq\xi) \geq \exp(\mu(\varkappa(q)))e^{-Bq\xi}$, откуда

$$\mathscr{L}[\nu](Bq) \geq \int\limits_{\varkappa(q)}^{+\infty} \exp(\mu(\varkappa(q)))e^{-Bq\xi}\,d\xi = \frac{1}{Bq}\exp(\mu(\varkappa(q)) - Bq\varkappa(q)),$$

что и означает первую оценку в (3.7).

Отметим, что условие $(3.6)_3$ требуется лишь в случае, когда $(3.6)_2$ имеет место не на всем $\mathbb{R}^+$, и в любом случае носит технический характер (не накладывая существенных дополнительных ограничений на функцию μ).

Пример 3.11. Положив $\mu(\xi) = \frac{\tau}{\tau-1}\xi^{\frac{\tau-1}{\tau}}$ с $\tau > 1$, получим $\varkappa(q) = q^{-\tau}$, причем $A(B,\tau) < \infty$ при всех $B > 1$, $\tau > 1$ и (3.7) дает

$$(\beta - p)^{-1/p}\exp\left(\frac{\frac{1}{\tau-1} - (B-1)}{p}q^{1-\tau}\right)\Bigg|_{q=\frac{\beta-p}{B}} \overset{\varphi}{\prec} \varphi(p) \overset{\varphi}{\prec} \exp\left(\frac{1/(\tau-1)}{p}q^{1-\tau}\right)\Bigg|_{q=\frac{\beta-p}{B}}. \tag{3.8}$$

В частности, при $\tau = 2$, $B = 1 + \varepsilon$ получим $\nu(\xi) = \exp(2\sqrt{\xi})$, и в силу замечания 3.2

$$(\beta - p)^{-1/\beta}\exp\left(\frac{1-\varepsilon^2}{\beta(\beta-p)}\right) \overset{\varphi}{\prec} \varphi(p) \overset{\varphi}{\prec} \exp\left(\frac{1+\varepsilon}{\beta(\beta-p)}\right),$$

что согласуется с примерами 3.3 и 3.4 (с $\gamma = 1$ и $\theta = 2$ соответственно), хотя и не дает полной точности. При других τ формула (3.8) дает набор образцов φ с асимптотиками типа $\exp(\theta(\beta - p)^{-\rho})$ с $\theta > 0$, $\rho > 0$, отсутствующих в таблицах преобразований Лапласа и Меллина и соответствующих упомянутым в примере 3.4 случаям $\omega = \frac{\tau-1}{\tau} \in (0,1)$.

Описание класса C удобно проводить, работая непосредственно с преобразованием Меллина (2.2), т. е. с представлением

$$\varphi^p(p) = \int\limits_{\sigma}^{+\infty} \psi(s)s^p\,ds. \tag{3.9}$$

Рассматривая неотрицательные функции $\psi(s)$, убывающие при $s \to +\infty$ быстрее любой степени s^{-N}, мы будем получать образы φ, определенные и растущие на $\mathbb{R}^+$. В таблицах преобразований Меллина этот класс описан слабо, так что выражаемые в явном виде ситуации сводятся фактически к двум примерам.

Пример 3.12. Положим $\psi(s) = \exp(-s^{1/\gamma})$, $\gamma > 0$, $\sigma = 0$. Тогда [1, с. 274, п. (15)] $\varphi^p(p) = \gamma\Gamma(\gamma(p+1))$. Из формулы Стирлинга легко получить, что

$\varphi(p) \overset{\mathcal{L}}{\sim} p^{\gamma}$. В частности, при $\gamma = n \in \mathbb{N}$ функции $\bar{\psi}_n(s) = \exp(-s^{-1/n})$ порождают преобразования $\mathbf{F}_{\bar{\psi}_n,0}$ с характеристиками $\varphi_n(p) \overset{\mathcal{L}}{\sim} p^n$. С другой стороны, функции ψ_n из примера 2.14 порождают преобразования $\mathbf{F}_{\psi_n,0}$ с теми же характеристиками, поскольку $\psi_1 = \bar{\psi}_1$, а $\mathbf{F}_{\psi_n,0} = (\mathbf{F}_{\psi_1,0})^n$ (см. предложение 2.10). Как сказано в замечании 2.22, преобразования типа $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ с эквивалентными (в смысле $\overset{\mathcal{L}}{\sim}$) характеристиками можно отождествить. Следовательно, задача о вычислении степеней преобразования $\mathbf{F}_{\psi_1,0}$ из примера 2.14 решена здесь «в обход» рекуррентного соотношения (2.13). При этом получено явное представление для степеней оператора $\mathbf{S}$ из (0.1), поскольку $\mathbf{S} = \mathbf{F}_{\psi_1,0}$.

Пример 3.13. $\psi(s) = \exp(-\gamma \ln^2 s)$, $\gamma > 0$, $\sigma = 0$. Элементарный расчет с заменой $\ln s \to \xi$ дает

$$\varphi(p) = \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2p}} \exp\left[\frac{(p+1)^2}{4p\gamma}\right] \overset{\mathcal{L}}{\sim} \exp\left(\frac{p}{4\gamma}\right).$$

Кроме того, удается (например, с помощью пакета Mathematica) выразить в специальных функциях образы ядер

$$\psi(s) = \exp(-\gamma \ln^{\alpha} s) \tag{3.10}$$

и при некоторых других $\alpha > 1$, но получаемые при этом формулы с трудом поддаются анализу на предмет асимптотики при $p \to +\infty$.

Из приведенных примеров видно, что класс C, как и класс B, естественным образом разбивается на следующие подклассы:

C1) $\varphi(p)$, растущие медленнее (в смысле $\overset{\varphi}{\prec}$), чем p^{ε} с любым $\varepsilon > 0$;

C2) $\varphi(p)$, растущие со степенной — порядка p^{γ} — скоростью (как в примере 3.12);

C3) $\varphi(p)$, растущие быстрее всех p^N с $N < +\infty$ (как в примере 3.13).

Примеры, получающиеся из таблиц или непосредственным вычислением, лишь частично представляют подклассы C2 и C3 и совсем не представляют подкласс C1. Поэтому необходимы общие утверждения, позволяющие получать представления функций φ класса C. Будем искать такие представления в виде (3.9) с $\sigma = 1$ и

$$\psi(s) = \exp(-\mu(\ln s)), \tag{3.11}$$

где

$$\mu \in C^1(0, +\infty), \quad \mu \text{ и } \mu' \text{ не убывают}, \quad \mu'(\xi) \to +\infty \quad \text{при} \quad \xi \to +\infty \tag{3.12}$$

(последнее ограничение в (3.12) означает убывание $\psi(s)$ на $+\infty$ быстрее степеней s^{-N}, что необходимо для существования интеграла (3.9) при $p \gg 1$). Тогда обратная функция

$$\varkappa(p) = (\mu')^{-1}(p) \tag{3.13}$$

определена и не убывает при $p \gg 1$. Отметим, что, продолжая μ на $\mathbb{R}^-$ по формуле $\mu(\xi) = \mu'(0)\xi$, мы сохраним свойства (3.12) на всем $\mathbb{R}$. Отметим также, что величина $s^p e^{-\mu(\ln s)}$ имеет максимум при $s = e^{\varkappa(p)}$ и потому допускает при всех $s > 0$ оценку

$$s^p e^{-\mu(\ln s)} \le \exp[p\varkappa(p) - \mu(\varkappa(p))]. \tag{3.14}$$

Легко видеть, что условия (3.12) не ограничивают набор допустимых асимптотик, а лишь «упорядочивают» характер убывания ψ на $+\infty$. Оценка для φ снизу в указанных обозначениях легко получается сразу для всего класса C.

Предложение 3.14. *В условиях* (3.11)–(3.13) *функция* φ *допускает оценку*

$$\varphi(p) \overset{\varphi}{\succ} \exp\biggl(\varkappa(p) - \frac{\mu(\varkappa(p))}{p}\biggr). \tag{3.15}$$

Доказательство. В силу монотонности μ и $\varkappa$ при $p \gg 1$ имеем

$$\varphi^p(p) \geq \int\limits_1^{e^{\varkappa(p)}} s^p e^{-\mu(\ln s)}\, ds \geq e^{-\mu(\varkappa(p))} \int\limits_1^{e^{\varkappa(p)}} s^p\, ds \geq \frac{\exp(-\mu(\varkappa(p)) + \varkappa(p)(p+1))}{2(p+1)},$$

откуда легко следует (3.15). $\square$

Выводя теперь соответствующие оценки сверху, мы будем получать двусторонние оценки для асимптотики φ, заполняя тем самым подклассы C1–C3. Это удается делать тем лучше, чем ниже по асимптотике мы «спускаемся». Начнем с общего и грубого описания всего класса C.

Утверждение 3.15. *Пусть произвольно задано число* $B > 1$. *Обозначим*

$$A = \int\limits_0^{+\infty} \exp[\mu(\eta) - \mu(B\eta)] e^{B\eta}\, d\eta. \tag{3.16}$$

Тогда

$$\varphi(p) \overset{\varphi}{\prec} \exp\biggl(B\varkappa(Bp) - \frac{\mu(\varkappa(Bp))}{p}\biggr). \tag{3.17}$$

Замечание 3.16. В условиях (3.12) интеграл (3.16) всегда сходится ввиду очевидной оценки $\mu(B\eta) - \mu(\eta) \geq (B-1)\mu'(\eta)\eta$.

Доказательство утверждения 3.15. Делая в интеграле (3.9) замену $s = \xi^B$ и оценивая величину $\xi^{Bp} e^{-\mu(\ln \xi)}$ с помощью (3.14), получим

$$\begin{aligned}\varphi^p(p) &\leq \exp[Bp\varkappa(Bp) - \mu(\varkappa(Bp))] \int\limits_1^{+\infty} \exp[\mu(\ln\xi) - \mu(B\ln\xi)] B\xi^{B-1}\, d\xi \\ &= AB \exp[Bp\varkappa(Bp) - \mu(\varkappa(Bp))],\end{aligned}$$

что приводит к (3.17). $\square$

Недостаток оценки (3.17) в том, что она в сочетании с (3.15) не дает точной асимптотики φ.

Пример 3.17. Положим $\mu(\xi) = \frac{\theta\tau}{\tau+1}\xi^{\frac{\tau+1}{\tau}}$, $\tau > 0$, $\theta > 0$. Тогда $\varkappa(p) = (p/\theta)^\tau$, $\mu(\varkappa(p)) = \frac{\tau}{\tau+1}\theta^{-\tau}p^{\tau+1}$. При любом $B > 1$, очевидно, $A < +\infty$. Тогда (3.15) и (3.17) дают

$$\exp\biggl(\frac{p^\tau}{(\tau+1)\theta^\tau}\biggr) \overset{\varphi}{\prec} \varphi(p) \overset{\varphi}{\prec} \exp\biggl(B^{\tau+1}\frac{p^\tau}{(\tau+1)\theta^\tau}\biggr). \tag{3.18}$$

В частности, при $\tau = 1$, $\theta = 2\gamma$, $B = \sqrt{1+\varepsilon}$ получим

$$\exp\biggl(\frac{p}{4\gamma}\biggr) \overset{\varphi}{\prec} \varphi(p) \overset{\varphi}{\prec} \exp\biggl((1+\varepsilon)\frac{p}{4\gamma}\biggr),$$

что согласуется с примером 3.13 (случай $\alpha = 2$), хотя и не дает полной точности. При других $\tau > 0$ оценка (3.18) соответствует функциям (3.10) при всевозможных $\alpha > 1$ и тем самым дополняет пример 3.13, особенно в случаях, когда анализ асимптотики образов функций (3.10) не удается провести.

Несомненное преимущество утверждения 3.15 в том, что оно справедливо в наиболее широком диапазоне асимптотик, т. е. дает в некотором смысле описание всего класса С. Если $\mu(s)$ растет не медленнее s^2 (что ограничивает нас сверху асимптотиками $\varphi(p) \overset{\mathcal{L}}{\sim} e^{Cp}$, т. е. отбрасываются наиболее быстро растущие функции подкласса С3), то можно получить точную асимптотику φ.

Утверждение 3.18. *Пусть существуют числа $K > 0$, $L > 0$ такие, что*

$$\int\limits_{-K}^{+\infty} \exp[\mu(\eta) - \mu(\eta + K)] e^{\eta}\, d\eta = L < +\infty. \tag{3.19}$$

Тогда

$$\varphi(p) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \exp\left[\varkappa(p)\left(1 - \frac{1}{\mathbf{e}_\mu(\varkappa(p))}\right)\right]. \tag{3.20}$$

Замечание 3.19. Легко видеть, что для (3.19) достаточно, чтобы $\frac{\mu'(\eta)}{\eta} \geq \varepsilon > 0$ при $\eta \gg 1$.

Доказательство утверждения 3.18. Ввиду оценки (3.15) и того, что ее правая часть совпадает с правой частью (3.20), достаточно показать отношение, обратное к (3.15). Делая в (3.9) замену $s = e^K \xi$ и пользуясь оценкой (3.14), получим

$$\varphi^p(p) \leq e^{K(p+1)} \exp[p\varkappa(p) - \mu(\varkappa(p))] \int\limits_{e^{-K}}^{+\infty} \exp[\mu(\ln\xi) - \mu(K + \ln\xi)]\, d\xi$$
$$= Le^{K(p+1)} \exp[p\varkappa(p) - \mu(\varkappa(p))],$$

откуда легко следует требуемое. □

Пример 3.20. Взяв в примере 3.17 $\tau \in (0, 1]$, попадаем в условия утверждения 3.18 и получаем точную асимптотику

$$\varphi(p) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \exp\left(\frac{p^\tau}{(\tau + 1)\theta^\tau}\right),$$

которая при $\tau = 1$, $\theta = 2\gamma$ полностью совпадает с результатом примера 3.13 с $\alpha = 2$, а при $\tau < 1$ дает точный ответ на вопрос об образах функций (3.10) при $\alpha > 2$.

Утверждение 3.18 дает (лучшее, чем утверждение 3.15) описание подклассов С1, С2 и части С3, но его недостатком остается недостаточно явное представление асимптотики φ. Если же ограничиться подклассами С1 и С2 (что соответствует росту μ быстрее степенных функций), то можно записать (3.20) в более удобной форме.

Предложение 3.21. *Пусть при $s \gg 1$ верно $\frac{\mu'(s)}{\mu(s)} \geq \varepsilon > 0$. Тогда*

$$\varphi(p) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \exp(\varkappa(p)). \tag{3.21}$$

Доказательство очевидно ввиду оценки

$$-\frac{1}{\varepsilon} + \varkappa(p) \leq \varkappa(p) - \frac{\mu(\varkappa(p))}{p} \leq \varkappa(p).$$

Пример 3.22. $\mu(\xi) = e^{\xi/\gamma}$, $\gamma > 0$, т. е. $\psi(s) = \exp(-s^{1/\gamma})$. Тогда (3.21) дает $\varphi(p) \overset{\mathscr{L}}{\sim} (\gamma p)^\gamma \overset{\mathscr{L}}{\sim} p^\gamma$, что согласуется с примером 3.12.

Наконец, если ограничиться еще меньшими асимптотиками, а именно если $\mu(s)$ растет не медленнее e^s, то (3.21) можно записать еще проще.

Утверждение 3.23. *Пусть $\mu(\xi) = \nu(e^\xi)$, т. е. $\psi(s) = e^{-\nu(s)}$, где*

$$\nu \in C^1(1, +\infty),\ \nu \geq 0,\ s\nu\,'(s) - \nu(s) \geq 0, \quad \nu\,'(s) \text{ не убывает при } s \gg 1. \quad (3.22)$$

Тогда $\varphi \overset{\mathscr{L}}{\sim} \nu^{-1}$.

Доказательство. При $s \gg 1$ в силу (3.22) имеем

$$\mu'(\ln s) = s\nu\,'(s) \geq \nu(s) = \nu(s/2) + \int\limits_{s/2}^{s} \nu\,'(\xi)\,d\xi \geq \nu\,'(s/2)s/2 = \mu'(\ln s - \ln 2).$$

Полагая $s = \nu^{-1}(p) = e^{\mu^{-1}(p)}$, получим $\mu'(\mu^{-1}(p) - \ln 2) \leq p \leq \mu'(\mu^{-1}(p))$, откуда $\mu^{-1}(p) - \ln 2 \leq \varkappa(p) \leq \mu^{-1}(p)$, т. е. $\frac{1}{2}\nu^{-1}(p) \leq e^{\varkappa(p)} \leq \nu^{-1}(p)$, что и требовалось. $\square$

Таким образом, для всех функций $\varphi(p)$, растущих на $+\infty$ медленнее p, имеется явное представление

$$\varphi(p) \overset{\mathscr{L}}{\sim} \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-\varphi^{-1}(s)} s^p\,ds.$$

Отсюда получаются весь подкласс C1 и часть C2, например функции из примера 3.12 с $\gamma < 1$, а также $\ln^\gamma p$, $\ln^\gamma \ln p$ и т. п. Применяя процедуру (2.11), (2.12), можно отсюда получить остальную часть подкласса C2 с представлениями, которые, возможно, окажутся удобнее, чем (3.21).

В итоге полученные нами классы функций φ, ψ и соответствие между ними можно представить в виде табл. 2 (см. § 4).

§ 4. Основные выводы и дополнительные замечания

Подведем итоги сделанного в § 1–3.

1. Нам удалось с достаточной полнотой описать класс $\mathscr{C}(\beta)$ функций, представимых с точностью до $\sim$ интегралами вида (1.1), а также указать алгоритм восстановления веса χ в указанном представлении. Собирая вместе все результаты § 1, можно представить их в виде табл. 1 (в которой описание дано схематически, а точные формулировки приведены в утверждениях § 1). Здесь функции Φ упорядочены по уменьшению скорости роста; выражение «свертка» означает применение операции (1.22); показатель β есть параметр класса $\mathscr{C}(\beta)$, т. е. отвечает за ту степень s, «в левой окрестности которой» находится рост $\Phi(s)$.

В этой таблице имеется «пробел», соответствующий функциям Φ, растущим быстрее степенных, но таким, что $\mathbf{e}_\Phi(s) \prec \ln\ln s$. Для таких функций можно доказать оценки снизу и сверху элементами класса $\mathscr{A}(\alpha, +\infty)$, но с неэквивалентными нижней и верхней оценками (так же, как в последней строке таблицы). Однако мы не будем уделять этому внимание ввиду узости указанного диапазона Φ.

Таблица 1. Соответствие между Φ и χ в § 1

<table>
<tr><th colspan="4">$\Phi(s)$</th><th rowspan="2">$\chi(\xi)$</th></tr>
<tr><th>β</th><th>класс</th><th>общие обозначения</th><th>вид представителей</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$+\infty$</td><td>$\overline{\mathscr{N}} \setminus \mathscr{N}$</td><td>$\Phi(s) \to \infty$,
$s \to s_*$</td><td>любой</td><td>$s_*^{-\xi}$</td></tr>
<tr><td>Δ_3-условие</td><td rowspan="2">(1.1),
(1.4)</td><td>любой</td><td rowspan="2">$\mathbf{m}_\Phi(\xi)$</td></tr>
<tr><td>не удовл. Δ_3-усл.
($\mathbf{e}_\Phi(s) \prec \ln s$), но
$\mathbf{e}_\Phi(s) \succ \ln\ln s$</td><td>любой, но
с выполнением
(1.18) или (1.20)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$< +\infty$</td><td>$\succ \frac{s^\beta}{\ln^\varepsilon s}\ \forall \varepsilon > 0$</td><td rowspan="4">(1.21)</td><td>$s^\beta(-F(\ln\ln s))$</td><td>$\frac{1}{\xi}F'\big(\ln\frac{1}{\xi}\big)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">порядка
$\frac{s^\beta}{\ln^\gamma s}$, $\gamma > 0$</td><td>$\frac{s^\beta}{\ln^\gamma s}$, $\gamma > 0$</td><td>$\xi^{\gamma-1}$</td></tr>
<tr><td>произведения Ψ
из 2-х предыдущих строк</td><td>свертки χ
из 2-х предыдущих строк</td></tr>
<tr><td>остальные, т. е.
$\prec \frac{s^\beta}{\ln^N s}\ \forall N < \infty$</td><td>$\Psi(e^z)$ зажаты
между $\frac{\varkappa(2z)-\varkappa(z)}{\varkappa(z)\varkappa(2z)} \times$
$\exp[\nu(\varkappa(2z)) - \frac{z}{\varkappa(2z)}]$
и $\exp[\nu(\varkappa(z)) - \frac{z}{\varkappa(z)}]$</td><td>$\exp(-\nu(1/\xi))$,
где $s^2\nu'(s) =$
$\varkappa^{-1}(s)$</td></tr>
</table>

Кроме того, отдельные представители класса из последней строки табл. 1 допускают точное вычисление асимптотики (см. пример 1.19).

2. Для преобразования $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$, введенного в определении 2.1, описано действие на классах N-функций и изучены, в частности,

1) область определения и характер изменения скорости роста N-функций на $+\infty$ под действием этого преобразования;

2) возможность описания $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ в терминах не только ядра ψ, но и так называемых характеристики φ и пороговой функции M_*;

3) поведение $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ при суперпозициях в терминах ψ, φ и M_*;

4) естественные (порождаемые порядками образов как N-функций) порядки на множестве преобразований $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ и их выражение в терминах ψ, φ и M_*.

3. Решена с достаточной полнотой задача восстановления преобразования $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ (т. е. его ядра) по характеристике φ, которая эквивалентна задаче обращения преобразования Меллина (3.9) на неаналитических функциях, заданных с точностью до $\overset{\varphi}{\sim}$. Собирая вместе все результаты § 3, можно представить их в виде табл. 2 (в которой описание дано схематически, точные формулировки приведены в утверждениях § 3). Здесь функции φ упорядочены по увеличению скорости роста; выражение «свертка» означает применение операции (2.9); число β означает правый конец области определения φ, около которой рассматривается ее асимптотика.

В этой таблице не представлены функции φ, растущие быстрее указанных в последней строке. Однако продолжение таблицы далее не представляет боль-

Таблица 2. Соответствие между φ и ψ в § 3

<table>
<tr><td colspan="3">$\varphi(p)$</td><td rowspan="2">$\psi(s)$</td></tr>
<tr><td>β</td><td>класс</td><td>вид представителей</td></tr>
<tr><td>$\forall$</td><td>кл. A: не растущие</td><td>$\overset{\varphi}{\sim}$ const</td><td>финитные</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$+\infty$</td><td colspan="3">класс C</td></tr>
<tr><td>$\prec p$</td><td>любой</td><td>$\exp(-\varphi^{-1}(s))$</td></tr>
<tr><td>$\prec p^N$, $N < \infty$</td><td>$\exp(\varkappa(p))$</td><td rowspan="3">$\exp(-\mu(\ln s))$,
где $\mu' = \varkappa^{-1}$</td></tr>
<tr><td>$\prec e^{Cp}$, $C < \infty$</td><td>$\exp\bigl(\varkappa(p) - \frac{\mu(\varkappa(p))}{p}\bigr)$</td></tr>
<tr><td>остальные (растущие быстрее e^{Cp})</td><td>зажаты между $\exp\bigl(\varkappa(p) - \frac{\mu(\varkappa(p))}{p}\bigr)$ и $\exp\bigl(B\varkappa(Bp) - \frac{\mu(\varkappa(Bp))}{p}\bigr)$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">$< +\infty$</td><td colspan="3">класс B</td></tr>
<tr><td>$\prec \ln^{1/\beta} \frac{1}{\beta-p}$</td><td>$F^{1/\beta}\bigl(\ln \frac{1}{\beta-p}\bigr)$</td><td>$\frac{s^{-(\beta+1)} F'(\ln\ln s)}{\ln s}$</td></tr>
<tr><td>$\prec \ln^N \frac{1}{\beta-p}$, $N < \infty$</td><td>степени функций из предыдущей строки</td><td>свертки функций из предыдущей строки</td></tr>
<tr><td rowspan="2">порядка $\bigl(\frac{1}{\beta-p}\bigr)^\theta$, $\theta > 0$</td><td>$\bigl(\frac{1}{\beta-p}\bigr)^\theta$</td><td>$s^{-(\beta+1)} \ln^{\beta\theta-1} s$</td></tr>
<tr><td>произведения функций из 2-х предыдущих строк</td><td>свертки функций из 2-х предыдущих строк</td></tr>
<tr><td>$\prec \exp\bigl(\frac{\theta}{(\beta-p)^\rho}\bigr)$ $\theta > 0$, $\rho > 0$</td><td>зажаты между $(\beta - p)^{-\frac{1}{p}} \exp\bigl[\frac{\mu(\varkappa(q)) - Bq\varkappa(q)}{p}\bigr]$ и $\exp\bigl(\frac{\mu(\varkappa(q)) - q\varkappa(q)}{p}\bigr)$, где $q = \frac{\beta-p}{B}$, $B > 1$</td><td>$s^{-(\beta+1)} e^{\mu(\ln s)}$,
где $\mu' = \varkappa^{-1}$</td></tr>
</table>

шого интереса ввиду того, что получение точной асимптотики φ не удается уже для последней строки (нижняя и верхняя оценки не совпадают с точностью до $\overset{\varphi}{\sim}$), а для более быстро растущих φ будет еще затруднительнее.

Кроме того, в табл. 2 не указаны отдельные представители классов B и C, допускающие явное вычисление асимптотики, но не попадающие в условия соответствующих общих утверждений (см. примеры 3.4 и 3.13, замечание 3.9).

Таким образом, дан удовлетворительный ответ на вопросы о представлении N-функций разложением по степенным функциям с положительным весом и об их интегральных преобразованиях типа свертки с заданным поведением на степенных функциях (т. е. с заданной характеристикой φ). Тем не менее попутно в § 1–3 возник ряд вопросов, на которые мы сейчас попытаемся ответить.

О функции $\mathbf{m}_\Phi$ и операторе $\mathbf{P}_\beta$. В § 1 мы видели, что при описании класса $\mathscr{C}(+\infty)$ он фактически сводился к классу $\mathscr{E}$ функций Φ, эквивалентных своему разложению $\mathbf{P}_\infty[\Phi]$ (см. (1.15)). Таким образом, при $\beta = +\infty$ решена задача о восстановлении функции Φ по заданному $\mathbf{m}_\Phi$, причем соответствующее представление Φ через $\mathbf{m}_\Phi$ имеет нужный вид (1.1).

Возникает вопрос: сохраняется ли эта ситуация при $\beta < +\infty$? Оказывается, восстановление Φ по заданному $\mathbf{m}_\Phi$ по-прежнему возможно (см. утверждение 4.4), но ядра представлений (1.1) (какие строились в § 1 и при конечных β) будут другими, так как $\mathbf{P}_\beta[\Phi]$ растет, вообще говоря, медленнее Φ. В самом деле, пусть $\Phi \in \mathscr{D}(\beta)$ с $\beta < \infty$, т. е.

$$\Phi(s) = s^\beta \Psi(s), \quad \text{где } \Psi(s) \to 0 \text{ при } s \to +\infty \text{ медленнее, чем } s^{-\varepsilon}\ \forall \varepsilon. \tag{4.1}$$

Тогда с учетом равенства $\mathbf{m}_\Phi(p) = \mathbf{m}_\Psi(p-\beta)$ получим

$$\mathbf{P}_\beta[\Phi](v) = v^\beta \Psi_1(v), \quad \text{где} \quad \Psi_1(v) = \int\limits_{\alpha-\beta}^{0} \mathbf{m}_\Psi(q) v^q \, dq. \tag{4.2}$$

Пример 4.1. $\Psi(s) = \ln^{-\gamma} s$, $\gamma > 0$. Заметим, что $\mathbf{e}_\Psi(s) = -\frac{\gamma}{\ln s}$. При $q < 0$ подсчитаем $\boldsymbol{\mu}_\Psi(q) = e^{-\gamma/q}$, $\mathbf{m}_\Psi(q) = e^\gamma \gamma^{-\gamma}(-q)^\gamma$ и в итоге, взяв $\alpha = \beta - 1$, получим

$$\Psi_1(v) = e^\gamma \gamma^{-\gamma}[\Gamma(1+\gamma) - \Gamma(1+\gamma, \ln v)] \ln^{-1-\gamma} v,$$

откуда $\frac{\Psi_1(v)}{\sqrt{2\pi\gamma}\ln^{-1-\gamma} v} \to 1$ при $v \to +\infty$, т. е. степень $\ln v$ понизилась на 1.

Однако асимптотику $\mathbf{P}_\beta[\Phi]$ можно оценить: покажем, что для Φ, растущих не медленнее описанных в примере 4.1, справедлива оценка (в обозначениях (4.2))

$$(-\mathbf{e}_\Psi) \cdot \Psi \prec \Psi_1 \prec \Psi. \tag{4.3}$$

В частности, в примере 4.1 показано, что нижняя оценка в (4.3) достигается на самом деле.

Утверждение 4.2. *Пусть функция Ψ в (4.1) такова, что $\Psi \in C^1(\mathbb{R}^+)$;*

$$\mathbf{e}_\Psi(s) \uparrow -0, \quad \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{\mathbf{e}_\Psi(s)}\right) \ge \frac{\varepsilon}{s}, \quad \boldsymbol{\mu}_\Psi(s) \uparrow \ \text{при } s \to +\infty. \tag{4.4}$$

Тогда имеет место оценка (4.3).

Замечание 4.3. Простой расчет с помощью (1.14) показывает, что при достижении в $(4.4)_2$ равенства мы попадаем в ситуацию, описанную в примере 4.1, с $\gamma = 1/\varepsilon$.

Доказательство утверждения 4.2. Вторая оценка в (4.3) очевидна из неравенства $\mathbf{m}_\Psi(q) v^q \le \Psi(v)$, следующего из определения $\mathbf{m}_\Psi$.

В силу монотонности функций $\mathbf{e}_\Psi$ и $\boldsymbol{\mu}_\Psi$ (и (1.7)) они взаимно обратны. Поэтому величина $\frac{\Psi(v)}{v^q}$ достигает минимума, равного $\mathbf{m}_\Psi(q)$, при $v = \boldsymbol{\mu}_\Psi(q)$, т. е. при $q = \mathbf{e}_\Psi(v)$, причем из (1.10) для Ψ и $(4.4)_3$ следует монотонное убывание величины $\frac{d}{dq} \ln \mathbf{m}_\Psi(q)$. Следовательно, в интеграле

$$\frac{\Psi_1(v)}{\Psi(v)} = \int\limits_{\alpha-\beta}^{0} \mathbf{m}_\Psi(q) \frac{v^q}{\Psi(v)} \, dq$$

подынтегральная функция достигает максимума (равного 1) при $q = \mathbf{e}_\Psi(v)$, причем возрастает левее этой точки и убывает правее ее. Но тогда допустима оценка

$$\frac{\Psi_1(v)}{\Psi(v)} \ge \int\limits_{2\mathbf{e}_\Psi(v)}^{\mathbf{e}_\Psi(v)} \mathbf{m}_\Psi(q) \frac{v^q}{\Psi(v)} dq \ge \mathbf{m}_\Psi(q) \frac{v^q}{\Psi(v)}\bigg|_{q=2\mathbf{e}_\Psi(v)} \cdot (-\mathbf{e}_\Psi(v)).$$

Остается показать, что при $0 < -q \ll 1$ верна оценка

$$R \equiv \mathbf{m}_\Psi(q)\frac{v^q}{\Psi(v)}\bigg|_{v=\boldsymbol{\mu}_\Psi(q/2)} \geq \mathrm{const} > 0.$$

Имеем

$$R = \frac{\mathbf{m}_\Psi(q)}{\mathbf{m}_\Psi(q/2)}\boldsymbol{\mu}_\Psi^{q/2}(q/2),$$

откуда, используя указанные выше свойства монотонности, находим

$$\begin{aligned}
-\ln R &= \ln \mathbf{m}_\Psi\left(\frac{q}{2}\right) - \ln \mathbf{m}_\Psi(q) - \frac{q}{2}\ln \boldsymbol{\mu}_\Psi\left(\frac{q}{2}\right) \leq (\ln \mathbf{m}_\Psi)'(q)\left(-\frac{q}{2}\right) - \frac{q}{2}\ln \boldsymbol{\mu}_\Psi\left(\frac{q}{2}\right)\\
&= \left(-\frac{q}{2}\right)\left(\ln \boldsymbol{\mu}_\Psi\left(\frac{q}{2}\right) - \ln \boldsymbol{\mu}_\Psi(q)\right) = (\ln \boldsymbol{\mu}_\Psi)'(Q)Q^2\left(\frac{-q/2}{-Q}\right)^2\bigg|_{Q(q)\in(-q,-q/2)}\\
&\leq \sup_{-1\ll r<0} r^2(\ln \boldsymbol{\mu}_\Psi)'(r) \leq \frac{1}{\varepsilon} < +\infty,
\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Задачу о восстановлении Φ по $\mathbf{m}_\Phi$ удобно записать в виде уравнения

$$\mathbf{m}_{\Phi_1}(p) = \omega^{-p}(p), \quad p < \beta, \tag{4.5}$$

в котором функция ω задана, а функция Φ_1 искомая. Из предложения 1.12 очевидна единственность решения уравнения (4.5) по крайней мере в классе $\Phi_1 \in \mathscr{D}(\beta) \cap C^1(\mathbb{R}^+)$. Относительно существования решения рассмотрим следующее

Утверждение 4.4. *Пусть $\omega \in C^1(\alpha, \beta)$, $\beta \leq +\infty$, причем*

1) *имеет место сходимость*

$$\xi \mathbf{e}_\omega(\xi) \uparrow +\infty \quad \text{при } \xi \to \beta, \tag{4.6}$$

т. е. функция $\nu(z)$, обратная к $\xi\mathbf{e}_\omega(\xi)$, определена в окрестности $+\infty$ и монотонно стремится к β;

2) *выполнено соотношение*

$$\int^{+\infty}\left(\frac{1}{\nu(z)} - \frac{1}{\beta}\right)dz = +\infty. \tag{4.7}$$

Тогда существует $\Phi_1 \in \mathscr{N} \cap \mathscr{D}(\beta)$, удовлетворяющая уравнению (4.5).

Замечание 4.5. Ввиду $\nu \uparrow \beta > 1$ имеют место неравенство (в смысле $\mathscr{D}'$)

$$\nu\,'(z) + \nu(z) \geq 1 \quad \text{при } z \gg 1 \tag{4.8}$$

и соотношение

$$\int^{+\infty}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\nu(z)}\right)dz = +\infty \quad \text{при всех } p < \beta. \tag{4.9}$$

Доказательство утверждения 4.4. Рассмотрим функцию

$$N(\eta) = \int_B^\eta \frac{dz}{\nu(z)},$$

определенную при $\eta \geq B \gg 1$ и обладающую в силу (4.7), (4.9) свойствами:

$$N: \ (B, +\infty) \to \mathbb{R}^+; \quad N(\eta) \uparrow +\infty, \ \eta - N(\eta) \to +\infty \quad \text{при } \eta \to +\infty.$$

Таким образом, определена функция $N^{-1} : \mathbb{R}^+ \to (B, +\infty)$. Покажем, что величина

$$\Phi(v) = \exp(N^{-1}(\ln v))$$

является с точностью до растяжения v главной частью искомой N-функции Φ_1. В самом деле, функция Φ действует из $(1, +\infty)$ в $\mathbb{R}^+$, положительна, удовлетворяет уравнению

$$\frac{v\Phi'(v)}{\Phi(v)} = \nu(\ln \Phi(v)), \tag{4.10}$$

из которого сразу следует монотонность Φ, а после несложных вычислений с учетом (4.8) — и выпуклость; наконец,

$$\frac{\Phi(v)}{v} = \exp[\eta - N(\eta)]|_{\eta = N^{-1}(\ln v)} \to +\infty \quad \text{при } v \to +\infty.$$

Таким образом, $\Phi \in \mathscr{N}$. Далее, из (4.7), (4.9) очевидно, что $\Phi \in \mathscr{D}(\beta)$, и остается проверить (4.5). Из (4.10) следует монотонность $\mathbf{e}_\Phi$, откуда в силу (1.7) функции $\mathbf{e}_\Phi$ и $\boldsymbol{\mu}_\Phi$ взаимно обратные. Тогда можно записать (4.10) в виде

$$\xi \mathbf{e}_\omega(\xi)|_{\xi = \mathbf{e}_\Phi(v)} = \ln \Phi(v). \tag{4.11}$$

С другой стороны, используя тождества (из $(1.8)_2$ и (1.10))

$$y(p) = \ln \Phi(\boldsymbol{\mu}_\Phi(p)) - p \ln \boldsymbol{\mu}_\Phi(p), \quad \frac{dy}{dp} + \ln \boldsymbol{\mu}_\Phi(p) = 0$$

для функции $y(p) = \ln \mathbf{m}_\Phi(p)$, получаем уравнение (в силу (4.11))

$$-py'(p) + y(p) = \ln \Phi(\boldsymbol{\mu}_\Phi(p)) = p\mathbf{e}_\omega(p) = \frac{p^2 \omega'(p)}{\omega(p)},$$

решая которое, находим, что $\mathbf{m}_\Phi(p) = (C\omega(p))^{-p}$ с некоторой $C > 0$. Растягивая аргумент функции Φ: $\Phi_1(v) = \Phi(Cv)$, добьемся точного выполнения (4.5). $\square$

Замечание 4.6. Если функция ω задается с точностью до $\mathscr{L}$, то подходящая поправка ω позволяет удовлетворить требованиям утверждения 4.4, которые, таким образом, носят чисто технический характер и не ограничивают асимптотику допустимых функций ω. В самом деле, представив ω в виде $\omega(p) = \exp(F(1/p))$, где F определена в правой окрестности точки $1/\beta$, мы можем переписать (4.6) в виде

$$F'' > 0, \quad F'(\beta^{-1} + 0) = -\infty, \tag{4.12}$$

а (4.7) с учетом этого примет вид

$$(F'(\xi) \cdot (\beta^{-1} - \xi) + F(\xi))|_{\xi = \beta^{-1} + 0} = +\infty. \tag{4.13}$$

Эти требования не накладывают существенных ограничений на асимптотику $\omega(p)$ при $p \to \beta$, в частности, ω может быть как ограниченной, так и неограниченной, причем во втором (нетривиальном) случае $(4.12)_2$ и (4.13) выполнены автоматически.

О природе класса $\mathscr{D}(\beta)$. Удобно сразу ввести родственный класс ($\beta_1 \in \mathbb{R}$ произвольно).

Обозначение 4.7. $\mathscr{D}^*(\beta_1)$ — это множество функций $\Phi(s)$, растущих на $+\infty$ быстрее s^{β_1}, но медленнее $s^{\beta_1+\varepsilon}$ с любым $\varepsilon > 0$.

Обозначение 4.8. Символом R обозначим операцию взятия дополнительной N-функции: $R[\Phi] = \overline{\Phi}$, а также применительно к числам диапазона $[1, +\infty]$ операцию сопряжения по Лебегу $R(p) = p/(p-1)$.

Очевидно, $R^2 = I$. Отметим также, что

$$\mathscr{D}^*(\beta_1) \cap \mathscr{N} = \{\Phi \in \mathscr{N} \mid R[\Phi] \in \mathscr{D}(R(\beta_1))\}, \tag{4.14}$$

поскольку

$$\Phi(s) \text{ растет медленнее } s^p \iff \Phi(s) \lll s^p \iff R[\Phi](v) \ggg v^{R(p)}, \tag{4.15}$$

и аналогичное верно для «растет быстрее».

В данной работе мы имеем дело только с классом $\mathscr{D}(\beta)$ и его подмножествами. Может показаться, что при конечных β этот класс слишком узок как множество функций, «тесно прилегающих к степенным». Однако это не так: например, покажем, что в классах $\mathscr{D}(\beta)$ и $\mathscr{D}^*(\beta)$ может не выполняться Δ_2-условие (см. пример 4.9). В [3, с. 41, 42] построен пример N-функции, растущей как степенная и не удовлетворяющей Δ_2-условию, однако в нем $\mathbf{e}_\Phi$ колеблется между разными постоянными, т. е. Φ заведомо не принадлежит никакому классу $\mathscr{D}(\beta)$ или $\mathscr{D}^*(\beta)$. Предъявим примеры функций $\Phi_1 \in \mathscr{D}(\beta)$ и $\Phi_2 \in \mathscr{D}^*(\beta)$, не удовлетворяющих Δ_2-условию.

Пример 4.9. Пусть для удобства $\beta > 2$. Ищем главные части функций Φ_1 и Φ_2 в виде $\Phi_k(s) = s^\beta \Psi_k(s)$, где $\Psi_1 \in \mathscr{D}(0)$, т. е. убывает на $+\infty$ медленнее любой $s^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, а $\Psi_2 \in \mathscr{D}^*(0)$, т. е. растет на $+\infty$ медленнее любой s^ε. Нетрудно показать, что

$$\Phi_k'' \geq 0 \iff \mathbf{e}'_{\Psi_k}(s) + \frac{(\mathbf{e}_{\Psi_k}(s) + \beta)(\mathbf{e}_{\Psi_k}(s) + \beta - 1)}{s} \geq 0. \tag{4.16}$$

Возьмем $\mathbf{e}_{\Psi_k}$ в виде

$$\mathbf{e}_{\Psi_1}(s) = \begin{cases} \frac{s}{s - \frac{n}{n+1}a_n} - \beta, & s \in (a_n, c_n), \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \mathbf{e}_{\Psi_2}(s) = \begin{cases} \frac{s}{s - \frac{n}{n+1}a_n} - \beta, & s \in (a_n, b_n), \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases}$$

где $a_n = \exp((n-1)!)$, $b_n = \frac{n}{n+1}\frac{\beta}{\beta-1}a_n$, $c_n = na_n$, $n \geq 2$. Легко видеть, что $a_n < b_n < c_n < a_{n+1}$, $\mathbf{e}_{\Psi_k}(a_n) = n + 1 - \beta \to +\infty$ при $n \to +\infty$, $\mathbf{e}_{\Psi_k}(b_n) = 0$, $\mathbf{e}_{\Psi_1}(c_n) \in (-\beta, 0)$, $\mathbf{e}_{\Psi_2} \geq 0$ (значит, Ψ_2 монотонна); $\mathbf{e}'_{\Psi_k}$ либо равны 0, либо удовлетворяют точному равенству в (4.16), либо (в точках разрыва) верно неравенство (4.16) в смысле $\mathscr{D}'$, так как скачки $\mathbf{e}_{\Psi_k}$ положительны. Восстановив Ψ_k по $\mathbf{e}_{\Psi_k}$ из (1.14), получим функции Φ_k корректно определенные, положительные, монотонные (поскольку $\mathbf{e}_{\Phi_k} = \mathbf{e}_{\Psi_k} + \beta > 0$), выпуклые и не удовлетворяющие Δ_2-условию, так как соответствующие $\mathbf{e}_{\Phi_k}$ неограниченные. Осталось доказать, что $\Psi_1 \in \mathscr{D}(0)$, а $\Psi_2 \in \mathscr{D}^*(0)$. Подбирая C в (1.14) подходящим образом, можем считать, что

$$\ln \Psi_k(s) = \int_{a_2}^{s} \frac{\mathbf{e}_{\Psi_k}(\xi)}{\xi}\, d\xi,$$

поэтому можно записать $\ln\Psi_2(a_{n+1}) = \sum\limits_{k=2}^{n} I_k$, где

$$I_k = \int\limits_{a_k}^{b_k} \frac{\mathbf{e}_{\Psi_2}(\xi)}{\xi}\,d\xi = \ln\biggl(\frac{k}{\beta-1}\biggr) + \beta\ln\biggl(\frac{k+1}{k}\cdot\frac{\beta-1}{\beta}\biggr).$$

С одной стороны, отсюда $\ln\Psi_2(a_{n+1}) \to \infty$, что ввиду монотонности Ψ_2 означает сходимость $\Psi_2(s) \to \infty$ при $s \to +\infty$, а с другой стороны, имеем оценку $I_k \le 2\ln\frac{k}{\beta-1}$, откуда

$$\ln\Psi_2(a_{n+1}) \le 2\ln\frac{n!}{(\beta-1)^{n-1}} \le 2\ln\ln a_{n+1},$$

и при любом $s \in [a_{n+1}, a_{n+2})$ получаем окончательно

$$\ln\Psi_2(s) \le \ln\Psi_2(a_{n+2}) \le 2\ln\ln a_{n+2} \le 4\ln\ln a_{n+1} \le 4\ln\ln s,$$

т. е. $\Psi_2(s) \le \ln^4 s$, что и требовалось показать.

Во многом аналогично для Ψ_1 имеем $\ln\Psi_1(a_{n+1}) = \sum\limits_{k=2}^{n} J_k$, где

$$J_k = \int\limits_{a_k}^{c_k} \frac{\mathbf{e}_{\Psi_1}(\xi)}{\xi}\,d\xi = -(\beta-2)\ln k,$$

т. е. $\ln\Psi_1(a_{n+1}) = -(\beta-2)\ln n!$. Ясно, что функция Ψ_1 достигает на отрезке $[a_n, a_{n+1}]$ минимума и максимума соответственно в точках a_{n+1} и b_n. При этом $\ln\Psi_1(b_k) = \ln\Psi_1(a_k) + I_k \to -\infty$, т. е. $\Psi_1(s) \to 0$ при $s \to +\infty$, а для любого $s \in [a_n, a_{n+1}]$ можно написать

$$-\ln\Psi_1(s) \le -\ln\Psi_1(a_{n+1}) = (\beta-2)\ln\ln a_{n+1} \le 2(\beta-2)\ln\ln a_n \le 2(\beta-2)\ln\ln s,$$

т. е. $\Psi_1(s) \ge \ln^{-2(\beta-2)} s$.

О суперпозиции и упорядочивании преобразований $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ в терминах их пороговых функций. Удобно ввести следующие два оператора.

Определение 4.10. Пусть на интервале $[\alpha,\beta)$ задана измеримая функция φ (где $\beta \in (1,+\infty]$, $\alpha \in [1,\beta)$) такая, что $\varphi \ge \varphi_* = \mathrm{const} > 0$. Оператором $\mathbf{In}_\beta$ назовем оператор, действующий по правилу

$$\mathbf{In}_\beta[\varphi](v) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{v^p\,dp}{\varphi^p(p)}. \tag{4.17}$$

Обозначение 4.11. Пусть $\Phi \in \mathscr{D}(\beta)$, $\beta \le +\infty$. Будем писать

$$\mathbf{Sc}_\beta[\Phi](p) = \frac{1}{\mathbf{m}_\Phi^{1/p}(p)} = \max_{u\ge 1}\frac{u}{\Phi^{1/p}(u)}. \tag{4.18}$$

Отметим их очевидные свойства.

1. Результат операции (4.17) с точностью до $\sim$ не зависит от выбора $\alpha \in [1,\beta)$ (в силу аргументов, использованных при доказательстве утверждения 1.7).

2. При всех φ, описанных в определении 4.10, величина $\mathbf{In}_\beta[\varphi]$ — обобщенная N-функция класса $\mathscr{A}(\alpha,\beta)$.

3. Если $\varphi_1 \overset{\varphi}{\prec} \varphi_2$, то $\mathbf{In}_\beta[\varphi_1] \succ \mathbf{In}_\beta[\varphi_2]$ (что очевидно, если выбрать α достаточно близким к β), т. е. при изменении φ с точностью до $\overset{\varphi}{\sim}$ результат $\mathbf{In}_\beta[\varphi]$ остается в том же классе эквивалентности (в смысле $\sim$).

4. Для всех $\Phi \in \mathscr{D}(\beta)$ величина $\mathbf{Sc}_\beta[\Phi]$ определена при $p \in [\alpha, \beta)$, удовлетворяет уравнению (в смысле $\mathscr{D}'$)

$$\frac{d}{dp} \ln \mathbf{Sc}_\beta[\Phi](p) = \frac{\ln \Phi(\boldsymbol{\mu}_\Phi(p))}{p^2}$$

(следует из пп. 1, 3, 5 предложения 1.12) и потому не убывает, а значит, допускает оценку $\mathbf{Sc}_\beta[\Phi](p) \geq \varphi_* > 0$. Другими словами, $\varphi = \mathbf{Sc}_\beta[\Phi]$ обладает всеми свойствами, описанными в определении 4.10, поэтому входит в область определения оператора $\mathbf{In}_\beta$.

5. $\mathbf{In}_\beta \circ \mathbf{Sc}_\beta = \mathbf{P}_\beta$.

Кроме того, имеет место следующее свойство.

Утверждение 4.12. *Если* $\Phi_1 \prec \Phi_2$, *то* $\mathbf{Sc}_\beta[\Phi_1] \overset{\varphi}{\succ} \mathbf{Sc}_\beta[\Phi_2]$, *т. е. при* $\Phi_1 \sim \Phi_2$ *верно* $\mathbf{Sc}_\beta[\Phi_1] \overset{\varphi}{\sim} \mathbf{Sc}_\beta[\Phi_2]$.

Доказательство. При всех $u \geq 1$ имеем оценку $\Phi_1(u) \leq \Phi_2(cu) + d$, поэтому

$$\frac{\Phi_1(u)}{u^p} \leq \frac{d}{u^p} + \frac{\Phi_2(cu)}{(cu)^p} c^p.$$

Взяв $\min\limits_{u \geq 1}$ в левой части последнего неравенства, а затем в правой, получим с учетом (1.12)

$$\mathbf{m}_{\Phi_1}(p) \leq c^p \min_{v \geq c} \frac{\Phi_2(v)}{v^p} = c^p \mathbf{m}_{\Phi_2}(p),$$

откуда ввиду $(4.18)_1$ вытекает требуемое. $\square$

Из указанных свойств следует сохранение отображением $\mathbf{P}_\beta$ порядков $\sim$ и $\prec$, откуда, в частности, получаем, что класс $\mathscr{E}$ содержит все $\Phi \sim \Phi_0$, если $\Phi_0 \in \mathscr{E}$. Естественно также высказать следующее предположение.

Гипотеза 4.13. *Свойство* 3 *оператора* $\mathbf{In}_\beta$ *имеет место и в обратную сторону, т. е. из* $\mathbf{In}_\beta[\varphi_1] \succ \mathbf{In}_\beta[\varphi_2]$ *следует* $\varphi_1 \overset{\varphi}{\prec} \varphi_2$.

Обоснованием этой гипотезы мы не будем здесь заниматься за недостатком места, но отметим, что в случае ее справедливости будет обосновано следующее

Утверждение 4.14 (условное). *Пусть верна гипотеза* 4.13. *Пусть заданы два преобразования* $\mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1}$ *и* $\mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}$ *с пороговыми функциями* M_{*1} *и* M_{*2} *соответственно, принадлежащими* $\mathscr{E}$. *Тогда оператор* $\mathbf{F}_{\psi_3,\sigma_3} = \mathbf{F}_{\psi_1,\sigma_1} \circ \mathbf{F}_{\psi_2,\sigma_2}$ *допускает представление своей пороговой функции* M_{*3} *в виде*

$$M_{*3}(v) \sim \int\limits_{\alpha}^{+\infty} \mathbf{m}_{M_{*1}}(p) \cdot \mathbf{m}_{M_{*2}}(p) v^p \, dp \tag{4.19}$$

с любым $\alpha < +\infty$.

Доказательство. Обозначим характеристики преобразований $\mathbf{F}_{\psi_k,\sigma_k}$ через φ_k, $k = 1, 2, 3$. В силу замечания 2.9 имеем $M_{*k} = \mathbf{In}_\infty[\varphi_k]$, а по предложению 2.10 $\varphi_3 = \varphi_1 \varphi_2$. Обозначим $\omega_k = \mathbf{Sc}_\infty[M_{*k}]$, $k = 1, 2$. Тогда для $k = 1, 2$ имеем цепочку соотношений:

$$\mathbf{In}_\infty[\varphi_k] = M_{*k} \sim \mathbf{P}_\infty[M_{*k}] = \mathbf{In}_\infty[\omega_k],$$

из которой на основании гипотезы 4.13 можно заключить, что $\varphi_k \overset{\mathscr{L}}{\sim} \omega_k$, $k = 1, 2$, поэтому $\varphi_3 \overset{\mathscr{L}}{\sim} \omega_1\omega_2$, откуда ввиду свойства 3 оператора $\mathbf{In}_\beta$ окончательно следует $M_{*3} \sim \mathbf{In}_\infty[\omega_1\omega_2]$, что и означает (4.19). $\square$

Также с учетом связи $M_* = \mathbf{In}_\infty[\varphi]$, существующей для всех преобразований $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$, можно дополнить диаграмму (2.22) импликацией

$$\varphi_1 \overset{\varphi}{\prec} \varphi_2 \Longrightarrow M_{*1} \succ M_{*2}, \tag{4.20}$$

причем если верна гипотеза 4.13, то (4.20) имеет место в обе стороны. Таким образом, порядки на множестве преобразований $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ можно выражать и в терминах их пороговых функций.

О приложениях результатов настоящей работы. Как указано во введении, изучение классов $\mathscr{C}(\beta)$ и преобразований $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$ на них проводится нами с целью экстраполяции функций и операторов из L_p в пространства Орлича. При этом в качестве φ выступает норма функции или оператора в L_p — известная величина, на основе которой строится (как в § 3) вспомогательное преобразование $\mathbf{F}_{\psi,\sigma}$, применяемое далее к пространствам Орлича. В связи с этим нужно оговорить следующие моменты.

О классах функций φ. Согласно теореме М. Рисса [4, с. 546–565] функция $\varphi(p)$, если она является нормой линейного оператора или функции в L_p, обязана обладать свойством «$\ln\varphi(1/a)$ выпукла по a», которое легко переписать в виде

$$p \cdot \mathbf{e}_\varphi(p) \quad \text{— неубывающая функция от } p. \tag{4.21}$$

Однако мы находимся в ситуации, когда φ есть не точная величина нормы, а ее оценка, которая, естественно, может и не удовлетворять (4.21). С другой стороны, если ограничение (4.21) нам где-либо требуется (например в утверждении 4.4), мы можем его накладывать, не сужая тем самым класс допустимых операторов и функций. Впрочем, представляя φ в виде $\varphi(p) = \exp(F(\ln p))$, можно для гладких F переписать (4.21) в виде $F'' + F' \geq 0$ и убедиться, что рассматриваемые в § 3 классы удовлетворяют указанному ограничению. Кроме того, (4.21) ограничивает не скорость, а лишь характер роста φ.

О представлении N-функций рядами и интегралами. Методы настоящей статьи и их применение к экстраполяции из L_p в пространства Орлича можно в основном воспроизвести также в случае, когда N-функции представляются не интегралами (1.1), а рядами:

$$\Phi(s) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k s^{\gamma_k}, \quad \gamma_k \to \beta, \quad \chi_k > 0. \tag{4.22}$$

Представление (4.22) в некоторых случаях удобнее (1.1), в частности, по следующим причинам.

• Для многих элементарных функций известны готовые разложения в ряды с положительными коэффициентами, по крайней мере для $\beta = +\infty$.

• Представимость рядом (4.22) с точностью до $\sim$ (например для «дискретного» аналога класса $\mathscr{E}$) может быть доказана для более широких классов функций Φ, и доказательство этого факта в определенных отношениях упрощается.

Представления (4.22) использовались в работах [5, 6]. Однако в целом ряды более громоздки в работе и менее удобны для нахождения прообраза $\{\chi_k\}$

произвольно заданной функции Φ. Поэтому мы остановили свой выбор на интегральных представлениях. Впрочем, можно показать, что (1.1) и (4.22) в некотором смысле эквивалентны, т. е. сводятся друг к другу.

О вычислении оператора $R\mathbf{F}_{\psi,\sigma}R$. При работе с двойственными по Юнгу N-функциями (экстраполяция сопряженных операторов) возникает необходимость применения отображения $R\mathbf{F}_{\psi,\sigma}R$. Может оказаться полезным аналитическое его представление. Продолжим ψ нулем на $[0,\sigma)$, так что можно считать $\sigma = 0$. Введем функцию $K_\psi(z) = \int\limits_z^{+\infty} s\psi(s)\,ds$ (интеграл сходится ввиду (2.1)). Пусть $N = R\mathbf{F}_{\psi,0}R[\Psi]$. Обозначим $\Phi = R[\Psi]$, $M = R[N]$, т. е. $M = \mathbf{F}_{\psi,0}[\Phi]$. Заметим, что $\Phi(2v) > \int\limits_v^{2v} \Phi'(s)\,ds$, поэтому справедлива оценка

$$\Phi'(\eta) \leq \frac{\Phi(2\eta)}{\eta}, \tag{4.23}$$

из которой следует, что функция $\Phi'(vs)s\psi(s)$ интегрируема по $s \in \mathbb{R}^+$, если $\Phi \prec\!\!\prec M_*$. Значит, имеет место представление

$$M'(v) = \int\limits_0^{+\infty} \psi(s)s\Phi'(vs)\,ds.$$

Интегрируя тождество

$$\frac{d}{ds}\Phi'(vs)K_\psi(s) = -\Phi'(vs)s\psi(s) + K_\psi(s)\Phi''(vs)v$$

по $s \in \mathbb{R}^+$, получим (делая в последнем интеграле замену $\eta = \Phi'(vs)$)

$$\Phi'(vs)K_\psi(s)|_{s=+\infty} = -M'(v) + \int\limits_0^{+\infty} K_\psi\left(\frac{\Psi'(\eta)}{v}\right)d\eta. \tag{4.24}$$

Левая часть (4.24) равна нулю, поскольку при $s \leq \xi$

$$\frac{\Phi(2vs)}{2vs} \leq \frac{\Phi(2v\xi)}{2v\xi},$$

так что, пользуясь (4.23), можно написать

$$\Phi'(vs)K_\psi(s) \leq \frac{\Phi(2vs)}{vs}\int\limits_s^{+\infty} \xi\psi(\xi)\,d\xi \leq \frac{1}{v}\int\limits_s^{+\infty} \Phi(2v\xi)\psi(\xi)\,d\xi \to 0 \quad \text{при } s \to +\infty.$$

Следовательно, интеграл в правой части (4.24) сходится, и в итоге, положив $v = N'(r)$, получим искомое представление

$$\int\limits_0^{+\infty} K_\psi\left(\frac{\Psi'(\eta)}{N'(r)}\right)d\eta = r \tag{4.25}$$

преобразования $R\mathbf{F}_{\psi,0}R : \Psi \mapsto N$.

Для каждой ψ можно упрощать вид (4.25), заменяя ψ эквивалентной функцией (что в силу следствия 2.19 не меняет оператора $R\mathbf{F}_{\psi,0}R$) и подбирая наиболее простые K_ψ. Например, для $\psi(s) = e^{-s}$ будем иметь $K_\psi(s) = (s+1)e^{-s}$; заменяя ψ эквивалентной ей функцией $\psi_1(s) = e^{-s}/s$, получим $K_{\psi_1}(s) = e^{-s}$.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность рецензенту, замечания которого позволили улучшить качество работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969.
2. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
3. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
5. *Мамонтов А. Е.* Экстраполяция линейных операторов из L_p в пространства Орлича, порожденные быстро или медленно растущими N-функциями // Актуальные проблемы современной математики. Новосибирск: НГУ, 1996. Т. 2. С. 95–103.
6. *Mamontov A. E.* Orlicz spaces in the existence problem of global solutions to viscous compressible nonlinear fluid equations // Новосибирск: ИГиЛ СО РАН, 1996. (Препринт 2–96).

Статья поступила 8 декабря 2004 г., окончательный вариант — 24 июня 2005 г.

Мамонтов Александр Евгеньевич
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
relic@hydro.nsc.ru