Сибирский математический журнал
Июль—август, 2006. Том 47, № 4

УДК 512.54

КОНЕЧНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ С ДОПОЛНЯЕМЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В. М. Левчук, А. Г. Лихарев

Аннотация: Исследуется записанный в [1] вопрос 8.31 об описании конечных слабо факторизуемых групп, т. е. групп, у которых каждая собственная подгруппа дополняема в большей подгруппе. По лемме 1 из статьи [2] полупрямое произведение вполне факторизуемой группы (такие группы изучены в работах Ф. Холла и Н. В. Баевой (Черниковой)) на слабо факторизуемую есть слабо факторизуемая группа. Там же в связи с замечанием отмечается, что диэдральная 2-группа всегда слабо факторизуема, однако в общем случае ее нельзя получить даже повторными применениями указанной леммы из групп простого показателя. Доказанная с использованием известных максимальных факторизаций теорема 1 показывает, что существуют в точности три конечных простых неабелевых группы с дополняемыми максимальными подгруппами. Теорема 2 подтверждает гипотезу из [2] о единственности конечной простой неабелевой группы со свойством слабой факторизуемости. Ранее теоремы 1 и 2 устанавливались А. Г. Лихаревым в частных случаях.

Ключевые слова: факторизация, слабо дополняемая подгруппа, конечная простая группа, максимальная подгруппа.

Подгруппу M называют *дополняемой в группе* G, если в G существует дополнение к ней, т. е. подгруппа K такая, что $M \cap K = 1$ и $MK = G$. *Слабо дополняемой в* G назовем подгруппу, которая дополняема в некоторой большей (по включению) подгруппе или совпадает с G. Ясно, что для максимальных подгрупп эти понятия совпадают. К основным результатам статьи относится

Теорема 1. *Если в конечной простой неабелевой группе каждая максимальная подгруппа дополняема, то группа изоморфна* $L_2(7)$, $L_2(11)$ *или* $L_5(2)$.

Группы с дополняемыми подгруппами, называемые вполне факторизуемыми, изучены в работах Ф. Холла, Н. В. Баевой (Черниковой) и С. Н. Черникова [3–5]. Их исчерпывают полупрямые произведения $F \leftthreetimes K$, где обе подгруппы F и K разложимы в прямое произведение конечных циклических групп простых порядков, причем все сомножители в F можно выбрать нормальными в группе. Более широкий класс образуют *слабо факторизуемые группы*, у которых по определению каждая подгруппа слабо дополняема. К ним относятся, например, группа $L_2(7)$ (краткое обозначение $PSL_2(7)$) и конечные группы простого показателя; другие примеры см. в § 1.

Вопрос об описании конечных слабо факторизуемых групп записан в «Коуровской тетради» [1, вопрос 8.31]. Склонность к слабой факторизуемости силовских подгрупп классических групп выявляется в [2]. Там же высказано

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 03–01–00905 и 06–01–00824а).

предположение, что $L_2(7)$ — единственная конечная простая неабелева группа со свойством слабой факторизуемости (см. также замечание 1 в § 1). Гипотезу из [2] подтверждает

Теорема 2. *Группа $L_2(7)$ является единственной конечной простой неабелевой группой со свойством слабой факторизуемости.*

Итак, уже в классе конечных простых групп свойство дополняемости максимальных подгрупп не совпадает со свойством слабой факторизуемости. Отметим, что Ито [6] еще в 1953 г. указал все максимальные факторизации группы $L_2(q)$, т. е. ее представления произведением двух максимальных подгрупп. Доказательство теоремы 1 в § 2–4 использует известные описания [6–10] максимальных подгрупп и максимальных факторизаций конечных простых групп, а также лемму В. Д. Мазурова для знакопеременных групп.

Ранее А. Г. Лихарев [11, 12] доказал теоремы для групп Сузуки и Ри, $L_3(q)$ $(q > 4)$, $PSU_3(q)$ и для большинства спорадических групп. Теоремы 1 и 2 недавно анонсированы независимо В. Н. Тютяновым [13] и авторами [14].

§ 1. Некоторые свойства слабо факторизуемых групп

Лемма 1. *Пусть H — подгруппа полупрямого произведения $F \leftthreetimes K$ групп F и K, причем пересечение $H \cap F$ имеет дополнение D в F. Тогда D является дополнением также подгруппы H в подгруппе HF.*

Доказательство. Это сразу же следует из соотношений

$$H \cap D = (H \cap F) \cap D = 1, \quad HD = H(H \cap F)D = HF.$$

Отмеченное свойство позволяет эффективно строить слабо факторизуемые группы. Учитывая, что вполне факторизуемость переносится на прямые произведения, получаем: *сплетение $F \wr K$ вполне факторизуемой группы F и слабо факторизуемой группы K есть слабо факторизуемая группа.* Более общий метод построения указан в [5, лемма 1]: *полупрямое произведение вполне факторизуемой и слабо факторизуемой групп есть слабо факторизуемая группа.*

Поскольку свойства полной и слабой факторизуемости, очевидно, сохраняются при гомоморфизмах групп (или, другими словами, наследуются фактор-группами), то получаем даже более точное утверждение.

Лемма 2. *Для слабой факторизуемости полупрямого произведения $F \leftthreetimes K$, где F — вполне факторизуемая группа, необходима и достаточна слабая факторизуемость группы K.*

Если прямое произведение групп есть слабо факторизуемая группа, то и все его сомножители слабо факторизуемы в силу наследования этого свойства фактор-группами. Возникает вопрос: *переносится ли слабая факторизуемость на прямые произведения групп?* Ответ в частном случае дает

Предложение 1. *Прямое произведение слабо факторизуемых групп конечных попарно взаимно простых порядков есть слабо факторизуемая группа.*

Доказательство. Индукцией по числу сомножителей доказательство сводится к случаю прямого произведения $G = A \times B$ двух слабо факторизуемых групп A и B конечных взаимно простых порядков. Используя взаимную простоту чисел $|A|$ и $|B|$, находим

$$(ab)^{|B|} = a^{|B|} \cdot b^{|B|} = a^{|B|}, \quad \langle a^{|B|} \rangle = \langle a \rangle \quad (a \in A,\ b \in B).$$

Следовательно, проекция произвольной подгруппы L в G, скажем, на A совпадает с пересечением $L \cap A$, откуда $L = (L \cap A) \times (L \cap B)$. Если сомножитель $L \cap A$ имеет дополнение D в большей подгруппе в A, то $LD = ((L \cap A)D) \times (L \cap B)$ — подгруппа, в которой D есть дополнение к L. Предложение доказано.

Замечая, что для конечной группы нильпотентность равносильна разложимости в прямое произведение силовских подгрупп, получаем

Следствие 1. *Конечная нильпотентная группа слабо факторизуема тогда и только тогда, когда все ее силовские подгруппы слабо факторизуемы.*

Из [2, теорема 1] вытекает

Лемма 3. *В классе абелевых групп свойства вполне факторизуемости и слабой факторизуемости совпадают.*

Таким образом, свойство слабой факторизуемости циклической группы равносильно тому, что она имеет конечный порядок, не делящийся на квадраты простых чисел. Диэдральная группа слабо факторизуема тогда и только тогда, когда ее порядок конечен и не делится на квадраты нечетных простых чисел [2, лемма 2]. Это показывает, что свойство слабой факторизуемости в отличие от вполне факторизуемости не всегда наследуется подгруппами.

Замечание 1. Конечные слабо факторизуемые p-группы образуют широкий класс; вместе со своими подгруппами они исчерпывают все конечные p-группы [2, с. 572]. В связи с замечанием там же отметим, что диэдральная 2-группа G всегда слабо факторизуема. Однако при $|G| > 8$ ее нельзя получить из групп показателя 2 повторными применениями леммы 2, поскольку все ее нормальные подгруппы показателя 2 инцидентны с центром и имеют порядок не выше 4.

В следующих параграфах исследуется гипотеза из [2, с. 572] о единственности слабо факторизуемой конечной простой неабелевой группы.

Для доказательства ключевой теоремы 1 в § 2–4 показывается, что в наиболее типичных ситуациях удается выявить максимальную подгруппу, не участвующую в максимальных факторизациях. В группах Шевалле такую подгруппу, как правило, можно выбрать из параболических подгрупп. Как и в [10], для всех натуральных чисел i, не превышающих лиева ранга группы Шевалле $G(q)$, выделяем в ней параболическую подгруппу P_i, полученную исключением i-й вершины в стандартной диаграмме Дынкина, ассоциированной с $G(q)$ (см. [15, 16]). Подгруппы P_i максимальны в группе $G(q)$ и исчерпывают все ее максимальные параболические подгруппы.

Максимальные факторизации группы, т. е. ее представления произведением двух максимальных подгрупп, по-видимому, впервые стал рассматривать Ито [6], исследовав факторизации групп $L_2(q)$. Известные описания максимальных подгрупп конечных простых групп отражаются в [7–9], а результаты по максимальным факторизациям конечных простых групп систематизированы в монографии [10].

§ 2. Факторизации групп $L_n(q)$

Лемма 4. *В группе* $L_2(q)$, $q \geq 2$, *все максимальные подгруппы дополняемы тогда и только тогда, когда* q *равно* $2, 3, 7$ *или* 11. *Группа* $L_2(q)$ *является слабо факторизуемой тогда и только тогда, когда* $q = 2, 3, 7$.

Доказательство. Мономиальная подгруппа N группы $L_2(q)$ имеет индекс $q(q+1)/2$ и является диэдральной группой. При $q > 11$ она содержит элемент порядка > 5 и, следовательно, не вложима в группы подстановок S_4 и A_5. Хорошо известное подгрупповое описание группы $L_2(q)$ показывает, что ее подгруппа N максимальна при $q > 11$, а также при четных q. При всех $q > 4$ в $L_2(q)$ нет подгрупп порядка $q(q+1)/2$ и поэтому подгруппа N недополняема. Кроме того, согласно Ито [6] в группе $L_2(q)$ параболическая максимальная подгруппа P_1 входит в максимальные факторизации тогда и только тогда, когда q четно или $q = 3 \bmod 4$.

Итак, *в группе* $L_2(q)$, $q = 4, 5, 8, 9$ *или* $q > 11$, *хотя бы одна из подгрупп* P_1 *и* N *является недополняемой максимальной подгруппой.* В частности, в группе $L_2(5)$ ($\simeq L_2(4) \simeq A_5$) подгруппы порядков 10 и 6 являются недополняемыми максимальными подгруппами.

Как показано в [2, пример 1], группы $L_2(q)$ при $q = 2, 3, 7$ являются слабо факторизуемыми. Группа $L_2(11)$ имеет порядок $5 \cdot 11 \cdot 12$, и ее произвольная максимальная подгруппа M либо является диэдральной группой порядка 12, либо сопряжена с параболической подгруппой P_1 порядка $5 \cdot 11$, либо с точностью до сопряжения содержит N и изоморфна группе $L_2(5)$. Очевидно, в первых двух случаях M — дополняемая подгруппа. В последнем случае дополнением к M служит любая силовская 11-подгруппа. С другой стороны, дополнение к подгруппе N порядка 10 не существует ни в $L_2(11)$, ни в M, как показано выше. Отсюда вытекает, что слабое дополнение к N не существует и группа $L_2(11)$ не является слабо факторизуемой. Лемма доказана.

Отметим, что группа $L_m(2)$ при $m = 3$ изоморфна слабо факторизуемой группе $L_2(7)$, а при $m = 2$ даже вполне факторизуема. Нам потребуется

Лемма 5. *Пусть* $p = 2^n - 1$ — *простое число Мерсенна и* N — *нормализатор силовской* p*-подгруппы группы* $L_m(2)$, $m = n, n+1$. *Тогда* $|N| = np$.

Доказательство. В разложении $2^Q(2^m - 1)(2^{m-1} - 1) \dots (2^2 - 1)$, $Q = \binom{m}{2}$, порядка группы $L_m(2)$ только сомножитель $2^n - 1 = p$ делится на p. Следовательно, силовская p-подгруппа в $L_m(2)$ — циклическая подгруппа $\langle \alpha \rangle$ порядка p, причем характеристический многочлен матрицы α имеет неприводимый над $GF(2)$ множитель $g(\lambda)$ степени n; оставшийся множитель при $m = n+1$ равен $\lambda - 1$. Все корни множителя $g(\lambda)$ являются примитивными элементами расширения $GF(2^n)$ поля $GF(2)$ и имеют вид $c, c^2, c^4, \dots, c^{2^{n-1}}$. Поэтому матрица α сопряжена в $L_m(2^n)$ с матрицей $\delta = \mathrm{diag}(c, c^2, c^4, \dots, c^{2^{n-1}})$ при $m = n$, а при $m = n+1$ приводится к диагональному виду $\delta = \mathrm{diag}(1, c, c^2, c^4, \dots, c^{2^{n-1}})$.

Пусть γ — элемент нормализатора M подгруппы $\langle \delta \rangle$ в $L_m(2^n)$. Так как диагональные элементы в δ попарно различны, то из равенства $\delta\gamma = \gamma\delta^i$, $1 \leq i < p = 2^n - 1$, сразу следует мономиальность матрицы γ, а при $i = 1$ — даже диагональность. Следовательно, централизатор δ в $L_m(2^n)$ — диагональная подгруппа C и, в частности, является p-группой. Поскольку сопряжение $\gamma^{-1}\delta\gamma$ не изменяет характеристического многочлена, оно действует на δ как одна из степеней автоморфизма $t \to t^2$ поля $GF(2^n)$ и поэтому $|M : C| = n$. Заметим, что сопряженность в $L_m(2^n)$ элементов из $L_m(2)$, в частности, степеней $\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \dots$ равносильна их сопряженности в $L_m(2)$. Учитывая, что p^2 не делит порядок группы $L_m(2)$, окончательно получаем $|N| = np$. Лемма доказана.

Лемма 6. *В группе $L_4(2)$ подгруппа $Sp_4(2)$ максимальна и недополняема. Группа $L_5(2)$ не является слабо факторизуемой группой, но всякая ее максимальная подгруппа дополняема.*

Доказательство. Согласно [17] (см. также [7, 8]) максимальные подгруппы группы $L_4(2)$ ($\simeq A_8$) исчерпывают с точностью до сопряжения подгруппа $Sp_4(2)$, параболические подгруппы P_i, $i = 1, 2, 3$, подгруппа, изоморфная A_7, и определенная подгруппа порядка $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Отметим равенства

$$|L_5(2)| = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31, \quad |L_4(2)| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7, \quad |L_4(2) : Sp_4(2)| = 2^2 \cdot 7.$$

Если в $L_4(2)$ существует дополнение D к подгруппе $Sp_4(2)$, то $|D| = 2^2 \cdot 7$ и в D силовская 7-подгруппа нормальна по теореме Силова. Однако в силу леммы 5 (случай $n = 3$) это противоречит строению нормализатора силовской 7-подгруппы в $L_4(2)$.

По лемме 5 (случай $n = 5$) в группе $G = L_5(2)$ нормализатор M силовской 31-подгруппы имеет порядок $31 \cdot 5$. Вместе с параболическими подгруппами P_i, $i = 1, 2, 3, 4$, он исчерпывает все с точностью до сопряженности максимальные подгруппы группы G (см., например, [7, 8, 10]). Кроме того,

$$P_1 = E_{16} \leftthreetimes L_4(2), \quad P_2 = E_{64} \leftthreetimes (L_2(2) \times L_3(2)), \quad |P_1| = 5 \cdot |P_2| = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7,$$

где E_{2^k} — элементарная абелева 2-группа порядка 2^k. Сравнение порядков дает факторизации $G = P_2 \cdot M = P_1 \cdot G_{31}$ и показывает, что подгруппа P_2 дополняема в группе G подгруппой M, а P_1 — силовской подгруппой G_{31} порядка 31. Графовый автоморфизм группы G переводит друг в друга ее параболические подгруппы P_1 и P_4, а также P_2 и P_3. Отсюда вытекает, что каждая максимальная подгруппа в группе $L_5(2)$ является холловской и каждая из них дополняема холловской подгруппой.

Ясно, что конечная группа слабо факторизуема, если ее максимальные подгруппы дополняемы и слабо факторизуемы. Максимальная в $L_5(2)$ подгруппа M, а также $L_2(2)$, E_{16} и E_{64} являются вполне факторизуемыми группами. Приведенное выше разложение для P_2 и лемма 2 показывают, что вместе с $L_3(2)$ слабо факторизуемыми группами являются также максимальные подгруппы P_2 и P_3 ($\simeq P_2$). Однако максимальная подгруппа P_1 по лемме 2 вместе с $L_4(2)$ не является слабо факторизуемой группой.

Рассмотрим максимальную в P_1 подгруппу $E_{16} \leftthreetimes Sp_4(2) = Q$. Она не лежит в максимальных подгруппах группы $L_5(2)$, отличных от P_1, и недополняема в P_1. С другой стороны, она недополняема и в $L_5(2)$, поскольку $|L_5(2) : Q| = 2^2 \cdot 7 \cdot 31$ и в $L_5(2)$ нет подгрупп порядка, кратного числу $31 \cdot 7$. Таким образом, подгруппа Q не имеет слабого дополнения в $L_5(2)$, и $L_5(2)$ не является слабо факторизуемой группой. Лемма доказана.

Лемма 7. *В группе $L_n(q)$ при $n \geq 3$, $(n, q) \neq (3, 2), (5, 2)$, существует недополняемая максимальная подгруппа.*

Доказательство. Отметим, что для групп $L_3(q)$, $q > 4$, недополняемая максимальная подгруппа указывается в [11]. Случай группы $L_4(2)$ см. в лемме 6.

Подгрупповое описание групп $L_3(q)$ при четном q указал Хартли (1925 г.), см. также [8]. В частности, максимальные подгруппы группы $L_3(4)$ с точностью до сопряжения исчерпывают следующие:

две параболические подгруппы P_1, P_2 порядка $2^6 \cdot 3 \cdot 5$;

подгруппа $L_3(2)$ порядка $2^3 \cdot 3 \cdot 7$;

подгруппа $U_3(2)$ индекса $2^3 \cdot 5 \cdot 7$;

подгруппа, изоморфная группе A_6 порядка $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Отсюда следует, что группа $L_3(4)$ порядка $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ не содержит подгрупп порядка $2^3 \cdot 5 \cdot 7$ и поэтому ее максимальная подгруппа $U_3(2)$ недополняема.

В группе $L_3(3)$ максимальной является подгруппа S_4 порядка $2^3 \cdot 3$. Согласно [10] она не входит ни в одну максимальную факторизацию группы $L_3(3)$ и, следовательно, недополняема в $L_3(3)$.

Максимальные факторизации конечных простых групп систематизированы в [10]. Возможные максимальные факторизации представляются в виде $G = (A \cap G)(B \cap G)$, где подгруппы A, B группы $G = L_n(q)$ в требуемых нам случаях перечислены в табл. 1.

Таблица 1. Факторизации группы $L_n(q)$, $n \geq 4$, $(n, q) \neq (4, 2), (5, 2)$

G	A	B	Примечания
$L_n(q)$	$\hat{}GL_a(q^b) \cdot b$	P_1 или P_{n-1}	$ab = n$, b простое
	$PSp_n(q)$	P_1 или P_{n-1}	n четное

Таким образом, для группы $G = L_n(q)$, $n \geq 4$, $(n, q) \neq (4, 2), (5, 2)$, максимальные параболические подгруппы P_i, $1 < i < n-1$, не входят в максимальные факторизации и тем самым недополняемы. Доказательство леммы завершено.

Леммы 4, 6 и 7 доказывают теоремы 1 и 2 в классе групп $L_n(q)$. Очевидно, далее достаточно доказать только теорему 1.

§ 3. Группы Шевалле $\neq L_n(q)$ и максимальные факторизации

Далее будут систематически использоваться обозначения, принятые в [7, 8] и [12] для классических и спорадических групп, групп Шевалле и их стандартных подгрупп. В этом параграфе $G(q)$ — группа Шевалле нормального или скрученного типа над полем из q элементов.

Вначале отделим исключительные группы $PSU_4(2) \simeq PSp_4(3)$.

Лемма 8. *Изоморфные группы $PSU_4(2)$ и $PSp_4(3)$ обладают недополняемой максимальной подгруппой.*

Доказательство. Максимальные подгруппы группы $PSU_4(2)$ исчерпываются с точностью до сопряжения следующими (см. [7]):

параболическими подгруппами $P_1 \simeq 2^4 : A_5$ и $P_2 \simeq 2.(A_4 \times A_4).2$ индексов 27 и 45 соответственно;

подгруппой $PSU_4(2) \cap L_4(2) \simeq Sp_4(2) \simeq S_6$ индекса 36;

двумя подгруппами ($3^3 : 2A_4$ и $3^3 : S_4$) индекса 40, являющимися параболическими в $Sp_4(3)$.

Допустим, что в группе $PSU_4(2)$ подгруппа индекса 40 или 45 имеет дополнение D. Тогда силовская 5-подгруппа в дополнении нормальна по теореме

Силова и ее нормализатор в группе $PSU_4(2)$ лежит в максимальной подгруппе, изоморфной S_6. Это означает, что в симметрической группе S_6 элемент $\alpha = (12345)$ порождает подгруппу, нормализатор N которой имеет порядок $|N|$, кратный числу $|D| = 40$ или 45. С другой стороны, если $\gamma \in S_6$, то для включения $\gamma^{-1}\alpha\gamma = (1'2'3'4'5') \in \langle\alpha\rangle$, $i' = \gamma(i)$, образ $1'$ можем выбрать пятью способами, образ $2' \neq 1'$ — четырьмя способами; тогда остальные образы $\gamma(i)$ однозначно определены. Следовательно, $|N| = 20$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 9. *Группы Шевалле $G(q) \neq L_n(q)$, $PSp_4(3)$, $PSU_4(2)$, в которых все максимальные параболические подгруппы входят в максимальные факторизации, — это в точности следующие группы:*

$$Sp_4(2^k), \quad PSU_4(3), \quad PSU_3(3), \quad PSU_3(5). \tag{1}$$

Доказательство. Напомним, что максимальные параболические подгруппы группы $G(q)$ исчерпываются подгруппами P_i, выделяемыми для всех натуральных чисел i, не превышающих лиева ранга группы $G(q)$ (см. § 1).

В группах Сузуки $\mathrm{Sz}(q) = {}^2B_2(q)$ и Ри $\mathrm{Re}(q) = {}^2G_2(q)$ единственная (максимальная) параболическая подгруппа P_1 не входит в максимальные факторизации [11, лемма 1]. Там же рассматривались оставшиеся группы лиева типа ранга 1 — группы $PSU_3(q)$.

В [10, табл. 1–6] систематизированы все максимальные факторизации конечных квазипростых групп. Ограниченность нашей задачи простыми группами позволяет использовать таблицы из [10] с некоторыми упрощениями.

Максимальные факторизации группы Шевалле $G = G(q)$ представляются в виде $G = (A \cap G)(B \cap G)$ для определенных A, B, перечисленных в таблицах в соответствии с выбором G. Для групп Шевалле исключительных типов лиева ранга > 1 они указаны в табл. 2.

Таблица 2. Факторизации групп Шевалле исключительных типов

G	A	B
$G_2(q)$, $q = 3^k$	$SL_3(q)$ или $SL_3(q).2$	${}^2G_2(q)$, $SU_3(q)$ или $SU_3(q).2$
$F_4(q)$, $q = 2^k$	$Sp_8(q)$	${}^3D_4(q)$ или ${}^3D_4(q).2$
$G_2(4)$	J_2 $G_2(2) \times 2$	$SU_3(4)$ или $SU_3(4).2$ $SU_3(4).4$

В частности, группы $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, ${}^2F_4(q)$ и ${}^3D_4(q)$ не имеют ни одной максимальной факторизации. Таким образом, в исключительных группах Шевалле ни одна из параболических подгрупп не участвует в максимальных факторизациях.

Наряду с отношениями $B_2(q) = C_2(q)$ и $L_n(q) = PSL_n(q) \simeq A_{n-1}(q)$ мы учитываем в таблицах следующие изоморфизмы между группами Шевалле и классическими группами:

$$B_n(2^k) \simeq C_n(2^k), \quad PSU_n(q) \simeq {}^2A_{n-1}(q), \quad PSp_{2n}(q) \simeq C_n(q),$$
$$P\Omega_{2n+1}(q) \simeq B_n(q), \quad P\Omega_{2n}^+(q) \simeq D_n(q), \quad P\Omega_{2n}^-(q) \simeq {}^2D_n(q).$$

Таблица 3. Факторизации симплектических и унитарных групп

G	A	B	Примечания
$PSp_{2n}(q)$	$PSp_{2a}(q^b).b$	P_1	$ab = n$, b простое, $n \geq 2$
	$Sp_{2a}(q^b).b$	$O^{\varepsilon}_{2n}(q)$ $(\varepsilon = \pm)$	q четное, $ab = n$, b простое
	$O^-_{2n}(q)$	P_n	q четное
	$O^-_{2n}(q)$	$Sp_n(q) \wr S_2$	q четное, n четное
	$Sp_n(4).2$	N_2	$q = 2$, n четное
	$O^-_{2n}(2)$	$O^+_{2n}(2)$	$q = 2$
$Sp_4(q)$	$Sz(q)$	$O^+_4(q)$	$q = 2^{2c+1} \geq 8$
$Sp_6(q)$	$G_2(q)$	$O^{\varepsilon}_6(q)$, N_2 или P_1	q четное, $\varepsilon = \pm$
$Sp_8(2)$	$O^-_8(2)$	S_{10}	
	$L_2(17)$	$O^+_8(2)$	
$PSp_6(3)$	$L_2(13)$	P_1	
$PSU_{2n}(q)$	N_1	P_n или $PSp_{2n}(q)$	$n \geq 2$
	N_1	$\hat{S}L_n(4).2$	$q = 2$, $n \geq 3$
$PSU_{12}(2)$	Suz	N_1	
$PSU_9(2)$	J_3	P_1	
$PSU_6(2)$	N_1	$PSU_4(3).2$ или M_{22}	
$PSU_4(3)$	$L_3(4)$	P_1 или $PSp_4(3)$	
$PSU_3(3)$	$L_2(7)$	P_1	
$PSU_3(5)$	A_7	P_1	

Замечание 2. Как правило, таблицы в [10] указывают возможные максимальные факторизации для одной из изоморфных групп. Кроме того, некоторые факторизации реализуются лишь при дополнительных ограничениях на участвующие в таблицах параметры (это относится, например, к выписанной первой в табл. 1 факторизации), в отдельных явно оговоренных случаях нарушается максимальность (не параболических) сомножителей.

Максимальные факторизации $G = (A \cap G)(B \cap G)$ для симплектических и унитарных групп $\neq PSp_4(3), PSU_4(2)$ лиева ранга > 1 и участвующие в них параболические подгруппы согласно [10] дает табл. 3.

Наконец, для ортогональных групп, т. е. для оставшихся групп Шевалле лиева ранга > 1 классических типов, максимальные факторизации $G = (A \cap G)(B \cap G)$ указывает табл. 4.

Приведенное перечисление позволяет легко выделить все параболические подгруппы, участвующие в максимальных факторизациях. Оказывается, все случаи, когда максимальная параболическая подгруппа M группы Шевалле $G = G(q) \neq L_n(q)$, $PSU_4(2)$, $PSp_4(3)$ входит в какую-либо максимальную факторизацию, исчерпываются следующими:

- $G = PSU_{2n}(q)$ $(n \geq 2)$ и $M = P_n$;
- $G = PSU_9(2)$, $PSU_4(3)$, $PSU_3(3)$ или $PSU_3(5)$ и $M = P_1$;
- $G = PSp_{2n}(q)$ $(n \geq 2)$, $M = P_1$ или q — четное число и $M = P_n$;

Таблица 4. Факторизации ортогональных групп

G	A	B	Примечания
$\Omega_{2n+1}(q)$	N_1^-	P_n	$n \geq 3$, q нечетно
$\Omega_{25}(3^e)$	$F_4(3^e)$	N_1^-	
$\Omega_{13}(3^e)$	$PSp_6(3^e).a$	N_1^-	$a \leq 2$
$\Omega_7(3)$	$G_2(3)$	$Sp_6(2)$ или S_9	
	S_9	N_1^+ или P_3	
	$Sp_6(2)$	N_1^+ или P_3	
	$2^6.A_7$	P_3	
$\Omega_7(q)$	$G_2(q)$	P_1, N_1^ε или N_2^ε	q нечетно, $\varepsilon = \pm$
$P\Omega_{2n}^-(q)$	P_1	$\hat{}GU_n(q)$	$n > 4$ нечетно
	N_1	$\hat{}GU_n(q)$	n нечетно
$\Omega_{10}^-(2)$	A_{12}	P_1	
$P\Omega_{2n}^+(q)$	N_1	P_n или P_{n-1}	
$(n \geq 5)$	N_1	$\hat{}GU_n(q).2$	n четное
	N_1	$PSp_2(q) \bigotimes PSp_n(q)$	n четное, $q > 2$
	N_2^-	P_n или P_{n-1}	
	P_1	$\hat{}GU_n(q).2$	n четное
	N_1	$\Omega_n^+(4).2^2$	$q = 2$, n четно
$\Omega_{24}^+(2)$	Co_1	N_1	
$P\Omega_{16}^+(q)$	$\Omega_9(q).a$	N_1	$a \leq 2$
$P\Omega_8^+(q)$	$\Omega_7(q)$	P_1, P_3, P_4 или $\Omega_7(q)$	
	$\Omega_7(q)$	$\hat{}((q+1)/d \times \Omega_6^-(q)).2^d$	$d = (2, q-1)$
	$\Omega_7(q)$	$\hat{}((q-1)/d \times \Omega_6^+(q)).2^d$	$q > 3$,
	$\Omega_7(q)$	$(PSp_2(q) \bigotimes PSp_4(q)).2$	q нечетно,
	$\Omega_7(q)$	$\Omega_8^-(r)$	$q = r^2$
	$\hat{}((q+1)/d \times \Omega_6^-(q)).2^d$	P_1, P_3 или P_4	$d = (2, q-1)$
$\Omega_8^+(2)$	A_9	$\Omega_7(2)$	
	A_9	P_1, P_3 или P_4	
	A_9	$(3 \times \Omega_6^-(2)).2$	
	$\Omega_7(2)$	$(L_2(4) \times L_2(4)).2^2$	
$P\Omega_8^+(3)$	$\Omega_8^+(2)$	P_1, P_3, P_4 или $\Omega_7(3)$	

- $G = \Omega_{2n+1}(q)$, $n \geq 3$, q нечетно и либо $M = P_n$, либо $n = 3$ и $M = P_1$;
- $G = P\Omega_{2n}^-(q)$, $n > 4$ нечетно и $M = P_1$;
- $G = P\Omega_{2n}^+(q))$, $n \geq 5$ и либо $M = P_n$ или P_{n-1}, либо n четно и $M = P_n$;
- $G = P\Omega_8^+(q)$ и M равно P_1, P_3 или P_4.

Отсюда вытекает, что в группах Шевалле из (1) всякая максимальная параболическая подгруппа входит в какую-либо максимальную факторизацию.

В остальных группах Шевалле $G(q) \neq L_n(q)$, $PSU_4(2)$, $PSp_4(3)$ число подгрупп P_i, участвующих в максимальных факторизациях, меньше лиева ранга группы $G(q)$ и поэтому существует максимальная параболическая подгруппа, не входящая ни в одну максимальную факторизацию. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 1 для групп Шевалле.

В силу лемм 8 и 9 достаточно рассмотреть группы $PSp_4(2^k)$, $PSU_4(3)$, $PSU_3(3)$, $PSU_3(5)$. Группа $PSp_4(2)$ изоморфна S_6 и не проста.

В группе $PSp_4(q)$ при четном $q > 2$ максимальной является подгруппа $PSp_4(m)$ над максимальным подполем $GF(m)$ поля $GF(q)$ [8, табл. 3.5.C]. С другой стороны, эта подгруппа не входит ни в одну максимальную факторизацию группы $PSp_4(q)$ (табл. 3) и поэтому является недополняемой.

Группа $G = PSU_4(3)$ согласно [8, табл. 3.5.B] имеет максимальную подгруппу $GL_2(9).2$ порядка $2^8 \cdot 3^2 \cdot 5$. Эта подгруппа недополняема в G и даже не участвует ни в одной максимальной факторизации группы G в табл. 3. Действительно, участвующие в максимальных факторизациях G максимальные подгруппы P_1, P_2, $L_3(4)$, $PSp_4(3)$ и N_1 все, кроме N_1, имеют порядки, не делящиеся на 2^8. Остается заметить, что подгруппы N_1 и $GL_2(9).2$ лежат в разных, не пересекающихся классах подгрупп, соответственно C_1 и C_2 из [8].

Группа $PSU_3(3)$ имеет порядок $2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$, а порядки всех ее максимальных подгрупп, участвующих в максимальных факторизациях, т. е. подгрупп P_1 и $L_2(7)$ из табл. 3, не делятся на 2^5. Поэтому в $PSU_3(3)$ всякая подгруппа, содержащая силовскую 2-подгруппу, является недополняемой.

В группе $PSU_3(5)$ согласно [8, табл. 3.5.B] существует максимальная подгруппа, изоморфная ортогональной группе $O_3(5)$ и, следовательно, группе $2.S_5$ порядка $2^4 \cdot 3 \cdot 5$. Табл. 3 показывает, что в группе $PSU_3(5)$ эта подгруппа не входит в максимальные факторизации и, следовательно, недополняема.

Тем самым доказательство теоремы 1 для групп Шевалле завершается.

§ 4. Знакопеременные и спорадические группы

Лемма 10. *Пусть G — спорадическая группа. Тогда в G найдется недополняемая максимальная подгруппа.*

Доказательство. В группе Матье M_{11} недополняема максимальная подгруппа $GL_2(3)$. В спорадических группах M_{12} и J_2 силовская 2-подгруппа имеет нормальную четверную подгруппу, для которой нормализатор в группе — недополняемая максимальная подгруппа. Подробнее см. [11].

Все максимальные факторизации спорадических групп указаны в табл. 5.

Таким образом, группы Янко J_1, J_3, J_4, группы Конвея Co_2, Co_3, группы Фишера Fi_{23}, Fi'_{24}, F_2, F_1, а также группы Матье M_{22}, Мак-Лафлина McL, Лайонса Ly, О'Нэна $O'N$, Томпсона Th и Харады HN не имеют факторизаций.

В группах Рудвалиса Ru, Сузуки Suz и Фишера Fi_{22} ни в одну факторизацию табл. 5 не входит максимальная подгруппа, содержащая силовскую 2-подгруппу.

В группе M_{23} недополняема максимальная подгруппа индекса $7 \cdot 11 \cdot 23$, содержащая расширение элементарной абелевой 2-группы E_{16} (порядка 16) с помощью $Z_3 \times S_5$ (см. [7]). Согласно табл. 5 группа M_{24} допускает максимальную факторизацию $M_{24} = M_{23} \cdot L_2(7)$ с подгруппой $L_2(7)$, не участвующей в других максимальных факторизациях. Поскольку M_{23} не имеет подгрупп порядка $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23 = |M_{24} : L_2(7)|$, максимальная подгруппа $L_2(7)$ недополняема в M_{24}.

Таблица 5. Факторизации спорадических групп

G	A	B
M_{11}	$L_2(11)$	M_{10} или $M_9.2$
M_{12}	M_{11}	M_{11}, $M_{10}.2$, $L_2(11)$, $M_9.S_3$
		$2\times S_5$, $4^2.D_{12}$ или $A_4\times S_3$
	$L_2(11)$	$M_{10}.2$ или $M_9.S_3$
M_{23}	23.11	M_{22}, $M_{21}.2$ или $2^4.A_7$
M_{24}	M_{23}	$M_{12}.2$, $2^6.3.S_6$, $L_2(7)$
		$L_2(23)$ или $2^6.(L_3(2)\times S_3)$
	$L_2(23)$	$M_{22}.2$, $2^4.A_8$ или $L_3(4).S_3$
J_2	$PSU_3(3)$	$A_5\times D_{10}$
HS	M_{22}	$PSU_3(5).2$ или $5.4\times A_5$
	$M_{22}.2\cap G$	$5^3.(2^5)\cap G$
He	$Sp_4(4).2$	$7^2.SL_2(7)$
Ru	$L_2(29)$	${}^2F_4(2)$
Suz	$G_2(4)$	$U_5(2)$ или $3^5.M_{11}$
Fi_{22}	${}^2F_4(2)'$	$2.PSU_6(2)$
Co_1	Co_2	$3.Suz.2$ или $(A_4\times G_2(4)).2$
	Co_3	$3.Suz.2$ или $(A_4\times G_2(4)).2$

Как показывает табл. 5, в группах Конвея Co_1 и Хельда He недополняемыми являются максимальная подгруппа, изоморфная $A_7\times L_2(7)$, и соответственно максимальная подгруппа $S_4\times L_2(7)$ индекса $2^4\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 17$. Для группы Хигмэна — Симса HS нормализатор подгруппы $L_3(4)$ содержит ее с индексом 2 и является максимальной подгруппой в HS (см. [7]). Согласно табл. 5 эта подгруппа не входит ни в одну максимальную факторизацию и, следовательно, также недополняема. Лемма доказана.

Перейдем к знакопеременным группам. Хорошо известны групповые изоморфизмы

$$A_5\simeq L_2(4)\simeq L_2(5),\quad A_6\simeq L_2(9).$$

Поэтому по лемме 7 в знакопеременных группах A_5 и A_6 существует недополняемая максимальная подгруппа. В. Д. Мазуров доказал следующее, более общее утверждение.

Лемма 11. *Знакопеременная группа $G=A_n$ простой степени $n=p\geq 5$ или степени $n=2p\geq 6$ обладает недополняемой максимальной подгруппой.*

Доказательство. Пусть H — стабилизатор в G множества $\{1,2\}$. Тогда $H=(S_{n-2}\times S_2)\cap G$ — максимальная подгруппа в G. Пусть D — дополнение к ней в G. Тогда D действует транзитивно и регулярно на множествах вида $\{i,j\}$, $i\neq j$, и ни одно из них не оставляет неподвижным. Это означает, в частности, что $|D|=n(n-1)/2$ и D не содержит инволюций, так как инволюция $(i,j)(k,l)\dots$ оставляет неподвижным множество $\{i,j\}$. Поэтому $n(n-1)/2$ — нечетное число. Пусть Δ — орбита подгруппы D на множестве $\{1,2,\dots,n\}=\Omega$ и $d=|\Delta|$. Заметим, что $|\Delta|>1$. В противном случае $\Delta=\{\delta\}$ и D любую пару $\{\delta,\alpha\}$ переводит в $\{\delta,\beta\}$, т. е. не действует транзитивно на множестве пар.

Поскольку стабилизатор в D любой пары $\{i,j\}$ тривиален, стабилизатор любых двух точек в D тривиален и поэтому $|D| \le d(d-1)$.

Предположим, что $d \ne n$. Выберем Δ наименьшей длины. Тогда $d \le n/2$ и $|D| \le d(d-1) \le n(n/2-1)/2 < n(n-1)/2 = |D|$; противоречие. Итак, D действует транзитивно на Ω. В частности, поскольку $|D|$ — нечетное число, n — нечетное число. Таким образом, $n = p$ — простое число, и $(p-1)/2$ — нечетное число. В частности, $p \ge 7$.

Теперь пусть H — стабилизатор в G трехточечного множества $\{1,2,3\}$. Тогда $H = (S_{n-3} \times S_3) \cap G$ — максимальная подгруппа в G. Пусть D — дополнение к H в G. Тогда аналогично проведенным выше рассуждениям получаем $|D| = n(n-1)(n-2)/6$ и, поскольку $n(n-1)/2$ и $(n-2)$ — нечетные числа, D — группа нечетного порядка и, в частности, разрешимая. Так как $n = p$ и $|D|$ делится на p, подгруппа D действует транзитивно на Ω. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в D. Тогда $|N| = q^m$, где q — простое число. Если $q^m \ne p$, то НОД $(|N|, p) = 1$ и N оставляет неподвижной некоторую точку из Ω и, следовательно, равно 1. Поэтому $|N| = p$ и N — группа, порожденная циклом длины p. Теперь $p(p-1)(p-2)/6 \le |D| \le |N_G(N)| = p(p-1)/2$, откуда $(p-2)/3 \le 1$ и $p \le 5$; противоречие. Лемма доказана.

В силу предыдущей леммы и изоморфизма $A_8 \simeq L_4(2)$ остается доказать теорему 1 для знакопеременных групп степени > 11.

В знакопеременной группе $G = A_n$ к стандартным относят подгруппу $(S_a \wr S_b) \cap G$ для натуральных чисел a и b, $ab \le n$. Справедлива

Лемма 12. *Пусть $G = A_n$ — знакопеременная группа степени $n = ab > 11$, где $a \ge 2$ и $b \ge 2$. Тогда $(S_a \wr S_b) \cap G$ — максимальная подгруппа, не входящая ни в одну максимальную факторизацию группы G.*

Доказательство. Известно описание максимальных факторизаций знакопеременных групп (см. [10, теорема D и ее следствие]): если $G = A_n$, $n \ge 5$, и $G = AB$, где A, B — собственные подгруппы, то либо подгруппа B является k-однородной и $A_{n-k} \lhd A \le (S_{n-k} \times S_k)$ для подходящего k, $1 \le k \le 5$, либо $n = 6, 8, 10$. Поэтому подгруппа $(S_a \wr S_b) \cap G$, $n = ab$, $a \ge 2$, $b \ge 2$, согласно [8] являющаяся максимальной при $n \ge 5$, не входит при $n > 11$ ни в одну максимальную факторизацию группы G. Лемма доказана.

Леммы 10–12, а также лемма 6 (для группы $A_8 \simeq L_4(2)$) доказывают теорему 1 для знакопеременных и спорадических групп. Таким образом, теоремы 1 и 2 полностью доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коуровская тетрадь* (Нерешенные вопросы теории групп). 15-е изд. Новосибирск: Ин-т математики, 2002.
2. *Левчук В. М.* О слабо факторизуемых группах // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 4. С. 565–572.
3. *Hall Ph.* Complemented groups // J. London Math. Soc. 1937. V. 12, N 2. P. 201–204.
4. *Баева Н. В.* Вполне факторизуемые группы // Докл. АН СССР. 1953. Т. 92, № 5. С. 877–880.
5. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980.
6. *Ito N.* On the factorizations of the linear fractional group $LF(2,p^n)$ // Acta Sci. Math. 1953. V. 15, N 1. P. 79–84.
7. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* An ATLAS of finite groups. Oxford: Oxford Univ. Press, 1985.

8. *Kleidman P., Liebeck M. W.* The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. (London Math. Soc. Lecture Notes; N 129).
9. *Aschbacher M.* On the maximal subgroups of the finite classical groups // Invent. Math. 1984. V. 76, N 3. P. 469–514.
10. *Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J.* The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990. (Memoirs of Amer. Math. Soc.; N 432(86)).
11. *Лихарев А. Г.* О слабо факторизуемых группах лиева типа малых рангов и спорадических группах // Algebra and model theory 4. Новосибирск: НГТУ, 2003. P. 56–61.
12. *Лихарев А. Г.* О конечных слабо факторизуемых группах // Междунар. алгебр. конф.: Тез. докл. М.: Мех.-мат. МГУ, 2004. С. 88–89.
13. *Тютянов В. Н.* Конечные простые группы с дополняемыми максимальными подгруппами // Междунар. алгебр. конф. (29.08–3.09 2005 г.): Тез. докл. Екатеринбург: УрГУ, 2005. С. 78–79.
14. *Левчук В. М.* Функции на конечных группах и некоторые нерешенные вопросы // Междунар. конф. «Классы групп и алгебр» (5–7 окт. 2005 г.): Тез. докл. Гомель: Гомельский гос. ун-т, 2005. С. 72–73.
15. *Carter R.* Simple groups of Lie type. New York: Wiley and Sons, 1972.
16. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли (гл. IV–VI). М.: Мир, 1982.
17. *Mwene B.* On the subgroups of the group $PSL(4, 2^m)$ // J. Algebra. 1976. V. 41, N 1. P. 79–107.

Статья поступила 7 октября 2005 г.

Левчук Владимир Михайлович, Лихарев Анатолий Григорьевич
Красноярский гос. университет, кафедра алгебры и математической логики, пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
levchuk@lan.krasu.ru, v.m.levchuk@mail.ru, a_natoly@pochta.ru