*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2006. Том 47, № 3*

*УДК 519.45*

# СТРОЕНИЕ СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГРУПП НАД ЛОКАЛЬНЫМИ КОЛЬЦАМИ

**С. Тажетдинов**

**Аннотация:** Дается описание субнормальных подгрупп симплектической группы над локальным кольцом с обратимым элементом 2. Дается также описание подгрупп этой группы, нормализуемых специальными конгруэнц-подгруппами.

**Ключевые слова:** субнормальная подгруппа, конгруэнц-подгруппа, симплектическая группа, локальное кольцо, симплектическая трансвекция.

Коммутативное кольцо с единицей, имеющее единственный максимальный идеал, называется *локальным кольцом.*

Пусть $R$ — локальное кольцо с обратимым элементом 2 и $V = V(R)$ — симплектическое пространство над $R$ размерности $r = 2m$, $m \geq 2$, т. е. свободный $R$-модуль с $r$ свободными порождающими и заданной на нем невырожденной кососимметрической билинейной формой $\beta(x, y)$. Группа автоморфизмов $\rho$ пространства $V$, оставляющих форму $\beta(x, y)$ инвариантной, т. е. удовлетворяющих соотношению $\beta(x\rho, y\rho) = \beta(x, y)$ при всех $x, y \in V$, называется *симплектической группой* над $R$ и обозначается через $\mathrm{Sp}(V)$.

Напомним, что если существует ряд

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_{d-1} \trianglelefteq H_d = G$$

подгрупп группы $G$, где $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ означает, что $H_{i-1}$ является нормальной подгруппой $H_i$, то $H$ называется *субнормальной подгруппой группы* $G$. В этом случае пишут $H \triangleleft^d G$. Наименьшее такое $d$ называется *субнормальной глубиной* $H$ в $G$.

В настоящей работе мы значительно улучшим описание субнормальных подгрупп группы $\mathrm{Sp}(V)$, данное в [1], а также описание подгрупп этой группы, нормализуемых специальными конгруэнц-подгруппами.

Всюду ниже $R$ — локальное кольцо с обратимым элементом 2 и $\dim V(R) \geq 4$.

Приводимые ниже известные определения и сведения имеются в [2–4].

Если $\beta(u, v) = 1$, то упорядоченная пара $\{u, v\}$ элементов пространства $V$ называется *гиперболической парой.* Если $\{u, v\}$ — гиперболическая пара, то модуль $Ru \oplus Rv$ называется *гиперболической плоскостью.* Пространство $V$ является ортогональной суммой гиперболических плоскостей: $V = V_1 \perp \dots \perp V_m$, где $V_i = Ru_i \oplus Rv_i$, $1 \leq i \leq m$. При этом база $\{u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_m, v_m\}$ называется *гиперболической базой* пространства $V$.

Пусть $I$ — идеал кольца $R, I \neq R$. Гомоморфизм локальных колец $\lambda_I : R \to R/I$ индуцирует гомоморфизм симплектических пространств

$$\lambda_1 : V(R) \to V(R/I). \tag{1}$$

Пространство $V(R/I)$ образовано всеми векторами $x\lambda_I, x \in V(R)$, причем форма $\beta(x\lambda_I, y\lambda_I)$ задается как $\beta(x,y)\lambda_I$. Положив $V(R/R)$ равным 0-модулю, распространим (1) и на случай $I = R$. Гомоморфизм (1) индуцирует сюръективный гомоморфизм симплектических групп $\pi_I : \mathrm{Sp}(V(R)) \to \mathrm{Sp}(V(R/I))$, при котором $\lambda_I(\rho\pi_I) = \rho\lambda_I$ для $\rho \in \mathrm{Sp}(V(R))$. Здесь $\mathrm{Sp}(V(R/R))$ означает единичную группу.

Для произвольного идеала $I$ кольца $R$ общая и специальная конгруэнц-подгруппы $\mathrm{GSp}(V,I)$ и $\mathrm{SSp}(V,I)$ определяются следующим образом:

$$\mathrm{GSp}(V,I) = (\mathrm{centerSp}(V(R/I)))\pi_I^{-1}, \quad \mathrm{SSp}(V,I) = (1)\pi_I^{-1} = \mathrm{Ker}\,\pi_I.$$

Заметим, что $\mathrm{GSp}(V,R) = \mathrm{SSp}(V,R) = \mathrm{Sp}(V)$, $\mathrm{GSp}(V,0) = \mathrm{centerSp}(V) = \{1,-1\}$ и $\mathrm{SSp}(V,0) = \{1\}$.

Вес $J(x)$ вектора $x \in V$ определяется как наименьший идеал $J$ со свойством $x\lambda_J = 0$. Вес $J(\rho)$ элемента $\rho \in \mathrm{Sp}(V)$ определяется как наименьший идеал $J$ со свойством $\rho \in \mathrm{GSp}(V,J)$, а вес $J(H)$ подгруппы $H$ — формулой $J(H) = \sum\limits_{\rho\in H} J(\rho)$.

Отметим, что величины $\beta(x,y)$, $J(x)$ и $J(\rho)$, где $x,y \in V$, $\rho \in \mathrm{Sp}(V)$, не зависят от конкретной базы. Если зафиксирована какая-нибудь база $\{e_1,\dots,e_r\}$ пространства $V$, то выполняются следующие утверждения.

1. Если $x = \sum\limits_{i=1}^r \alpha_i e_i$ и $y = \sum\limits_{i=1}^r \delta_i e_i$, то

$$\beta(x,y) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i\delta_j\beta(e_i,e_j).$$

2. Если $y = \sum\limits_{i=1}^r \alpha_i e_i$, то

$$J(x) = \mathrm{id}(\alpha_i \mid 1 \le i \le r).$$

3. Если $(p_{ij})$ — матрица элемента $\rho \in \mathrm{Sp}(V)$, то $J(\rho) = \mathrm{id}(\rho_{ij}, \rho_{ii} - \rho_{jj} \mid 1 \le i, j \le r, i \ne j)$.

Вектор $u \in V$ называется *унимодулярным*, если $J(u) = R$. Для любого унимодулярного вектора $u$ существует гиперболическая база $\{u,\dots\}$ с первым элементом $u$. Если $u$ — унимодулярный вектор и $\alpha \in R$, то элемент $\tau_{u,\alpha} \in \mathrm{Sp}(V)$ вида $x\tau_{u,\alpha} = x + \alpha\beta(u,x)u$ называется *симплектической трансвекцией*. Для $z_1, z_2 \in V$ таких, что $J(z_1) = R$, $\beta(z_1,z_2) = 0$, *унитарная трансвекция* $\sigma_{z_1,z_2} \in \mathrm{Sp}(V)$ определяется следующим образом: $x\sigma_{z_1,z_2} = x + \beta(z_1,x)z_2 + \beta(z_2,x)z_1$.

Отметим, что

$$J(\tau_{u,\alpha}) = \mathrm{id}(\alpha), \quad J(\sigma_{z_1,z_2}) = J(z_2), \quad \tau_{u,\alpha}^{-1} = \tau_{u,-\alpha}, \quad \tau_{u,\alpha}\cdot\tau_{u,\beta} = \tau_{u,\alpha+\beta},$$

и если $\rho \in \mathrm{Sp}(V)$, то $\rho^{-1}\tau_{u,\alpha}\rho = \tau_{up,\alpha}$.

Запись $\rho = \rho|V_i \perp 1|V_i^\perp$ означает, что $V = V_i \perp V_i^\perp$, $\rho \in \mathrm{Sp}(V)$ и $\rho|V_i^\perp = 1$.

Наконец, если $M$ — максимальный идеал, то $R^* = R \setminus M$ — группа обратимых элементов кольца $R$.

**Лемма.** *Если $I \ne R$ и подгруппа $H$ группы $\mathrm{Sp}(V)$ нормализуется подгруппой $\mathrm{SSp}(V,I)$, то $H \ge H' \ge \mathrm{SSp}(V, J(H')I^5)$, где*

$$H' = [H, \mathrm{SSp}(V,I)] = \mathrm{gr}([h,s] \mid h \in H,\ s \in \mathrm{SSp}(V,I)), \quad [h,s] = h^{-1}s^{-1}hs.$$

Доказательство леммы разобьем на предложения 1 и 2, в которых условие леммы предполагается выполненным без оговорок. При этом $H'$ также нормализуется подгруппой $\mathrm{SSp}(V,I)$ и $H' \le H \cap \mathrm{SSp}(V,I)$. Под выражением $i_n$ будем понимать произвольный элемент идеала $I^n$.

**Предложение 1.** *Пусть $\{u_1, v_1, \dots, u_m, v_m\}$ — гиперболическая база пространства $V$. Если $\varphi \in H'$ и $x \in V$, то $\tau_{u_1,\delta i_5} \in H'$, где $\delta = \beta(x, x\varphi)$.*

Доказательство. Пусть

$$x = \gamma_1 u_1 + \eta_1 v_1 + \dots + \gamma_m u_m + \eta_m v_m.$$

Предположим сначала, что $\eta_1 \in R^*$. Тогда $\left\{-\eta_1^{-1}x, u_1\right\}$ является гиперболической парой. Обозначим $a = -\eta_1^{-1}x$, $P = Ra \oplus Ru_1$ и перейдем к гиперболической базе

$$\{a, u_1, \dots\}. \tag{2}$$

Пусть $\varphi \in H'$ и $\alpha_1 \in I$. Тогда в $H'$ содержится элемент

$$\varphi_1 = [\tau_{a,\alpha_1}, \varphi] = \tau_{a,-\alpha_1} \cdot \tau_{a\varphi,\alpha_1}. \tag{3}$$

Пусть $a\varphi = \varepsilon a + \delta_1 u_1 + y$, где $y \in P^\perp$. Поскольку $\varphi \in \mathrm{SSp}(V, I)$, имеем $\varepsilon = 1 + \gamma$, $\gamma \in I$, $\delta_1 \in I$ и $J(y) \subseteq I$. Далее, пусть $\sigma = \sigma_{u_1,\varepsilon^{-1}y}$. Тогда $J(\sigma) = J(y) \subseteq I$, поэтому $\sigma \in \mathrm{SSp}(V, I)$. Следовательно, в $H'$ содержится элемент

$$\begin{aligned}\varphi_2 = \sigma^{-1}\varphi_1\sigma = \sigma^{-1} \cdot \tau_{a,-\alpha_1}\sigma \cdot \sigma^{-1} \cdot \tau_{a\varphi,\alpha_1} \cdot \sigma \\ = \tau_{a\sigma,-\alpha_1} \cdot \tau_{(a\varphi)\sigma,\alpha_1} = \tau_{a-\varepsilon^{-1}y,-\alpha_1} \cdot \tau_{\varepsilon a+\delta_1 u_1,\alpha_1}.\end{aligned}$$

Имеем $a\varphi_2 = (1 - \alpha_1\delta_1\varepsilon)a - \alpha_1\delta_1^2 u_1$. Пусть теперь $\tau = \tau_{a,\alpha_2}$, где $\alpha_2 \in I$. Тогда $\varphi_3 = [\tau, \varphi_2] \in H'$ и $\varphi_3 | P \perp 1 | P^\perp$. Ограничившись элементами $\rho \in \mathrm{Sp}(V)$ вида $\rho = \rho | P \perp 1 | P^\perp$ и перейдя к матрицам в базе (2), мы фактически имеем дело с двумерными матрицами. Согласно [2, с. 237] $\mathrm{Sp}(P) = SL_2(R)$ и $\mathrm{SSp}(P, I) = K_I$, где $K_I = \{\sigma \in SL_2(R) \mid \sigma\pi_I = 1\}$. Далее, $\varphi_3 \in H'$ и

$$\varphi_3 | P = \begin{pmatrix} * & * \\ \alpha_1\alpha_2\delta_1\varepsilon_1 & * \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_1 \in R^*$. Из включения (20) работы [5] следует, что $t_{12}(\alpha_1\alpha_2\delta_1 i_3) \in H'$, где $t_{12}$ — элементарная трансвекция. Ввиду произвольности элементов $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ отсюда получаем $t_{12}(\delta_1 i_5) \in H'$ или с учетом базы $\tau_{u_1,\delta_1 i_5} \in H'$, где $\delta_1 = \beta(a, a\varphi) = \beta(-\eta_1^{-1}x, (-\eta_1^{-1}x)\varphi) = \eta_1^{-2}\beta(x, x\varphi) = \eta_1^{-2}\delta$. Таким образом,

$$\tau_{u_1,\delta i_5} \in H', \quad \delta = \beta(x, x\varphi). \tag{4}$$

Доказательство в случае $\eta_1 \in R^*$ завершено.

Пусть теперь $\eta_1 \in M$. Рассмотрим векторы $x + v_1, x - v_1$ и $v_1$. Вторые компоненты этих векторов, т. е. элементы $\eta_1 + 1, \eta_1 - 1$ и 1, принадлежат $R^*$. Заменяя в предыдущих рассуждениях вектор $x$ поочередно векторами $x + v_1, x - v_1$ и $v_1$, вместо (4) соответственно получим

$$\begin{gathered}\tau_{u_1,\delta_2 i_5} \in H', \quad \delta_2 = \beta(x + v_1, (x + v_1)\varphi), \\ \tau_{u_1,\delta_3 i_5} \in H', \quad \delta_3 = \beta(x - v_1, (x - v_1)\varphi), \\ \tau_{u_1,\delta_4 i_5} \in H', \quad \delta_4 = \beta(v_1, v_1\varphi).\end{gathered} \tag{5}$$

Поскольку $2\delta = 2\beta(x, x\varphi) = \delta_2 + \delta_3 - 2\delta_4$, имеем

$$\tau_{u_1,2\delta i_5} = \tau_{u_1,\delta_2 i_5} \cdot \tau_{u_1,\delta_3 i_5} \cdot \tau_{u_1,-2\delta_4 i_5}.$$

Отсюда ввиду (5) $\tau_{u_1,2\delta i_5} \in H'$. Поскольку $2 \in R^*$, это дает $\tau_{u_1,\delta i_5} \in H'$, где $\delta(x, x\varphi)$. Предложение 1 доказано.

**Предложение 2.** *Справедливы включения* $H \geq H' \geq \mathrm{SSp}(V, J(H')I^5)$.

Доказательство. Поскольку $H' \leq \mathrm{SSp}(V, I)$, то $J(H') \subseteq I \subseteq M$. Поэтому $J(\varphi) \subseteq M$ для всех $\varphi \in H'$. Согласно [2, с. 238] имеем $J(\varphi)=\mathrm{id}(\beta(x, x\varphi) \mid x \in V, J(x) = R)$. Ввиду произвольности вектора $x$ в предложении 1 отсюда получим $\tau_{u_1,\eta} \in H'$, где $\eta$ — произвольный элемент идеала $J(\varphi) \cdot I^5$. Далее, так как элемент $\varphi \in H'$ был произвольным, заключаем, что $\tau_{u_1,\eta} \in H'$ для всех $\eta \in J(H') \cdot I^5$. Вспомнив теперь, что $u_1$ с самого начала также был произвольным унимодулярным вектором (для любого унимодулярного вектора $u_1$ существует гиперболическая база $\{u_1, \dots\}$), и учтя тот факт, что идеал $J(H') \cdot I^5$ от перемены базы не зависит, получим $\tau_{u,\eta} \in H'$ для всех $u \in V, J(u) = R$ и $\eta \in J(H') \cdot I^5$. Согласно [2, теорема 2] имеем

$$\mathrm{SSp}(V, J(H') \cdot I^5) = \mathrm{gr}(\tau_{u,\eta} \mid u \in V,\ J(u) = R,\ \eta \in J(H') \cdot I^5) \leq H'.$$

Предложение 2 доказано.

**Теорема 1.** *Если подгруппа $H$ группы $\mathrm{Sp}(V)$ нормализуется подгруппой $\mathrm{SSp}(V, I)$, то $H \geq H' \geq \mathrm{SSp}(V, J(H) \cdot I^6)$, где $H' = [H, \mathrm{SSp}(V, I)]$.*

Доказательство. Если $I \neq R$, то в силу [1, лемма 1] имеем $J(H') \supseteq J(H) \cdot I$. Утверждение теоремы следует теперь из доказанной выше леммы. Пусть теперь $I = R$. Тогда $H$ и $H'$ являются нормальными подгруппами группы $\mathrm{Sp}(V)$. Из [1, лемма 3] вытекает, что $H' \geq \mathrm{SSp}(V, J(H'))$. Далее, поскольку $H$ нормальна в $\mathrm{Sp}(V)$, согласно лемме 1 из [6] (которая справедлива для всех колец стабильного ранга 1 с обратимым элементом 2) имеем $J(H') = J(H)$. Таким образом, $H' = [H, \mathrm{Sp}(V)] \geq \mathrm{SSp}(V, J(H))$. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Если $H \lhd^d \mathrm{Sp}(V)$, то*

$$\mathrm{SSp}(V, J^{f(d)}) \leq H \leq G\,\mathrm{Sp}(V, J),$$

*где $J = J(H)$ и $f(d) = \frac{1}{5}(6^d - 1)$.*

Доказательство теоремы ввиду теоремы 1 ничем не отличается от доказательства теоремы из [1].

В работе [1] аналогичное описание получено со значительно худшей функцией $f(d) = \frac{1}{10}(11^d - 1)$.

**Следствие.** *Подгруппа $H$ субнормальна в группе $\mathrm{Sp}(V)$ тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{SSp}(V, J^n) \leq H \leq G\,\mathrm{Sp}(V, J)$$

*для некоторого идеала $J$ кольца $R$ и некоторого целого числа $n \geq 1$. Наименьшее такое $n$ и субнормальная глубина $d$ подгруппы $H$ связаны соотношением $d - 1 \leq n \leq \frac{1}{5}(6^d - 1)$.*

Доказательство следствия ввиду теоремы 2 ничем не отличается от доказательства следствия 1 из [1].

Отметим, что в описаниях субнормальных подгрупп симплектических групп функция $f(d) = \frac{1}{5}(6^d - 1)$ является в настоящее время наилучшей. В [7] она получена для бесконечномерных симплектических групп.

Заметим также, что для общих линейных групп наилучшей такой функцией является функция $f(d) = \frac{1}{4}(5^d - 1)$ (см. [8]).

Наконец, если $\dim V(R) = 2$, то группа $\mathrm{Sp}(V(R))$ совпадает со специальной линейной группой $\mathrm{SL}_2(R)$. Субнормальные подгруппы этой группы над локальными кольцами описаны в [5].

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Тажетдинов С.* Субнормальное строение симплектических групп над локальными кольцами // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 2. С. 289–298.
2. *Klingenberg W.* Symplectic groups over local rings // Amer. J. Math. 1963. V. 85, N 2. P. 232–240.
3. *McDonald B. R.* Geometric algebra over local rings. New York: Marcel Dekker, Inc., 1976.
4. *Kirkwood B., McDonald B. R.* The symplectic group over a ring with one in its stable range // Pacific J. Math. 1981. V. 92, N 1. P. 111–125.
5. *Тажетдинов С.* Субнормальное строение двумерных линейных групп над кольцами, близкими к полям // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 4. С. 414–425.
6. *Тажетдинов С.* Субнормальное строение симплектических групп над $(2,3)$-полными кольцами // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 6. С. 165–169.
7. *Arrell D. G.* The subnormal subgroup structure of the infinite symplectic group // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1982. V. 25, N 3. P. 209–216.
8. *Тажетдинов С.* Субнормальное строение двумерных линейных групп над полными кольцами // Мат. заметки. 2002. Т. 71, № 6. С. 924–930.


*Статья поступила 3 ноября 2004 г.*

*Тажетдинов Сагалатдин*
*Каракалпакский гос. университет им. Бердаха, математический факультет,*
*ул. Ч. Абдирова, 1, Нукус 742012, Узбекистан*
`Tajetdinov2003@mail.ru`