Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2006. Том 47, № 2

УДК 517.925

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Л. И. Каранджулов, Я. П. Стоянова

Аннотация: Построено асимптотическое разложение решения нелинейных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Последовательно определены все члены асимптотического разложения с помощью псевдообратных матриц и ортопроекторов.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, асимптотическое разложение, пограничные функции, псевдообратные матрицы, ортопроекторы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим сингулярно возмущенную систему

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = f(t,x,\varepsilon), \quad t \in [a,b],\ t \neq \tau_i,\ i = \overline{1,p},\ 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{1}$$

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_p < \tau_{p+1} = b,$$

с обобщенным начальным условием

$$Dx(a) = v \tag{2}$$

и с обобщенными импульсными условиями в фиксированные моменты времени:

$$N_i x(\tau_i + 0) + M_i x(\tau_i - 0) = h_i, \quad i = \overline{1,p}. \tag{3}$$

Пусть выполнены следующие условия.

(У1) Вектор-функция $f(t,x,\varepsilon)$ кусочно непрерывна с точками разрыва первого рода τ_i, $i = \overline{1,p}$, и имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до $(\mu+2)$-го порядка включительно в области

$$\Omega_1 \equiv \{(t,x,\varepsilon) \mid t \in [a,b] \setminus \{\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_p\},\ \|x\| \le \rho_1,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0\}.$$

(У2) D — $(\bar{s}\times n)$-матрица с постоянными элементами, v — вектор-столбец из $R^{\bar{s}}$; M_i, N_i, $i = \overline{1,p}$, — $(k_i \times n)$-матрицы с постоянными элементами, $h_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ — вектор-столбец.

(У3) Вырожденная система $(\varepsilon = 0)$

$$f(t,x,0) = 0 \tag{4}$$

имеет решение

$$x_0(t) = \varphi(t, \alpha_0(t)), \quad t \in [\tau_0, \tau_1],\ t \in (\tau_{i-1}, \tau_i],\ i = \overline{2, p+1}, \tag{5}$$

где $\alpha_0(t)$ — произвольная вектор-функция.

(У4) Вектор-функция $\varphi(t, \alpha_0(t))$ кусочно непрерывна с точками разрыва первого рода τ_i, $i = \overline{1, p}$, и имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до $(\mu+2)$-го порядка включительно в области

$$\Omega_2 \equiv \{(t, \alpha_0(t)) \mid t \in [a, b] \backslash \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p\},\ \|\alpha_0(t)\| \le \rho_2\}.$$

(У5) $f'_x(t, x_0(t), 0)$ — $(n \times n)$-матрица, имеющая r нулевых собственных чисел, которым соответствуют r линейно независимых собственных векторов. Остальные $n - r$ собственных чисел имеют отрицательные вещественные части, т. е. $\lambda_j(t, \alpha_0(t)) = 0$, $j = \overline{n-r+1, n}$, $\operatorname{Re}\lambda_j(t, \alpha_0(t)) < 0$, $j = \overline{1, n-r}$, $(t, \alpha_0(t)) \in \Omega_2$.

Условие (У3) показывает, что рассматривается критический случай [1].

Построим асимптотическое разложение решения задачи (1)–(3) так, чтобы при $\varepsilon \to 0$ оно стремилось к одному из решений (5) вырожденной системы (4) при $t \in (a, b] \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_p\}$.

В [1] система (1) рассмотрена в критическом случае с начальным условием вида $x(a) = v$. Система с импульсными условиями

$$\dot{x} = f(t, x, y), \quad \varepsilon\dot{y} = g(t, x, y), \quad \Delta x|_{t=\tau_i} = S_i x + a_i, \quad i = \overline{1, p}, \tag{6}$$

исследована в [2] в устойчивом случае, т. е. когда $(n \times n)$-матрица $f'_x(t, x_0(t), 0)$ имеет n собственных чисел с отрицательными вещественными частями. Там же рассмотрена и система (1) с импульсными условиями (6) в критическом случае.

В [2] существенную роль играет фундаментальная матрица системы [3]

$$\dot{x} = A(t)x,\ t \ne \tau_i, \quad \Delta x|_{t=\tau_i} = S_i x, \quad i = \overline{1, p},$$

если $\det(S_i + E) \ne 0$. С помощью этой фундаментальной матрицы строится решение системы (1) или (6).

В настоящей работе рассматриваются обобщенные начальные и импульсные условия. Тогда решение на каждом промежутке зависит от произвольного вектора. Фундаментальная матрица из [3] и [2] в этом случае неприменима.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1 [1]. *В достаточно малой окрестности точки $x = 0$ существует $(n-r)$-мерное многообразие $S^+(\alpha_0)$ системы*

$$\frac{dx}{d\tau} = f(c, \varphi(c, \alpha_0(c) + x, 0)), \quad c \in [a, b], \tag{7}$$

такое, что если начальное значение решения $x(c)$ принадлежит $S^+(\alpha_0)$, то найдутся такие постоянные $\gamma > 0$ и $\sigma > 0$, что при $\tau \ge 0$ решение $x(\tau)$ удовлетворяет неравенству

$$\|x(\tau)\| \le \gamma \exp(-\sigma\tau).$$

Пусть выполнено следующее условие.

(У6) В области $\Omega_3 \equiv \{(x, \alpha_0(t)) \mid \|x\| \le \rho_1,\ \|\alpha_0(t)\| \le \rho_2\}$ многообразие $S^+(\alpha_0)$ системы (7) представимо в виде

$$S^+(\alpha_0) : \bar{\bar{x}} = \widetilde{P}(\bar{x}, \alpha_0),$$

где $\widetilde{P}$ — достаточно гладкая функция в Ω_3, а $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ — $(n-r)$- и r-мерные векторы такие, что $x = (\bar{x}, \bar{\bar{x}})^T$.

Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{d\tau} = f'_x(c, \varphi(c, \alpha_0(c)) + x(\tau), 0)y + Y(\tau). \tag{8}$$

Введем обозначения:

$$\overline{S}(\tau) = \begin{pmatrix} E_{n-r} & 0 \\ H(\tau) & E_r \end{pmatrix}, \quad \overline{A}(\tau) = \begin{pmatrix} \bar{f}_{11} + \bar{f}_{12}H(\tau) & \bar{f}_{12} \\ 0 & \bar{f}_{22} - H(\tau)\bar{f}_{12} \end{pmatrix},$$

где $H(\tau) = \widetilde{P}'_{\bar{x}}(\bar{x}(\tau))$, $\widetilde{P}$ — многообразие из условия (У6), E_{n-r} и E_r — единичные матрицы размерами $n-r$ и r соответственно, а f_{ij}, $i, j = 1, 2,$ — блоки матрицы $f'_x(c, \varphi(c, \alpha_0(c) + x(\tau), 0))$.

Через $\overline{X}(\tau)$ обозначим нормальную фундаментальную матрицу системы $\frac{dx}{d\tau} = \overline{A}(\tau)x$. Пусть

$$\overline{Y}(\tau) = (Y_1(\tau),\ Y_2(\tau) - H(\tau)Y_1(\tau))^T,$$

где $Y(\tau) = (Y_1(\tau),\ Y_2(\tau))^T$, $Y_1(\tau)$ и $Y_2(\tau)$ — $(n-r)$- и r-мерные вектор-функции.

Введем обозначения: $X_{n-r}(\tau) = \overline{S}(\tau)\overline{X}_{n-r}(\tau)$, $K(\tau, s) = \overline{S}(\tau)\overline{K}(\tau, s)$, где $\overline{X}_{n-r}(\tau)$ — матрица, составленная из первых $n-r$ столбцов матрицы $\overline{X}(\tau)$, а матрица $\overline{K}(\tau, s)$ имеет вид

$$\overline{K}(\tau, s) = \begin{cases} \overline{X}(\tau)P\overline{X}^{-1}(s), & 0 \le s \le \tau < +\infty, \\ -\overline{X}(\tau)(I - P)\overline{X}^{-1}(s), & 0 \le \tau \le s < +\infty, \end{cases}$$

P — спектральный проектор матрицы $\overline{A}(\tau)$ на левую полуплоскость.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (У5) *и* (У6). *Если* $\lim\limits_{\tau\to+\infty} x(\tau) = 0$ *и* $\|Y(\tau)\| \le c^* \exp(-\alpha^*\tau)$, $c^* > 0$, $\alpha^* > 0$, $\tau \ge 0$, *то система* (8) *имеет экспоненциально убывающее решение вида*

$$y(\tau) = X_{n-r}(\tau)y_{n-r}(0) + \int\limits_0^{+\infty} K(\tau, s)\overline{Y}(s)\, ds, \quad \tau \ge 0. \tag{9}$$

Доказательство. В (8) выполним замену переменных

$$y(\tau) = \overline{S}(\tau)z(\tau) \tag{10}$$

и получим систему

$$\frac{dz}{d\tau} = \overline{A}(\tau)z + \overline{Y}(\tau).$$

Решение последней системы можно записать в виде

$$z(\tau) = \overline{X}_{n-r}(\tau)z_{n-r}(0) + \int\limits_0^{+\infty} \overline{K}(\tau, s)\overline{Y}(s)\, ds. \tag{11}$$

Согласно (10) $y_{n-r}(0) = z_{n-r}(0)$. Подставляя (11) в (10), получаем (9).

Фундаментальная матрица $\Phi(\tau)$ системы $\frac{dx}{d\tau} = (\bar{f}_{11} + \bar{f}_{12}H(\tau))x$ удовлетворяет неравенству [1]

$$\|\Phi(\tau)\Phi^{-1}(s)\| \le \beta^* \exp(-\kappa^*(\tau - s)), \quad 0 \le s \le \tau.$$

Тогда непосредственно можно проверить, что решение (9) экспоненциально убывает. □

Рассмотрим для $(t, \alpha_0(t)) \in \Omega_2$ ортопроекторы

$$P_A(t, \alpha_0(t)) : \mathbb{R}^n \to \ker A(t, \alpha_0(t)), \quad P_{A^*}(t, \alpha_0(t)) : \mathbb{R}^n \to \ker A^*(t, \alpha_0(t)),$$

где $A(t, \alpha_0(t))$ — $(n \times n)$-матрица и $\operatorname{rank} A(t, \alpha_0(t)) = n - r$. Тогда $\operatorname{rank} P_A(t, \alpha_0(t)) = \operatorname{rank} P_{A^*}(t, \alpha_0(t)) = r$. Следовательно, в $(n \times n)$-матрице $P_A(t, \alpha_0(t))$ существуют r линейно независимых столбцов, а в $(n \times n)$-матрице $P_{A^*}(t, \alpha_0(t))$ — r линейно независимых строк. Пусть $P_A^r(t, \alpha_0(t))$ — $(n \times r)$-матрица, составленная из произвольных r линейно независимых столбцов матрицы $P_A(t, \alpha_0(t))$, а $P_{A^*}^r(t, \alpha_0(t))$ — $(r \times n)$-матрица, составленная из произвольных r линейно независимых строк матрицы $P_{A^*}(t, \alpha_0(t))$.

Обозначим через $D(t)$ $(r \times r)$-матрицу $D(t) = P_{A^*}^r(t, \alpha_0(t))P_A^r(t, \alpha_0(t))$.

Лемма 3. *Пусть матрица $A(t, \alpha_0(t))$ удовлетворяет условию* (У5). *Тогда* $\operatorname{rank} D(t) = r$ *для любого* $t \in [a, b] \setminus \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p\}$.

3. Формальное асимптотическое разложение

Формальное асимптотическое разложение решения задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$x(t, \varepsilon) \equiv x^i(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \big(x_k^i(t) + \Pi_k^i(\nu_i)\big), \quad \nu_i = \frac{t - \tau_{i-1}}{\varepsilon}, \tag{12}$$

где $t \in [\tau_0, \tau_1]$ при $i = 1$ и $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$ при $i = \overline{2, p+1}$, $x_k^i(t)$ — элементы регулярного ряда, $\Pi_k^i(\nu_i)$ — пограничные функции в окрестности $t = \tau_{i-1}$.

Представляя $f(t, x, \varepsilon)$ в виде [1]

$$f(t, x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{f}_k^i(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k^i f(\nu_i)$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, причем отдельно зависящие от t и отдельно зависящие от ν_i, для определения коэффициентов $x_k^i(t)$ получаем систему

$$\begin{gathered} f\big(t, x_0^i(t), 0\big) = 0, \\ f'_x\big(t, x_0^i(t), 0\big)x_k^i(t) = \frac{dx_{k-1}^i}{dt} - g_k^i\big(t, x_0^i(t), \dots, x_{k-1}^i(t)\big), \\ k = 1, 2, 3, \dots, \quad i = \overline{1, p+1}, \end{gathered} \tag{13}$$

а для элементов $\Pi_k^i(\nu_i)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, $i = \overline{1, p+1}$, сингулярного ряда — системы

$$\frac{d\Pi_0^i(\nu_i)}{d\nu_i} = f(\tau_{i-1}, x_0^i(\tau_{i-1}) + \Pi_0^i(\nu_i), 0), \tag{14}$$

$$\frac{d\Pi_k^i(\nu_i)}{d\nu_i} = f'_x\big(\tau_{i-1}, x_0^i(\tau_{i-1}\big) + \Pi_0^i(\nu_i), 0)\Pi_k^i(\nu_i) + G_k^i(\nu_i, \Pi_0^i(\nu_i), \dots, \Pi_{k-1}^i(\nu_i)),$$

3.1. Модификация задачи. Обобщенный характер импульсных и начальных условий показывает необходимость модификации задачи, которая заключается в объединении начальных и импульсных условий, как это сделано в [4].

Введем обозначения:

$$\begin{gathered} Q_0 = [D, \Theta_1, \dots, \Theta_p]^T \text{ — } (\nu \times n)\text{-матрица}, \\ Q_i = [\Theta_0, \dots, \Theta_{i-1}, N_i, \Theta_{i+1}, \dots, \Theta_p]^T \text{ — } (\nu \times n)\text{-матрица}, \quad i = \overline{1, p-1}, \\ Q_p = [\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{p-1}, N_p]^T \text{ — } (\nu \times n)\text{-матрица}, \end{gathered} \tag{15}$$

где $\nu = \bar{s} + k_1 + k_2 + \dots + k_p$, Θ_0 — $(\bar{s} \times n)$-матрица с нулевыми элементами, а Θ_i, $i = 1, 2, \dots, p$, — $(k_i \times n)$-матрица с нулевыми элементами,

$$\begin{gathered} R_1 = [\Theta_0, M_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p]^T \text{ — } (\nu \times n)\text{-матрица}, \\ R_i = [\Theta_0, \dots, \Theta_{i-1}, M_i, \Theta_{i+1}, \dots, \Theta_p]^T \text{ — } (\nu \times n)\text{-матрица}, \quad i = \overline{2, p-1}, \\ R_p = [\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{p-1}, M_p]^T \text{ — } (\nu \times n)\text{-матрица}; \end{gathered} \tag{16}$$

$$h = [v, h_1, h_2, \dots, h_p]^T \text{ — } \nu\text{-мерный вектор}. \tag{17}$$

С учетом обозначений (15)–(17) начальные и импульсные условия объединяются следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{p} Q_i x^{i+1}(\tau_i, \varepsilon) + \sum_{i=1}^{p} R_i x^i(\tau_i, \varepsilon) = h.$$

Подставляя (12) в последнее равенство и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, находим

$$\sum_{i=0}^{p} Q_i \big(x_0^{i+1}(\tau_i) + \Pi_0^{i+1}(0)\big) + \sum_{i=1}^{p} R_i \left(x_0^i(\tau_i) + \Pi_0^i\left(\frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{\varepsilon}\right)\right) = h, \tag{18}$$

$$\sum_{i=0}^{p} Q_i \big(x_k^{i+1}(\tau_i) + \Pi_k^{i+1}(0)\big) + \sum_{i=1}^{p} R_i \left(x_k^i(\tau_i) + \Pi_k^i\left(\frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{\varepsilon}\right)\right) = 0, \tag{19}$$
$$k = 1, 2, 3, \dots .$$

3.2. Определение $x_0^i(t)$, $\Pi_0^i(\nu_i)$, $i = \overline{1, p+1}$. Система для определения $x_0^i(t)$ — это вырожденная система (4). В силу условия (У3) она имеет решение (5), которое можно записать в виде

$$x_0^i(t) = \varphi_0^i\big(t, \alpha_0^i(t)\big),\ t \in [\tau_0, \tau_1] \quad \text{при } i = 1 \quad \text{и} \quad t \in (\tau_{i-1}, \tau_i] \quad \text{при } i = \overline{2, p+1}, \tag{20}$$

где $\alpha_0^i(t)$ — произвольные r-мерные вектор-функции.

Полностью $x_0^i(t)$ определяются из условия разрешимости

$$P^r_{A_i^*}\big(t, \alpha_0^i(t)\big)\left(\frac{dx_0^i(t)}{dt} - g_1^i\big(t, x_0^i(t)\big)\right) = 0, \quad i = \overline{1, p+1},$$

системы (13) при $k = 1$:

$$A_i\big(t, \alpha_0^i(t)\big)x_1^i(t) = \frac{dx_0^i(t)}{dt} - g_1^i\big(t, x_0^i(t)\big), \quad i = \overline{1, p+1},$$

где $A_i\big(t,\alpha_0^i(t)\big) = f'_x\big(t,\varphi_0^i(t,\alpha_0^i(t)),0\big)$, $i=\overline{1,p+1}$, и равенства (18). Для $\alpha_0^i(t)$ получаем систему

$$B_i\big(t,\alpha_0^i(t)\big)\frac{d\alpha_0^i(t)}{dt} = E_0^i\big(t,\alpha_0^i(t)\big), \quad i=\overline{1,p+1}, \tag{21}$$

где $B_i(t,\alpha_0(t))$ — $(r\times r)$-матрица вида

$$B_i\big(t,\alpha_0^i(t)\big) = P^r_{A_i^*}\big(t,\alpha_0^i(t)\big)\frac{d\varphi_0^i}{d\alpha_0^i}\big(t,\alpha_0^i(t)\big), \quad i=\overline{1,p+1},$$

а $E_0^i\big(t,\alpha_0^i(t)\big)$ — r-мерная вектор-функция вида

$$E_0^i\big(t,\alpha_0^i(t)\big) = P^r_{A_i^*}\big(t,\alpha_0^i(t)\big)\left(\frac{d\varphi_0^i}{dt}\big(t,\alpha_0^i(t)\big) - g_1^i\big(t,\alpha_0^i(t)\big)\right), \quad i=\overline{1,p+1}.$$

Согласно условиям (У3) и (У5) имеем

$$\operatorname{rank} B_i\big(t,\alpha_0^i(t)\big) = r \quad \forall\big(t,\alpha_0^i(t)\big)\in\Omega_2, \quad i=\overline{1,p+1}.$$

Тогда систему (21) можно записать в виде

$$\frac{d\alpha_0^i}{dt} = B_i^{-1}\big(t,\alpha_0^i(t)\big)E_0^i\big(t,\alpha_0^i(t)\big), \quad i=\overline{1,p+1}. \tag{22}$$

Пусть система (22) с начальными условиями $\alpha_0^i(\tau_{i-1}) = \eta_0^i \in \mathbb{R}^r$, $i=\overline{1,p+1}$, имеет решение $\alpha_0^i(t)$ такое, что $\big\|\alpha_0^i(t)\big\| \le \rho_2$, $t\in[\tau_0,\tau_1]$ при $i=1$ и $t\in(\tau_{i-1},\tau_i]$ при $i=\overline{2,p+1}$.

Для $\Pi_0^i(\nu_i)$ из (14) получаем систему

$$\frac{d\Pi_0^i(\nu_i)}{d\nu_i} = f\big(\tau_{i-1}, x_0^i(\tau_{i-1}) + \Pi_0^i(\nu_i), 0\big), \quad i=\overline{1,p+1}. \tag{23}$$

В силу леммы 1 система (23) имеет экспоненциально убывающее решение при $\nu_i\to+\infty$, если начальный вектор $\Pi_0^i(0)$ удовлетворяет равенству

$$\overline{\overline{\Pi}}{}_0^i(0) = \widetilde{P}_i\big(\overline{\Pi}_0^i(0), \alpha_0^i(\tau_{i-1})\big), \tag{24}$$

где $\nu_1 \in \big[0,\frac{\tau_1-\tau_0}{\varepsilon}\big]$ при $i=1$ и $\nu_i\in\big[0,\frac{\tau_i-\tau_{i-1}}{\varepsilon}\big]$ при $i=\overline{2,p+1}$, $\Pi_0^i(0) = \big(\overline{\Pi}_0^i(0), \overline{\overline{\Pi}}{}_0^i(0)\big)^T$, $\overline{\Pi}_0^i(0)$ — $(n-r)$-мерный вектор, $\overline{\overline{\Pi}}{}_0^i(0)$ — r-мерный вектор, а

$$S_i^+ : \overline{\overline{\Pi}}{}_0^i(\nu_i) = \widetilde{P}_i\big(\overline{\Pi}_0^i(\nu_i), \alpha_0^i(\tau_{i-1})\big), \quad i=\overline{1,p+1},$$

— $(n-r)$-мерное устойчивое многообразие системы (23) на каждом промежутке $[\tau_{i-1},\tau_i]$, $i=\overline{1,p+1}$.

Пусть $\overline{\Pi}_0^i(0) = c_0^i \in \mathbb{R}^{n-r}$, $i=\overline{1,p+1}$. Тогда для окончательного определения $x_0^i(t)$ и $\Pi_0^i(\nu_i)$ необходимо найти неизвестные постоянные векторы η_0^i, c_0^i, $i=\overline{1,p+1}$. Подставляя $x_0^i(t)$ из (20) в (18) и учитывая (24), получаем систему

$$\sum_{i=0}^{p} Q_i\Big(\varphi_0^{i+1}\big(\tau_i,\eta_0^{i+1}\big) + \big(c_0^{i+1}, \widetilde{P}_{i+1}\big(c_0^{i+1},\eta_0^{i+1}\big)\big)^T\Big)$$
$$+\sum_{i=1}^{p} R_i\left(\varphi_0^i\big(\tau_i,\alpha_0^i(\tau_i)\big) + \left(\overline{\Pi}_0^i\left(\frac{\tau_i-\tau_{i-1}}{\varepsilon}\right), \widetilde{P}_i\left(\overline{\Pi}_0^i\left(\frac{\tau_i-\tau_{i-1}}{\varepsilon}\right), \alpha_0^i(\tau_i)\right)\right)^T\right) = h. \tag{25}$$

Система (25) является нелинейной системой ν уравнений относительно $n(p+1)$ неизвестных $c_0^i\in\mathbb{R}^{n-r}$, $\eta_0^i\in\mathbb{R}^r$, $i=\overline{1,p+1}$. Она может иметь единственное решение, параметрическое решение или не иметь решения.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (У1)–(У6). *Тогда элементы* $x_0^i(t)$, $i=\overline{1,p+1}$, *регулярного ряда имеют вид* (20), *где функции* $\alpha_0^i(t)$, $i=\overline{1,p+1}$, *определяются из системы дифференциальных уравнений* (22) *с начальными условиями* $\alpha_0^i(\tau_{i-1})=\eta_0^i$, $i=\overline{1,p+1}$. *Пограничные функции* $\Pi_0^i(\nu_i)$, $i=\overline{1,p+1}$, *удовлетворяют системе дифференциальных уравнений* (14) *при* $k=0$ *и экспоненциально убывают. Постоянные векторы* η_0^i, c_0^i, $i=\overline{1,p+1}$, *удовлетворяют нелинейной системе* (25).

3.3. Определение $x_1^i(t)$, $\Pi_1^i(\nu_i)$, $i=\overline{1,p+1}$. Из (13) получаем систему для определения $x_1^i(t)$:

$$A_i(t)x_1^i(t)=\frac{dx_0^i}{dt}-g_1^i\big(t,x_0^i(t)\big),\quad i=\overline{1,p+1}, \tag{26}$$

где $A_i(t)=A_i\big(t,\alpha_0^i(t)\big)$, вектор-функция $\alpha_0^i(t)$ определена из (22) и (25).

Система (26) имеет решение

$$x_1^i(t)=P_{A_i}^r(t)\alpha_1^i(t)+A_i^+(t)\left(\frac{dx_0^i}{dt}-g_1^i\big(t,x_0^i(t)\big)\right),\quad i=\overline{1,p+1}, \tag{27}$$

тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$P_{A_i^*}^r(t)\left(\frac{dx_0^i}{dt}-g_1^i\big(t,x_0^i(t)\big)\right)=0,\quad i=\overline{1,p+1}.$$

Последнее равенство выполнено, потому что из него были определены функции $\alpha_0^i(t)$, $i=\overline{1,p+1}$.

В (27) через $A_i^+(t)$ обозначена единственная по Муру — Пенроузу псевдообратная матрица матрицы $A_i(t)$ [5, 6].

Из условия разрешимости

$$P_{A_i^*}^r(t)\left(\frac{dx_1^i}{dt}-g_2^i\big(t,x_0^i(t),x_1^i(t)\big)\right)=0$$

системы (9) относительно $x_2^i(t)$ для $\alpha_1^i(t)$ получаем систему

$$D_i(t)\frac{d\alpha_1^i}{dt}=E_1^i\big(t,\alpha_1^i(t)\big),\quad t\in[\tau_0,\tau_1],\ t\in(\tau_{i-1},\tau_i],\ i=\overline{2,p+1}, \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned}E_1^i\big(t,\alpha_1^i(t)\big)&=P_{A_i^*}^r(t)g_2^i\big(t,x_0^i(t),x_1^i(t)\big)\\&-P_{A_i^*}^r(t)\frac{d}{dt}\left(A_i^+(t)\left(\frac{dx_0^i}{dt}-g_1^i\big(t,x_0^i(t)\big)\right)\right)-P_{A_i^*}^r(t)\frac{dP_{A_i}^r(t)}{dt}\alpha_1^i(t),\end{aligned}$$

$D_i(t)=P_{A_i^*}^r(t)P_{A_i}^r(t)$ — $(r\times r)$-матрица.

В силу леммы 3 имеем $\operatorname{rank}D_i(t)=r$ для любого $t\in[a,b]\setminus\{\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_p\}$, $i=\overline{1,p+1}$. Тогда система (28) принимает вид

$$\frac{d\alpha_1^i}{dt}=D_i^{-1}(t)E_1^i\big(t,\alpha_1^i(t)\big),\quad i=\overline{1,p+1}. \tag{29}$$

Из (14) для пограничных функций $\Pi_1^i(\nu_i)$ получим

$$\frac{d\Pi_1^i(\nu_i)}{d\nu_i}=f_x'\big(\tau_{i-1},x_0^i(\tau_{i-1})+\Pi_0^i(\nu_i),0\big)\Pi_1^i(\nu_i)+G_1^i\big(\nu_i,\Pi_0^i(\nu_i)\big),\quad i=\overline{1,p+1}. \tag{30}$$

Для $G_1^i\big(\tau, \Pi_0^i(\nu_i)\big)$ верна оценка [1] $\big\|G_1^i\big(\nu_i, \Pi_0^i(\nu_i)\big)\big\| \le c^* \exp(-\alpha^* \nu_i)$, а для $\Pi_0^i(\nu_i)$ согласно теореме 1 выполнено $\lim\limits_{\nu_i \to \infty} \Pi_0^i(\nu_i) = 0$. Тогда система (30) в силу леммы 2 имеет экспоненциально убывающее решение вида

$$\Pi_1^i(\nu_i) = X_{n-r}^i(\nu_i) c_1^i + \int\limits_0^\infty K^i(\nu_i, s) \overline{G}_1^i(s)\, ds, \quad \nu_i \ge 0,\ c_1^i \in \mathbb{R}^{n-r}. \tag{31}$$

Здесь

$$\overline{G}_1^i(\nu_i) = \big(G_{11}^i(\nu_i), G_{12}^i(\nu_i) - H_i(\nu_i) G_{11}^i(\nu_i)\big)^T, \quad G_1^i(\nu_i) = (G_{11}^i(\nu_i), G_{12}^i(\nu_i))^T,$$
$$H_i(\nu_i) = \frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial t}\big(\overline{\Pi}_0^i(\nu_i), \alpha_0^i(\tau_{i-1})\big),$$

$X_{n-r}^i(\nu_i)$ — $(n \times (n-r))$-матрица, составленная из первых $n-r$ столбцов матрицы $X^i(\nu_i) = \overline{S}^i(\nu_i) \overline{X}^i(\nu_i)$,

$$\overline{S}^i(\nu_i) = \begin{pmatrix} E_{n-r} & 0 \\ H_i(\nu_i) & E_r \end{pmatrix},$$

$\overline{X}^i(\nu_i)$ — нормальная матрица системы $\frac{dx}{d\nu_i} = \overline{A}_i(\nu_i) x$,

$$\overline{A}_i(\nu_i) = \begin{pmatrix} \bar{f}_{11} + \bar{f}_{12} H_i(\nu_i) & \bar{f}_{12} \\ 0 & \bar{f}_{22} - H_i(\nu_i) \bar{f}_{12} \end{pmatrix},$$

$K^i(\nu_i, s) = \overline{S}^i(\nu_i) \overline{K}^i(\nu_i, s)$ и матрица $\overline{K}^i(\nu_i, s)$ имеет вид

$$\overline{K}^i(\nu_i, s) = \begin{cases} \overline{X}^i(\nu_i) P^i (\overline{X}^i)^{-1}(s), & 0 \le s \le \nu_i < +\infty, \\ -\overline{X}^i(\nu_i)(I - P^i)(\overline{X}^i)^{-1}(s), & 0 \le \nu_i \le s < +\infty, \end{cases}$$

P^i, $i = \overline{1, p+1}$, — спектральный проектор матрицы $\overline{A}_i(\nu_i)$ на левую полуплоскость.

Подставляя (27) и (31) в (19) при $k = 1$, получаем

$$\sum_{i=1}^{p+1} \big(l_i \alpha_1^i(\cdot) + D_1^i(\varepsilon) c_1^i\big) = h_1(\varepsilon), \tag{32}$$

где

$$l_i x^i(\cdot) = Q_{i-1} P_{A_i}^r(\tau_{i-1}) x^i(\tau_{i-1}) + R_i P_{A_i}^r(\tau_i) x^i(\tau_i), \quad i = \overline{1, p},$$
$$l_{p+1} x^{p+1}(\cdot) = Q_p P_{A_{p+1}}^r(\tau_p) x^{p+1}(\tau_p),$$
$$D_1^i(\varepsilon) = Q_{i-1} X_{n-r}^i(0) + R_i X_{n-r}^i\left(\frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{\varepsilon}\right), \quad i = \overline{1, p},$$
$$D_1^{p+1}(\varepsilon) = Q_p X_{n-r}^{p+1}(0),$$

$$h_1(\varepsilon) = -\sum_{i=0}^p Q_i \left(\bar{x}_1^{i+1}(\tau_i) + \int\limits_0^\infty K^{i+1}(0, s) \overline{G}_1^{i+1}(s)\, ds\right) - \sum_{i=1}^p R_i \left(\bar{x}_1^i(\tau_i) + \int\limits_0^\infty K^i\left(\frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{\varepsilon}, s\right) \overline{G}_1^i(s)\, ds\right),$$

$$\bar{x}_1^i(t) = A_i^+(t)\big(\dot{x}_0^i(t) - g_1^i\big(t, x_0^i(t)\big)\big).$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered}\overline{D}_1(\varepsilon) = \big(\overline{D}_1^1(\varepsilon), \dots, \overline{D}_1^{p+1}(\varepsilon)\big) \text{ — } (\nu \times (n-r)(p+1))\text{-матрица;}\\ c_1 = \big(c_1^1, c_1^2, \dots, c_1^{p+1}\big)^T \text{ — } (n-r)(p+1)\text{-мерный вектор;}\\ \overline{E} = \underbrace{(E_\nu, E_\nu, \dots, E_\nu)} \text{ — } (\nu \times (p+1)\nu)\text{-матрица;}\\ E_\nu \text{ — единичная } (\nu\times\nu)\text{-матрица;}\\ l\alpha_1(\cdot) = \big(l_1\alpha_1^1(\cdot), l_2\alpha_1^2(\cdot), \dots, l_{p+1}\alpha_1^{p+1}(\cdot)\big)^T \text{ — } \nu(p+1)\text{-мерный вектор.}\end{gathered} \tag{33}$$

С учетом обозначений (33) систему (32) можно записать так:

$$(\overline{E}\ \overline{D}_1(\varepsilon)) \begin{pmatrix} l\alpha_1(\cdot) \\ c_1 \end{pmatrix} = h_1(\varepsilon). \tag{34}$$

Поскольку мы рассматриваем задачи с начальными данными, матрица $\overline{D}_1(\varepsilon)$ имеет структуру $\overline{D}_1(\varepsilon) = \overline{D}_{10} + O\big(\varepsilon^q \exp\big(-\frac{\gamma}{\varepsilon}\big)\big)$, а вектор $h_1(\varepsilon)$ — структуру $h_1(\varepsilon) = h_{10} + O\big(\varepsilon^s \exp\big(-\frac{\delta}{\varepsilon}\big)\big)$, где $\overline{D}_{10}$ — постоянная $(\nu \times (n-r)(p+1))$-матрица, h_{10} — ν-мерный постоянный вектор, $s, q \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$, а $O\big(\varepsilon^q \exp\big(-\frac{\gamma}{\varepsilon}\big)\big)$ и $O\big(\varepsilon^s \exp\big(-\frac{\delta}{\varepsilon}\big)\big)$ — здесь и в дальнейшем матрицы соответствующих размерностей, компоненты которых бесконечно малые по отношению к произвольной степени ε.

Так как элементы $O\big(\varepsilon^q \exp\big(-\frac{\gamma}{\varepsilon}\big)\big)$ и $O\big(\varepsilon^s \exp\big(-\frac{\delta}{\varepsilon}\big)\big)$ сколь угодно малы при $\varepsilon \to 0$, для $\overline{D}_1(\varepsilon)$ получаем $\|\overline{D}_1(\varepsilon)\| = O(1) + O\big(\varepsilon^q \exp(-\frac{\gamma}{\varepsilon})\big)$. Последнее равенство при $\varepsilon \to 0$ принимает вид $\|\overline{D}_1(\varepsilon)\| = O(1)$. Аналогично $\|h_1(\varepsilon)\| = O(1)$. Поэтому для упрощения выкладок можно опустить экспоненциально малые элементы в $\overline{D}_1(\varepsilon)$ и $h_1(\varepsilon)$. Тогда система (34) примет вид

$$(\overline{E}\,\overline{D}_{10}) \begin{pmatrix} l\alpha_1(\cdot) \\ c_1 \end{pmatrix} = h_{10}. \tag{35}$$

Разность решений систем (35) и (34) является экспоненциально малым элементом вида $O\big(\varepsilon^q \exp\big(-\frac{\gamma}{\varepsilon}\big)\big)$ и $O\big(\varepsilon^s \exp\big(-\frac{\delta}{\varepsilon}\big)\big)$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение системы (35) — это решение системы (34).

С учетом обозначений (33) $(\overline{E}\,\overline{D}_{10})$ — $(\nu \times (n-r+\nu)(p+1))$-матрица ранга ν. Тогда система (35) имеет параметрическое решение

$$\begin{pmatrix} l\alpha_1(\cdot) \\ c_1 \end{pmatrix} = P_{D_{10}}^k \xi_1 + D_{10}^+ h_{10}, \quad \xi_1 \in \mathbb{R}^k,\ k = (n-r+\nu)(p+1) - \nu. \tag{36}$$

Здесь $D_{10} = (\overline{E}\,\overline{D}_{10})$, а через $P_{D_{10}}^k$ обозначена $((n-r+\nu)(p+1) \times k)$-матрица, составленная из k произвольных линейно независимых столбцов матрицы $P_{D_{10}}$, $P_{D_{10}} : R^{(n-r+\nu)(p+1)} \to \ker D_{10}$; D_{10}^+ — единственная псевдообратная матрица матрицы D_{10}. В этом случае $P_{D_{10}^*} = 0$ и условие разрешимости $P_{D_{10}^*} h_{10} = 0$ системы (35) всегда выполнено.

Из (36) получаем

$$\begin{gathered} l\alpha_1(\cdot) = \big[P_{D_{10}}^k\big]^{\nu(p+1)} \xi_1 + \big[D_{10}^+ h_{10}\big]^{\nu(p+1)}, \\ c_1 = \big[P_{D_{10}}^k\big]^{(n-r)(p+1)} \xi_1 + \big[D_{10}^+ h_{10}\big]^{(n-r)(p+1)}, \end{gathered}$$

где индекс $\nu(p+1)$ показывает, что взяты первые $\nu(p+1)$ строк матрицы $P^k_{D_{10}}$ и первые $\nu(p+1)$ компонент вектора $D^+_{10}h_{10}$, а индекс $(n-r)(p+1)$ — что взяты последние $(n-r)(p+1)$ строк матрицы $P^k_{D_{10}}$ и компонент вектора $D^+_{10}h_{10}$.

С учетом обозначений (33) получаем

$$\begin{gathered} l_i\alpha^i_1(\cdot) = \big[P^k_{D_{10}}\big]^{\nu(p+1)}_{\nu_i}\xi_1 + \big[D^+_{10}h_{10}\big]^{\nu(p+1)}_{\nu_i}, \\ c_1 = \big[P^k_{D_{10}}\big]^{(n-r)(p+1)}_{(n-r)_i}\xi_1 + \big[D^+_{10}h_{10}\big]^{(n-r)(p+1)}_{(n-r)_i}, \quad i = \overline{1, p+1}, \end{gathered} \tag{37}$$

где ν_1 — первые ν строк матрицы $\big[P^k_{D_{10}}\big]^{\nu(p+1)}$ и первые ν компонент вектора $\big[D^+_{10}h_{10}\big]^{\nu(p+1)}$, ν_2 — вторые ν строк и т. д., а $(n-r)_1$ — первые $n-r$ строк матрицы $\big[P^k_{D_{10}}\big]^{(n-r)(p+1)}$ и компонент вектора $\big[D^+_{10}h_{10}\big]^{(n-r)(p+1)}$, $(n-r)_2$ — вторые $n-r$ компонент и т. д.

Подставляя (37) в (31), для $\Pi^i_1(\nu_i)$ получаем

$$\Pi^i_1(\nu_i) = \widetilde{X}^i_{n-r}(\nu_i)\xi_1 + \overline{\Pi}^i_1(\nu_i), \quad i = \overline{1, p+1}, \tag{38}$$

где

$$\begin{gathered} \widetilde{X}^i_{n-r}(\nu_i) = X^i_{n-r}(\nu_i)\big[P^k_{D_{10}}\big]^{(n-r)(p+1)}_{(n-r)_i}, \\ \overline{\Pi}^i_1(\nu_i) = X^i_{n-r}(\nu_i)\big[D^+_{10}h_{10}\big]^{(n-r)(p+1)}_{(n-r)_i} + \int\limits_0^\infty K^i(\nu_i, s)\overline{G}^i_1(s)\, ds. \end{gathered}$$

Учитывая (29) и (37), для $\alpha^i_1(t)$ получаем нелинейную краевую задачу

$$\frac{d\alpha^i_1(t)}{dt} = \overline{E}^i_1\big(t, \alpha^i_1(t)\big), \quad l_i\alpha^i_1(\cdot) = h^i_1(\xi_1), \tag{39}$$

где $t \in [\tau_0, \tau_1]$ при $i = 1$ и $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$ при $i = \overline{2, p+1}$,

$$\begin{gathered} \overline{E}^i_1\big(t, \alpha^i_1(t)\big) = D^{-1}_i(t)E^i_1\big(t, \alpha^i_1(t)\big), \quad h^i_1(\xi_1) = B^i_1\xi_1 + b^i_1, \\ B^i_1 = \big[P^k_{D_{10}}\big]^{\nu(p+1)}_{\nu_i}, \quad b^i_1 = \big[\overline{D}^+_{10}h_{10}\big]^{\nu(p+1)}_{\nu_i}, \quad i = \overline{1, p+1}. \end{gathered}$$

Введем обозначения: $\overline{Q}_i = l_iE$ — $(\nu \times r)$-матрица, $\operatorname{rank}\overline{Q}_i = n_i$; $\overline{Q}^+_i$ — псевдообратная $(r \times \nu)$-матрица матрицы $\overline{Q}_i$; $P^{m_i}_{\overline{Q}_i}$ — $(r \times m_i)$-матрица, составленная из произвольных m_i $(m_i = r - n_i)$ линейно независимых столбцов матрицы $P_{\overline{Q}_i} : R^r \to \ker\overline{Q}_i$; $P^{d_i}_{\overline{Q}^*_i}$ — $(d_i \times \nu)$-матрица, составленная из произвольных d_i $(d_i = \nu - n_i)$ линейно независимых строк матрицы $P_{\overline{Q}^*_i}\colon R^\nu \to \ker\overline{Q}^*_i$; $\alpha^i_{10} = P^{m_i}_{\overline{Q}_i}c_{m_i}$, $c_{m_i} \in R^{m_i}$ — решение порождающей системы $\frac{d\alpha^i_1}{dt} = 0$, $l_i\alpha^i_1(\cdot) = 0$;

$$A^i_1(t, c_{m_i}) = \frac{\partial\overline{E}^i_1\big(t, \alpha^i_1(t)\big)}{\partial\alpha^i_1}\bigg|_{\alpha^i_1 = \alpha^i_{10}(t, c_{m_i})}; \quad g(t,\tau) = \begin{cases} 1, & \tau_{i-1} \le \tau \le t \le \tau_i, \\ 0, & \tau_{i-1} \le t \le \tau \le \tau_i; \end{cases}$$

$$B_{0i} = P^{d_i}_{\overline{Q}^*_i}\left(l_iE - l_i\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} g(\cdot, \tau)A^i_1(\tau)\, d\tau\right)P^{m_i}_{\overline{Q}_i}$$

— $(d_i \times m_i)$-мерная матрица; $P_{B_{0i}} : R^{m_i} \to \ker B_{0i}$, $P_{B^*_{0i}} : R^{d_i} \to \ker B^*_{0i}$, $i = \overline{1, p+1}$.

Согласно теореме 2 из [7] для любого корня $c_{m_i} = c^*_{m_i} \in R^{m_i}$ уравнения

$$P_{\overline{Q}_i^*}^{d_i}\left(h_1^i(\xi_1) - l_i\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} g(\cdot,\tau)\overline{E}_1^i\bigl(\alpha_{10}^i(c_{m_i}),\tau\bigr)\,d\tau\right) = 0$$

при $P_{B_{0i}} = 0$, $P_{B^*_{0i}}P^{d_i}_{\overline{Q}_i^*} = 0$ существует единственное решение $\alpha_1^i(t) = \alpha_1^i(c^*_{m_i}, t)$ краевой задачи (39) в достаточно малой окрестности порождающего решения $\alpha_{10}^i = P^{m_i}_{\overline{Q}_i}c_{m_i}$.

Введем обозначения:

$$\begin{gathered}
P_i(\xi_1) = l_i\Phi_i(\cdot,\xi_1)\Phi_i^{-1}(\tau_{i-1},\xi_1) \text{ — } (\nu\times r)\text{-матрица},\quad i=\overline{1,p+1};\\
\eta_2 = \bigl(\eta_2^1,\eta_2^2,\ldots,\eta_2^{p+1}\bigr)^T \text{ — } (p+1)r\text{-мерный вектор};\\
c_2 = \bigl(c_2^1,c_2^2,\ldots,c_2^{p+1}\bigr)^T \text{ — } (p+1)(n-r)\text{-мерный вектор};\\
h_{20}(\xi_1) = -\sum_{i=1}^{p+1} l_i\bar{x}_2^i(\cdot,\xi_1) \text{ — } \nu\text{-мерный вектор};\\
P(\xi_1) = (P_1(\xi_1)P_2(\xi_1)\ldots P_{p+1}(\xi_1)) \text{ — } (\nu\times(p+1)r)\text{-матрица};\\
R(\xi_1,\varepsilon) = (P(\xi_1)\ \overline{D}_1(\varepsilon)) \text{ — } (\nu\times(p+1)n)\text{-матрица};\\
z_2 = (\eta_2, c_2)^T \text{ — } (p+1)n\text{-мерный вектор.}
\end{gathered} \tag{40}$$

Лемма 4. *Постоянный вектор $\xi_1 \in \mathbb{R}^k$ удовлетворяет нелинейному уравнению*

$$P^s_{R_0^*}(\xi_1)h_{20}(\xi_1) = 0. \tag{41}$$

Доказательство. Система (13) при $k = 2$ имеет решение

$$x_2^i(t) = P^r_{A_i}(t)\alpha_2^i(t) + A_i^+(t)\left(\frac{dx_1^i}{dt} - g_2\bigl(t, x_0^i(t), x_1^i(t)\bigr)\right),\quad i=\overline{1,p+1}, \tag{42}$$

где функция $g_2^i\bigl(t, x_0^i(t), x_1^i(t)\bigr) = g_2^i(t,\xi_1)$ нелинейна относительно $x_1^i(t)$ [1, 2], следовательно, она нелинейна относительно ξ_1.

Решение (42) можно записать в виде

$$x_2^i(t) = P^r_{A_i}(t)\alpha_2^i(t) + \bar{x}_2^i(t,\xi_1),\quad i=\overline{1,p+1}, \tag{43}$$

где $\bar{x}_2^i(t,\xi_1) = A_i^+(t)\bigl(\frac{dx_1^i}{dt} - g_2\bigl(t,x_0^i(t),x_1^i(t)\bigr)\bigr)$.

Согласно лемме 2 решение системы (14) при $k = 2$ имеет вид

$$\Pi_2^i(\nu_i) = X^i_{n-r}(\nu_i)c_2^i + \int\limits_0^\infty K^i(\nu_i,s)\overline{G}_2^i(s)\,ds,\quad \nu\ge 0,\ c_2^i\in\mathbb{R}^{n-r},\ i=\overline{1,p+1}. \tag{44}$$

Здесь

$$\overline{G}_2^i(\nu_i) = \bigl(G_{21}^i(\nu_i), \overline{G}_{22}(\nu_i) - H_i(\nu_i)G_{21}^i(\nu_i)\bigr)^T,\quad G_2^i(\nu) = \bigl(G_{21}^i(\nu_i), G_{22}^i(\nu_i)\bigr)^T.$$

Подставляя (43) и (44) в (19) при $k = 2$, получаем

$$\sum_{i=1}^{p+1}\bigl(l_i\alpha_2^i(\cdot) + \overline{D}_1^i(\varepsilon)c_2^i\bigr) = \bar{h}_2(\xi_1,\varepsilon), \tag{45}$$

где

$$\bar{h}_2(\xi_1,\varepsilon) = -\sum_{i=0}^{p} Q_i \left(\bar{x}_2^{i+1}(\tau_i,\xi_1) + \int\limits_0^\infty K^{i+1}(0,s)\overline{G}_2^{i+1}(s,\xi_1)\,ds \right) - \sum_{i=1}^{p} R_i \left(\bar{x}_2^{i}(\tau_i,\xi_1) + \int\limits_0^\infty K^{i}\left(\frac{\tau_i-\tau_{i-1}}{\varepsilon},s\right)\overline{G}_2^{i}(s,\xi_1)\,ds \right).$$

Из условия разрешимости системы (13) для $x_3^i(t)$ получаем уравнение для $\alpha_2^i(t)$ вида

$$\frac{d\alpha_2^i}{dt} = H_i(t,\xi_1)\alpha_2^i(t) + E_2^i(t,\xi_1), \quad i=\overline{1,p+1}, \tag{46}$$

где

$$H_i(t,\xi_1) = D_i^{-1}(t)P^r_{A_i^*}(t)b_i(t,\xi_1)P^r_{A_i}(t),$$

$$E_2^i(t,\xi_1) = D_i^{-1}(t)P^r_{A_i^*}(t)\left(b_i(t,\xi_1)\bar{x}_2^i(t,\xi_1) + \bar{g}_3^i(t,\xi_1) - \frac{d\bar{x}_2^i}{dt}(t,\xi_1)\right)$$

и функции $b_i(t,\xi_1)$ и $\bar{g}_3^i(t,\xi_1)$ выражаются определенным образом через $x_0^i(t)$ и $x_1^i(t)$.

Решение дифференциальной системы (46) имеет вид

$$\alpha_2^i(t,\xi_1) = \Phi_i(t,\xi_1)\Phi_i^{-1}(\tau_{i-1},\xi_1)\eta_2^i + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{t} \Phi_i(t,\xi_1)\Phi_i^{-1}(s,\xi_1)E_2^i(s,\xi_1)\,ds, \tag{47}$$

$\eta_2^i \in \mathbb{R}^r$, $t \in [\tau_0,\tau_1]$ при $i=1$, $t\in(\tau_{i-1},\tau_i]$ при $i=\overline{2,p+1}$, а $\Phi_i(t,\xi_1)$ — фундаментальная матрица решения системы $\frac{dx}{dt} = H_i(t,\xi_1)x$.

Согласно обозначению (40) система (45) принимает вид

$$R(\xi_1,\varepsilon)z_2 = \bar{h}_2(\xi_1,\varepsilon). \tag{48}$$

Матрица $R(\xi_1,\varepsilon)$ имеет структуру $R(\xi_1,\varepsilon) = R_0(\xi_1) + O\big(\varepsilon^s\exp\big(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\big)\big)$, а вектор $\bar{h}_2(\xi_1,\varepsilon)$ — структуру $\bar{h}_2(\xi_1,\varepsilon) = h_{20}(\xi_1) + O\big(\varepsilon^s\exp\big(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\big)\big)$, где $R_0(\xi_1)$ — постоянная $(\nu\times(p+1)n)$-матрица, $h_{20}(\xi_1)$ — ν-мерный постоянный вектор, $s\in\mathbb{N}$. Опустим экспоненциально малые элементы в $R(\xi_1,\varepsilon)$ и $\bar{h}_2(\xi_1,\varepsilon)$. Тогда система (48) примет вид

$$R_0(\xi_1)z_2 = h_{20}(\xi_1). \tag{49}$$

Пусть $\operatorname{rank} R_0(\xi_1) = s_1 \le \min(\nu,(p+1)n)$ для всех $\xi_1\in\mathbb{R}^k$. Тогда $\operatorname{rank} P_{R_0}(\xi_1) = (p+1)n - s_1 = q$, а $\operatorname{rank} P_{R_0^*}(\xi_1) = \nu - s_1 = s$ для всех $\xi_1\in\mathbb{R}^k$, где $P_{R_0}(\xi_1) : R^{(p+1)n} \to \ker R_0(\xi_1)$, $P_{R_0^*}(\xi_1) : R^\nu \to \ker R_0^*(\xi_1)$. Через $P^q_{R_0}(\xi_1)$ обозначим $((p+1)n\times q)$-матрицу, столбцы которой являются произвольными q линейно независимыми столбцами матрицы $P_{R_0}(\xi_1)$, а через $P^s_{R_0^*}(\xi_1)$ — $(s\times\nu)$-матрицу, строки которой являются произвольными s линейно независимыми строками матрицы $P_{R_0^*}(\xi_1)$.

Система (49) имеет решение

$$z_2 = P^q_{R_0}(\xi_1)\xi_2 + R_0^+h_{20}(\xi_1)$$

тогда и только тогда, когда выполнено

$$P^s_{R_0^*}(\xi_1)h_{20}(\xi_1) = 0,$$

т. е. ξ_1 определяется из этого уравнения. □

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (У1)–(У6), *условия теоремы* 1, $P_{B_{i0}} = 0$, $P_{B^*_{i0}} P^d_{Q^*_i} = 0$ *и* $\operatorname{rank} R_0(\xi_1) = s_1 \le \min(\nu, (p+1)n)$ *при всех* $\xi_1 \in \mathbb{R}^k$. *Тогда коэффициенты ряда* (12) $x^i_1(t)$, $\Pi^i_1(\nu_i)$, $i = \overline{1, p+1}$, *имеют вид* (27), (31). *Функции* $\alpha^i_1(t)$, $i = \overline{1, p+1}$, *удовлетворяют нелинейной краевой задаче* (39), *а вектор* $\xi_1 \in \mathbb{R}^k$ — *уравнению* (41). *Пограничные функции* $\Pi^i_1(\nu_i)$, $i = \overline{1, p+1}$, *имеют экспоненциальную оценку*

$$\left\|\Pi^i_1(\nu_i)\right\| \le c^* \exp(-\alpha^* \nu_i), \quad \nu_i \ge 0, \ i = \overline{1, p+1},$$

где c^*, α^* — *положительные постоянные.*

3.4. Определение элементов $x^i_k(t)$, $\Pi^i_k(\nu_i)$, $k = 2, 3, 4, \dots$, $i = \overline{1, p+1}$. Системы (13) при $k = 2, 3, 4, \dots$ имеют решения

$$x^i_k(t) = P^r_{A_i}(t) \alpha^i_k(t) + \bar{x}^i_k(t), \tag{50}$$

$t \in [\tau_0, \tau_1]$ при $i = 1$ и $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$ при $i = \overline{2, p+1}$, где

$$\bar{x}^i_k(t) = A^+_i(t) \left(\frac{dx^i_{k-1}}{dt} - g^i_k\big(t, x^i_0(t), \dots, x^i_{k-1}(t)\big) \right).$$

Из условия разрешимости систем (13) относительно $x^i_k(t)$, $k = 3, 4, \dots$, для функции $\alpha^i_k(t)$, $k = 2, 3, 4, \dots$, получаем

$$\frac{d\alpha^i_k}{dt} = H_i(t) \alpha^i_k + E^i_k(t), \quad k = 2, 3, 4, \dots, \ i = \overline{1, p+1}, \tag{51}$$

где $E^i_k(t)$ выражаются определенным образом через $x^i_0(t), x^i_1(t), \dots, x^i_{k-1}(t)$, $H_i(t) \equiv H_i(t, \xi_1)$, а ξ_1 уже определено из (41).

Решение систем (51) при $k = 2, 3, 4, \dots$ можно записать в виде

$$\alpha^i_k(t) = \Phi_i(t) \Phi^{-1}_i(\tau_{i-1}) \eta^i_k + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{t} \Phi_i(t) \Phi^{-1}_i(s) E^i_k(s)\, ds, \quad \eta^i_k \in \mathbb{R}^r, \ i = \overline{1, p+1}. \tag{52}$$

Подставим (52) в (50). Тогда $x^i_k(t)$ примут вид

$$x^i_k(t) = \Phi^r_i(t, \tau_{i-1}) \eta^i_k + \bar{\bar{x}}^i_k(t), \quad k = 2, 3, 4, \dots, \ i = \overline{1, p+1}, \tag{53}$$

где

$$\Phi^r_i(t, \tau_{i-1}) = P^r_{A_i}(t) \Phi_i(t) \Phi^{-1}_i(\tau_{i-1}), \ \bar{\bar{x}}^i_k(t) = P^r_{A_i}(t) \int\limits_{\tau_{i-1}}^{t} \Phi_i(t) \Phi^{-1}_i(s) E^i_k(s)\, ds + \bar{x}^i_k(t).$$

Согласно лемме 3 для $\Pi^i_k(\nu_i)$ получаем

$$\Pi^i_k(\nu_i) = X^i_{n-k}(\nu_i) c^i_k + \int\limits_0^\infty K^i(\nu_i, s) \overline{G}^i_k(s)\, ds, \quad k = 2, 3, 4, \dots, \ i = \overline{1, p+1}, \tag{54}$$

где $c^i_k \in \mathbb{R}^{n-r}$,

$$\overline{G}^i_k(\nu_i) = \big(G^i_{k1}(\nu_i), G^i_{k2}(\nu_i) - H_i(\nu_i) G^i_{k1}(\nu_i)\big)^T, \quad G^i_k(\nu_i) = \big(G^i_{k1}(\nu_i), G^i_{k2}(\nu_i)\big)^T.$$

Подставляя (53) и (54) в (19), получаем систему, аналогичную системе (48):

$$R(\varepsilon) z_k = h_k(\varepsilon), \quad k = 2, 3, 4, \dots, \tag{55}$$

где $R(\varepsilon) \equiv R(\xi_1, \varepsilon)$ и ξ_1 уже определены, $z_k = \big(\eta_k, c_k\big)^T$ — $(p+1)n$-мерный вектор, $\eta_k = \big(\eta_k^1, \eta_k^2, \dots, \eta_k^{p+1}\big)$ — $(p+1)r$-мерный вектор, $c_k = \big(c_k^1, \dots, c_k^{p+1}\big)$ — $(p+1)(n-r)$-мерный вектор,

$$\bar{h}_k(\varepsilon) = -\sum_{i=0}^{p} Q_i \left(\bar{x}_k^{i+1}(\tau_i) + \int_0^\infty K^{i+1}(0,s)\overline{G}_k^{i+1}(s)\,ds\right)$$
$$- \sum_{i=1}^{p} R_i \left(\bar{x}_k^{i}(\tau_i) + \int_0^\infty K^{i}\left(\frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{\varepsilon}, s\right)\overline{G}_k^{i}(s)\,ds\right), \quad k = 2,3,4,\dots.$$

Матрица $R(\varepsilon)$ имеет структуру $R(\varepsilon) = R_0 + O\big(\varepsilon^s \exp\big(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\big)\big)$, а вектор $h_k(\varepsilon)$ — структуру $h_k(\varepsilon) = h_{k0} + O\big(\varepsilon^s \exp\big(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\big)\big)$. Опуская экспоненциально малые элементы в (55), получаем линейную систему

$$R_0 z_k = h_{k0}, \quad k = 2,3,4,\dots. \tag{56}$$

Поскольку $\operatorname{rank} R_0 = s_1 \le \min(\nu, (p+1)n)$, для решения системы (56) имеем

$$z_k = P_{R_0}^q \xi_k + R_0^+ h_{k0}, \quad k = 2,3,4,\dots,\ \xi_k \in \mathbb{R}^q, \tag{57}$$

тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$P_{R_0^*}^s h_{k0} = 0, \quad k = 2,3,4,\dots. \tag{58}$$

Подставим (57) в (53) и (54). Тогда

$$\begin{gathered} x_k^i(t) = \widetilde{\Phi}_i^r(t,\tau_{i-1})\xi_k + \tilde{x}_k^i(t), \quad \Pi_k^i(\nu_i) = \widetilde{X}_{n-k}^i(\nu_i)\xi_k + \widetilde{\Pi}_k^i(\nu_i), \\ k = 2,3,4,\dots, \quad i = \overline{1, p+1}, \end{gathered} \tag{59}$$

где

$$\begin{gathered} \widetilde{\Phi}_i^r(t,\tau_{i-1}) = \Phi_i^r(t,\tau_{i-1})P_{R_0}^q, \quad \tilde{x}_k^i(t) = \Phi_i^r(t,\tau_{i-1})R_0^+ h_{k0} + \bar{\bar{x}}_k^i(t), \\ \widetilde{X}_{n-k}^i(\nu_i) = X_{n-k}^i P_{R_0}^q, \quad \widetilde{\Pi}_k^i(\nu_i) = X_{n-k}^i R_0^+ h_{k0} + \overline{\Pi}_k^i(\nu_i). \end{gathered}$$

Замечание 1. Постоянный вектор $\xi_2 \in \mathbb{R}^q$ удовлетворяет системе (58) при $k = 3$:

$$P_{R_0^*}^s h_{k0}(\xi_2) = 0. \tag{60}$$

Система (60) нелинейная относительно ξ_2 в силу того, что функции E_3^i, $i = \overline{1, p+1}$, нелинейны относительно $x_2^i(t)$, а следовательно, ξ_2.

Далее, из условия разрешимости (58) системы (56) получаем линейную систему относительно ξ_k, $k = 3,4,5,\dots$:

$$V\xi_k = -P_{R_0^*}^s d_{k+1,0}, \quad k = 3,4,5,\dots, \tag{61}$$

где $V = P_{R_0^*}^s \overline{R}_0$ — постоянная $(s \times q)$-матрица, $d_{k+1,0}$ — ν-мерный постоянный вектор, а

$$h_{k+1,0} = \overline{R}_0 \xi_k + d_{k+1,0}, \quad k = 3,4,5,\dots.$$

Пусть $\operatorname{rank} V = s = q$. Тогда система (61) имеет единственное решение вида

$$\xi_k = -V^{-1} P_{R_0^*}^s d_{k+1,0}, \quad k = 3,4,5,\dots. \tag{62}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (У1)–(У6), *условия теорем* 1, 2 *и* $\operatorname{rank} V = s = q$. *Тогда задача* (1)–(3) *имеет формальное асимптотическое разложение решения вида* (12). *Элементы* $x_0^i(t)$, $\Pi_0^i(\nu_i)$, $i = \overline{1, p+1}$, *определяются из* (20), (22) *и* (25). *Элементы* $x_1^i(t)$, $\Pi_1^i(\nu_i)$, $i = \overline{1, p+1}$, *имеют вид* (27), (31), *где функции* $\alpha_1^i(t)$, $i = \overline{1, p+1}$, *удовлетворяют нелинейной краевой задаче* (39), *а вектор* $\xi_1 \in \mathbb{R}^k$ — *уравнению* (41). *Все остальные элементы разложения* (12) *имеют представление* (59), *где вектор* $\xi_2 \in \mathbb{R}^q$ *удовлетворяет уравнению* (60), *а векторы* $\xi_k \in \mathbb{R}^q$, $k = 3, 4, 5, \ldots$, *имеют вид* (62).

Пограничные функции удовлетворяют неравенству

$$\left\| \Pi_k^i(\nu_i) \right\| \leq c^* \exp(-\alpha^* \nu_i), \quad \nu_i \geq 0, \quad k = 0, 1, 2 \ldots, \; i = \overline{1, p+1},$$

где c^* *и* α^* — *положительные постоянные.*

4. Оценка остаточного члена асимптотического ряда

Пусть

$$u(t,\varepsilon) = x(t,\varepsilon) - X_{\mu+1}(t,\varepsilon), \tag{63}$$

где $x(t,\varepsilon)$ — решение задачи (1)–(3) и

$$X_{\mu+1}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\mu+1} \varepsilon^k \big(x_k^i(t) + \Pi_k^i(\nu_i) \big), \quad i = \overline{1, p+1}.$$

Используя схему доказательства из [1, 2] и необходимые изменения, следующие из обобщенных начальных и импульсных условий, покажем, что при определенных условиях выполнено $\|x(t,\varepsilon) - X_\mu(t,\varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{\mu+1}$. Подставляя (63) в (1)–(3), получаем, что $u(t,\varepsilon)$ удовлетворяет начально-импульсной задаче

$$\begin{aligned} &\varepsilon \frac{du}{dt} = F(t,\varepsilon) + G(t,u,\varepsilon), \quad Du(a,\varepsilon) = 0, \\ &N_i u(\tau_i + 0) + M_i u(\tau_i - 0) = 0, \quad i = \overline{1,p}, \end{aligned} \tag{64}$$

где $u(t,\varepsilon) = u^i(t,\varepsilon) = x^i(t,\varepsilon) - X_{\mu+1}^i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1, p+1}$, при этом $t \in [\tau_0, \tau_1]$ для $i = 1$, $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$ для $i = \overline{2, p+1}$. Функция $F(t,\varepsilon)$ имеет вид $F(t,\varepsilon) = F^i(t,\varepsilon) = f_x'(t, x_0^i(t) + \Pi_0^i(\nu_i) + u^i(t,\varepsilon), \varepsilon)$, а функция $G(t,u,\varepsilon)$ — вид

$$\begin{aligned} G(t,u,\varepsilon) = f\left(t, \sum_{k=0}^{\mu+1} \varepsilon^k \big(x_k^i(t) + \Pi_k^i(\nu_i) \big) + u^i(t,\varepsilon), \varepsilon \right) \\ - F^i(t,\varepsilon) u^i(t,\varepsilon) - \varepsilon \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\mu+1} \varepsilon^k \big(x_k^i(t) + \Pi_k^i(\nu_i) \big). \end{aligned}$$

Выполняются следующие свойства [1, 2]:

(a) $\|G(t,0,\varepsilon)\| \leq c_1 \varepsilon^{\mu+2}$;

(b) если $\|u'\| \leq \bar{c}_1 \varepsilon^2$, $\|u''\| \leq \bar{c}_1 \varepsilon^2$, то существуют положительные постоянные c_0 и ε_0 такие, что при $t \in [a,b] \backslash \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p\}$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ выполнено неравенство

$$\|G(t,u',\varepsilon) - G(t,u'',\varepsilon)\| \leq c_0 \varepsilon^2 \|u' - u''\|.$$

Если N_i и M_i — постоянные $(n \times n)$-матрицы и $\det N_i \neq 0$, $i = \overline{1,p}$, то, очевидно, (64) можно рассматривать так, как это сделано в [2]. В рассматриваемом случае вследствие обобщенных импульсных условий нужен другой подход, при котором предварительно надо рассмотреть начально-импульсные сингулярные задачи

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = B(t,\varepsilon)x + \varphi(t,\varepsilon), \quad t \in [a,b],\ t \neq \tau_i,\ 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{65}$$

$$Dx(a) = 0, \tag{66}$$

$$M_i x(\tau_i - 0) + N_i x(\tau_i + 0) = 0, \quad i = \overline{1,p}. \tag{67}$$

Начальные и импульсные условия (66), (67) представим в виде

$$\sum_{i=1}^{p+1} \bar{l}_i x^i(\cdot,\varepsilon) = 0, \tag{68}$$

где

$$\bar{l}_i x^i(\cdot,\varepsilon) = Q_{i-1}x^i(\tau_{i-1},\varepsilon) + R_i x^i(\tau_i,\varepsilon),\ i = \overline{1,p}, \quad \bar{l}_{p+1}x^{p+1}(\cdot,\varepsilon) = Q_p x^{p+1}(\tau_p,\varepsilon),$$

Q_i, $i = \overline{0,p}$, и R_i, $i = \overline{1,p+1}$, — матрицы из (15) и (16).

Введем обозначения:

$$\begin{gathered}
\overline{Q}_i = \bar{l}_i W(\cdot,\tau_{i-1},\varepsilon),\ i = \overline{1,p+1},\ \text{— } (\nu \times n)\text{-матрицы;}\\
\bar{x} = (x^1(\tau_0,\varepsilon), x^2(\tau_1,\varepsilon), \ldots, x^{p+1}(\tau_p,\varepsilon))^T \text{ — } \nu\text{-мерный вектор;}\\
\overline{Q}(\varepsilon) = (\overline{Q}_1(\varepsilon), \overline{Q}_2(\varepsilon), \ldots, \overline{Q}_{p+1}(\varepsilon)) \text{ — } (\nu \times (p+1)n)\text{-матрица;}\\
\bar{h}(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{p+1} \bar{l}_i \int\limits_{\tau_{i-1}}^{t} W(\cdot,s,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\varphi(s,\varepsilon)\,ds \text{ — } \nu\text{-мерный вектор,}
\end{gathered} \tag{69}$$

где $W(t,s,\varepsilon)$ — фундаментальная матрица системы $\varepsilon\frac{dx}{dt} = B(t,\varepsilon)x$ и $W(s,s,\varepsilon) = E_n$. Матрица $\overline{Q}(\varepsilon)$ имеет структуру $\overline{Q}(\varepsilon) = \overline{Q}_0 + O(\varepsilon^q \exp(-\frac{\alpha}{\varepsilon}))$, где $\overline{Q}_0$ — постоянная $(\nu \times (p+1)n)$-матрица, $q \in \mathbb{N}$, α — положительная постоянная.

Пусть выполнены условия:

(У7) $\operatorname{rank}\overline{Q}_0 = q_0 \le \min(\nu,(p+1)n)$;

(У8) $P_{\overline{Q}_0^*}\bar{h}(\varepsilon) = 0$, здесь $P_{\overline{Q}_0^*}$ — ортопроектор $P_{\overline{Q}_0^*} : \mathbb{R}^\nu \to \ker \overline{Q}_0^*$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* (У7), (У8). *Тогда начально-импульсная задача* (65)–(67) *имеет решение вида*

$$x^i(t,\varepsilon) = W(t,\tau_{i-1},\varepsilon)x^i(\tau_{i-1},\varepsilon) + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{t} W(t,s,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\varphi(s,\varepsilon)\,ds, \tag{70}$$

где

$$x^i(\tau_{i-1},\varepsilon) = [P_{\overline{Q}_0}]_{n_i}\bar{\eta} + \left[\overline{Q}_0^+\bar{h}(\varepsilon)\right]_{n_i}, \tag{71}$$

$\bar{\eta} \in \mathbb{R}^{n(p+1)}$, $t \in [\tau_0,\tau_1]$ *для* $i = 1$, $t \in (\tau_{i-1},\tau_i]$ *для* $i = \overline{2,p+1}$, $P_{\overline{Q}_0}$ — *ортопроектор* $P_{\overline{Q}_0} : \mathbb{R}^{(p+1)n} \ker \overline{Q}_0$, *а* $\overline{Q}_0^+$ — *единственная по Муру — Пенроузу псевдообратная матрица матрицы* $\overline{Q}_0$.

Доказательство. Согласно формуле Коши решение системы (65)–(67) имеет вид (70). Следовательно, достаточно показать, что $x^i(\tau_{i-1},\varepsilon)$, $\overline{1,p+1}$, имеют представление (71).

Неизвестные постоянные векторы $x^i(\tau_{i-1},\varepsilon)$, $\overline{1,p+1}$, представляют собой решение системы

$$\sum_{i=1}^{p+1}\bar{l}_i W(\cdot,\tau_{i-1},\varepsilon)x^i(\tau_{i-1},\varepsilon)=-\sum_{i=1}^{p+1}\bar{l}_i\int\limits_{\tau_{i-1}}^{(\cdot)}W(\cdot,s,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\varphi(s,\varepsilon)\,ds,$$

которая получается после подстановки (70) в (68). Согласно обозначению (69) последнее равенство принимает вид

$$\overline{Q}(\varepsilon)\bar{x}=\bar{h}(\varepsilon). \tag{72}$$

Опустим экспоненциально малые элементы матрицы $\overline{Q}(\varepsilon)$. Тогда система (72) будет иметь вид

$$\overline{Q}_0\bar{x}=\bar{h}(\varepsilon). \tag{73}$$

Решение (73) при выполнении условий (У7) и (У8) таково:

$$\bar{x}=P_{\overline{Q}_0}\bar{\eta}+\overline{Q}_0^{+}\bar{h}(\varepsilon),\quad \bar{\eta}\in\mathbb{R}^{(p+1)n}. \tag{74}$$

Из (74) для компонент $x^i(\tau_{i-1},\varepsilon)$, $\overline{1,p+1}$, вектора $\bar{x}$ получаем (71). $\square$

В задаче (64) выполним замену переменных, положив $u=T(t)w$, где $T(t)$ — $(n\times n)$-матрица с нерегулярными элементами для $t\in[a,b]\backslash\{\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_p\}$, преобразующая матрицу $f'_x\big(t,x_0^i(t),0\big)$ к клеточно-диагональному виду

$$T^{-1}(t)f'_x\big(t,x_0^i(t),0\big)T(t)=\operatorname{diag}\{\overline{A}(t),\Theta\},$$

где $\overline{A}(t)$ — $((n-r)\times(n-r))$-матрица, собственные числа которой имеют отрицательные вещественные части, Θ — $(r\times r)$-матрица с нулевыми элементами. При этом $T(t)=T_i(t)$, $\overline{A}(t)=\overline{A}_i(t)$, где $t\in[\tau_0,\tau_1]$ при $i=1$, $t\in(\tau_{i-1},\tau_i]$ при $i=\overline{2,p+1}$. Тогда задача (64) принимает вид

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{dw}{dt}=E(t,\varepsilon)w+\overline{G}(t,w,\varepsilon),\\ \overline{D}w(a,\varepsilon)=0,\quad \overline{N}_iw(\tau_i+0)+\overline{M}_iw(\tau_i-0)=0,\quad i=\overline{1,p},\end{gathered} \tag{75}$$

где

$$E(t,\varepsilon)=T^{-1}(t)F(t,\varepsilon)T(t)-\varepsilon T^{-1}(t)\frac{dT}{dt},\quad \overline{G}(t,w,\varepsilon)=T^{-1}(t)G(t,w,\varepsilon),$$

$$\overline{D}=DT(a),\quad \overline{N}_i=N_iT(\tau_i),\quad \overline{M}_i=M_iT(\tau_i),\quad i=\overline{1,p}.$$

Матрица $F(t,\varepsilon)$ имеет вид

$$F(t,\varepsilon)=f'_x\big(t,x_0^i(t),0\big)+f'_x\big(\tau_{i-1},x_0^i(\tau_{i-1})-\Pi_0^i(\nu_i),0\big)-f'_x\big(\tau_{i-1},x_0^i(\tau_{i-1}),0\big)+O(\varepsilon).$$

В силу последнего равенства имеем

$$E(t,\varepsilon)=T^{-1}(t)F(t,\varepsilon)T(t)-\varepsilon T^{-1}(t)\frac{dT}{dt}=\operatorname{diag}\{\overline{A}(t),\Theta\}+A(t,\varepsilon)+\varepsilon B(t),$$

где $\|A(t,\varepsilon)\|\le K\exp\big(-\kappa\frac{t-\tau_{i-1}}{\varepsilon}\big)$, $i=\overline{1,p+1}$.

Фундаментальная матрица $V(t,s,\varepsilon)$ системы $\varepsilon\frac{dw}{dt}=E(t,\varepsilon)w$ удовлетворяет неравенству $\|V(t,s,\varepsilon)\|\le c_2$, где c_2 — положительная постоянная.

Функция $\overline{G}(t,w,\varepsilon)$ удовлетворяет свойствам (a) и (b) функции $G(t,w,\varepsilon)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3, условия (У7), (У8) и c_0–c_8, d, e_i, $i = \overline{1, p+1}$, — положительные постоянные такие, что*

$$\|\overline{G}(t,0,\varepsilon)\| \le c_1\varepsilon^{\mu+2}, \quad \|\overline{G}(t,w',\varepsilon) - \overline{G}(t,w'',\varepsilon)\| \le c_0\varepsilon^2\|w' - w''\|,$$
$$\|\overline{G}(t,w,\varepsilon)\| \le \|\overline{G}(t,0,\varepsilon)\| + c_0\varepsilon^2\|w\|, \quad \|V(t,s,\varepsilon)\| \le c_2,$$
$$\|w^i(\tau_{i-1},\varepsilon)\| \le c_3\varepsilon^{\mu+1}, \quad i = \overline{1,p+1},$$
$$d = \max_{i=\overline{1,p+1}}(\tau_i - \tau_{i-1}), \quad c_4 = c_2c_3 + c_1c_2d, \quad \|l_i\psi(\cdot)\| \le e_i\|\psi(\cdot)\|, \quad i = \overline{1,p+1},$$
$$\sum_{i=1}^{p+1} e_i = c_5, \quad \|P_{\overline{Q}_0}\| \le c_6, \quad \|\bar{\eta}\| \le c_7, \quad \left\|Q_0^+\right\| \le c_8, \quad c_7 \le \frac{\varepsilon^{\mu+2}}{c_6}, \quad c_3 > c_8c_5c_2c_1d.$$

Если
$$\varepsilon_0 \le \min\left(\frac{1}{2c_2c_0d}, \frac{c_3 - c_8c_5c_2c_1d}{1 + 2c_8c_5c_4c_2c_0d}\right),$$
то $\|x(t,\varepsilon) - X_\mu(t,\varepsilon)\| \le c\varepsilon^{\mu+1}$ для $t \in [a,b] \setminus \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p\}$ и $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$.

Доказательство. Решение задачи (75) ищем в виде

$$w^i(t,\varepsilon) = V(t,\tau_{i-1},\varepsilon)w^i(\tau_{i-1},\varepsilon) + \int_{\tau_{i-1}}^{t} V(t,s,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\overline{G}(s,w^i,\varepsilon)\,ds. \tag{76}$$

Пусть выполнено
$$\|w^i(\tau_{i-1},\varepsilon)\| \le c_3\varepsilon^{\mu+1}, \quad i = \overline{1,p+1}. \tag{77}$$

К интегральному уравнению (76) применим метод последовательных приближений:

$$w_0^i(t,\varepsilon) = 0, \quad w_j^i(t,\varepsilon) = V(t,\tau_{i-1},\varepsilon)w^i(\tau_{i-1},\varepsilon) + \int_{\tau_{i-1}}^{t} V(t,s,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\overline{G}\big(s,w_{j-1}^i,\varepsilon\big)\,ds.$$

Для $w_1^i(t,\varepsilon)$ получим

$$\big\|w_1^i(t,\varepsilon)\big\| \le c_2c_3\varepsilon^{\mu+1} + \int_{\tau_{i-1}}^{t} c_2\frac{1}{\varepsilon}c_1\varepsilon^{\mu+2} \le (c_2c_3 + c_1c_2d)\varepsilon^{\mu+1} = c_4\varepsilon^{\mu+1}.$$

Следовательно,
$$D_1 = \big\|w_1^i - w_0^i\big\| \le c_4\varepsilon^{\mu+1}.$$

Для $D_{j+1} = \big\|w_{j+1}^i - w_j^i\big\|$ имеем

$$D_{j+1} \le \int_{\tau_{i-1}}^{t} c_2\frac{1}{\varepsilon}c_0\varepsilon^2 D_j\,ds \le c_2c_0d\varepsilon D_j \le \frac{1}{2}D_j \quad (\varepsilon_0 \le 1/(2c_2c_0d)).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\big\|w_{j+1}^i\big\| &\le \big\|w_{j+1}^i - w_j^i\big\| + \dots + \big\|w_1^i - w_0^i\big\| = D_{j+1} + D_j + \dots + D_1 \\ &\le \left(\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{j-1}} + \dots + \frac{1}{2} + 1\right)D_1 \le 2D_1 \le 2c_4\varepsilon^{\mu+1}.\end{aligned}$$

Значит,

$$\|w(t,\varepsilon)\| \leq 2c_4\varepsilon^{\mu+1}, \quad t \in [a,b]\backslash\{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p\}, \quad 0<\varepsilon\leq\varepsilon_0.$$

Осталось проверить, что предположение (77) выполнено. Согласно лемме 5 для $w^i(\tau_{i-1},\varepsilon)$ получаем систему

$$\overline{Q}(\varepsilon)\bar{x} = \bar{h}(\varepsilon),$$

где $\overline{Q}(\varepsilon)$ имеет вид (69),

$$\overline{Q}_i = \bar{l}_i V(\cdot,\tau_{i-1},\varepsilon),\ i=\overline{1,p+1}, \quad \bar{x} = (w^1(\tau_0,\varepsilon), w^2(\tau_1,\varepsilon),\ldots,w^{p+1}(\tau_p,\varepsilon))^T,$$

$$\bar{h}(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{p+1}\bar{l}_i\int\limits_{\tau_{i-1}}^{t} V(\cdot,s,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\overline{G}(s,w^i,\varepsilon)\,ds, \quad \overline{Q}(\varepsilon) = \overline{Q}_0 + O\left(\varepsilon^q\exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right).$$

Опуская экспоненциально малые элементы в $\overline{Q}(\varepsilon)$, получаем

$$w^i(\tau_{i-1},\varepsilon) = [P_{\overline{Q}_0}]_{n_i}\bar{\eta} + \left[\overline{Q}_0^+\bar{h}(\varepsilon)\right]_{n_i}.$$

Для вектора $\bar{h}(\varepsilon)$ имеем оценку

$$\|\bar{h}(\varepsilon)\| \leq \sum_{i=1}^{p+1} e_i \int\limits_{\tau_{i-1}}^{(\cdot)} c_2\frac{1}{\varepsilon}(c_1\varepsilon^{\mu+2} + c_0\varepsilon^2 2c_4\varepsilon^{\mu+1})\,ds$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p+1} e_i(c_2c_1 + 2c_4c_2c_0\varepsilon)d\varepsilon^{\mu+1} = c_5 d(c_2c_1 + 2c_4c_2c_0\varepsilon)\varepsilon^{\mu+1}.$$

Тогда

$$\|w^i(\tau_{i-1},\varepsilon)\| \leq \|\bar{x}\| \leq c_6c_7 + c_8c_5d(c_2c_1+2c_4c_2c_0\varepsilon)\varepsilon^{\mu+1} \leq c_3\varepsilon^{\mu+1}.$$

В силу того, что $X_{\mu+1}(t,\varepsilon) = X_\mu(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{\mu+1})$, находим

$$\|x(t,\varepsilon) - X_\mu(t,\varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{\mu+1}, \quad t\in[a,b]\setminus\{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p\},\ 0<\varepsilon\leq\varepsilon_0. \quad \square$$

Очевидно, $x(t,\varepsilon)\to x_0(t)$, когда $\varepsilon\to 0$ и $t\in(a,b]\setminus\{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_p\}$.

5. Пример

Пусть $t\in[0,2]$, $t\neq\tau_1=1$, $x=(x_1,\ x_2)^T$ и в задаче (1)–(3)

$$f(t,x,\varepsilon) = \begin{cases} (x_1x_2+\varepsilon x_2, -x_2+\varepsilon)^T, & t\in[0,1],\\ (-x_1+2x_2+3\varepsilon(-x_1+2x_2)+1, x_1-2x_2-1)^T, & t\in(1,2], \end{cases}$$

$D=(2,\ 0)$, $v=2e$,

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad h_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}-e\\ e-4\\ -4\end{pmatrix}.$$

Решение ищем в виде

$$x(t,\varepsilon) = x^i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{1}\varepsilon^k\left(x_k^i(t) + \Pi_k^i(\nu_i)\right) + O(\varepsilon^2),$$

где $t \in [0,1]$, $\nu_1 = \frac{t}{\varepsilon}$ для $i = 1$ и $t \in (1,2]$, $\nu_2 = \frac{t-1}{\varepsilon}$ для $i = 2$.

Пусть $t \in [0,1]$. Тогда система (13) при $k = 0$ принимает вид

$$\begin{pmatrix} x_{01}^1 x_{02}^1 \\ -x_{02}^1 \end{pmatrix} = 0, \quad x_0^1 = \left(x_{01}^1, x_{02}^1\right)^T$$

и имеет решение вида (20)

$$x_0^1(t) \equiv \varphi_0^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_0^1(t),$$

где $\alpha_0^1(t)$ — пока неизвестная функция.

Матрица $A_1(t, \alpha_0^1(t))$ такова: $A_1(t, \alpha_0^1(t)) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_0^1(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно,

$$A_1^+\big(t, \alpha_0^1(t)\big) = \frac{1}{\left(\alpha_0^1(t)\right)^2 + 1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_0^1(t) & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_{A_1^*}(t, \alpha_0^1(t)) = \frac{1}{\left(\alpha_0^1(t)\right)^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0^1(t) \end{pmatrix}, \quad P_{A_1}(t, \alpha_0^1(t)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1(t, \alpha_0^1(t)) = \frac{1}{\left(\alpha_0^1(t)\right)^2 + 1}, \quad E_0^1(t, \alpha_0^1(t)) = \frac{\alpha_0^1(t)}{\left(\alpha_0^1(t)\right)^2 + 1}.$$

Из системы (21) получаем уравнение $\frac{d\alpha_0^1(t)}{dt} = \alpha_0^1(t)$, решение которого имеет вид $\alpha_0^1(t) = \eta_0^1 e^t$, где $\eta_0^1 \in \mathbb{R}$.

Для $\Pi_0^1(\nu_1)$ из (14) приходим к системе

$$\frac{d\Pi_0^1(\nu_1)}{d\nu_1} = \begin{pmatrix} (\eta_0^1 + \Pi_{01}^1(\nu_1))\Pi_{02}^1(\nu_1) \\ -\Pi_{02}^1(\nu_1) \end{pmatrix}, \quad \text{где } \Pi_0^1(\nu_1) = (\Pi_{01}^1(\nu_1),\ \Pi_{02}^1(\nu_1))^T.$$

Устойчивое многообразие S_1^+ этой системы имеет вид

$$\Pi_{01}^1(\nu_1) = \eta_0^1\big(e^{-\Pi_{02}^1(\nu_1)} - 1\big).$$

Пусть $\Pi_{02}^1(0) = c_0^1$. Тогда последняя система согласно лемме 1 имеет экспоненциально убывающее решение

$$\Pi_0^1(\nu_1) = \begin{pmatrix} \eta_0^1(e^{c_0^1 e^{-\nu_1}} - 1) \\ -c_0^1 e^{-\nu_1} \end{pmatrix},$$

так как начальное условие $\Pi_0^1(0) = \left(\eta_0^1(e^{c_0^1} - 1), -c_0^1\right)^T$ принадлежит многообразию S_1^+.

Аналогично при $t \in (1,2]$ получаем

$$x_0^2(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \eta_0^2 - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10t - 11 \\ 5t - 3 \end{pmatrix}, \quad \Pi_0^2(\nu_2) = \begin{pmatrix} e^{-3\nu_2} \\ -e^{-3\nu_2} \end{pmatrix} c_0^2,$$

где $\eta_0^2, c_0^2 \in \mathbb{R}$.

Для окончательного вычисления $x_0^i(t)$, $\Pi_0^i(\nu_i)$, $i = 1, 2$, надо определить η_0^1, η_0^2, c_0^1 и c_0^2. Это сделаем с помощью модификации задачи. Матрицы из (15) и (16) имеют вид

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

а вектор h равен $\left(2e,\ \frac{2}{5}-e,\ e-4,\ -4\right)^T$. Тогда из равенства (18) получаем систему вида (24)

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}\eta_0^1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\eta_0^1(e^{c_0^1}-1)\\-c_0^1\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}0&0\\-1&2\\1&1\\0&1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}e\eta_0^1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\eta_0^1(e^{c_0^1e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}-1)\\-c_0^1e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\end{pmatrix}\right)$$
$$+\begin{pmatrix}0&0\\1&1\\-1&2\\-1&2\end{pmatrix}\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\eta_0^2-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}c_0^2\right)=\begin{pmatrix}2e\\\frac{2}{5}-e\\e-4\\-4\end{pmatrix}.$$

Опустим экспоненциально малые элементы. Тогда последняя система принимает вид

$$\begin{aligned}2\eta_0^1e^{c_0^1}&=2e,\\-e\eta_0^1+\frac{3}{5}\eta_0^2-\frac{1}{5}&=-e+\frac{2}{5},\\-1-3c_0^2+e\eta_0^1&=-4+e,\\-1-3c_0^2&=-4.\end{aligned}$$

Следовательно, $c_0^2=1$, $\eta_0^1=1$, $\eta_0^2=1$, $c_0^1=1$. Тогда

$$x_0^1(t)=\begin{pmatrix}e^t\\0\end{pmatrix},\quad \Pi_0^1(\nu_1)=\begin{pmatrix}e^{e^{-\nu_1}}-1\\-e^{-\nu_1}\end{pmatrix},$$
$$x_0^2(t)=\begin{pmatrix}\frac{13}{5}-2t\\\frac{4}{5}-t\end{pmatrix},\quad \Pi_0^2(\nu_2)=\begin{pmatrix}e^{-3\nu_2}\\-e^{-3\nu_2}\end{pmatrix}.$$

Для $A_1(t)$ и $A_2(t)$ получаем

$$A_1(t)=\begin{pmatrix}0&e^t\\0&-1\end{pmatrix},\quad A_2(t)=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-2\end{pmatrix}.$$

Пусть снова $t\in[0,1]$. Для $x_1^1(t)$ согласно (27) имеем

$$x_1^1(t)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\alpha_1^1(t)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Для $\alpha_1^1(t)$ из (28) получаем систему

$$\frac{1}{e^{2t}+1}\frac{d\alpha_1^1(t)}{dt}=\frac{1}{e^{2t}+1}\alpha_1^1(t)+\frac{1}{e^{2t}+1},$$

где $D_1(t)=\frac{1}{e^{2t}+1}$, $D_1^{-1}(t)=e^{2t}+1$. Тогда последняя система принимает вид

$$\frac{d\alpha_1^1(t)}{dt}=\alpha_1^1(t)+1$$

и имеет решение

$$\alpha_1^1(t)=e^t\eta_1^1+e^t-1,\quad \eta_1^1\in\mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$x_1^1(t)=\begin{pmatrix}e^t\\0\end{pmatrix}\eta_1^1+\begin{pmatrix}e^t-1\\1\end{pmatrix}.$$

Система (30) относительно $\Pi_1^1(\nu_1)$ выглядит так:

$$\frac{\Pi_1(\nu_1)}{d\nu_1} = \begin{pmatrix} -e^{-\nu_1} & e^{e^{-\nu_1}} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Pi_1^1(\nu_1) + \begin{pmatrix} -\big(\eta_1^1 + 1 + \nu_1\big)e^{-\nu_1} + e^{e^{-\nu_1}} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Получаем $S_1^+ : \Pi_{01}^1(\nu_1) = e^{-\Pi_{02}^1(\nu_1)} - 1$. Тогда $H_1(\nu_1) = -e^{-\Pi_{02}^1(\nu_1)} = -e^{e^{-\nu_1}}$. Таким образом,

$$\overline{S}_1(\nu_1) = \begin{pmatrix} -e^{e^{-\nu_1}} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A}_1(\nu_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -e^{-\nu_1} \end{pmatrix},$$

$$P^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I - P^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X^1(\nu_1) = \begin{pmatrix} -e^{-\nu_1 + e^{-\nu_1}} & -e^{e^{-\nu_1}} \\ e^{-\nu_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad X_1^1(\nu_1) = \begin{pmatrix} -e^{-\nu_1 + e^{-\nu_1}} \\ e^{-\nu_1} \end{pmatrix},$$

$$\overline{X}^1(\nu_1) = \begin{pmatrix} e^{-\nu_1} & 0 \\ 0 & -e^{e^{-\nu_1}} \end{pmatrix}, \quad (\overline{X}^1)^{-1}(\nu_1) = \begin{pmatrix} e^{\nu_1} & 0 \\ 0 & -e^{-e^{-\nu_1}} \end{pmatrix},$$

$$\overline{K}^1(\nu_1, s) = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{-\nu_1 + s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & 0 \le s \le \nu_1 < +\infty, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{e^{-\nu_1} - e^{-s}} \end{pmatrix}, & 0 \le \nu_1 \le s < +\infty, \end{cases}$$

$$K^1(\nu_1, s) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -e^{-\nu_1 + e^{-\nu_1} + s} & 0 \\ e^{-\nu_1 + s} & 0 \end{pmatrix}, & 0 \le s \le \nu_1 < +\infty, \\ \begin{pmatrix} 0 & e^{e^{-\nu_1} - e^{-s}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & 0 \le \nu_1 \le s < +\infty, \end{cases}$$

$$\overline{G}_1^1(\nu_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \big(\eta_1^1 + 1 + \nu_1\big)e^{-\nu_1} + e^{e^{-\nu_1}} \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме 2 система (78) имеет решение вида

$$\Pi_1^1(\nu_1) = \begin{pmatrix} -e^{-\nu_1 + e^{-\nu_1}} \\ e^{-\nu_1} \end{pmatrix} c_1^1 + \begin{pmatrix} (e^{e^{-\nu_1}} - 1)\big(\eta_1^1 + 1 + \nu_1\big) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_1^1 \in \mathbb{R}.$$

Аналогично

$$x_1^2(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\eta_1^2 + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10t - 11 \\ 5t - 3 \end{pmatrix},$$

$$\Pi_1^2(\nu_2) = \begin{pmatrix} e^{-3\nu_2} \\ -e^{-3\nu_2} \end{pmatrix} c_1^2 + \begin{pmatrix} 2 - 3\nu_2 \\ 1 + 3\nu_2 \end{pmatrix} e^{-3\nu_2}.$$

Тогда равенство (19) при $k = 1$ принимает вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \eta_1^1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ec_1^1 + (e-1)(\eta_1^1 + 1) \\ c_1^1 \end{pmatrix} \right)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} e\eta_1^1 + e - 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c - c_1^1 e^{-\frac{1}{\varepsilon} + e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} + (e^{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} - 1)\big(\eta_1^1 + 1 + \frac{1}{\varepsilon}\big) \\ c_1^1 e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \end{pmatrix} \right)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\eta_1^2 - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1^2 + 2 \\ -c_1^2 + 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Опустим экспоненциально малые элементы. Тогда последняя система будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 2e & -e & e & 0 \\ -2e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^1 \\ c_1^1 \\ \eta_1^2 \\ c_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2e \\ e-\frac{31}{5} \\ -e-1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

и имеет решение

$$\begin{pmatrix} \eta_1^1 \\ c_1^1 \\ \eta_1^2 \\ c_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-e}{e} \\ 0 \\ -\frac{26}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, применение изложенного подхода приводит к решению

$$x^1(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} e^t + e^{e^{-\frac{t}{\varepsilon}}} - 1 \\ -e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} e^{t-1} - 1 + (e^{e^{-\frac{t}{\varepsilon}}} - 1)\left(\frac{1}{e} + \frac{t}{\varepsilon}\right) \\ 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2)$$

при $t \in [0,1]$,

$$x^2(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} - 2t + e^{-3\frac{t-1}{\varepsilon}} \\ \frac{4}{5} - t - e^{-3\frac{t-1}{\varepsilon}} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -\frac{17}{3} + 2t + (\frac{8}{3} - 3\frac{t-1}{\varepsilon})e^{-3\frac{t-1}{\varepsilon}} \\ -\frac{7}{3} + t + (\frac{1}{3} + 3\frac{t-1}{\varepsilon})e^{-3\frac{t-1}{\varepsilon}} \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2)$$

при $t \in (1,2]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.
2. *Bainov D. D., Covachev V.* Impulsive differential equations with small parameter. Singapore: World Sci. Publ., 1994.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища шк., 1987.
4. *Karandjulov L. I.* Generalized Cauchy problem for linear pulse differential systems, Mathematics and education in mathematics // Proc. Twenty first spring conf. of the Union of Bulgarian mathematicians. Montana, 1999. P. 120–127.
5. *Generalize* inverse and applications / Ed. by M. Z. Nashed. New York; San Francisco; London: Acad. Press, 1967.
6. *Penrose R.* A generalize inverse for matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1955. V. 51. P. 406–413.
7. *Бойчук А. А.* Нелинейные краевые задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. 1998. Т. 50. С. 162–171.

Статья поступила 16 декабря 2003 г., окончательный вариант — 14 ноября 2004 г.

Каранджулов Людмил Иванов, Стоянова Яна Петрова
Технически университет — София,
Факултет по Приложна Математика и Информатика,
Катедра "Диференциални уравнения"
ПК 384, София 1000, България
likar@tu-sofia.bg, yast@tu-sofia.bg