Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2005. Том 46, № 5

УДК 517.54

ОБ ОБРАЩЕНИИ ПРАВИЛА ЛОПИТАЛЯ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. В. Шишкина

Аннотация: Рассматривается вопрос о возможности обращения правила Лопиталя для вычисления пределов отношения аналитических функций в граничной точке области аналитичности в угле Штольца.

Ключевые слова: аналитическая функция, граничные свойства, правило Лопиталя.

Как известно, обратное к правилу Лопиталя утверждение неверно: из существования предела отношения функций $f(x)$ и $\phi(x)$ не всегда следует существование предела отношения производных этих функций. Однако в некоторых частных случаях функций $f(x)$ и $\phi(x)$ и (или) при выполнении некоторых условий, наложенных на эти функции, утверждение, обратное правилу Лопиталя, будет выполнено.

К такого рода утверждениям относится, например, теорема Харди и Литтльвуда [1, с. 215–216]. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на $(0,1)$, $f'(x)$ возрастает на $(0,1)$, $c>0$, и $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)(1-x)^c = A > 0$, то существует предел $\lim\limits_{x\to 1-} f'(x)(1-x)^{c+1} = Ac$.*

В случае аналитических в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функций в этом направлении в [2] доказана следующая

Теорема. *Пусть $f(z)$ — аналитическая в $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функция, $\eta \in (0, \pi/2)$, $c \in \mathbb{C}$, W_η — угол Штольца величиной 2η с вершиной в точке $z = 1$ и существует конечный предел*

$$\lim_{W_\eta \ni z \to 1} f(z)(1-z)^c = A.$$

Тогда для любого $\varepsilon \in (0, \eta)$ существует предел

$$\lim_{W_{\eta-\varepsilon} \ni z \to 1} f'(z)(1-z)^{c+1} = Ac.$$

В действительности справедливо гораздо более общее утверждение, которое можно считать обращением правила Лопиталя при некоторых дополнительных предположениях. При доказательстве этого утверждения существенно используются идеи Я. Годули и В. В. Старкова из [2].

Теорема 1. *Пусть B — область, которая имеет на своей границе открытую аналитическую дугу Жордана γ; ξ — внутренняя точка кривой γ, не являющаяся предельной для граничных точек, не принадлежащих γ; V_η — угол Штольца* *величиной 2η с вершиной в точке ξ (биссектриса угла V_η ортогональна касательной к γ в точке ξ) такой, что $V_\eta \subset B$; функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитические в B и существует предел*

$$\lim_{V_\eta \ni z \to \xi} \frac{f(z)}{g(z)} = A \neq \infty. \tag{1}$$

Если значения функции $\frac{g'(z)}{g(z)}(\xi - z)$ отделены от нуля в V_η при $z \to \xi$, то для любого $\varepsilon \in (0, \eta)$ существует предел

$$\lim_{V_{\eta-\varepsilon} \ni z \to \xi} \frac{f'(z)}{g'(z)} = A.$$

Если

$$\lim_{V_\eta \ni z \to \xi} \frac{g'(z)}{g(z)}(\xi - z) = 0,$$

то для любого $\varepsilon \in (0, \eta)$

$$\lim_{V_{\eta-\varepsilon} \ni z \to \xi} \frac{f'(z)}{g(z)}(\xi - z) = 0.$$

Замечание. Условие отделенности от нуля значений функции $\frac{g'(z)}{g(z)}(\xi - z)$ в V_η при $z \to \xi$ существенно в том смысле, что если это условие не выполнено и не существует $\lim\limits_{V_\eta \ni z \to \xi} \frac{g'(z)}{g(z)}(\xi - z) = 0$, то теорема неверна. Примером служит случай, когда $B = \Delta$, W_η — угол Штольца из Δ величиной 2η с вершиной в точке $z = 1$, $f(z) = \exp\{\cos \frac{1}{1-z}\}$ и $g(z) = zf(z)$.

Доказательство теоремы 1. Из предположений теоремы вытекает существование односвязной подобласти B_0 области B, являющейся пересечением B и круга с центром в точке ξ достаточно малого радиуса.

Пусть регулярная функция $w = \phi(z)$ однолистно отображает B_0 на правую полуплоскость так, что $\phi(\xi) = 0$. По теореме 5 из [3, с. 46] функция $\phi(z)$ регулярна в окрестности точки ξ в точках кривой γ и $w' = \phi'(z) \neq 0$, т. е. имеет место конформность.

При отображении $w = \phi(z)$ угол Штольца V_η перейдет в некоторую область Ω_η, лежащую в правой полуплоскости, вершина ξ угла V_η перейдет в точку $w = 0$. В силу конформности $\phi(z)$ в точке ξ углы между сторонами V_η и касательной к γ в точке ξ сохраняются как углы между соответствующими касательными к Ω_η и мнимой прямой в точке $w = 0$, следовательно, угол между касательными к Ω_η в точке $w = 0$ равен 2η. Тогда для любого фиксированного $\varepsilon \in (0, \frac{\eta}{2})$ при w, близких к 0, угол Штольца $W_{\eta-\varepsilon}$ с вершиной в точке $w = 0$ величиной $2(\eta - \varepsilon)$ лежит в Ω_η.

Функция $\psi(w) = \phi^{-1}(w)$, обратная к $\phi(z)$, конформно отображает правую полуплоскость на B_0, $\psi(0) = \xi$. Угловая область $W_{\eta-\varepsilon}$ при отображении $\psi(w)$ перейдет в некоторую область $\Upsilon_{\eta-\varepsilon} \subset V_\eta \subset B$. Из конформности $\psi(w)$ получаем, что $V_{\eta-2\varepsilon} \subset \Upsilon_{\eta-\varepsilon}$ для $\varepsilon \in (0, \frac{\eta}{2})$ при z, близких к ξ.

Из (1) вытекает, что

$$\lim_{V_\eta \ni z \to \xi} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{V_{\eta-2\varepsilon} \ni z \to \xi} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{W_{\eta-\varepsilon} \ni w \to 0} \frac{f(\psi(w))}{g(\psi(w))} = A. \tag{2}$$

Рассмотрим отображение $w(t) = a + at\sin(\eta - \varepsilon)$, $a \in (0; 1)$, замкнутого единичного круга $\overline{\Delta} = \{t : |t| \leq 1\}$. Каждый круг, вписанный в $W_{\eta-\varepsilon}$, с центром в точке a и радиусом $a\sin(\eta-\varepsilon)$ является образом круга $\overline{\Delta}$ при отображении $w(t)$. По условию (2) для любого $\varepsilon'>0$ существует $\delta_{\varepsilon'}>0$ такое, что для $w\in W_{\eta-\varepsilon}$, $|w|<\delta_{\varepsilon'}$, справедливо неравенство $\left|\frac{f(\psi(w))}{g(\psi(w))}-A\right|<\varepsilon'$. Поэтому для любого $\varepsilon_0>0$ существует $\delta_{\varepsilon_0}>0$ такое, что если $0<a<\delta_{\varepsilon_0}$, то $\left|\frac{f(\psi(w(t)))}{g(\psi(w(t)))}-A\right|<\varepsilon_0$ для любого $t\in\overline{\Delta}$, т. е.

$$\frac{f\left(\psi(w(t))\right)}{g\left(\psi(w(t))\right)} \underset{a\to 0+}{\longrightarrow} A \tag{3}$$

равномерно в круге $\overline{\Delta}$.

Дифференцируя (3) по t, получаем, что

$$\frac{f'(\psi)\psi'(w)w'(t)g(\psi)-g'(\psi)\psi'(w)w'(t)f(\psi)}{g^2(\psi)} \longrightarrow 0 \tag{4}$$

равномерно в круге $\overline{\Delta}$ при $a\to 0+$. Преобразуем выражение в левой части (4):

$$w'(t)\psi'(w)\frac{g'(\psi)}{g(\psi)}\left(\frac{f'(\psi)}{g'(\psi)}-\frac{f(\psi)}{g(\psi)}\right)=a\sin(\eta-\varepsilon)\psi'(w)\frac{g'(\psi)}{g(\psi)}\left(\frac{f'(\psi)}{g'(\psi)}-\frac{f(\psi)}{g(\psi)}\right).$$

Тогда (4) равносильно сходимости

$$\begin{aligned}&\frac{\sin(\eta-\varepsilon)}{1+t\sin(\eta-\varepsilon)}\frac{w(t)}{\xi-\psi(w(t))}\psi'(w(t))\\ &\qquad\times\frac{g'(\psi(w(t)))}{g(\psi(w(t)))}(\xi-\psi(w(t)))\left(\frac{f'(\psi(w(t)))}{g'(\psi(w(t)))}-\frac{f(\psi(w(t)))}{g(\psi(w(t)))}\right)\to 0\end{aligned} \tag{5}$$

равномерно в $\overline{\Delta}$ при $a\to 0+$.

Покажем, что

$$\left(\frac{f'(\psi(w(t)))}{g'(\psi(w(t)))}-\frac{f(\psi(w(t)))}{g(\psi(w(t)))}\right)\to 0 \quad \text{в } \overline{\Delta} \text{ при } a\to 0+.$$

Значения функции $\frac{\sin(\eta-\varepsilon)}{1+t\sin(\eta-\varepsilon)}$ отделены от нуля в $\overline{\Delta}$ при $a\to 0+$. Поскольку функция $w=\phi(z)$ регулярна и однолистна в окрестности точки ξ в точках дуги γ, ее можно регулярно продолжить в некоторую окрестность γ так, что $\phi'(z)\neq 0$ в окрестности точки $z=\xi$. Тогда обратная к $\phi(z)$ функция $\psi(w)$ будет определена в некоторой окрестности $U(0)$ точки $w=0$, причем $\psi'(w)\neq 0$ в $U(0)$. Рассмотрим окрестность $U_0(0)$ такую, что $\overline{U_0(0)}\subset U(0)$. На компакте $\overline{U_0(0)}$ функция $|\psi'(w)|\neq 0$ достигает своего минимума, следовательно, $\psi'(w(t))$ отделена от нуля в $\overline{U_0(0)}$ при $a\to 0+$; заметим, что

$$\infty\neq\psi'(0)=\lim_{w\to 0}\frac{\psi(w)-\psi(0)}{w}=\lim_{a\to 0+}\frac{\psi(w(t))-\xi}{w(t)},$$

т. е.

$$\lim_{a\to 0+}\frac{w(t)}{\psi(w(t))-\xi}\neq 0$$

для каждого $t\in\overline{\Delta}$. Отделенность от нуля функции $\frac{g'(\psi(w(t)))}{g(\psi(w(t)))}(\xi-\psi(w(t)))$ в $\overline{\Delta}$ при $a\to 0+$ следует из условия теоремы. Из последних рассуждений и (5) вытекает, что

$$\left(\frac{f'(\psi(w(t)))}{g'(\psi(w(t)))}-\frac{f(\psi(w(t)))}{g(\psi(w(t)))}\right)\underset{a\to 0+}{\longrightarrow} 0 \tag{6}$$

равномерно в $\overline{\Delta}$.

Из (3) и (6) получаем, что

$$\frac{f'(\psi(w))}{g'(\psi(w))} \to A \tag{7}$$

при $w \to 0$ в угле Штольца $W_{\eta-\varepsilon}$, который заполняют образы круга $\overline{\Delta}$ при отображении $w(t) = a + at\sin(\eta - \varepsilon)$, $a \in (0,1)$.

При отображении $z = \psi(w)$ угол $W_{\eta-\varepsilon}$ переходит в некоторую область $\Upsilon_{\eta-\varepsilon} \subset B$, $\xi = \psi(0)$. Отображение $\psi(w)$ конформно в окрестности точки $w = 0$, поэтому угол между касательными к $\partial\Upsilon_{\eta-\varepsilon}$ в точке $z = \xi$ равен $2(\eta - \varepsilon)$. Тогда при z, близких к ξ, угол $V_{\eta-2\varepsilon}$ лежит в $\Upsilon_{\eta-\varepsilon}$. Отсюда и из (7) вытекает, что для любого $\varepsilon \in (0,\eta)$

$$\lim_{V_{\eta-\varepsilon}\ni z\to\xi} \frac{f'(z)}{g'(z)} = A.$$

Рассмотрим случай, когда

$$\lim_{V_\eta\ni z\to\xi} \frac{g'(z)}{g(z)}(\xi - z) = 0.$$

Тогда из (5) вытекает, что

$$\frac{f'(\psi(w(t)))}{g(\psi(w(t)))}(\xi - \psi(w(t))) - \frac{f(\psi(w(t)))}{g(\psi(w(t)))}\frac{g'(\psi(w(t)))}{g(\psi(w(t)))}(\xi - \psi(w(t))) \underset{a\to 0+}{\longrightarrow} 0$$

равномерно в $\overline{\Delta}$.

Теперь, как и в случае, когда значения функции $\frac{g'(z)}{g(z)}(\xi - z)$ отделены от нуля в V_η при $z \to \xi$, получаем, что для любого $\varepsilon \in (0,\eta)$

$$\lim_{V_{\eta-\varepsilon}\ni z\to\xi} \frac{f'(z)}{g(z)}(\xi - z) = 0.$$

Теорема 1 доказана.

В случае, когда область B является кругом Δ, теорема 1 примет следующий вид.

Следствие 1. *Пусть функции $f(z)$ и $\phi(z)$ аналитические в Δ, $\eta \in (0,\pi/2)$, $A \in \mathbb{C}$, W_η — угол Штольца из Δ величиной 2η с вершиной в точке $z = 1$. Если существует предел*

$$\lim_{W_\eta\ni z\to 1} \frac{f(z)}{\phi(z)} = A$$

и значения функции $\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}(1-z)$ отделены от нуля в W_η при $z \to 1$, то существует предел

$$\lim_{W_{\eta-\varepsilon}\ni z\to 1} \frac{f'(z)}{\phi'(z)} = A$$

для любого $\varepsilon \in (0,\eta)$. Если

$$\lim_{W_\eta\ni z\to 1} \frac{f(z)}{\phi(z)} = A \quad \text{и} \quad \lim_{W_\eta\ni z\to 1} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}(1 - z) = 0,$$

то для любого $\varepsilon \in (0,\eta)$

$$\lim_{W_{\eta-\varepsilon}\ni z\to 1} \frac{f'(z)}{\phi(z)}(1 - z) = 0.$$

В частном случае функции $\phi(z) = (1-z)^{-c}$, $c \in \mathbb{C}$, *получаем ранее цитированную теорему из* [2].

Следующую теорему можно также отнести к теоремам «типа правила Лопиталя». В ней рассматривается случай, когда из существования предела вида $f(z)G'(z)$ в угле Штольца следует существование предела $f'(z)G(z)$.

Теорема 2. *Пусть B — область, которая имеет на своей границе открытую аналитическую дугу Жордана γ; ξ — внутренняя точка кривой γ, не являющаяся предельной для граничных точек, не принадлежащих γ; V_η — угол Штольца величиной 2η с вершиной в точке ξ, $V_\eta \subset B$; функции $f(z)$ и $G(z)$ аналитические в B. Если*

(1) $\lim\limits_{V_\eta \ni z \to \xi} f(z)G'(z) = A \neq \infty$,

(2) $\lim\limits_{V_\eta \ni z \to \xi} \frac{(\log G'(z))'}{(\log G(z))'} = B \neq \infty$,

(3) *значения функции* $\frac{G'(z)}{G(z)}(\xi - z)$ *отделены от нуля в* V_η *при* $z \to \xi$,

то для любого $\varepsilon \in (0, \eta)$ существует предел

$$\lim_{V_{\eta-\varepsilon} \ni z \to \xi} f'(z)G(z) = -AB.$$

Если выполнены условия (1), (2) *и*

$$\lim_{V_\eta \ni z \to \xi} \frac{G'(z)}{G(z)}(\xi - z) = 0,$$

то для любого $\varepsilon \in (0, \eta)$

$$\lim_{V_{\eta-\varepsilon} \ni z \to \xi} f'(z)G'(z)(\xi - z) = 0.$$

Доказательство. Так же, как и в теореме 1, получаем, что

$$f(\psi(w(t)))G'(\psi(w(t))) \underset{a\to 0+}{\longrightarrow} A \tag{8}$$

равномерно в круге $\overline{\Delta}$ (обозначения те же, что и в доказательстве теоремы 1).

Дифференцируем (8) по t. Тогда

$$f'(\psi)\psi'(w)w'(t)G'(\psi) + G''(\psi)\psi'(w)w'(t)f(\psi) \to 0$$

равномерно в $\overline{\Delta}$ при $a \to 0+$. Последнее равносильно тому, что

$$a\sin(\eta-\varepsilon)\psi'(w)\frac{G'(\psi)}{G(\psi)}\left(f'(\psi)G(\psi) + f(\psi)G'(\psi)\frac{(\log G'(\psi))'}{(\log G(\psi))'}\right) \underset{a\to 0+}{\longrightarrow} 0 \tag{9}$$

равномерно в $\overline{\Delta}$.

Как и в доказательстве теоремы 1, получаем, что

$$f'(\psi(w(t)))G(\psi(w(t))) + f(\psi(w(t)))G'(\psi(w(t)))\frac{(\log G'(\psi(w(t))))'}{(\log G(\psi(w(t))))'} \underset{a\to 0+}{\longrightarrow} 0 \tag{10}$$

равномерно в $\overline{\Delta}$. Тогда из условий (1) и (2) теоремы 2 и (10) вытекает, что

$$f'(\psi(w(t)))G(\psi(w(t))) \underset{a\to 0+}{\longrightarrow} -AB.$$

Отсюда, как и в теореме 1, следует, что для любого $\varepsilon \in (0,\eta)$

$$\lim_{V_{\eta-\varepsilon}\ni z\to\xi} f'(z)G(z) = -AB.$$

Если

$$\frac{g'(\psi(w(t)))}{g(\psi(w(t)))}(\xi - \psi(w(t))) \to 0 \quad \text{в } \overline{\Delta} \text{ при } a \to 0+,$$

то из (9) получаем, что

$$f'(\psi)G'\psi)(\xi-\psi) + f(\psi)G'(\psi)\frac{G'(\psi)}{G(\psi)}(\xi-\psi)\frac{(\log G'(\psi))'}{(\log G(\psi))'} \underset{a\to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

Отсюда, как и ранее, для любого $\varepsilon \in (0,\eta)$

$$\lim_{V_{\eta-\varepsilon}\ni z\to\xi} f'(z)G'(z)(\xi - z) = 0.$$

Теорема 2 доказана.

В случае, когда область B является единичным кругом Δ, теорема принимает следующий вид.

Следствие 2. *Пусть функции $f(z)$ и $\Phi(z)$ аналитические в Δ, $A, B \in \mathbb{C}$, $\eta \in (0,\pi/2)$, W_η — угол Штольца из Δ величиной 2η с вершиной в точке $z=1$. Если*

(1) $\lim_{W_\eta\ni z\to 1} f(z)\Phi'(z) = A$,

(2) $\lim_{W_\eta\ni z\to 1} \frac{(\log\Phi'(z))'}{(\log\Phi(z))'} = B$,

(3) *значения функции $\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}(1-z)$ отделены от нуля в угле Штольца W_η при $z\to 1$,*

то для любого $\varepsilon \in (0,\eta)$ существует предел

$$\lim_{W_{\eta-\varepsilon}\ni z\to 1} f'(z)\Phi(z) = -AB.$$

Если выполнены условия (1) *и* (2) *и*

$$\lim_{W_\eta\ni z\to 1}\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}(1-z) = 0,$$

то для любого $\varepsilon \in (0,\eta)$

$$\lim_{W_{\eta-\varepsilon}\ni z\to 1} f'(z)\Phi'(z)(1-z) = 0.$$

Примеры. В заключение рассмотрим некоторые примеры функций $\phi(z)$ и $\Phi(z)$, удовлетворяющих условиям следствий 1 и 2 из теорем 1 и 2 соответственно.

1. В случае, когда

$$\phi(z) = (1-z)^{c+1}\exp\frac{a}{1-z}, \quad a, c \in \mathbb{C}$$

(здесь всюду под степенной функцией понимается ее главная ветвь), если

$$\lim_{W_\eta\ni z\to 1}\frac{f(z)}{(1-z)^{c+1}\exp\frac{a}{1-z}} = A,$$

то по следствию 1 получаем

$$\lim_{W_{\eta-\varepsilon}\ni z\to 1} \frac{f'(z)}{(1-z)^{c-1}\exp\frac{a}{1-z}} = Aa.$$

2. Пусть

$$\Phi(z) = \left(\frac{1}{1-z}\right)^{\frac{1}{1-z}} = \exp\left[\frac{1}{1-z}\log\frac{1}{1-z}\right]$$

(ветвь логарифма главная) и

$$\lim_{W_{\eta}\ni z\to 1} f(z)\left(\frac{1}{1-z}\right)^{\frac{1}{1-z}+2}\log\frac{1}{1-z} = A.$$

Тогда из следствия 3 вытекает, что

$$\lim_{W_{\eta-\varepsilon}\ni z\to 1} f'(z)\left(\frac{1}{1-z}\right)^{\frac{1}{1-z}} = A.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М.: Изд-во иностр. лит., 1951.
2. *Годуля Я., Старков В. В.* О граничном поведении в угле Штольца аналитических в круге функций // Мат. заметки. 2002. Т. 71, № 5. С. 652–661.
3. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

Статья поступила 20 января 2004 г., окончательный вариант — 2 февраля 2005 г.

Шишкина Анна Васильевна
Петрозаводский гос. университет, математический факультет,
пр. Ленина, 33, Петрозаводск 185640
annash@psu.karelia.ru