Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2005. Том 46, № 5

УДК 517.95

О ПОДСЧЕТЕ ЧИСЛА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ, ЛЕЖАЩИХ В ПРАВОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, У СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ. 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В. В. Сказка

Аннотация: Работа является непосредственным продолжением статьи [1]. При решении уравнения Ляпунова возникает краевая задача для гиперболических уравнений первого порядка с двумя переменными с данными на границе единичного квадрата. В общем случае такого типа задачи не являются нормально разрешимыми. Доказывается, что при выполнении некоторых условий рассматриваемые краевые задачи фредгольмовы.

Ключевые слова: системы гиперболических уравнений, краевые задачи, разрешимость.

Памяти Тадея Ивановича Зеленяка

Введение

Работа посвящена изучению способов подсчета числа собственных значений, лежащих в правой полуплоскости, у спектральной задачи, связанной с гиперболической в узком смысле по Петровскому системой дифференциальных уравнений:

$$\lambda u = Au, \quad x \in (0,1), \tag{0.1}$$

$$B_0 u|_{x=0} + B_1 u|_{x=1} = 0. \tag{0.2}$$

Здесь u — n-мерный вектор

$$Au \equiv D(x)\frac{du}{dx} + R(x)u, \tag{0.3}$$

$D(x)$ — диагональная матрица с диагональными элементами $d_i(x)$, $i = 1,\dots,n$; $R(x) = (r_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$. Относительно d_i и r_{ij} предполагается, что $|d_i| \geq \delta > 0$, $d_i(x) \neq d_j(x)$ при $i \neq j$, $x \in [0,1]$ и $r_{ij}(x) \in C^k[0,1]$, $d_i(x) \in C^{k+1}[0,1]$, $k \geq 4$.

Матрицы B_0 и B_1 представимы в виде (если провести соответствующую перенумерацию, при которой $d_i(x) < 0$, $i = 1,\dots,m$, $d_i(x) > 0$, $i = m+1,\dots,n$)

$$B_0 = \begin{pmatrix} E_{m,m} & L_{m,n-m} \\ O_{n-m,m} & O_{n-m,n-m} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} O_{m,m} & O_{m,n-m} \\ R_{n-m,m} & E_{n-m,n-m} \end{pmatrix}, \tag{0.4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского отделения РАН (междисциплинарный интеграционный проект № 103), Президиума РАН (программа № 16, проект 115), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00162).

где $E_{p,p}$, $O_{p,q}$ обозначают соответственно единичную и нулевую матрицы размеров $p\times p$ и $p\times q$; $L_{p,q}$ и $R_{p,q}$ — заданные матрицы размера $p\times q$ с вещественными коэффициентами. В (0.4) предполагается, что $m\times(n-m)\neq 0$. Если же $m=0$ ($m=n$), то матрицы B_0 и B_1 являются нулевой и единичной (единичной и нулевой) соответственно.

Данная работа является непосредственным продолжением статьи [1], в которой содержатся, в частности, библиография по теме и история вопроса, в связи с чем мы здесь не приводим соответствующих сведений. Для удобства во введении напомним необходимые определения и предположения из [1], которые будем использовать, оставляя за ними те же обозначения. При ссылках на соответствующие формулы и теоремы из [1] будем предварять их номер римской цифрой I.

Положим $B=B_0+B_1$. Ясно, что матрица B однозначно определяет B_0 и B_1; таким образом, можно отождествить краевые условия (0.4) и B. Будем говорить, что *матрица B определяет $\mathscr{H}$-регулярные условия* для дифференциального оператора A, определенного в (0.3), если выполнено (0.4). Пара $\{A,B\}$ (дифференциальный оператор и матрица B, определяющая краевые условия (0.4)) порождает оператор $\mathbf{A}$ в пространстве $L_2(0,1)$ с областью определения

$$H_B=\bigl\{u\in W_2^1(0,1)\mid B_0u(0)+B_1u(1)=0\bigr\}.$$

При выполнении перечисленных условий на A и B будем называть оператор $\mathbf{A}$ *$\mathscr{H}$-регулярным.*

Для выяснения вопроса о количестве собственных значений, лежащих в правой полуплоскости, в [1] задача сводилась к изучению этого вопроса для самосопряженного (в отличие от $\mathbf{A}$) оператора $\mathbf{J}$, являющегося решением уравнения Ляпунова

$$\mathbf{AJ}+\mathbf{JA}^*=\mathbf{V}, \tag{0.5}$$

где $\mathbf{V}$ — положительно определенный оператор.

В [1] изучалось более общее уравнение

$$\mathbf{T_1J}+\mathbf{JT_2}=\mathbf{V}, \tag{0.6}$$

где $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ — $\mathscr{H}$-регулярные операторы.

Уравнение (0.6) в [1] изучалось при следующем дополнительном предположении.

Условие II.

1. $\Sigma(\mathbf{T}_1)\cap\Sigma(-\mathbf{T}_2)=\varnothing$.

2. Существуют числа σ и $\varepsilon>0$ такие, что полоса $\sigma-\varepsilon\le\operatorname{Re}\lambda\le\sigma+\varepsilon$ не содержит точек спектра операторов $\Sigma(\mathbf{T}_1)$ и $\Sigma(-\mathbf{T}_2)$, причем в полуплоскостях $\operatorname{Re}\lambda>\sigma+\varepsilon$, $\operatorname{Re}\lambda<\sigma-\varepsilon$ операторы $\mathbf{T}_1$, $-\mathbf{T}_2$ имеют только конечное число собственных чисел соответственно.

Здесь и далее через $\Sigma(\mathbf{T})$ обозначен спектр оператора $\mathbf{T}$. Дадим определение того, в каком смысле понимается решение уравнения (0.6).

Определение 1. Пусть операторы $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{V}$ замкнутые с плотными областями определения $D(\mathbf{T}_1)$, $D(\mathbf{T}_2)$, $D(\mathbf{V})$, причем $D(\mathbf{T}_2)\subseteq D(\mathbf{V})$. Под *решением* (0.6) будем понимать оператор $\mathbf{J}$ такой, что $D(\mathbf{T}_2)\subseteq D(\mathbf{J})$ и для любого $u\in D(\mathbf{T}_2)$ справедливы соотношения

$$\mathbf{T}_2u\in D(\mathbf{J}),\quad \mathbf{J}u\in D(\mathbf{T}_1),\quad \mathbf{T}_1\mathbf{J}u+\mathbf{J}\mathbf{T}_2u=\mathbf{V}u.$$

Решать уравнение (0.5) способом, предложенным в [1] с использованием формулы (I.2.5), для целей нахождения индекса неустойчивости нецелесообразно, так как эта формула требует знания резольвенты A. Данная работа посвящена вопросам нахождения решений уравнений (0.5) независимым способом, а также исследованию возникающих при этом краевых задач с данными на полном контуре для гиперболических систем.

1. Пространства

Здесь мы определим рассматриваемые в работе пространства, а также установим некоторые их свойства.

Обозначим $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Пусть $P = (p_{ij}(x,y))_{i,j=1,\dots,n}$ — матрица-функция. Определим следующие нормы:

$$\|P\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{n} \|p_{ij}\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \|P\|^2_{C(\overline{\Omega})} = \sum_{i,j=1}^{n} \|p_{ij}\|^2_{C(\overline{\Omega})},$$

и соответственно пространства матриц-функций $L_2(\Omega)$, $C(\overline{\Omega})$.

Пусть $D = (D_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $S = (S_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ — диагональные матрицы-функции размера $n \times n$ с диагональными элементами $D_{ii} = d_i(x,y)$ и $S_{ii} = s_i(x,y)$ соответственно, $i = 1,\dots,n$. Предполагается, что $D, S \in C^5(\overline{\Omega})$. Кроме того, будем считать, что $d_i(x,y) \neq d_j(x,y)$, $s_i(x,y) \neq s_j(x,y)$ при $i \neq j$ и $d_i(x,y) \neq 0$, $s_i(x,y) \neq 0$ для всех $(x,y) \in \overline{\Omega}$. Определим пространства $C_{D,S}(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega})$, $H_{D,S}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ как пространства функций с конечными нормами

$$\begin{aligned} \|P\|^2_{C_{D,S}(\overline{\Omega})} &= \|P\|^2_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| d_i \frac{\partial p_{i,j}}{\partial x} - s_j \frac{\partial p_{i,j}}{\partial y} \right\|^2_{C(\Omega)}, \\ \|P\|^2_{H_{D,S}(\Omega)} &= \|P\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| d_i \frac{\partial p_{i,j}}{\partial x} - s_j \frac{\partial p_{i,j}}{\partial y} \right\|^2_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Заметим, что в (1.1) частные производные понимаются в обобщенном смысле и соответствующему пространству принадлежат только их комбинации. Кроме того, в первом из определений (1.1) соответствующие комбинации производных непрерывны.

Справедлива следующая

Лемма 1. *В пространствах $H_{D,S}(\Omega)$ и $C_{D,S}(\overline{\Omega})$ плотны гладкие функции.*

Доказательство несложно получить следующими рассуждениями. Из (1.1) видно, что доказательство достаточно провести покомпонентно. Обозначим, например, через $\widetilde{C}(\overline{\Omega})$ пространство скалярных функций с нормой

$$\|u\|_{\widetilde{C}} = \|u\|_C + \left\| d_i \frac{\partial u}{\partial x} - s_j \frac{\partial u}{dy} \right\|_C.$$

Так как $d_i \neq 0$, $s_j \neq 0$, мы можем перейти к новым переменным $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$, в которых дифференциальное выражение $d_i \frac{\partial u}{\partial x} - s_j \frac{\partial u}{dy}$ примет вид $k(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \xi}$, где $k \neq 0$ — гладкая функция. При этом граница области Ω перейдет в кусочно гладкую кривую Γ такую, что прямые $\xi = \mathrm{const}$ и $\eta = \mathrm{const}$ не касаются границы и углы между касательными в угловых точках Γ отличны от нуля. Образ области Ω обозначим через $\Omega_{D,S}$. Один из вариантов такой замены будет построен далее (в теореме 2). Мы можем продолжить u с сохранением дифференциальных свойств в большую область $\overline{\Omega}_1 = [-N,N]\times[-N,N]$ ($\Gamma \subset \Omega_1$) так, чтобы производная u'_ξ от продолжения была бы продолжением производной.

Это продолжение можно произвести следующим образом. Пусть прямая $\eta = \mathrm{const}$ пересекает $\Omega_{D,S}$. Тогда на связных участках прямой, лежащих вне $\Omega_{D,S}$, продолженную функцию полагаем линейной вида $a(\eta)\xi + b(\eta)$. Коэффициенты $a(\eta)$ и $b(\eta)$ подбираются так, чтобы на границе совпадали значения функции и ее первые производные по ξ. Если прямая $\eta = C$ не пересекает границу $\Omega_{D,S}$, то на ней мы задаем продолженную область следующим образом. Существуют в точности две прямые, пересекающие границу $\Omega_{D,S}$: $\eta = \eta_1$ и $\eta = \eta_2$ ($\eta_1 < \eta_2$). Тогда если $C < \eta_1$, то на прямой $\eta = C$ полагаем искомую функцию равной $a(\eta_1)\xi + b(\eta_1)$, если же $C > \eta_2$, то $a(\eta_2)\xi + b(\eta_2)$. Так как прямые $\eta = \mathrm{const}$ не касаются границы $\Omega_{D,S}$, построенная функция будет искомым продолжением.

Пусть теперь u — функция такая, что u, $u'_\xi \in C(\overline{\Omega}_1)$. Тогда, применяя стандартный способ усреднения, рассмотрим последовательность

$$u_n(\xi,\eta) = n^2 \iint\limits_{\Omega_1} L((\xi-\xi_1)/n, (\eta-\eta_1)/n) u(\xi_1,\eta_1)\, d\xi_1 d\eta_1.$$

Здесь L — финитная гладкая функция такая, что $\iint\limits_{R^2} L(\xi,\eta)\, d\xi d\eta = 1$. Интегрируя по частям, легко получить, что $u_n \to u$, $\frac{\partial u_n}{\partial \xi} \to \frac{\partial u}{\partial \xi}$ при $n \to \infty$ в $C(\overline{\Omega}_1)$.

Аналогично рассматривается и пространство $H_{D,S}(\Omega)$. Лемма доказана.

Для функций из пространства $H_{D,S}(\Omega)$ можно определить следы на $\partial\Omega$. Справедлива следующая

Лемма 2. *Существует ограниченный, действующий из $H_{D,S}(\Omega)$ в $L_2(\partial\Omega)$ оператор, совпадающий на гладких функциях с оператором взятия следа.*

Доказательство. Пусть $u \in C^1(\overline{\Omega})$ и $d_i u'_x - s_j u'_y = f$. Рассмотрим точку $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ и соответствующее уравнение для характеристики

$$x'_{ij,v} = \frac{d_i(x_{ij}, y_{ij})}{\sqrt{d_i^2 + s_j^2}}, \quad y'_{ij,v} = -\frac{s_j(x_{ij}, y_{ij})}{\sqrt{d_i^2 + s_j^2}}, \quad x_{ij}|_{v=0} = x_0, \quad y_{ij}|_{v=0} = y_0. \tag{1.2}$$

Тогда

$$u(x_0,y_0) = -\int\limits_0^{v_0} \frac{f(x_{ij}(v), y_{ij}(v))}{\sqrt{d_i^2(x_{ij}(v), y_{ij}(v)) + s_j^2(x_{ij}(v), y_{ij}(v))}}\, dv + u(x_{ij}(v_0), y_{ij}(v_0)). \tag{1.3}$$

Заметим, что все характеристики (1.2) не имеют вертикальных и горизонтальных касательных. Поэтому, интегрируя квадрат равенства (1.3) по $\partial\Omega$, нетрудно получить оценку $\|u\|_{L_2(\partial\Omega)} \le K(\|u\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(\Omega)})$ или, что то же самое,

$$\|u\|_{L_2(\partial\Omega)} \le K(\|u\|_{L_2(\Omega)} + \|d_i u'_x - s_j u'_y\|_{L_2(\Omega)}). \tag{1.4}$$

Покажем, как получается эта оценка. Перейдем к характеристическим переменным. Заметим, что операция взятия следа локальная (зависит от функции вблизи границы). Поэтому нам достаточно получить следующую оценку. Пусть область $\widetilde{\Omega}$ — криволинейный четырехугольник с координатами углов $A_1(0,\eta_0)$, $A_2(0,1)$, $A_3(1,1)$, $A_4(1,\eta_1)$, причем точки A_1 и A_2, A_2 и A_3, A_3 и A_4 соединены отрезками прямых, а точки A_1 и A_4 — гладкой монотонной кривой $\eta = g(\xi)$, где g имеет гладкую обратную функцию $g^{-1}(\eta)$. Обозначим эту кривую через γ_0. Будем считать, что $0 < \eta_1 < \eta_0 < 1$. Мы хотим получить оценку

$$\|u\|_{L_2(\gamma_0)} \leq k(\|u\|_{L_2(\widetilde{\Omega})} + \|u_\eta\|_{L_2(\widetilde{\Omega})}).$$

На гладких функциях справедливо равенство

$$u(\xi, g(\xi)) = -\int\limits_{g(\xi)}^{\eta} u'_\eta(\xi,\nu)d\nu + u(\xi,\eta).$$

Интегрируя последнее равенство по ξ, получаем оценку

$$\int\limits_0^1 u^2(\xi, g(\xi))\,d\xi \leq k\left(\iint\limits_{\widetilde{\Omega}} (u'_\eta)^2\,d\xi d\eta + \int\limits_{g_1(\eta)}^1 u^2(\xi,\eta)d\xi\right), \tag{1.5}$$

справедливую для любых $\eta \in (\eta_1, 1)$, где g_1 равно 0 при $\eta > \eta_0$, а на промежутке $[\eta_1, \eta_0]$ совпадает с $g^{-1}(\eta)$. Интегрируя (1.5) по η, получаем искомое неравенство.

Из (1.3) и (1.4) следует, что если $u \in H_{D,S}(\Omega)$, то для почти всех $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ существует $\lim\limits_{v\to 0} u_{ij}(x_{ij}(v), y_{ij}(v))$, который и будем называть *следом.* При этом оператор, ставящий в соответствие каждой функции $u \in H_{D,S}(\Omega)$ ее след, будет непрерывным из пространства $H_{D,S}(\Omega)$ в $L_2(\partial\Omega)$. Лемма доказана.

2. Решение уравнения Ляпунова

Пусть $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ — $\mathscr{H}$-регулярные операторы с областями определения $D(\mathbf{T}_i) \equiv H_{B^i}$, порожденные дифференциальными выражениями

$$T_x^i u \equiv D^i(x)\frac{du}{dx} + R^i(x)u \tag{2.1}$$

и краевыми условиями

$$B_0^i u|_{x=0} + B_1^i u|_{x=1} = 0, \tag{2.2}$$

где u — n-мерный вектор. Здесь и далее, если не оговорено противное, верхний индекс у функций, матриц и т. д. будет означать, что объект относится к оператору с соответствующим номером. Нижний индекс x в (2.1) означает переменную, от которой зависят функции и по которой происходит дифференцирование. Кроме того, обозначим через T_y^{2*} формально сопряженный к T_y^2 дифференциальный оператор

$$T_y^{2*}u \equiv -D^2(y)\frac{du}{dy} + \left(R^{2*}(y) - \frac{dD^2(y)}{dy}\right)u, \tag{2.3}$$

а краевые условия, сопряженные к (2.2) при $i = 2$, обозначим так:

$$B_0^3 u\big|_{y=0} + B_1^3 u\big|_{y=1} = 0. \tag{2.4}$$

Здесь и в дальнейшем знак $*$ у матриц означает сопряженную матрицу.

Мы будем изучать решения уравнения (0.6) в предположении, что оператор **V** представим в следующем виде:

$$\mathbf{V}u = \int_0^1 K(\cdot, y)u(y)\,dy, \quad K = (k_{ij})_{i,j=1,\dots,n},\ k_{ij} \in C(\overline{\Omega}). \tag{2.5}$$

При этом, как следует из теоремы I.2, решение единственно и представимо в виде

$$\mathbf{J}u = \int_0^1 P(\cdot, y)u(y)\,dy, \quad P = (p_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in C_{D^1,D^2}(\overline{\Omega}). \tag{2.6}$$

Из определения 1 нетрудно увидеть, что матрица $P(x,y)$ удовлетворяет следующему условию для любого y:

$$B_0^1 P(0,y) + B_1^1 P(1,y) = 0. \tag{2.7}$$

Приступим к выводу дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять функции $p_{ij}(x,y)$. Для начала предположим, что $p_{ij} \in C^1([0,1]\times[0,1])$. Пусть $u \in D(\mathbf{T}_2)$. Тогда для любого x справедливо равенство

$$\int_0^1 \left[D^1(x)\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + R^1(x)P(x,y)\right]u(y) + P(x,y)\left[D^2(y)\frac{du(y)}{dy} + R^2(y)u(y)\right]dy = \int_0^1 K(x,y)u(y)\,dy. \tag{2.8}$$

Интегрируя по частям в (2.8), получаем

$$\int_0^1 \left[D^1(x)\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + R^1(x)P(x,y) - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}D^2(y) - P(x,y)\frac{\partial D^2(y)}{\partial y} + P(x,y)R^2(y)\right]u(y)\,dy + T(x) = \int_0^1 K(x,y)u(y)\,dy, \tag{2.9}$$

где $T(x) = P(x,1)D^2(1)u(1) - P(x,0)D^2(0)u(0)$.

Равенство (2.9) выполняется при всех $x \in (0,1)$ и $u \in D(\mathbf{T}_2)$. Нетрудно убедиться в том, что тогда

$$D^1(x)\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + R^1(x)P(x,y) - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}D^2(y) - P(x,y)\frac{\partial D^2(y)}{\partial y} + P(x,y)R^2(y) = K(x,y), \quad x,y \in (0,1), \tag{2.10}$$

и $T(x) = 0$ при $x \in (0,1)$. Последнее с учетом того, что $u \in D(\mathbf{T}_2)$, влечет выполнение равенства

$$P(x,0)B_0^{3*} + P(x,1)B_1^{3*} = 0. \tag{2.11}$$

Систему уравнений (2.10) с краевыми условиями (2.7) и (2.11) можно записать в следующей, более симметричной, форме:

$$
\begin{gathered}
T_x^1 P(x,y) + \left(T_y^{2*} P^*(x,y)\right)^* = K(x,y),\\
B_0^1 P(0,y) + B_1^1 P(1,y) = 0,\\
B_0^3 P^*(x,0) + B_1^3 P^*(x,1) = 0.
\end{gathered}
\tag{2.12}
$$

Задача (2.12) представляет собой систему уравнений гиперболического типа первого порядка с данными на полном контуре единичного квадрата. Отметим, что краевые условия поставлены корректно в следующем смысле. Если мы рассмотрим по отдельности каждое уравнение, то характеристики, «уходящие» с той части границы, где краевые условия задают значения соответствующей функции, не пересекают более эту часть границы квадрата.

К доказательству разрешимости этой краевой задачи в рассматриваемом случае мы приступим позднее. А сейчас отметим только, что автору не известно практически никаких результатов, касающихся корректности задач такого рода.

Чтобы продемонстрировать, какие задачи при этом получаются, рассмотрим простейшую ситуацию. Пусть $n = 2$, оператор T_x^1 имеет постоянные коэффициенты, а коэффициенты при производных имеют следующие знаки: $d_1 > 0$, $d_2 < 0$. Рассмотрим для него краевую задачу $u_1(1) = \alpha u_2(1)$, $u_2(0) = \beta u_1(0)$. В качестве T_x^2 выберем сопряженный оператор с соответствующими краевыми условиями. Проделав все выкладки, приведенные ранее для нахождения матрицы P, получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
d_1 p_{11x}' + d_1 p_{11y}' + r_{11}p_{11} + r_{12}p_{21} + r_{11}p_{11} + r_{12}p_{12} = k_{11},\\
d_1 p_{12x}' + d_2 p_{12y}' + r_{11}p_{12} + r_{12}p_{22} + r_{21}p_{11} + r_{22}p_{12} = k_{12},\\
d_2 p_{21x}' + d_1 p_{21y}' + r_{21}p_{11} + r_{22}p_{21} + r_{11}p_{21} + r_{12}p_{22} = k_{21},\\
d_2 p_{22x}' + d_2 p_{22y}' + r_{21}p_{12} + r_{22}p_{22} + r_{21}p_{21} + r_{22}p_{22} = k_{22}.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Краевые условия для этой системы получаются следующими:

$$
\begin{gathered}
p_{11}(1,y) = \alpha p_{21}(1,y),\ p_{12}(1,y) = \alpha p_{22}(1,y),\\
p_{21}(0,y) = \beta p_{11}(0,y),\ p_{22}(1,y) = \beta p_{12}(0,y),\\
p_{11}(x,1) = \alpha p_{12}(x,1),\ p_{21}(x,1) = \alpha p_{22}(x,1),\\
p_{12}(x,0) = \beta p_{11}(x,0),\ p_{22}(1,y) = \beta p_{21}(x,0).
\end{gathered}
\tag{2.14}
$$

Из приведенных формул видно, что система (2.13) с краевыми условиями (2.14) корректна в единичном квадрате, если положить $\alpha = \beta = r_{ij} = 0$. Однако в общей постановке эта краевая задача не является фредгольмовой. У нее может быть бесконечномерное ядро, может встретиться так называемая «проблема малых знаменателей», когда присутствует бесконечная последовательность собственных чисел, не равных нулю, но стремящихся к нему, что приводит к отсутствию нормальной разрешимости в естественных для такого рода дифференциальных операторов пространствах.

Это происходит по следующей причине. Пусть у исходного дифференциального оператора T_x^1 имеется собственный вектор, удовлетворяющий краевым условиям $u_1(1) = \alpha u_2(1)$, $u_2(0) = \beta u_1(0)$, и λ — соответствующее ему собственное число. Тогда вектор

$$
p_{11} = u_1(x)\overline{u_1(y)},\quad p_{12} = u_1(x)\overline{u_2(y)},\quad p_{21} = u_2(x)\overline{u_1(y)},\quad p_{22} = u_2(x)\overline{u_2(y)}
$$

будет собственным вектором для системы (2.13) с краевыми условиями (2.14), собственное число которого будет равно $\lambda + \bar{\lambda}$. При этом в рассматриваемом классе задач легко построить примеры, при которых, например, у $\mathbf{T}_1$ спектр чисто мнимый, что приведет к бесконечномерному ядру у задачи (2.13), (2.14), или примеры, когда у оператора $\mathbf{T}_1$ нет собственных чисел в правой полуплоскости, включая и мнимую ось, но имеется последовательность собственных чисел λ_k такая, что $\operatorname{Im}\lambda_k \to \infty$, $\operatorname{Re}\lambda_k \to 0$, когда $k \to \infty$, что приведет к «проблеме малых знаменателей». Приведем эти примеры.

Пример 1. У спектральной задачи

$$u_{1x} = \lambda u_1, \quad -u_{2x} = \lambda u_2, \quad u_1(1) = u_2(1), \quad u_2(0) = u_1(0)$$

все собственные числа лежат на мнимой оси.

Пример 2. У спектральной задачи

$$u_{1x} - u_1 - 100u_2 = \lambda u_1, \quad -2u_{2x} + 2u_1 = \lambda u_2, \quad u_1(1) = eu_2(1), \quad u_2(0) = u_1(0)$$

все собственные числа лежат левее мнимой оси, но есть подпоследовательность собственных чисел, которые сколь угодно близко к ней приближаются (e — основание натуральных логарифмов).

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* II. *Тогда задача* (2.12) *имеет единственное решение* $P \in C_{D^1,D^2}(\overline{\Omega})$ $(H_{D^1,D^2}(\Omega))$ *для любой правой части* $K \in C(\overline{\Omega})$ $(L_2(\Omega))$ *и справедлива оценка* $\|P\|_{C_{D^1,D^2}} \le L\|K\|_C$ $(\|P\|_{H_{D^1,D^2}} \le L\|K\|_L)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $K \in C(\overline{\Omega})$. Заметим, что оператор в левой части (2.10) замкнут в пространстве C_{D^1,D^2}, что видно из структуры нормы и самого оператора. Из теоремы I.2 следует, что решение уравнения (0.6) существует, единственно и представимо в виде интегрального оператора, ядро которого — матрица $P \in C_{D^1,D^2}(\overline{\Omega})$. Заменим при выводе (2.10) функцию $P \in C_{D^1,D^2}(\overline{\Omega})$ последовательностью $P_n \in C^1(\overline{\Omega})$, сходящейся к P в C_{D^1,D^2}. Проделав все выкладки и учтя то, что в пространстве C_{D^1,D^2} плотны гладкие функции, мы с необходимостью придем к тому, что верно (2.12). Обозначим через $\widetilde{C}_D$ подпространство C_{D^1,D^2}, для которого выполнено (2.7), (2.11). Ясно, что это банахово пространство. Тем самым для каждой матрицы-функции K существует единственное решение (2.10) из $\widetilde{C}_D$. То, что оператор (2.10) переводит $\widetilde{C}_D$ в C, очевидно. Оценка следует из теоремы Банаха об обратном операторе.

Рассмотрим теперь случай $K \in L_2$, $P \in H_{D^1,D^2}$. В работе [1] при доказательстве теоремы I.2 рассматривался случай $K \in C(\overline{\Omega})$. Но все выкладки дословно можно повторить и для $K \in L_2$, очевидным образом просто переобозначая нормы. При этом для самого плохого с точки зрения дифференциальных свойств слагаемого (I2.13) нужная комбинация производных выписана явно. Тем самым для любой $K \in L_2$ существует решение $P \in H_{D^1,D^2}$, что и завершает доказательство теоремы.

3. О фредгольмовости задачи

Как отмечалось ранее, задача (2.12), вообще говоря, не является фредгольмовой, если не выполнено условие II. Однако можно указать достаточные условия не в терминах спектра соответствующих операторов, при которых она будет фредгольмовой.

Как пример приведем теорему, относящуюся к несколько более широкому классу уравнений.

Положим $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Пусть $D = (D_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $S = (S_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $Q = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $R = (r_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ — матрицы-функции размера $n \times n$, причем D, S диагональные с диагональными элементами $D_{ii} = d_i(x,y)$ и $S_{ii} = s_i(x,y)$ соответственно, $i = 1,\dots,n$. Предполагается, что $D, S \in C^2(\overline{\Omega})$, $Q, R \in C^1(\overline{\Omega})$. Кроме того, будем считать, что $d_i(x,y) \neq d_j(x,y)$, $s_i(x,y) \neq s_j(x,y)$ при $i \neq j$ и $d_i(x,y) \neq 0$, $s_i(x,y) \neq 0$ для всех $(x,y) \in \overline{\Omega}$.

Рассмотрим следующий дифференциальный оператор:

$$LP \equiv D(x,y)\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}S(x,y) + Q(x,y)P(x,y) + P(x,y)R(x,y), \quad (3.1)$$

действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$.

Поставим теперь корректные краевые условия. Введем обозначения:

$$\begin{gathered}\Pi_+ = \{(i,j) \mid i,j = 1,\dots,n;\ d_i \cdot s_j > 0\},\ \Pi_- = \{(i,j) \mid i,j = 1,\dots,n;\ d_i \cdot s_j < 0\},\\ \Pi_{0,+} \subseteq \Pi_+, \quad \Pi_{0,-} \subseteq \Pi_-, \quad \Pi_{1,+} = \Pi_+ \backslash \Pi_{0,+}, \quad \Pi_{1,-} = \Pi_- \backslash \Pi_{0,-}. \qquad (3.2)\end{gathered}$$

Через Π обозначим это разбиение индексов, через $\widetilde{H}^{0,\Pi}_{D,S}(\Omega) \subset H_{D,S}(\Omega)$ — множество функций $P = (p_{ij}(x,y))_{i,j=1,\dots,n}$, для которых

$$\begin{aligned} &p_{ij}(1,y) = 0,\ p_{ij}(x,0) = 0 \text{ при } (i,j) \in \Pi_{0,+},\\ &p_{ij}(0,y) = 0,\ p_{ij}(x,1) = 0 \text{ при } (i,j) \in \Pi_{1,+},\\ &p_{ij}(0,y) = 0,\ p_{ij}(x,0) = 0 \text{ при } (i,j) \in \Pi_{0,-},\\ &p_{ij}(1,y) = 0,\ p_{ij}(x,1) = 0 \text{ при } (i,j) \in \Pi_{1,-}. \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Теорема 2. *Оператор L из* (3.1), *действующий в $L_2(\Omega)$, с областью определения $\widetilde{H}^{0,\Pi}_{D,S}(\Omega)$ является фредгольмовым.*

Доказательство. Пусть $F = (f_{ij}(x,y))_{i,j=1,\dots,n} \in L_2(\Omega)$. Рассмотрим задачу

$$LP = F, \quad P \in \widetilde{H}^{0,\Pi}_{D,S}(\Omega). \qquad (3.4)$$

Покомпонентно (3.4) выглядит так:

$$d_i\frac{\partial p_{ij}}{\partial x} - s_j\frac{\partial p_{ij}}{\partial y} + (q_{ii} + r_{jj})p_{ij} = -\sum_{k\neq i} q_{ik}p_{kj} - \sum_{k\neq j} r_{kj}p_{ik} + f_{ij}. \qquad (3.5)$$

Проинтегрируем (3.5) вдоль характеристик (1.2) следующим образом. Положим в (1.2) $x_0 = x$, $y_0 = y$ и продолжим получившуюся траекторию $(x_{ij}(v), y_{ij}(v))$ до пересечения с той частью границы $\partial\Omega$, на которой задана функция p_{ij}. Обозначим точку пересечения через $(\tilde{x}_{ij}(x,y), \tilde{y}_{ij}(x,y))$, а длину дуги характеристики от точки (x,y) до точки пересечения — через $v_{ij}(x,y)$. Далее, положим в (1.2) $x_0 = \tilde{x}_{ij}(x,y)$, $y_0 = \tilde{y}_{ij}(x,y)$ и получившееся решение (1.2) обозначим через $\hat{x}_{ij}(v,x,y)$, $\hat{y}_{ij}(v,x,y)$. Тогда левую часть (3.5) можно обратить, проинтегрировав вдоль характеристики, и в результате получим

$$p_{ij}(x,y) = \sum_{k\neq i} M_{ij}(-q_{ik}p_{kj}) + \sum_{k\neq j} M_{ij}(-r_{kj}p_{ik}) + M_{ij}(f_{ij}), \qquad (3.6)$$

где через $M_{ij}(w)$ обозначено действие следующего интегрального оператора на функцию w:

$$M_{ij}(w) = \int\limits_0^{v_{ij}(x,y)} m_{ij}(v,x,y)w(\hat{x}_{ij}(v,x,y),\hat{y}_{ij}(v,x,y))\,dv,$$
$$m_{ij} = \frac{\exp\left(-\int\limits_{v_{ij}(x,y)}^{v} \frac{q_{ii}(\hat{x}_{ij}(\bar{v},x,y),\hat{y}_{ij}(\bar{v},x,y))+r_{jj}(\hat{x}_{ij}(\bar{v},x,y),\hat{y}_{ij}(\bar{v},x,y))}{\sqrt{d_i^2(\hat{x}_{ij}(\bar{v},x,y),\hat{y}_{ij}(\bar{v},x,y))+s_j^2(\hat{x}_{ij}(\bar{v},x,y),\hat{y}_{ij}(\bar{v},x,y))}}d\bar{v}\right)}{\sqrt{d_i^2(\hat{x}_{ij}(v,x,y),\hat{y}_{ij}(v,x,y))+s_j^2(\hat{x}_{ij}(v,x,y),\hat{y}_{ij}(v,x,y))}}. \tag{3.7}$$

Ясно, что совокупность всех интегральных уравнений (3.6) эквивалентна задаче (3.4). Символически обозначим всю совокупность уравнений (3.6) через

$$P = \mathfrak{M}P + G. \tag{3.8}$$

Оператор $\mathfrak{M}$ не является вполне непрерывным оператором из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Но мы покажем ниже, что $\mathfrak{M}^2$ вполне непрерывен. Тогда (см. [2]) для уравнения (3.8), а значит, и для задачи (3.4) выполнены все три теоремы Фредгольма.

Для завершения доказательства нам осталось показать, что оператор $\mathfrak{M}^2$ вполне непрерывный. Заметим, что в правой части (3.6), определяющей p_{ij}, находятся только p_{kj}, $k \neq j$, и p_{ik}, $k \neq i$. Поэтому в клетке матрицы $\mathfrak{M}^2V$ с индексом i,j будут стоять только суммы элементов вида $M_{ij}(q_{ik}M_{kj}(q_{kl}f))$, $k \neq i$, и $M_{ij}(r_{ki}M_{ik}(q_{li}f))$, $k \neq j$. Здесь через f обозначена функция, являющаяся одним из элементов матрицы V.

Рассмотрим, например, $u(x,y) = M_{ij}(q_{ik}M_{kj}(q_{kl}f))$. Из построения операторов M_{ij} и M_{kj} следует, что u есть решение следующей системы дифференциальных уравнений:

$$d_i\frac{\partial u}{\partial x} - s_j\frac{\partial u}{\partial y} + (q_{ii}+r_{jj})u = q_{ik}v, \quad d_k\frac{\partial v}{\partial x} - s_j\frac{\partial v}{\partial y} + (q_{kk}+r_{jj})v = q_{kl}f. \tag{3.9}$$

Функции u, v в (3.9) равны нулю на части границы $\partial\Omega$ в соответствии с (3.3) и тем, какому множеству в (3.9) принадлежат пары (i,j), (k,j) соответственно. Обозначим эти множества через $\partial\Omega_u$, $\partial\Omega_v$:

$$u|_{\partial\Omega_u} = 0, \quad v|_{\partial\Omega_v} = 0. \tag{3.10}$$

Имея в виду переход в (3.9) к характеристическим координатам, продолжим все коэффициенты d_i, d_k, s_j в (3.9) с сохранением всех свойств на все пространство R^2. В частности, продолжим так, чтобы (мы оставляем за продолженными функциями те же обозначения) $d_i, d_k, s_j \in C^2(R^2)$,

$$0 < \delta \leq |d_i| \leq \Delta, \quad 0 < \delta \leq |d_k| \leq \Delta, \quad 0 < \delta \leq |s_j| \leq \Delta, \quad 0 < \delta \leq |d_i - d_k| \leq \Delta, \tag{3.11}$$

где δ, Δ — некоторые константы. Заметим, что у нас $k \neq i$.

Для (3.9) выпишем уравнения характеристик:

$$d_i(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x} - s_j(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad d_k(x,y)\frac{\partial \eta}{\partial x} - s_j(x,y)\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0. \tag{3.12}$$

Для (3.12) поставим следующие краевые условия:

$$\xi|_{y=-1} = x, \quad \eta|_{y=-1} = x. \tag{3.13}$$

Будем искать решение (3.11), (3.12) в полупространстве $y > -1$.

Решение (3.11), (3.12) существует в целом, отображение $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ — диффеоморфизм. Действительно, в каждой точке (x,y) решение получается следующим стандартным образом: через точку (x,y) проведем две характеристики, соответствующие каждому из уравнений (3.12). Вдоль своей характеристики функции ξ, η будут постоянны и равны тому значению, которое получается при пересечении характеристики с прямой $y = -1$. То, что получившееся отображение будет взаимно однозначным, следует из (3.13) и (3.11). Из (3.12) и (3.11) вытекает также, что $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0$ для любых (x,y). Поэтому по теореме об обратной функции отображение $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ — диффеоморфизм. Заметим, что в силу свойств коэффициентов (3.12) отображение $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$, равно как и обратное, дважды непрерывно дифференцируемо.

Обозначим через $\Omega_{\xi\eta}$, Γ_u, Γ_v образы множеств Ω, $\partial\Omega_u$, $\partial\Omega_v$ при отображении $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ соответственно. Заметим, что кривые Γ_u, Γ_v могут быть заданы соответственно уравнениями $\xi = \gamma_u(\eta)$, $\eta = \gamma_v(\xi)$, причем функции $\gamma_u(\eta)$, $\gamma_v(\xi)$ непрерывны и имеют непрерывные производные во всех точках, кроме одной, в которой производная терпит разрыв первого рода. Последнее есть следствие того, что характеристики уравнений (3.12) пересекают $\partial\Omega_u$, $\partial\Omega_v$ под ненулевыми углами, и структуры $\partial\Omega_u$, $\partial\Omega_v$.

Перейдем теперь в (3.9), (3.10) к переменным ξ, η. Имеем

$$\begin{gathered}\left(d_i\frac{\partial\eta}{\partial x} - s_j\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial\eta} + (q_{ii} + r_{jj})u = q_{ik}v,\\ \left(d_k\frac{\partial\xi}{\partial x} - s_j\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial\xi} + (q_{kk} + r_{jj})v = q_{kj}f,\\ u|_{\Gamma_u} = 0, \quad v|_{\Gamma_v} = 0.\end{gathered} \tag{3.14}$$

Заметим, что

$$\left(d_i\frac{\partial\eta}{\partial x} - s_j\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) \neq 0, \quad \left(d_k\frac{\partial\xi}{\partial x} - s_j\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) \neq 0$$

как следствие (3.12), (3.11) и того, что $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0$. Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что решение задачи с гладкими коэффициентами

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial\eta} - k_u(\xi,\eta)u = a_u(\xi,\eta)v,\\ \frac{\partial v}{\partial\xi} - k_v(\xi,\eta)v = a_v(\xi,\eta)f,\\ u|_{\Gamma_u} = 0, \quad v|_{\Gamma_v} = 0\end{gathered} \tag{3.15}$$

таково, что $\|u\|_{W_2^1(\Omega_{\xi\eta})} \leq K\|f\|_{L_2(\Omega_{\xi\eta})}$.

Решение (3.15) может быть легко выписано:

$$u(\xi,\eta) = \int\limits_{\gamma_v(\xi)}^{\eta} a_u(\xi,\mu)e^{\int\limits_{\mu}^{\eta} k_u(\xi,\bar\mu)d\bar\mu} \int\limits_{\gamma_u(\mu)}^{\xi} a_v(\lambda,\mu)e^{\int\limits_{\lambda}^{\xi} k_v(\bar\lambda,\mu)d\bar\lambda} f(\lambda,\mu)\,d\lambda d\mu. \tag{3.16}$$

С учетом того, что функция $\gamma_v(\xi)$ непрерывна, ее производная имеет только один разрыв первого рода, а также того, что a_u, k_u — гладкие функции, нужное нам неравенство получается путем дифференцирования (3.16) и последующего интегрирования. Таким образом, приходим к оценке

$$\|M_{ij}(q_{ik}M_{kj}(q_{kl}f))\|_{W_2^1(\Omega)} \le K\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Так как пространство $W_2^1(\Omega)$ вкладывается вполне непрерывно в $L_2(\Omega)$, теорема доказана полностью.

Замечание. Оператор (3.1) несколько обобщает оператор, стоящий в левой части уравнения (2.10). Краевые же условия (3.3), конечно, значительно более ограничительные, чем условия (2.7), (2.11), но, с другой стороны, и не охватываются ими. В (3.3) $\Pi_{0,+}$, $\Pi_{0,-}$ произвольные, в то время как в (2.7), (2.11) если структура матриц такова, что $L_{m,n-m}$ и $R_{n-m,m}$ (в соответствии с (0.4)) — нулевые матрицы, то получившиеся множества $\Pi_{0,+}$, $\Pi_{0,-}$ будут вполне определенными, связанными со знаками d_i и s_i по отдельности.

4. Решение уравнения Ляпунова с правой частью в виде оператора умножения на матрицу

Рассмотрим уравнение (0.5) с правой частью, представляющей оператор умножения на матрицу $V = (v_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n} \in C(\overline{\Omega})$ ($\mathbf{V}u \equiv Vu$), а именно

$$\mathbf{AJ} + \mathbf{JA}^* = \mathbf{V}. \tag{4.1}$$

Оператор $\mathbf{A}$ $\mathscr{H}$-регулярный, а пара операторов $\mathbf{A}, \mathbf{A}^*$ удовлетворяет условию II. Здесь оператор $\mathbf{A}$ определен дифференциальным выражением (0.3) и краевыми условиями (0.2). Мы будем предполагать, что уже произведена перенумерация и матрица D в (0.3) такова, что $d_i(x) < 0$, $i = 1, \dots, m$, $d_i(x) > 0$, $i = m+1, \dots, n$. Соответственно матрицы B_0, B_1 в краевых условиях будут иметь вид (0.4). Мы будем предполагать, что матрицы $L_{m,n-m}$ и $R_{n-m,m}$ нулевые. Таким образом, оператор $\mathbf{A}$ порождается следующим дифференциальным выражением и краевыми условиями:

$$\begin{gathered} Au \equiv D(x)\frac{du}{dx} + R(x)u, \\ u_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad u_i(1) = 0, \quad i = m+1, \dots, n. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Тогда сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$ будет порожден дифференциальным выражением и краевыми условиями

$$\begin{gathered} A^*u \equiv -D(x)\frac{du}{dx} + (R^*(x) - D(x))u, \\ u_i(1) = 0,\ i = 1, \dots, m, \quad u_i(0) = 0,\ i = m+1, \dots, n. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Оператор $\mathbf{J}$ будем искать в следующем виде:

$$(\mathbf{J}u)(x) = G(x) \cdot u(x) + \int_0^1 K(x, y)u(y)\, dy, \tag{4.4}$$

где $G(x)$ — диагональная матрица с гладкими диагональными элементами $g_i(x)$, $i = 1, \dots, n$. Матрица $K = (k_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ принадлежит пространству $\widetilde{H}_D(\Omega)$, норма в котором определяется как

$$\|K\|^2_{\widetilde{H}_D(\Omega)} = \|K\|^2_{H_{D,-D}(\Omega^+)} + \|K\|^2_{H_{D,-D}(\Omega^-)},$$

где $\Omega^+ = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, x < y < 1\}$, $\Omega^- = \Omega \backslash \Omega^+$. Отметим, что при этом элементы матрицы K таковы, что при $i \neq j$ функция k_{ij} имеет след на прямой $x = y$. Это доказывается дословным повторением леммы 2.

Матрица G ищется в виде диагональной матрицы по следующей причине. Чтобы (4.4) при сделанных предположениях удовлетворяло (4.1), мы должны обеспечить равенство $DG - GD = 0$, что влечет за собой диагональную структуру G.

Из определения 1 решения уравнения (4.1) и вида оператора (4.4) следует, что как интегральный оператор в (4.4), так и оператор умножения на матрицу должны по отдельности переводить $D(\mathbf{A}^*)$ в $D(\mathbf{A})$. Для интегрального оператора, как и ранее,

$$\begin{gathered} k_{ij}(x,0) = 0, \quad i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m, \\ k_{ij}(x,1) = 0, \quad i = 1,\dots,n,\ j = m+1,\dots,n. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Кроме того, будем предполагать, что

$$\begin{gathered} k_{ij}(0,y) = 0, \quad i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n, \\ k_{ij}(1,y) = 0, \quad i = m+1,\dots,n,\ j = 1,\dots,n. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Что касается матрицы G, то для любой функции $u \in D(\mathbf{A}^*)$ вектор $(g_1(x)u_1(x), \dots, g_n(x)u_n(x))$ должен принадлежать $D(\mathbf{A})$. Из последнего

$$g_i(0) = 0,\ i = 1,\dots,m, \quad g_i(1) = 0,\ i = m+1,\dots,n, \tag{4.7}$$

т. е. $g \in D(\mathbf{A})$.

Рассмотрим теперь

$$\mathbf{AJ}u + \mathbf{JA}^*u = \mathbf{V}u, \quad u \in D(\mathbf{A}^*).$$

Для начала будем предполагать, что $K \in C^1(\overline{\Omega}^{\pm})$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(D(x)\frac{d}{dx} + R(x)\right)&\left(G(x)u(x) + \int_0^1 K(x,y)u(y)dy\right) \\ &+ G(x)\left(-D(x)\frac{du}{dx} + \left(R^*(x) - \frac{dD(x)}{dx}\right)u\right) \\ + \int_0^1 K(x,y)&\left(-D(y)\frac{du(y)}{dy} + \left(R^*(y) - \frac{dD(y)}{dy}\right)u(y)\right)dy = V(x)u(x). \end{aligned}$$

Интегрируя по частям последний интеграл, дифференцируя первый и приводя подобные члены, получаем

$$\begin{aligned} \Bigg(D(x)\frac{dG(x)}{dx} &+ R(x)G(x) + G(x)\left(R^*(x) - \frac{dD(x)}{dx}\right) \\ &- D(x)[K](x) + [K](x)D(x) - V(x)\Bigg)u(x) \\ + \int_0^1 \left(D(x)\frac{\partial K(x,y)}{\partial x} + R(x)K(x,y) + \frac{\partial K(x,y)}{\partial y}D(y) + K(x,y)R^*(y)\right)u(y)\,dy& \\ \equiv U(x)u(x) + \mathbf{S}u = 0.& \end{aligned} \tag{4.8}$$

Здесь $[K](x) = K(x, x+0) - K(x, x-0)$, $U(x)$ — соответствующая матрица, а S — интегральный оператор. При этом интеграл понимается как

$$\int\limits_0^1 l(x,y)dy = \int\limits_0^x l(x,y)\,dy + \int\limits_x^1 l(x,y)\,dy$$

(функции k_{ij} могут терпеть при $x = y$ разрыв первого рода).

Заметим, что в (4.8) скачки функций k_{ii}, $i = 1, \dots, n$, реально не присутствуют, а скачки функций k_{ij}, $i \neq j$, на прямой $y = x$ существуют, если $K \in \widetilde{H}_D(\Omega)$. Поэтому если существуют $K \in \widetilde{H}_D(\Omega)$ и G, удовлетворяющие (4.5)–(4.7) и (4.8) при любых $u \in D(A^*)$, то решение (4.1) существует и представимо в виде (4.4). Использованное для вывода (4.8) предположение, что $K \in C^1(\overline{\Omega}^{\pm})$, несущественно, так как, например, мы могли бы рассмотреть последовательность $K_n \in C^1(\overline{\Omega}^{\pm})$ таких, что $K_n \to K$ в $\widetilde{H}_D(\Omega)$.

Для выполнения (4.8) при любых $u \in D(\mathbf{A}^*)$ необходимо, чтобы матрица U и оператор $\mathbf{S}$ были нулевые. Рассмотрим диагональные элементы матрицы U:

$$u_{ii}(x) \equiv d_i(x)\frac{dg_i(x)}{dx} + g_i(x)\left(2r_{ii}(x) - \frac{dd_i}{dx}\right) - v_{ii}(x) = 0. \tag{4.9}$$

Очевидно, система уравнений (4.9) с краевыми условиями (4.7) имеет единственное решение. Его можно выписать в квадратурах, но нам не важен его точный вид. Внедиагональные элементы матрицы U имеют вид

$$u_{ij}(x) \equiv [k_{ij}](x)(d_j(x) - d_i(x)) + \sum_{k=1}^n (r_{ik}(x) + r_{kj}(x))g_k(x) - v_{ij}(x) = 0. \tag{4.10}$$

Так как $d_i \neq d_j$ при $i \neq j$, система (4.10) разрешима, и для того, чтобы $U(x) = 0$, нам необходимо обеспечить, чтобы

$$[k_{ij}](x) = f_{ij}(x), \quad i \neq j, \tag{4.11}$$

где f_{ij} — известные непрерывные функции.

Осталось показать, что система уравнений

$$LK \equiv D(x)\frac{\partial K(x,y)}{\partial x} + R(x)K(x,y) + \frac{\partial K(x,y)}{\partial y}D(y) + K(x,y)R^*(y) = 0 \tag{4.12}$$

имеет решение $K \in \widetilde{H}_D(\Omega)$, удовлетворяющее (4.5), (4.6), (4.11). Будем искать матрицу K в виде $K = \widehat{K} + \breve{K}$, где $\widehat{K} \in H_{D,-D}(\Omega)$, а $\breve{K} \in \widetilde{H}_D(\Omega)$ — функция скачков, удовлетворяющая (4.11). Кроме того, $\widehat{K}$, $\breve{K}$ будут удовлетворять (4.5), (4.6).

Построим $\breve{K}$. Положим

$$\breve{k}_{ii} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

так как равенство (4.11) должно быть удовлетворено только при $i \neq j$. Построим $\breve{k}_{ij}$ при $i \neq j$. Рассмотрим систему, определяющую характеристики для уравнения

$$d_i(x)\frac{\partial \breve{k}_{ij}}{\partial x} + d_j(y)\frac{\partial \breve{k}_{ij}}{dy} = 0,$$

а именно

$$x'_{ij,\nu} = \frac{d_i(x_{ij}, y_{ij})}{\sqrt{d_i^2 + d_j^2}}, \quad y'_{ij,\nu} = \frac{d_j(x_{ij}, y_{ij})}{\sqrt{d_i^2 + d_j^2}}, \quad x_{ij}|_{\nu=0} = x_0, \quad y_{ij}|_{\nu=0} = y_0. \tag{4.13}$$

Из свойств d_i следует, что все характеристики в каждой точке имеют касательную, не параллельную прямой $y = x$, и нигде не имеют вертикальных и горизонтальных касательных. Поэтому либо в Ω^+, либо в Ω^- характеристики (4.13) не пересекают те части $\partial\Omega$, на которых k_{ij} должно обращаться в нуль в соответствии с (4.5), (4.6). Пусть для определенности это будет Ω^+. Тогда положим $\breve{k}_{ij} = 0$ при $(x, y) \in \Omega^-$. Пусть $(x, y) \in \Omega^+$. Решим (4.13), положив $x_0 = x$, $y_0 = y$. Если характеристика (4.13) пересекает диагональ $y = x$ в точке (x_0, x_0), то полагаем

$$\breve{k}_{ij} = f_{ij}(x_0).$$

Если же характеристика пересечет сторону квадрата, а это может быть только та сторона, на которой мы должны обеспечить равенство нулю, то полагаем $\breve{k}_{ij} = 0$. Ясно, что так построенная матрица $\breve{K}$ принадлежит $\widetilde{H}_D(\Omega)$, причем $\breve{K}$ удовлетворяет (4.5), (4.6), (4.11).

Для нахождения функции $\widehat{K}$ получаем следующую задачу: *найти решение уравнения*

$$L\widehat{K} = -R(x)\breve{K}(x, y) - \breve{K}(x, y)R^*(y), \tag{4.14}$$

удовлетворяющее (4.5), (4.6). Правая часть (4.14), очевидно, принадлежит $L_2(\Omega)$. Разрешимость этой задачи следует из теоремы 1.

Все вышесказанное доказывает следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{A}$ $\mathscr{H}$*-регулярный, а пара операторов* $\mathbf{A}, \mathbf{A}^*$ *удовлетворяет условию* II, *причем матрицы* $L_{m,n-m}$, $R_{n-m,m}$ *в краевых условиях* (0.4) *нулевые. Тогда уравнение* (4.1) *с правой частью в виде оператора умножения на матрицу с непрерывными коэффициентами имеет единственное ограниченное решение. Оно имеет вид* (4.4), *причем в* (4.4) *матрица* G *диагональная с гладкими элементами, а матрица* K *принадлежит пространству* $\widetilde{H}_D(\Omega)$. *Кроме того, выполняются* (4.5)–(4.7).

Что касается существования, то все доказано ранее. Единственность следует из теоремы I.3.

Заметим, что теорема 3 является, по сути, анонсированной в [1] теоремой I.4. При этом отметим следующее. В теореме I.4 утверждалось, что решение вида (4.4) с гладкой функцией G и кусочно гладкой K существует всегда, независимо от вида краевых условий, лишь бы они имели вид (0.4). Однако это, к сожалению, не так. При условиях, что G — гладкая функция, а $K \in \widetilde{H}_D(\Omega)$ (минимальных условиях, при которых для нахождения K и G можно выписать систему дифференциальных уравнений), не все краевые условия подходят. Мы доказывали это в предположении, что матрицы $L_{m,n-m}$, $R_{n-m,m}$ в краевых условиях (0.4) нулевые. Можно заменить это условие следующим: матрицы $L_{m,n-m}D_1L^*_{m,n-m}$ и $R_{n-m,m}D_2R^*_{n-m,m}$ диагональные при любых диагональных матрицах D_l, $l = 1, 2$, соответствующего размера. Это условие, несколько экзотическое, является необходимым и достаточным, чтобы существовало ровно n краевых условий для нахождения G. Если оно не выполнено, то условий будет больше. Решение (4.1) в виде (4.6) с соответствующими свойствами гладкости существовать будет не при всех V.

В заключение автор выражает благодарность В. С. Белоносову за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сказка В. В.* О подсчете числа собственных чисел, лежащих в правой полуплоскости, у спектральных задач, связанных с гиперболическими системами. 1. Разрешимость уравнения Ляпунова // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 3. С. 656–675.
2. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. М.; Л.: ОГИЗ, 1947.

Статья поступила 8 октября 2004 г.

Сказка Валерий Всеволодович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
skazka@math.nsc.ru