Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2005. Том 46, № 5

УДК 517.911

ОБ УРАВНЕНИИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ПЛЕНКИ

В. В. Пухначёв

Аннотация: Изучаются положительные периодические решения обыкновенного нелинейного неавтономного дифференциального уравнения третьего порядка, возникающего в теории движения вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей. Это уравнение описывает стационарные движения тонкого слоя жидкости на поверхности вращающегося горизонтального цилиндра в поле тяжести. Линейный оператор, стоящий в левой части уравнения, имеет трехмерное ядро. Кроме того, в уравнение входят два неотрицательных параметра, пропорциональные ускорению свободного падения и коэффициенту поверхностного натяжения. В зависимости от этих параметров изучаемая задача может иметь два решения или не иметь ни одного. Устанавливаются качественные свойства решений задачи, в частности, их асимптотическое поведение при экстремальных значениях указанных параметров.

Ключевые слова: вязкая капиллярная жидкость, длинноволновое приближение, метод Ляпунова — Шмидта.

Памяти Тадея Ивановича Зеленяка

1. Введение. В работе рассматривается задача о плоском стационарном движении вязкой несжимаемой капиллярной жидкости на поверхности вращающегося вокруг своей оси круглого горизонтального цилиндра в поле тяжести. Математическая постановка данной задачи с неизвестной границей для системы уравнений Навье — Стокса содержится в [1], там же доказана ее разрешимость при малом отношении ускорения силы тяжести к центростремительному ускорению. Другое упрощение задачи (длинноволновое приближение) основано на предположении о малости отношения толщины жидкой пленки к радиусу цилиндра. Уравнения длинноволнового приближения для плоского нестационарного движения выведены в [1] (см. также [2], где рассматривался случай нулевого поверхностного натяжения) и в [3] для общего трехмерного движения. В [4] при некоторых ограничениях на данные задачи установлена близость ее асимптотического решения, полученного в длинноволновом приближении, к точному решению плоской стационарной задачи со свободной границей для уравнений Навье — Стокса. Устойчивость плоских стационарных режимов течения исследована в [5].

Обозначим через η безразмерную толщину пленки, через θ — полярный угол, отсчитываемый от горизонтального направления. Уравнение для главного члена асимптотического решения в длинноволновом приближении имеет вид

$$\delta(\eta''' + \eta') = \beta\cos\theta - \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\eta^3}, \tag{1.1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00355), а также Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ–902.2003.1).

где штрих означает дифференцирование по θ, а δ и β — неотрицательные параметры, первый из которых пропорционален поверхностному натяжению, а второй — ускорению силы тяжести. Нас интересуют положительные решения уравнения (1.1), удовлетворяющие условию периодичности

$$\eta(\theta + 2\pi) = \eta(\theta). \tag{1.2}$$

Предварительный анализ задачи (1.1), (1.2) выполнен в [3]. Данная работа посвящена изучению зависимости решений этой задачи от параметров δ и β. Установлены неединственность ее решения при малых значениях параметра β и несуществование — при больших его значениях. Построена асимптотика решений при $\beta \to 0$ и при $\delta \to \infty$, а также при $\delta \to 0, 0 < \beta < 4/27$.

2. Априорные оценки. Дифференциальный оператор в левой части уравнения (1.1) имеет трехмерное ядро с базисом $1, \cos\theta, \sin\theta$. Целесообразно ввести в рассмотрение функцию $\zeta \perp \{1, \cos\theta, \sin\theta\}$ и представить функцию η в виде

$$\eta = s + q\cos\theta - r\sin\theta + \zeta, \tag{2.1}$$

где s, q, r — подлежащие определению постоянные, а ζ — решение уравнения

$$\delta(\zeta''' + \zeta') = \beta\cos\theta - \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\eta^3}, \tag{2.2}$$

удовлетворяющее условиям ортогональности,

$$\int \zeta\, d\theta = \int \zeta \cos\theta\, d\theta = \int \zeta \sin\theta\, d\theta = 0 \tag{2.3}$$

(здесь и далее пределы интегрирования суть 0 и 2π). Из (2.2) и (2.3) следуют равенства

$$\int \frac{d\theta}{\eta^2} = \int \frac{d\theta}{\eta^3}, \tag{2.4}$$

$$\int \frac{\eta - 1}{\eta^3} \cos\theta\, d\theta = \pi\beta, \tag{2.5}$$

$$\int \frac{\eta - 1}{\eta^3} \sin\theta\, d\theta = 0. \tag{2.6}$$

Соотношения (2.4)–(2.6) играют роль уравнений разветвления в процессе решения задачи (1.1), (1.2) методом Ляпунова — Шмидта при больших значениях параметра δ. Этим вопросом мы займемся позже, а сейчас получим двусторонние оценки искомых констант s, q, r и «остаточного члена» ζ в представлении (2.1) (термин «остаточный» оправдан тем, что L^2-норма функции ζ'' имеет порядок δ^{-1} при $\delta \to \infty$). Большинство этих оценок получено ранее в [3], но для полноты изложения их вывод приведен ниже. Из равенства (2.4) вследствие положительности η и неравенства Гёльдера получаем

$$\int \frac{d\theta}{\eta^n} \le 2\pi, \quad n = 1, 2, 3. \tag{2.7}$$

Предложение 1. *Если $\beta > 4$, то уравнение* (1.1) *не имеет положительных 2π-периодических решений.*

Для доказательства предложения 1 достаточно оценить по модулю сверху левую часть равенства (2.5), используя оценки (2.7):

$$\pi\beta \le \int \frac{d\theta}{\eta^2} + \int \frac{d\theta}{\eta^3} \le 4\pi.$$

Теперь требуемое утверждение становится очевидным.

Лемма 1. *Пусть* $\delta > 0$. *Тогда для любого* 2π*-периодического решения уравнения* (2.2), *удовлетворяющего условиям* (2.3), *справедлива оценка*

$$\int \zeta''^2 d\theta \le \left(\frac{8\pi^2}{3} + 2\right)\frac{\pi}{\delta^2}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Вследствие неравенств (2.7) правая часть уравнения (2.2) принадлежит пространству $L^1(0, 2\pi)$ и допускает разложение в ряд Фурье

$$\beta\cos\theta - \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\eta^3} \equiv f(\theta) = \sum_{n=2}^{\infty}(f_n \cos n\theta + g_n \sin n\theta).$$

Отсутствие в данной сумме членов с $n = 0, 1$ обусловлено соотношениями (2.4)–(2.6). На основании неравенств (2.7) имеют место оценки

$$|f_n| \le 4, \quad |g_n| \le 4, \quad n = 2, 3, \dots.$$

Следовательно, коэффициенты ряда Фурье

$$\zeta = \sum_{n=2}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

представляющего решение уравнения

$$\delta(\zeta''' + \zeta') = f(\theta),$$

удовлетворяют неравенствам

$$|a_n| \le \frac{4}{\delta n(n^2-1)}, \quad |b_n| \le \frac{4}{\delta n(n^2-1)}, \quad n = 2, 3, \dots. \tag{2.9}$$

Поскольку

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{16},$$

отсюда и из неравенств (2.9) вытекает оценка (2.8). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Постоянные* s, q, r, *в представлении* (2.1) *решения задачи* (1.1), (1.2) *удовлетворяют неравенствам*

$$1 \le s \le \frac{4}{\beta} + \frac{1}{3\delta} + \frac{4}{\beta^2} + \left(\frac{8\pi^2}{3} + 2\right)\left(\frac{2}{\beta} + \frac{3}{8}\right)\frac{1}{\beta\delta}, \tag{2.10}$$

$$0 \le q \le \frac{2}{\beta}, \tag{2.11}$$

$$0 \le r \le \left(\frac{8\pi^2}{3} + 2\right)\frac{1}{\beta\delta}. \tag{2.12}$$

Доказательство. Умножим уравнение (1.1) на η' и проинтегрируем результат по интервалу $(0, 2\pi)$. Используя представление (2.1), получим

$$\delta\int(\eta''^2 - \eta'^2)d\theta = \pi\beta r.$$

Теперь заметим, что вследствие (2.3)

$$\int(\eta''^2 - \eta'^2)\,d\theta = \int(\zeta''^2 - \zeta'^2)\,d\theta, \quad 4\int \zeta'^2 d\theta \le \int \zeta''^2 d\theta.$$

Отсюда и из предыдущего равенства получаем двустороннюю оценку r:

$$\frac{3}{4}\delta\int\zeta''^2 d\theta \leq \pi\beta r \leq \delta\int\zeta''^2 d\theta. \tag{2.13}$$

Усиливая ее с помощью (2.8), приходим к неравенствам (2.12).

Для получения оценки снизу величины q умножим уравнение (1.1) на $\eta-1$ и проинтегрируем получаемое равенство от 0 до 2π. С учетом (2.1), (2.3) это дает

$$\pi\beta q = \beta\int(\eta-1)\cos\theta d\theta = \int\frac{(\eta-1)^2}{\eta^3}d\theta \geq 0, \tag{2.14}$$

т. е. нижнюю оценку (2.11). Если мы умножим (1.1) на η и снова проинтегрируем результат, то найдем, что

$$\pi\beta q + \int\frac{d\theta}{\eta^2} = \int\frac{d\theta}{\eta}.$$

Последнее равенство вместе с неравенством (2.7) приводит к верхней оценке (2.11).

Для получения нижней оценки (2.10) перепишем уравнение (1.1) в терминах новой искомой функции $\xi = \eta - 1$:

$$\delta(\xi''' + \xi') + \xi = \beta\cos\theta + \frac{\xi^2(3+3\xi+\xi^2)}{(1+\xi)^3}. \tag{2.15}$$

Далее черта над $f(\theta)$ обозначает среднее значение функции f на интервале $(0, 2\pi)$. Имеем очевидные равенства $s = \bar{\eta} = 1 + \bar{\xi}$, но $\bar{\xi} \geq 0$ вследствие (2.15), т. е. $s \geq 1$.

Чтобы получить оценку величины s сверху, умножим уравнение (1.1) на $\eta\cos\theta$ и проинтегрируем результат от 0 до 2π. После элементарных вычислений придем к тождеству

$$3\pi\delta(a_2 r - b_2 q) - \frac{3}{2}\delta\int\zeta'^2\sin\theta\, d\theta = \pi\beta s + \frac{1}{2}\pi\beta a_2 - \int\frac{(\eta-1)}{\eta^3}\cos\theta\, d\theta,$$

где a_2 и b_2 — соответствующие коэффициенты ряда Фурье функции ζ. Используя неравенства (2.7), (2.9), а также вытекающее из (2.8) неравенство

$$\int\zeta'^2\, d\theta \leq \left(\frac{2\pi^2}{3} + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\delta^2}$$

и уже полученные оценки сверху величин q и r, мы получаем требуемую верхнюю оценку для s. Доказательство леммы 2 закончено.

Прокомментируем полученные результаты. Согласно (2.8) остаточный член ζ в представлении (2.1) есть величина порядка δ^{-1} при $\delta \to \infty$ (что соответствует неограниченному росту поверхностного натяжения). В пределе профиль пленки приближается к окружности, которая, впрочем, не обязана быть концентрической с сечением цилиндра.

Из (2.14) и положительности η следует, что $\eta = 1$ при $q = 0$. Однако функция $\eta = 1$ является решением уравнения (1.1) лишь при $\beta = 0$. Следовательно, в любом нетривиальном решении этого уравнения коэффициент при $\cos\theta$ ряда Фурье функции $\eta(\theta)$ будет строго положительным. Напротив, коэффициент этого ряда при $\sin\theta$ будет строго отрицательным, если $\delta > 0$ и $\eta \neq 1$. Это вытекает из нижней оценки (2.13) и равенств (2.1), (2.2). Если $\delta = 0$, то уравнение

(1.1) превращается в алгебраическое, и его решение есть четная функция θ. При $\delta \to \infty$ функция η приближается к четной, как это видно из (2.12), (2.13). Таким образом, величина r, через которую оценивается сверху и снизу L^2-норма функции ζ'', характеризует меру асимметрии функции $\eta(\theta)$, и эта асимметрия наиболее выражена при умеренных значениях δ.

Наконец, на первый взгляд кажется странным, что правые части неравенств (2.10)–(2.12) неограниченно растут при $\beta \to 0$, т. е. при исчезающей силе тяжести. Однако оказывается, что задача (1.1), (1.2) кроме «малых» решений, в которых $\eta \to 1$ при $\beta \to 0$, имеет и большие решения, а в них $s \to \infty$, $q \to \infty$, если $\beta \to 0$.

3. Единственность и существование «малых» решений.

Предложение 2. *Если η_1 и η_2 — два положительных решения задачи* (1.1), (1.2) *и*

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 < \frac{9}{2}, \tag{3.1}$$

то $\eta_1 = \eta_2$.

Доказательство. Обозначим $\eta_1 - \eta_2 = w$. Функция w удовлетворяет уравнению

$$\delta(w''' + w') + (\eta_1\eta_2)^{-3} F(\eta_1, \eta_2) w = 0, \tag{3.2}$$

где

$$F = \eta_1^2 + \eta_1\eta_2 + \eta_2^2 - \eta_1^2\eta_2 - \eta_1\eta_2^2,$$

и условию периодичности. Умножая уравнение (3.2) на w и интегрируя полученное равенство от 0 до 2π, будем иметь

$$\int (\eta_1\eta_2)^{-3} F w^2 d\theta = 0. \tag{3.3}$$

Введем на плоскости η_1, η_2 полярные координаты R, γ, направив полярную ось по биссектрисе первого координатного угла, и обозначим $F(\eta_1, \eta_2) = R^2\Phi(R, \gamma)$, так что

$$\Phi = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\gamma - \frac{R\sqrt{2}}{4}(\cos\gamma + \cos 3\gamma). \tag{3.4}$$

Вследствие положительности η_1 и η_2 величина полярного угла γ в (3.4) подчиняется неравенству $|\gamma| < \pi/4$. Теперь заметим, что функция Φ принимает положительные значения в области $0 < R < l(\gamma)$, $|\gamma| < \pi/4$, где

$$l(\gamma) = \sqrt{2}\frac{2 + \cos\gamma}{\cos\gamma + \cos 3\gamma}.$$

Функция $l(\gamma)$ имеет абсолютный минимум $l_{\min}$ на интервале $(-\pi/4, \pi/4)$, который достигается в точке $\gamma = 0$, и $l_{\min} = 3\sqrt{2}/2$. Тем самым $\Phi(R, \gamma) > 0$ в секторе $0 < R < 3\sqrt{2}/2$, $|\gamma| < \pi/4$, а значит, и $F(\eta_1, \eta_2) > 0$, если η_1, η_2 положительны и удовлетворяют неравенству (3.1). Но в этом случае равенство (3.3) возможно лишь при $w = \eta_1 - \eta_2 = 0$, что и доказывает предложение 2.

Это предложение можно трактовать как утверждение о единственности «малых» решений задачи (1.1), (1.2). Существование таких решений нетрудно доказать при достаточно малых β (напомним, что вследствие (2.14) единственным решением задачи при $\beta = 0$ является $\eta = 1$). С этой целью рассмотрим эквивалентную формулировку задачи (1.1), (1.2) в терминах функции $\xi = \eta - 1$. Оператор

$$L = \delta\left(\frac{d^3}{d\theta^3} + \frac{d}{d\theta}\right) + 1$$

в левой части уравнения (2.15) для функции ξ обратим в пространствах 2π-периодических функций. Обратный оператор L^{-1} ограничен как оператор, действующий из $L^2(0, 2\pi)$ в $H^3(0, 2\pi)$. Для наших целей, однако, будет достаточно оценить норму $L^{-1} : C[0, 2\pi] \to H^1(0, 2\pi)$.

Рассмотрим уравнение $Lu = h$, где $h \in L^2(0, 2\pi)$ и $h \perp \{1, \cos\theta, \sin\theta\}$. Тогда

$$\|u\|_{C[0,2\pi]} \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\|u\|_{H^1(0,2\pi)} \le \left[\frac{\pi}{2(1+36\delta^2)}\right]^{1/2}\|h\|_{L^2[0,2\pi]} \le \frac{\pi}{(1+36\delta^2)^{1/2}}\|h\|_{C[0,2\pi]}.$$

С другой стороны, $u = h$, если $h \in \{1, \cos\theta, \sin\theta\}$. Следовательно, имеет место оценка нормы оператора $L^{-1} : C[0, 2\pi] \to C[0, 2\pi]$:

$$\|L^{-1}\|_{C\to C} \le \max\left[1, \frac{\pi}{(1+36\delta^2)^{1/2}}\right]. \tag{3.5}$$

Обращая в (2.15) оператор L, приходим к уравнению

$$\xi = \beta\cos\theta + L^{-1}\left[\frac{\xi^2(3+3\xi+\xi^2)}{(1+\xi)^3}\right], \tag{3.6}$$

где оператор в правой части удовлетворяет условию Липшица в $C[0, 2\pi]$. Применение к этому уравнению теоремы Каччиполли — Банаха приводит к следующему результату.

Предложение 3. *Предположим, что числа k, β и δ выбраны так, что выполняются следующие неравенства:*

$$\|L^{-1}\|k(6+6k+4k^2+k^3)(1-k)^{-4} < 1, \quad \|L^{-1}\|k^2(3+3k+k^2)(1-k)^{-3} + \beta \le k,$$

где $\|L^{-1}\|$ удовлетворяют оценке (3.5). *Тогда уравнение* (3.6) *имеет 2π-периодическое решение $\xi(\theta) \in C[0, 2\pi]$, которое единственно в шаре $\|\xi\|_C \le k$.*

Заметим, что $\|L^{-1}\|_{C\to C} = 1$, если $\delta \ge 1/2$. Следовательно, если мы возьмем $k = 9/100$, условия предложения 3 будут выполнены, если входящие в уравнение (3.6) и определение оператора L величины подчинены неравенствам $0 \le \beta \le 9/200$, $\delta \ge 1/2$. Далее, любое нетривиальное решение уравнения (3.6) является аналитической функцией θ. Кроме того, оно аналитично по параметру β в точке $\beta = 0$. Ограничиваясь тремя членами его разложения в ряд Тейлора, будем иметь

$$\xi = \eta - 1 = \beta\cos\theta + \beta^2\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+36\delta^2}\cos 2\theta - \frac{9}{1+36\delta^2}\sin 2\theta\right) + O(\beta^3) \tag{3.7}$$

при $\beta \to 0$. Четвертый член разложения был найден в [5] с помощью программы MAPLE; он здесь не приводится.

4. Неединственность решения при больших δ. Рассмотрения этого раздела основаны на представлении решения задачи (1.1), (1.2) в виде (2.1), где функция ζ удовлетворяет соотношениям (2.2), (2.3), а неизвестные параметры

s, q, r определяются из уравнений разветвления (2.4)–(2.6), куда они входят весьма неявным образом. К счастью, при $\delta \to \infty$ эту трудность удается преодолеть благодаря оценке (2.8) и вытекающему из нее неравенству

$$|\zeta| < \frac{3}{\delta}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{4.1}$$

Используя это неравенство, мы найдем асимптотическое решение системы (2.4)–(2.6) относительно параметров s, q, r при $\delta \to \infty$.

Подставим выражения (2.1) в уравнения (2.4)–(2.6) и перейдем в полученных равенствах к пределу при $\delta \to \infty$ с учетом оценки (4.1). Возникающие в предельных соотношениях интегралы вычисляются точно. В результате приходим к трем уравнениям, связывающим параметры s, q и r:

$$s(2q^2 + 2r^2 - 2s^2 + 3s) + q^2 + r^2 - s^2 = 0, \tag{4.2}$$

$$q(2q^2 + 2r^2 - 2s^2 + 3s) = \beta(s^2 - q^2 - r^2)^{5/2}, \tag{4.3}$$

$$r(2q^2 + 2r^2 - 2s^2 + 3s) = 0. \tag{4.4}$$

В п. 2 установлено, что $q > 0$ при $\beta > 0$. Из (4.3) следует, что выражение в левой скобке строго положительно, если $\beta > 0$, и уравнение (4.4) может быть выполнено лишь при $r = 0$. С учетом этого, уравнения (4.2), (4.3) преобразуются к виду

$$(2s+1)q^2 - 2s^2(s-1) = 0, \quad q(2q^2 - 2s^2 + 3s) = \beta(s^2 - q^2)^{5/2}.$$

Выразив из первого уравнения q через s:

$$q = s\left[\frac{2(s-1)}{2s+1}\right]^{1/2}, \tag{4.5}$$

и подставив это выражение во второе, после простых преобразований получим уравнение для s:

$$27\beta^2 s^6 - 8s^3 + 6s + 2 = 0. \tag{4.6}$$

При малых $\beta > 0$ уравнение (4.6) имеет ровно два вещественных корня, удовлетворяющих неравенству $s > 1$, как того требуют результаты п. 2. Рассмотрим поведение этих корней при $\beta \to 0$. Асимптотика одного из них имеет вид

$$s_1 = 1 + \frac{3}{2}\beta^2 + O(\beta^4), \quad \beta \to 0,$$

что согласуется с формулой (3.7). Асимптотика второго корня такова:

$$s_2 = \frac{2}{3}\beta^{-2/3} - \frac{3}{8}\beta^{2/3} + O(\beta^2), \quad \beta \to 0. \tag{4.7}$$

Из (4.5) и (4.7) находим асимптотику q:

$$q_1 = \beta + O(\beta^3), \quad \beta \to 0 \quad q_2 = \frac{2}{3}\beta^{-2/3} - \frac{3}{4} + O(\beta^{2/3}). \tag{4.8}$$

С увеличением β первый корень уравнения (4.6) s_1 увеличивается, а второй s_2 уменьшается. При

$$\beta = \beta^* = \frac{1}{24}\left(17^{3/2} - \frac{107}{3}\right)^{1/2} \approx 0,244 \tag{4.9}$$

имеем
$$s_1 = s_2 = s^* = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \approx 1,281.$$
Если $\beta > \beta^*$, то уравнение (4.6) не имеет вещественных корней $s > 1$. Изложенные рассуждения наводят на мысль о том, что при $\beta \to 0$ и достаточно больших δ задача (1.1), (1.2) помимо регулярного решения с асимптотикой (3.7) имеет и другое решение, в котором величины $s = s_2, q = q_2$ неограниченно растут в соответствии с формулами (4.7), (4.8). Существование такого решения можно доказать, если предположить, что $\delta\beta^{1/3} \to \infty$ при $\beta \to 0$. Однако с физической точки зрения это решение не представляет интереса, поскольку неограниченный рост s и q (а вместе с ними и функции η на значительной части интервала $(0, 2\pi)$) выводит нас за границы применимости длинноволнового приближения. Поэтому в формулируемом ниже утверждении мы предположим, что величина β ограничена снизу положительной постоянной.

Предложение 4. *Пусть* $0 < \beta_1 \le \beta \le \beta_2 < \beta^*$, *где* β^* *определено равенством* (4.9). *Тогда найдется такое* δ^*, *зависящее от* β_1 *и* β_2, *что при* $\delta \ge \delta^*$ *и* $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ *задача* (1.1), (1.2) *имеет два решения.*

Доказательство. Введем в рассмотрение новую искомую функцию
$$u = \eta - s - q\cos\theta \equiv \zeta - r\sin\theta. \tag{4.10}$$
Из (2.2) и (4.10) получается уравнение для u:
$$\begin{aligned} u''' + u' = \delta^{-1}\{&\beta\cos\theta - (s-1+q\cos\theta)(s+q\cos\theta)^{-3} \\ &- (s+q\cos\theta)^{-3}(s+q\cos\theta+u)^{-3}[2(s-3+q\cos\theta)u \\ &+ 3(s+q\cos\theta)^{-3}(s-1+q\cos\theta)u^2 + (s-1+q\cos\theta)u^3]\} \equiv \delta^{-1}G(u). \end{aligned} \tag{4.11}$$
Условия ортогональности (2.4)–(2.6) переписываются в новых терминах так:
$$\int G(u)\,d\theta = \int G(u)\cos\theta\,d\theta = \int G(u)\sin\theta\,d\theta = 0. \tag{4.12}$$
Из (2.3), (4.10) вытекают равенства
$$\int u\,d\theta = \int u\cos\theta\,d\theta = 0, \quad \int u\sin\theta\,d\theta = -\pi r. \tag{4.13}$$
Обращая оператор в левой части уравнения (4.11) (это возможно в силу условий (4.12)) и используя равенства (4.13), мы можем записать уравнение (4.11) в эквивалентной форме
$$u = \delta^{-1}M^{-1}G(u) - r\sin\theta. \tag{4.14}$$
Оператор M^{-1}, обратный к
$$M = \frac{d^3}{d\theta^3} + \frac{d}{d\theta},$$
действует из ортогонального дополнения в $L^2(0, 2\pi)$ к подпространству с базисом $\{1, \cos\theta, \sin\theta\}$ в пространство $H_0^3(0, 2\pi)$ (нижний индекс «0» означает, что в разложении элементов этого пространства в ряд Фурье отсутствуют три члена, пропорциональных $1, \cos\theta, \sin\theta$). Для наших целей, впрочем, достаточно рассмотреть уравнение (4.14) в пространстве непрерывных 2π-периодических функций $C_p[0, 2\pi]$, поскольку любое его решение $u \in C_p[0, 2\pi]$ автоматически будет гладкой функцией и, кроме того, для него будут выполнены условия (4.13).

Дальнейшие рассмотрения носят рутинный характер. Уравнение (4.14) при $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ и любом $\delta > 0$ имеет решение $u = -r\sin\theta$. Переходя к пределу при $\delta \to \infty$ и используя априорную оценку параметра r (2.12), заключаем, что при $\delta = \infty$ уравнение (4.14) имеет лишь тривиальное решение $u = 0$. Далее, для обеих ветвей $s_1(\beta)$ и $s_2(\beta)$ решения уравнения (4.6) и соответствующих значений q_1 и q_2, определенных формулой (4.5), разности $s_1 - q_1$ и $s_2 - q_2$ ограничены снизу числом 3/4. Это гарантирует, что при $\beta \geq \beta_1 > 0$ и достаточно больших δ функции $s + q\cos\theta$ и $s + q\cos\theta + u$, входящие в знаменатель правой части уравнения (4.11), будут ограничены снизу положительной постоянной в процессе решения этого уравнения (точнее, эквивалентного ему уравнения (4.14)) простыми итерациями.

Зафиксируем $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$, выберем одно из двух решений уравнения (4.6), скажем $s = s_1$, и положим $r = r_1 = 0$, $q_1 = q(s_1)$, где функция $q(s)$ определена равенством (4.5). Тройка чисел (s_1, q_1, r_1) образует решение системы уравнений разветвления (4.12) при $\delta = \infty$, т. е. системы (4.2)–(4.4). Обозначим через B_a шар в пространстве параметров s, q, r с центром в точке (s_1, q_1, r_1) и радиусом a. Теперь выберем δ_1 настолько большим, чтобы при $\delta \geq \delta_1$ выполнялась априорная оценка

$$|u| \leq \frac{\delta_1}{8\delta}. \tag{4.15}$$

Вследствие (2.12), (4.1) и (4.10) достаточно взять $\delta_1 = 24\bigl(10\beta_1^{-1} + 1\bigr)$. Тогда для $(s, q, r) \in \overline{B}_{1/8}$ и достаточно больших $\delta \geq \delta_2 \geq \delta_1$ уравнение (4.14) имеет решение, единственное в шаре пространства $C_p[0, 2\pi]$ с центром в точке $r\sin\theta$ и радиусом $K\delta_2^{-1}$, где $K \leq 3$.

Нам остается подставить полученное решение уравнения (4.14) в уравнения (4.12) и выделить в левых частях этих уравнений главные члены при $\delta \to \infty$, что дает

$$\begin{gathered} s(2q^2 + 2r^2 - 2s^2 + 3s) + q^2 + r^2 - s^2 = g_1(s, q, r; \delta), \\ q(2q^2 + 2r^2 - 2s^2 + 3s) = \beta(s^2 - q^2 - r^2)^{5/2} + g_2(s, q, r; \delta), \\ r(2q^2 + 2r^2 - 2s^2 + 3s) = g_3(s, q, r; \delta). \end{gathered} \tag{4.16}$$

Функции $g_i(s, q, r; \delta)$ являются гладкими функциями своих аргументов и при $\delta \geq \delta_2$ допускают оценки

$$|g_i| \leq C\delta^{-1}, \quad (s, q, r) \in \overline{B}_{1/8}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{4.17}$$

где C не зависит от δ. Оценки (4.17) непосредственно вытекают из определения (4.11) функции $G(u)$ и неравенства (4.15). Аналогичные (4.17) неравенства имеют место и для первых производных функций g_i. Отсюда следует, что при $0 < \beta_1 \leq \beta_2 < \beta^*$, где β^* определено равенством (4.9), система (4.16) имеет решение, если $\delta \geq \delta^* \geq \delta_2$ и δ^* достаточно велико. Это решение s, q, r единственно в некотором шаре B_d с центром в точке s_1, q_1, r_1 и радиусом $d \leq 1/8$. Кроме того, $s \to s_1$, $q \to q_1$, $r \to r_1$ при $\delta \to \infty$.

Теперь выберем второе решение s_2 уравнения (4.6) и положим $r_2 = 0$, $q_2 = q(s_2)$, где функция $q(s)$ определена равенством (4.5). Повторяя дословно приведенные выше рассуждения, мы доказываем существование решения s, q, r системы уравнений разветвления, в котором $s \to s_2$, $q \to q_2$, $r \to r_2$ при $\delta \to \infty$. Двум решениям системы уравнений разветвления соответствуют два решения уравнения (4.11), а вместе с тем и два решения задачи (1.1), (1.2). Предложение 4 доказано.

Проделанный выше асимптотический анализ задачи (1.1), (1.2) при $\delta \to \infty$ послужил отправной точкой для численного исследования этой задачи при конечных значениях δ [6]. При этом существенно использовались априорные оценки (2.8), (2.10)–(2.12). В результате вычислений была построена кривая $\beta = B(\delta)$, разделяющая области существования двух решений и несуществования решения задачи (1.1), (1.2) в квадранте параметров $\delta > 0$, $\beta > 0$. Функция $B(\delta)$ является монотонно возрастающей (и даже выпуклой) на полуоси $\delta > 0$ и $B(0) = 4/27$, $B \to \beta^*$ при $\delta \to \infty$. Полученные в [6] результаты свидетельствуют в пользу неединственности решения задачи в области $\delta > 0$, $0 < \beta < B(\delta)$.

5. Асимптотика решения при $\delta \to 0$. Если положить в (1.1) $\delta = 0$, то это дифференциальное уравнение превращается в алгебраическое:

$$\eta^3\beta\cos\theta - \eta + 1 = 0. \tag{5.1}$$

Уравнение (5.1) имеет единственное положительное решение $\eta(\theta)$, если $0 \le \beta \le 4/27$, и не имеет таких решений, если $\beta > 4/27$. Функция η является четной функцией θ и монотонно убывает, когда θ меняется от 0 до π. При этом

$$\max_{0\le\theta\le\pi}\eta(\theta) = \eta(0) < 3/2, \quad \text{если} \quad 0 \le \beta < 4/27, \tag{5.2}$$

и $\eta(0) = 3/2$, при $\beta = 4/27$. В последнем случае функция η теряет гладкость в точке $\theta = 0$:

$$\theta = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}|\theta| + O(\theta^2), \quad \theta \to 0,$$

что соответствует появлению угловой точки на свободной поверхности. Указанные свойства решения уравнения (1) получены в статье [2].

Случай $\delta = 0$ соответствует отсутствию поверхностного натяжения. Естественно ожидать, что включение в игру капиллярных сил будет препятствовать появлению сингулярности на свободной границе жидкости. Такая возможность обсуждалась в работе [3], где построена формальная асимптотика решения задачи (1.1), (1.2) при одновременном стремлении $\delta \to 0$, $\beta \to 4/27$, так что $\beta - 4/27 = \lambda\delta^{1/2}$ и $\lambda = O(1)$ при $\delta \to 0$. Более того, оказалось, что формальная асимптотика работает и при положительных (но достаточно малых) значениях параметра λ, что указывает на возможность продолжения решения задачи в закритическую область $\beta > 4/27$ при малых положительных значениях δ. Последующие расчеты [6] подтвердили результаты асимптотического анализа.

В предыдущем пункте рассмотрены два решения задачи (1.1), (1.2) при больших значениях δ. Интересно проследить их эволюцию при уменьшении параметра δ. Вычисления, выполненные в [6], показали, что при $\delta \to 0$ одно из решений приближается к решению вырожденного уравнения (5.1), в то время как другое обнаруживает сложное нерегулярное поведение. В данной работе мы ограничимся построением регулярной асимптотики решения задачи (1.1), (1.2) при $\delta \to 0$, $\beta < 4/27$. Отметим еще, что в работе [7] изучалось плоское нестационарное движение пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести при малых значениях коэффициента поверхностного натяжения (т. е. малых δ). Было обнаружено формирование квазистационарных структур, напоминающих ударные волны в газовой динамике, при $\delta \to 0$.

Итак, пусть в уравнении (1.1) $\beta < 4/27$ и $\delta \to 0$. В этом случае мы можем искать решение задачи в виде асимптотического ряда

$$\eta \sim \sum_{n=0}^{\infty}\delta^n\eta_n(\theta). \tag{5.3}$$

Подстановка (5.3) в уравнение (1.1) приводит к рекуррентной системе уравнений, первое из которых (уравнение для функции η_0) совпадает с (5.1), а второе имеет вид

$$\bigl(1 - 3\eta_0^2\beta\cos\theta\bigr)\eta_1 = -\eta_0''' - \eta_0'.$$

Выражение в скобке строго положительно при всех θ, если $0 \le \beta < 4/27$, вследствие (5.2). Поэтому функция η_1 определяется однозначно и будет аналитической функцией θ. Уравнения для следующих членов разложения (5.3) имеют вид

$$\bigl(1 - 3\eta_0^2\beta\cos\theta\bigr)\eta_n = -\eta_{n-1}''' - \eta_{n-1}' + \Psi_n(\eta_0, \dots, \eta_{n-1}), \quad n = 2, 3, \dots,$$

где Ψ_n — полиномы от $\eta_0, \dots, \eta_{n-1}$ степени не выше третьей. Ясно, что при сделанном ограничении на величину β каждая из функций η_n ($n = 2, 3, \dots$) также определяется однозначно и является аналитической функцией θ. Таким образом, формальный ряд (5.3) можно считать построенным.

Доказательство близости асимптотического решения задачи (1.1), (1.2) к ее точному решению при $\delta \to 0$ основано на теореме Канторовича о сходимости метода Ньютона. Центральным моментом здесь является изучение линейного уравнения

$$\delta(v''' + v') + (2\eta^{(N)} - 3)(\eta^{(N)})^{-4}v = \varphi(\theta, \delta), \tag{5.4}$$

в котором

$$\eta^{(N)} = \sum_{n=0}^{N} \delta^n \eta_n(\theta) \tag{5.5}$$

есть N-приближенное решение задачи (1.1), (1.2), а φ — функция, непрерывная в полосе $\overline{S}_\alpha = \{\theta, \delta : \theta \in \mathbb{R},\ 0 \le \delta \le \alpha\}$ и периодическая по θ с периодом 2π. Имеет место

Лемма 3. *Пусть $0 \le \beta \le \beta_0 < 4/27$. Тогда найдется такое α, что при $0 < \delta \le \alpha$ уравнение (5.4) имеет, и притом единственное, 2π-периодическое решение $v \in C^3[0, 2\pi]$ для любой функции $\varphi \in C(\overline{S}_\alpha)$, 2π-периодической по θ, и справедлива оценка*

$$\|v\|_{C^3[0,2\pi]} \le C\delta^{-2}\|\varphi\|_{C(\overline{S}_\alpha)}, \tag{5.6}$$

где C не зависит от δ при $\delta \to 0$.

Заметим, что неулучшаемая по порядку величины оценка отличается от (5.6): в ней в правой части стоит δ^{-1} вместо δ^{-2}. Однако получение такой оценки требует значительных усилий, в то время как неравенство (5.6) получается элементарными средствами. Кроме того, для обоснования асимптотического разложения (5.3) вполне достаточно оценки (5.6).

Доказательство леммы 3 мы приведем в конце статьи, а сейчас покажем, как с ее помощью устанавливается близость асимптотического решения задачи (1.1), (1.2) к ее точному решению.

Предложение 5. *Пусть $0 \le \beta \le \beta_0 < 4/27$ и $\eta^{(N)}$ определено равенством (5.5). Тогда найдется δ_0 такое, что при $0 < \delta \le \delta_0$ задача (1.1), (1.2) имеет решение $\eta(\theta)$ и выполнено неравенство*

$$\|\eta - \eta^{(N)}\|_{C^3[0,2\pi]} \le C_N\delta^{N+1}, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \tag{5.7}$$

где C_N не зависит от δ.

Доказательство. Воспользуемся теоремой Канторовича о сходимости модифицированного метода Ньютона в формулировке, изложенной в [8]. Пусть отображение F банахова пространства X в банахово пространство Y сильно дифференцируемо в некотором шаре $B(x_0, r)$ с центром x_0 и радиусом r, а производная $F(x)$ удовлетворяет в этом шаре условию Липшица

$$\|F'(x_1) - F'(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|.$$

Пусть $[F'(x_0)]^{-1}$ существует и

$$M = \|[F'(x_0)]^{-1}\|, \quad k = \|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\|, \quad h = MkL.$$

Тогда если $h < 1/4$, то в шаре $\|x - x_0\| \leq kt_0$, где t_0 — меньший корень уравнения $ht^2 - t + 1 = 0$, уравнение $F(x) = 0$ имеет единственное решение x^* и справедлива следующая оценка:

$$\|x_0 - x^*\| \leq 2(1 + \sqrt{1-4h})^{-1}\|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\|. \tag{5.8}$$

Обозначим через $C_p^n[0, 2\pi]$ подпространство пространства $C^n[0, 2\pi]$, образованное 2π-периодическими функциями. Для применения теоремы Канторовича естественно в качестве банахова пространства X выбрать $C_p^3[0, 2\pi]$, а в качестве банахова пространства Y — пространство $C_p^0[0, 2\pi]$. Элементами X будут функции $x = \eta(\theta)$, а отображение F запишется в виде

$$F(\eta) = \delta(\eta''' + \eta') - \beta\cos\theta + \frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\eta^3}.$$

Сильная дифференцируемость F в подходящем шаре $B(x_0, r)$ не вызывает сомнений. Действительно, функция η_0, определенная как единственное положительное решение уравнения (5.1), удовлетворяет неравенству

$$\min_{0\leq\theta\leq 2\pi} \eta_0(\theta) = \eta_0(\pi) > 21/25, \quad \text{если} \quad 0 \leq \beta < 4/27. \tag{5.9}$$

Выберем в качестве x_0 функцию $\eta^{(4)}(\theta)$ и возьмем α настолько малым, чтобы при $\delta \in [0, \alpha]$ выполнялось неравенство $\eta^{(4)}(\theta) \geq 4/5$ для всех $\theta \in [0, 2\pi]$. Вследствие (5.9) и определения $\eta^{(N)}$ (5.5) это возможно. Поскольку

$$F'(\eta)\zeta = \delta(\zeta''' + \zeta') + (3\eta - 2)\eta^{-4}\zeta, \tag{5.10}$$

для радиуса шара $B(x_0, r)$ годится любое число $r < 0,8$. А так как мы ищем решение задачи (1.1), (1.2), близкое к $\eta^{(N)}$ при малых δ, вполне достаточно взять $r = 0,1$. Тогда из (5.10) получается оценка константы Липшица производной отображения F':

$$L \leq (\min\eta)^{-5} \max_{0\leq\theta\leq 2\pi}(9\eta - 8) \leq 33,$$

если $0 \leq \beta \leq \beta_0 < 4/27$ и δ достаточно мало.

Оценка нормы $M = \|[f'(x_0)]^{-1}\|$ дается в лемме 3, $M \leq C\delta^{-2}$. Наконец, величина $k = \|[f'(x_0)]^{-1}F(x_0)\|$ оценивается сверху так: $k \leq CK\delta^3$ с не зависящей от δ постоянной K, поскольку невязка при подстановке функции $\eta^{(4)}$ в уравнение (1.1) имеет порядок $O(\delta^5)$ при $\delta \to 0$. Теперь остается выбрать $\delta_0 \leq \alpha$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $MkL \leq 33C^2K\delta < 1/4$, $0 \leq \delta \leq \delta_0$. Мы находимся в условиях теоремы Канторовича и можем утверждать, что при $\beta \in [0, \beta_0]$ и $\delta \in (0, \delta_0]$ задача (1.1), (1.2) имеет решение $\eta(\theta)$ и, кроме того, справедлива оценка

$$\|\eta - \eta^{(4)}\|_{C^3[0,2\pi]} \leq 2CK\delta^3$$

при $\delta \to 0$. Из определения функций $\eta^{(N)}$ и последнего неравенства вытекает справедливость оценки (5.7) при $N = 0, 1, 2$ (для этого достаточно воспользоваться неравенством треугольника).

Чтобы доказать оценку (5.7) при $N \geq 3$, выберем в качестве начального приближения в методе Ньютона функцию $\eta^{(7)}(\theta)$ и проведем рассуждения, изложенные выше. В этом случае будем иметь

$$\|\eta - \eta^{(7)}\|_{C^3[0,2\pi]} \leq \widetilde{C}\delta^6$$

при $\delta \to 0$ с некоторой постоянной $\widetilde{C}$, не зависящей от δ. Применяя снова неравенство треугольника, приходим к оценке (5.7) для $N = 3, 4, 5$. Этот процесс можно продолжить неограниченно. Конечно, величина δ_0 при этом может уменьшаться, однако при любом конечном N она останется положительной. Доказательство предложения 5 завершено.

Доказательство леммы 3. Введем обозначение

$$(3 - 2\eta^{(N)})(\eta^{(N)})^{-4} = a^3 \tag{5.11}$$

и перепишем уравнение (5.4) в виде

$$\delta(v''' + v') - a^3 v = \varphi. \tag{5.12}$$

Далее число N считается фиксированным. Функция $\eta_0(\theta)$ совпадает с положительным решением уравнения (5.1), для которого справедливо неравенство (5.2). Выберем $\beta_0 \in (0, 4/27)$ и зафиксируем его. Из определения $\eta^{(N)}$ (5.5) и неравенства (2.2) следует существование такого $\alpha > 0$, что при $0 \leq \delta \leq \alpha$ левая часть равенства (5.11) ограничена снизу положительной постоянной a_0^3 при всех $\theta \in [0, 2\pi]$, $\beta \in [0, \beta_0]$. Это означает, что для положительного корня a уравнения (5.11) справедливо неравенство

$$a \geq a_0 > 0 \quad \text{при } 0 \leq \theta \leq 2\pi. \tag{5.13}$$

Неравенство (5.13) гарантирует отсутствие точек поворота у сингулярно возмущенного уравнения (5.12), что сильно упрощает его исследование.

Умножим уравнение (5.12) на v и проинтегрируем по интервалу $(0, 2\pi)$ полученное равенство. Вследствие периодичности v будем иметь

$$\int (a^3 v^2 + \varphi v) d\theta = 0.$$

С учетом (5.13) отсюда немедленно вытекают единственность решения уравнения (5.4) в классе периодических функций и равномерная относительно δ оценка нормы $\|v\|_{L^2(0,2\pi)}$. Поскольку периодическая задача для уравнения (5.4) фредгольмова, единственность ее решения обеспечивает его существование. Затем умножаем уравнение (5.12) на v' и интегрируем получаемое равенство от 0 до 2π. В силу (5.11), (5.13) и определения $\eta(N)$ функция a гладко (и даже аналитически) зависит от θ. Это позволяет привести результат интегрирования к виду

$$\delta \int (v''^2 - v'^2)\, d\theta + \int \left[\varphi v' - \frac{1}{2}(a^3)' v^2\right] d\theta = 0.$$

Норма проекции v на подпространство $\{1, \cos\theta, \sin\theta\}$ пространства $L^2(0, 2\pi)$ оценивается непосредственно из (5.12), а для проекции на ортогональное дополнение к нему из предыдущего тождества получается оценка $\|v''\|_{L^2(0,2\pi)} \leq C_1\delta^{-1}$, где C_1 не зависит от δ при $\delta \to 0$. Тем самым

$$\|v'\|_{C[0,2\pi]} \leq C_2\delta^{-1}, \quad \|v\|_{C[0,2\pi]} \leq C_3\delta^{-1},$$

и из самого уравнения (5.12) получается оценка (5.6), что и завершает доказательство леммы.

Автор благодарит Е. А. Карабута и Г. Б. Волкову за помощь в работе над рукописью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пухначёв В. В.* Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести // Прикл. механика и техн. физика. 1977. № 3. С. 77–88.

2. *Moffatt H. K.* Behaviour of a viscous film on the outer surface of a rotating cylinder // J. Mec. 1977. V. 16. P. 651–673.

3. *Pukhnachov V. V.* Capillary/gravity film flow on the surface of a rotating cylinder // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2004. Т. 306. С. 165–185.

4. *Пухначёв В. В.* Асимптотическое решение задачи о вращающейся пленке // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Специальный выпуск «Математика и механика сплошной среды». 2004. С. 191–199.

5. *Hinch E. J., Kelmanson M. A.* On the decay and drift free-surface perturbations in viscous thin-film flow exterior to a rotating cylinder // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2003. V. 459. P. 1193–1213.

6. *Карабут Е. А.* Два режима обтекания жидкой пленки вокруг вращающегося цилиндра // Тез. докл. Междунар. конф. «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике». Новосибирск. 2005. С. 143.

7. *Hinch E. J., Kelmanson M. A., Metcalfe P. D.* Shock-like free-surface perturbation in low-surface-tension, viscous, thin-film flow // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2004. V. 460. P. 2975–2991.

8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

Статья поступила 6 мая 2005 г.

Пухначёв Владислав Васильевич
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
pukh@hydro.nsc.ru