Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2005. Том 46, № 5

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ КАТАЛИТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА В КИПЯЩЕМ СЛОЕ

В. П. Гаевой

Аннотация: В полуполосе $0 \leq x \leq h$, $t \geq 0$ рассматривается смешанная задача для почти линейной системы трех уравнений в частных производных первого порядка, одно из которых не содержит производных по t. Доказываются существование и единственность непрерывного по Гёльдеру обобщенного решения, обобщенного кусочно гладкого и гладкого решений. Для кусочно гладкого решения доказывается стабилизация некоторых функционалов при $t \to \infty$.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, частная производная, обобщенное решение, стабилизация.

Памяти Тадея Ивановича Зеленяка

1. Введение

Математические модели, учитывающие влияние реакционной среды на нестационарное состояние активной поверхности катализатора, широко используются для описания каталитических процессов в кипящем слое [1, 2]. В данной работе рассматривается циркуляционная модель слоя, в которой движение частиц катализатора представляется в виде двух взаимопроникающих потоков: восходящего потока, доля частиц которого равна a, $0 < a < 1$, и нисходящего потока с долей частиц $b = 1 - a$. Для двухстадийной каталитической реакции первого порядка по промежуточному веществу математическая модель процесса в слое сводится к смешанной задаче в полуполосе $\Pi = \{(x,t) : x \in [0,h], t \geq 0\}$ [3]

$$c_x = -pf(c)(1 - au - bv), \quad c(0,t) = c_0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} au_t + u_x &= q(v-u) - a(1+f(c))u + af(c), \\ bv_t - v_x &= q(u-v) - b(1+f(c))v + bf(c), \end{aligned} \tag{2}$$

$$x \in [0,h], \quad t > 0,$$

$$u(\xi,t) = v(\xi,t),\ \xi = 0,h, \quad u(x,0) = u^0(x),\ v(x,0) = v^0(x),$$

$$c_0 \geq 0, \quad 0 \leq u^0(x) \leq 1, \quad 0 \leq v^0(x) \leq 1,$$

где $a, b, p > 0$, $q \geq 0$, c_0 — константы, являющиеся параметрами математической модели, t — время, x — координата высоты слоя, $c(x,t)$, $u(x,t)$, $v(x,t)$ — концентрации вещества в газовой фазе в восходящем и нисходящем потоках частиц катализатора соответственно, $f(c)$ — функция, описывающая скорость химического превращения.

В соответствии с реальными представлениями о каталитических процессах предполагается, что $f(c) = 0$ при $c \leq 0$ и $f(c) > 0$ при $c > 0$. При этом физический смысл имеют только решения, удовлетворяющие неравенствам $0 \leq c(x,t) \leq c_0$, $0 \leq u(x,t) \leq 1$, $0 \leq v(x,t) \leq 1$.

Аналогичные математические модели использовались для численных расчетов каталитических процессов [2], поэтому представляет практический интерес исследование качественных свойств данной краевой задачи: существование стационарного и нестационарного решений, устойчивость или неустойчивость стационарного решения и т. д.

В работе [4] доказаны существование и единственность непрерывно дифференцируемого решения задачи (1), (2) для всех $t \geq 0$ в предположении, что $f(c) \in C^2[0,c_0]$, $c_0 > 0$, $f(0) = 0$, $f(c) > 0$ при $c > 0$, функции $u^0(x), v^0(x) \in C^2[0,h]$ удовлетворяют условиям согласования нулевого и первого порядков. В [3] доказано существование и единственность стационарного решения задачи (1), (2), для гладкого нестационарного решения задачи (1), (2) доказана стабилизация при $t \to \infty$ значений $c(h,t)$ и $\int\limits_0^h (au(x,t) + bv(x,t))\,dx$ к соответствующим значениям для стационарного решения. В данной работе, при более слабых предположениях относительно функций $f(c)$ и $u^0(x)$, $v^0(x)$, доказаны существование и единственность непрерывного по Гёльдеру обобщенного решения, а также обобщенного кусочно гладкого и гладкого решений задачи (1), (2), для кусочно гладкого решения доказана стабилизация при $t \to \infty$ значений $c(h,t)$ и $\int\limits_0^h (au(x,t) + bv(x,t))\,dx$.

В дальнейшем через $H^\alpha(Q)$, $H^{\alpha,\beta}(Q)$ будем обозначать пространства функций, непрерывных по Гёльдеру, а через $C(Q)$, $C^{l,m}(Q)$ — соответственно пространства непрерывных функций и функций, имеющих непрерывные производные до порядка l по x и до порядка m по t, где $l,m = 0,1$. Нормы функций в указанных пространствах определим стандартным образом [5]. Через $U(x,t)$ будем обозначать вектор-функцию $(u(x,t), v(x,t))$. Норму $U(x,t)$ определим равенством

$$\|U(x,t)\|_{B(Q)} = \max\{\|u(x,t)\|_{B(Q)}, \|v(x)\|_{B(Q)}\},$$

где $\|\cdot\|_{B(Q)}$ — норма скалярной функции в одном из указанных выше пространств.

2. Линейная задача

В полуполосе Π рассмотрим смешанную задачу для линейной гиперболической системы уравнений:

$$\begin{gathered} au_t + u_x = q(v-u) - a(1+g(x,t))u + af_1(x,t), \\ bv_t - v_x = q(u-v) - b(1+g(x,t))v + bf_2(x,t), \\ x \in [0,h], \quad t > 0, \\ u(\xi,t) = v(\xi,t),\ \xi = 0,h, \quad u(x,0) = u^0(x), \quad v(x,0) = v^0(x), \end{gathered} \tag{3}$$

где $g(x,t)$, $f_i(x,t)$, $i = 1,2$, — известные непрерывные ограниченные в Π функции, $g(x,t) \geq 0$.

Будем говорить, что функции $u^0(x), v^0(x)$ *удовлетворяют условиям согласования нулевого порядка*, если

$$u^0(0) = v^0(0), \quad u^0(h) = v^0(h), \tag{4}$$

и *условиям согласования первого порядка*, если

$$bu_x^0(x) + av_x^0(x) = ab(f_1(x,0) - f_2(x,0)), \quad x = 0, h. \tag{5}$$

Интегрируя уравнения (3) вдоль характеристик, получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u^1(x,t) + \frac{1}{a}\int_{t_1}^{t} F_1[u,v](x-(t-\tau)/a,\tau)\,d\tau, \\ v(x,t) &= v^1(x,t) + \frac{1}{b}\int_{t_2}^{t} F_2[u,v](x+(t-\tau)/b,\tau)\,d\tau, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$F_1[u,v](x,t) = q(v(x,t) - u(x,t)) - a(1+g(x,t))u(x,t) + af_1(x,t),$$

$$F_2[u,v](x,t) = q(u(x,t) - v(x,t)) - b(1+g(x,t))u(t,x) + bf_2(x,t),$$

$$t_1(x,t) = \begin{cases} 0, & t \le ax, \\ t - ax, & t \ge ax, \end{cases} \quad t_2(x,t) = \begin{cases} 0, & t \le b(h-x), \\ t - b(h-x), & t \ge b(h-x), \end{cases}$$

$$u^1(x,t) = \begin{cases} u^0(x-t/a), & t \le ax, \\ v(0,t-ax), & t \ge ax, \end{cases} \quad v^2(x,t) = \begin{cases} v^0(x+t/b), & t \le b(h-x), \\ u(h,t-b(h-x)), & t \ge b(h-x). \end{cases}$$

Определение 1. Непрерывное решение системы интегральных уравнений (6) будем называть *непрерывным обобщенным решением задачи* (3).

Определение 2. Непрерывное обобщенное решение задачи (3) $u(x,t)$, $v(x,t)$ будем называть *кусочно гладким*, если для любых $0 \le t_0 < t_1 < \infty$ прямоугольник

$$\Pi^{(t_0,t_1)} = \{(x,t) : 0 \le x \le h,\ t_0 \le t \le t_1\}$$

можно разбить конечным числом характеристик системы (3) на подобласти Q_i так, что в каждой из них первые производные функций $u(x,t)$, $v(x,t)$ по x и по t будут непрерывны.

Из (6) следует, что кусочно гладкое обобщенное решение удовлетворяет дифференциальным уравнениям системы (3) в каждой из подобластей Q_i и, следовательно, почти всюду в Π, за исключением тех характеристик, на которых первые производные функций $u(x,t)$, $v(x,t)$ имеют разрывы.

Теорема 1. *Пусть* $g(x,t), f_i(x,t) \in C[\Pi]$, $i = 1, 2$, $g(x,t) \ge 0$, $u^0(x), v^0(x) \in C[0,h]$ *и выполнены условия согласования нулевого порядка* (4). *Тогда*

(a) *задача* (3) *имеет единственное непрерывное обобщенное решение и для него справедливы оценки*

$$\min\{m_0, m_1, m_2\} = m \le U(x,t) \le M = \max\{M_0, M_1, M_2\}, \tag{7}$$

где

$$m_0 = \min_{0\le x\le h}\{u^0(x), v^0(x)\}, \quad M_0 = \max_{0\le x\le h}\{u^0(x), v^0(x)\},$$

$$m_i = \inf_{\Pi}(f_i(x,t)/(1+g(x,t)), \quad M_i = \sup_{\Pi}(f_i(x,t)/(1+g(x,t)), \quad i = 1, 2;$$

(б) *если* $g(x,t), f_i(x,t) \in H^{\alpha,0}(\Pi)$, $u^0(x), v^0(x) \in H^{\alpha}[0,h]$, *где* $0 < \alpha \le 1$, *то* $U(x,t) \in H^{\alpha,\alpha}(\Pi)$;

(в) *если* $g(x,t), f_i(x,t) \in C^{1,0}(\Pi)$, *а* $u^0(x)$, $v^0(x)$ — *кусочно гладкие функции, то непрерывное обобщенное решение задачи* (3) *будет кусочно гладким;*

(г) *если* $f_i(x,t), g_i(x,t) \in C^{1,0}(\Pi)$, $u^0(x), v^0(x) \in C^1[0,h]$ *и выполнены условия согласования первого порядка* (5), *то непрерывное обобщенное решение задачи* (3) *будет гладким решением.*

Доказательство. Для произвольного $0 < T < \infty$ рассмотрим задачу (3) в прямоугольнике $\Pi_T = \{(x,t) : 0 \le x \le h,\ 0 \le t \le T\}$. Обозначим $\Gamma_0 = \{0 \le x \le h,\ t = 0\}$, $\Gamma_1 = \{x = 0,\ 0 < t \le T\}$, $\Gamma_h = \{x = h,\ 0 < t \le T\}$, $\Gamma_T = \{0 < x < h,\ t = T\}$. Из работы [6] следуют существование и единственность непрерывного решения системы интегральных уравнений (6) и, значит, непрерывного обобщенного решения задачи (3) в прямоугольнике Π_T при любом $0 < T < \infty$. Для доказательства оценок (7) перейдем к характеристическим переменным

$$\xi = t + bx, \quad \eta = t - ax.$$

Тогда прямоугольник Π_T перейдет в параллелограмм Π_T^*, границы Γ_0, Γ_1, Γ_h, Γ_T — соответственно в

$$\Gamma_0^* = \{\eta = -a\xi/b,\ 0 \le \xi \le bh\}, \quad \Gamma_1^* = \{\eta = \xi,\ 0 < \xi \le T\},$$

$$\Gamma_h^* = \{\eta = \xi - h,\ bh < \xi \le bh + T\}, \quad \Gamma_T^* = \{\eta = (T - a\xi)/b,\ T < \xi < T + h\},$$

а функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ — в функции

$$u^*(\xi,\eta) = u(\xi - \eta, a\xi + b\eta), \quad v^*(\xi,\eta) = v(\xi - \eta, a\xi + b\eta).$$

При этом уравнения (6) преобразуются в интегральные уравнения

$$u^*(\xi,\eta) = u^1(\xi^0,\eta) + \int\limits_{\xi^0(\eta)}^{\xi} F_1[u^*, v^*](s,\eta)\, ds, \tag{8}$$

$$v^*(\xi,\eta) = v^1(\xi,\eta^0) + \int\limits_{\eta^0(\xi)}^{\eta} F_2[u^*, v^*](\xi,s)\, ds, \tag{9}$$

где $\xi^0(\eta)$, $\eta^0(\xi)$ и $u^1(\xi^0,\eta)$, $v^1(\xi,\eta^0)$ выбираются в соответствии с граничными условиями на Γ_0^*, Γ_1^*, Γ_h^*,

Из (8), (9) следует, что производные $u^*_\xi(\xi,\eta)$, $v^*_\eta(\xi,\eta)$ существуют, непрерывны и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$u^*_\xi = q(v^* - u^*) - a(1 + g^*(\xi,\eta))u^* + af_1^*(\xi,\eta), \tag{10}$$

$$v^*_\eta = q(u^* - v^*) - b(1 + g^*(\xi,\eta))v^* + bf_2^*(\xi,\eta). \tag{11}$$

Обозначим

$$W(\xi,\eta) = \max\{u^*(\xi,\eta), v^*(\xi,\eta)\}, \quad w(\xi,\eta) = \min\{u^*(\xi,\eta), v^*(\xi,\eta)\}.$$

Очевидно, что функции $W(\xi,\eta)$ и $w(\xi,\eta)$ непрерывны в замкнутой области Π_T^* и достигают в ней своих максимального и минимального значений.

Докажем, что $W(\xi,\eta) \le M$, где M определена в (7). Если $W(\xi,\eta)$ достигает своего максимального значения на границе Γ_0^*, то оценка очевидна. Пусть $W(\xi,\eta)$ достигает максимального значения в точке $(\xi_0,\eta_0) \in \Gamma_1^*$. Тогда

$W(\xi_0,\eta_0) = u^*(\xi_0,\eta_0) = v^*(\xi_0,\eta_0)$ и в точке (ξ_0,η_0) функция $v^*(\xi,\eta)$ имеет максимум. Но тогда из уравнения (11) вытекает, что $W(\xi_0,\eta_0) = v^*(\xi_0,\eta_0) \le M_2$. Аналогично если $W(\xi,\eta)$ достигает максимального значения в точке $(\xi_0,\eta_0) \in \Gamma_h^*$, то $W(\xi_0,\eta_0) = u^*(\xi_0,\eta_0) = v^*(\xi_0,\eta_0)$ и в точке (ξ_0,η_0) функция $u^*(\xi,\eta)$ имеет максимум. Но тогда из уравнения (10) следует, что $W(\xi_0,\eta_0) = u^*(\xi_0,\eta_0) \le M_1$. Пусть $W(\xi,\eta)$ достигает своего максимального значения в точке (ξ_0,η_0), лежащей внутри области Π_T^* или на границе Γ_T^*. В этом случае либо $W(\xi_0,\eta_0) = u^*(\xi_0,\eta_0) \ge v^*(\xi_0,\eta_0)$ и в точке (ξ_0,η_0) функция $u^*(\xi,\eta)$ имеет максимум, либо $W(\xi_0,\eta_0) = v^*(\xi_0,\eta_0) \ge u^*(\xi_0,\eta_0)$ и в точке (ξ_0,η_0) функция $v^*(\xi,\eta)$ имеет максимум. Но тогда из уравнений (10), (11) выводим, что $W(\xi_0,\eta_0) \le \max\{M_1, M_2\}$.

Таким образом, в области Π_T^* получена оценка

$$W(\xi,\eta) \le M = \max\{M_0, M_1, M_2\}.$$

Аналогично доказывается оценка $w(\xi,\eta) \ge m = \min\{m_0, m_1, m_2\}$. Так как непрерывное обобщенное решение задачи (3) существует и единственно в области Π_T при любом $0 < T < \infty$, а полученные выше оценки не зависят от T, то указанное решение существует и единственно для всех $t \ge 0$ и для него справедливы оценки (7).

Прежде чем перейти к п. (б) теоремы 1, докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть на отрезке* $[0,x_1]$ *функция* $y(x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$y(x) = -\int_0^x (\psi(s)y(s) - \psi_1(s))\,ds + \psi_2(x) + C, \tag{12}$$

где $\psi(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ *— ограниченные интегрируемые на* $[0,x_1]$ *функции,* $\psi(x) > 0$, $|\psi_1(x)|/\psi(x) \le A$, $|\psi_2(x)| \le B$, C *— константа. Тогда*

$$|y(x)| \le A + 2B + |C| \exp\left(-\int_0^x \psi(s)\,ds\right), \quad x \in [0,x_1], \tag{13}$$

если же $\psi_2(x)$ *знакопостоянна, то*

$$|y(x)| \le A + B + |C| \exp\left(-\int_0^x \psi(s)\,ds\right), \quad x \in [0,x_1]. \tag{13*}$$

Доказательство. Решение уравнения (12) выписывается в явном виде:

$$y(x) = \psi_2(x) + e^{-\varphi(x)}\left(C + \int_0^x e^{\varphi(s)}(\psi_1(s) - \psi(s)\psi_2(s))\,ds\right), \tag{14}$$

где $\varphi(x) = \int\limits_0^x \psi(s)\,ds$, откуда следуют оценки (13) и (13*).

Оценку констант Гёльдера функций $u^*(\xi,\eta), v^*(\xi,\eta)$ проведем последовательно в областях $Q^0 = \Pi^* \cap (-ah \le \eta \le 0)$, $Q_\xi^n = \Pi^* \cap ((n-1)h \le \xi \le nh)$ и $Q_\eta^n = \Pi^* \cap ((n-1)h \le \eta \le nh)$, $n = 1, 2, \dots$.

Из ограниченности правых частей уравнений (10), (11) вытекают оценки

$$\begin{aligned} |\Delta_\xi u^*(\xi,\eta)| &= |u^*(\xi+\delta_1,\eta) - u^*(\xi,\eta)| \le K_1|\delta_1|, \\ |\Delta_\eta v^*(\xi,\eta)| &= |v^*(\xi,\eta+\delta_2) - v^*(\xi,\eta)| \le K_2|\delta_2|. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь и далее через $K, K_1, K_2, \ldots$ будем обозначать константы, зависящие только от исходных данных задачи (3) и не зависящие явно от T.

Оценим константу Гёльдера функции $u^*(\xi,\eta)$ в области Q^0. Обозначим

$$\Delta_\eta u^*(\xi,\eta) = u^*(\xi,\eta+\delta) - u^*(\xi,\eta), \quad \Delta_\xi v^*(\xi,\eta) = v^*(\xi+\delta,\eta) - v^*(\xi,\eta),$$

где $\delta > 0$.

Используя уравнение (8) и начальные условия для $u^*(\xi,\eta)$ при $\xi = -b\eta/a$, $-ah \le \eta \le 0$, получим равенство

$$\Delta_\eta u^*(\xi,\eta) = u^0(-(\eta+\delta)/a) - u^0(-\eta/a) + \int\limits_{\xi_1}^{\xi_0} F_1[u^*,v^*](s,\eta+\delta)\,ds +$$

$$+ \int\limits_{\xi_0}^{\xi} (F_1[u^*,v^*](s,\eta+\delta) - F_1[u^*,v^*](s,\eta))\,ds, \qquad (16)$$

где $\xi_0 = -b\eta/a$, $\xi_1 = -b(\eta+\delta)/a$.

Чтобы не приводить здесь подробно громоздких преобразований, поясним их суть на примере выражения

$$J = \int\limits_{\xi_0}^{\xi} ([g^*u^*](s,\eta+\delta) - [g^*u^*](s,\eta))\,ds,$$

входящего в последнее слагаемое правой части равенства (16). Для компактности выкладок продолжим функцию $u^*(\xi,\eta)$ постоянной по ξ, а именно $u^*(\xi,\eta) = u^*(h+\eta,\eta)$, в область значений переменных $h+\eta \le \xi \le h+\eta+\delta$, $-ah \le \eta \le 0$. Тогда, подставляя равенство

$$u^*(\xi,\eta+\delta) = (u^*(\xi,\eta+\delta) - u^*(\xi,\eta)) + (u^*(\xi,\eta) - u^*(\xi+b\delta/a,\eta)) + u^*(\xi+b\delta/a,\eta)$$

в выражение J, после замены переменных под знаком интеграла и некоторых преобразований придем к равенству

$$J = \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \big[g^*(s,\eta+\delta)\big(\Delta_\eta u^*(s,\eta) - \Delta_\xi^1 u^*(s,\eta)\big) - \Delta_x^* g^*(s,\eta) u^*(s,\eta)\big]\,ds + J_1,$$

где

$$J_1 = \int\limits_{\xi - b\delta/a}^{\xi} u^*(s+b\delta/a,\eta) g^*(s,\eta+\delta)\,ds - \int\limits_{\xi_1}^{\xi_0} u^*(s+b\delta/a,\eta) g^*(s,\eta+\delta)\,ds,$$

$$\Delta_\xi^1 u^*(\xi,\eta) = u^*(\xi+b\delta/a,\eta) - u^*(\xi,\eta),$$
$$\Delta_x^* g^*(\xi,\eta) = g(\xi-\eta, a\xi+b\eta) - g(\xi-\eta-\delta/a, a\xi+b\eta).$$

Правая часть последнего равенства представляет собой разность $g(x,t) - g(x-\delta/a,t)$, записанную в переменных ξ,η.

Проводя аналогичные преобразования в правой части равенства (16), получим интегральное уравнение

$$\Delta_\eta u^*(\xi,\eta) = -\int\limits_{\xi_1}^{\xi} (\psi(s,\eta)\Delta_\eta u^*(s,\eta) - \Psi_1(s,\eta))\,ds + \Psi_2(\xi,\eta) + C(\eta), \qquad (17)$$

где

$$\psi(\xi,\eta) = q + a(1 + g^*(\xi,\eta+\delta)),$$

$$\Psi_1(\xi,\eta) = q\Delta_\eta v^*(\xi,\eta) + ag^*(\xi,\eta+\delta)\Delta_\xi^1 u^*(\xi,\eta) + au^*(\xi,\eta)\Delta_x^* g^*(\xi,\eta) - a\Delta_x^* f_1^*(\xi,\eta),$$

$$\Psi_2(\xi,\eta) = a\int\limits_{\xi-b\delta/a}^{\xi} (f_1^*(s,\eta+\delta) - u^*(s+b\delta/a,\eta)g^*(s,\eta+\delta))\,ds,$$

$$C(\eta) = u^0\left(-\frac{\eta+\delta}{a}\right) - u^0\left(-\frac{\eta}{a}\right) + \int\limits_{\xi_1}^{\xi_0} (F_1[u^*,v^*](s,\eta+\delta) + au^*(s+b\delta/a,\eta)g^*(s,\eta+\delta))\,ds.$$

Применяя лемму 1 к уравнению (17) с учетом предположений теоремы и доказанных выше оценок, получим

$$|u^*(\xi,\eta+\delta) - u^*(\xi,\eta)| \le K_3|\delta_2|^\alpha.$$

Из последней оценки и оценки (15) следует, что $\|u^*(\xi,\eta)\|_{H^\alpha}(Q^0) \le K$. Аналогичным образом, используя уравнение (9), начальные и граничные условия для функции $v^*(\xi,\eta)$ и найденную выше оценку для функции $u^*(\xi,\eta)$, получим $\|v^*(\xi,\eta)\|_{H^\alpha}\left(Q_\xi^1\right) \le K$. Далее последовательно оцениваются константы Гёльдера функций $u^*(\xi,\eta)$, $v^*(\xi,\eta)$ в областях Q_η^1, Q_ξ^n, Q_η^n, $n = 2,3,\dots$.

Докажем утверждение (в) теоремы 1. Пусть $u_x^0(x)$ имеет разрывы первого рода в точках x_i^1, $i = 1,2,\dots,N-1$, и $v_x^0(x)$ — в точках x_j^2, $j = 1,2,\dots,M-1$. Будем считать, что $x_0^1 = x_0^2 = 0$, $x_N^1 = x_M^2 = h$. Выписав решение уравнения (17) в виде равенства (14), поделим обе его части на δ. Из предположений п. (в) теоремы 1 и доказанного ранее следует, что при $\eta \ne -ax_i^1$, $i = 0,1,\dots,N$, в правой части полученного равенства возможен предельный переход при $\delta \to 0$. В результате придем к равенству

$$u_\eta^*(\xi,\eta) = -au_x^0(-\eta/a)e^{-\varphi(\xi,\eta)} + \Phi_1(\xi,\eta),$$

где $\varphi(\xi,\eta)$ и $\Phi_1(\xi,\eta)$ — ограниченные непрерывные функции и $\varphi(\xi,\eta) \ge 0$.

Отсюда вытекает, что $u_\eta^*(\xi,\eta)$ может иметь разрывы первого рода только на прямых $\eta = -ax_i^1$, $i = 0,1,\dots,N$. В остальных точках области Q^0 производная $u_\eta^*(\xi,\eta)$ непрерывна и ограничена.

Проводя аналогичные построения для производных $v_\xi^*(\xi,\eta)$ и $u_\eta^*(\xi,\eta)$ последовательно в областях Q_ξ^n и Q_η^n при $n = 1,2,\dots$, можно показать, что $u_\eta^*(\xi,\eta)$ может иметь разрывы только на прямых $\eta = nh - ax_i^1$, $\eta = nh + bx_j^2$, а $v_\xi^*(\xi,\eta)$ — на прямых $\xi = (n+1)h - ax_i^1$, $\xi = nh + bx_j^2$, $i = 0,1,\dots,N$, $j = 0,1,\dots,M$, $n = 0,1,\dots$. В остальных точках области Π^* производные $u_\eta^*(\xi,\eta)$ и $v_\xi^*(\xi,\eta)$ непрерывны и ограничены. Непрерывность и ограниченность производных $u_\xi^*(\xi,\eta)$ и $v_\eta^*(\xi,\eta)$ вытекает из уравнений (10), (11). Делая обратный переход к переменным $x = \xi - \eta$, $t = a\xi + b\eta$, убеждаемся, что при выполнении условий п. (в) теоремы 1 непрерывное обобщенное решение задачи (3) является обобщенным кусочно гладким решением.

Справедливость утверждения (г) теоремы 1 следует из работы [6].

3. Нелинейная задача

Рассмотрим в полуполосе Π задачу (1), (2).

Определение 3. Функции $u(x,t)$, $v(x,t)$, $c(x,t)$ будем называть *непрерывным обобщенным решением задачи* (1), (2), если $u(x,t), v(x,t) \in C(\Pi)$ являются непрерывным обобщенным решением задачи (2), где $c(x,t)$ — решение задачи Коши (1).

Определение 4. Непрерывное обобщенное решение задачи (1), (2) будем называть *кусочно гладким*, если $u(x,t), v(x,t)$ являются кусочно гладким решением задачи (2).

Теорема 2. *Пусть* $f(c) \in H^1[0,r]$, $r > 0$, $0 \le c_0 \le r$, $u^0(x), v^0(x) \in H^\alpha[0,h]$ *и выполнены условия согласования нулевого порядка* (4). *Тогда*

а) *непрерывное обобщенное решение задачи* (1), (2) *существует и единственно, при этом* $u(x,t), v(x,t) \in H^{\alpha,\alpha}(\Pi)$, $c(x,t) \in H^{1+\alpha,\alpha}(\Pi)$ *и справедливы оценки*

$$0 \le c(x,t) \le c_0, \quad 0 \le u(x,t), v(x,t) \le 1, \quad (x,t) \in \Pi,$$

б) *если* $f(c) \in C^1[0,r]$, $u^0(x)$, $v^0(x)$ *являются кусочно гладкими функциями на отрезке* $[0,h]$, *то непрерывное обобщенное решение задачи* (1), (2) *будет кусочно гладким,*

в) *если* $f(c) \in C^1[0,r]$, $u^0(x), v^0(x) \in C^1[0,h]$ *и выполнены условия согласования первого порядка*

$$bu_x^0(x) + av_x^0(x) = 0, \quad x = 0, h,$$

то непрерывное обобщенное решение задачи (1), (2) *будет гладким.*

Для произвольного $T > 0$ в области Π_T рассмотрим задачу (1), (2). Доказательство существования непрерывного обобщенного решения задачи проведем с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке. Для этого на ограниченном замкнутом выпуклом множестве

$$S = \{z(x,t) \in C^{1,0}(\Pi^T),\ 0 \le z \le r,\ |z_x(x,t)| \le M\}, \quad M = p \max_{0 \le c \le r} f(c),$$

банахова пространства $C^{1,0}(\Pi_T)$ зададим оператор L следующим образом. При $f_i(x,t) = g(x,t) = f(z(x,t))$, $i = 1,2$, где $z(x,t) \in S$, найдем функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ как непрерывное обобщенное решение задачи (3). По функциям $u(x,t)$, $v(x,t)$ определим $c(x,t) = Lz(x,t)$ как решение задачи Коши (1).

Из утверждения (б) теоремы 1 следует, что при любой $z(x,t) \in S$ такие функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ существуют, непрерывны и имеют место оценки

$$0 \le U(x,t) \le 1, \quad \|U(x,t)\|_{H^{\alpha,\alpha}(\Pi_T)} \le K. \tag{18}$$

При найденных функциях $u(x,t)$, $v(x,t)$ решение задачи Коши (1) существует и единственно. Если $c_0 = 0$, то из уравнения (1) и оценок (18) вытекает, что $c(x,t) \equiv 0$. Если $c_0 > 0$, то для $c(x,t)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{c(x,t)}^{c_0} \frac{ds}{f(s)} = p\left(x - \int\limits_0^x (au(s,t) + bv(s,t))\,ds\right). \tag{19}$$

Используя равенство (19), можно показать, что

$$\|c(x,t)\|_{H^{0,\alpha}(\Pi_T)} \le ph \max_{0 \le c \le c_0} f(c) \|U(x,t)\|_{H^{0,\alpha}(\Pi_T)}.$$

Из уравнения (1) с учетом последней оценки и оценок (18) найдем

$$0 \le c(x,t) \le c_0, \quad |c_x(x,t)| \le M, \quad \|c(x,t)\|_{H^{1+\alpha,\alpha}(\Pi_T)} \le K.$$

Отсюда следует, что оператор L компактно отображает ограниченное замкнутое выпуклое множество S в свою часть.

Докажем непрерывность оператора L. Пусть z_1 и z_2— произвольные функции из S, u_1, v_1 и u_2, v_2 — непрерывные обобщенные решения задачи (3) при $f_1(x,t) = f_2(x,t) = g(x,t) = f(z_1)$ и $f_1(x,t) = f_2(x,t) = g(x,t) = f(z_2)$ соответственно, $c_i = Lz_i$, $i = 1, 2$. Обозначим $\Delta u = u_1 - u_2$, $\Delta v = v_1 - v_2$, $\Delta c = c_1 - c_2$. Тогда $\Delta u(x,t)$ и $\Delta v(x,t)$ являются непрерывным обобщенным решением следующей задачи:

$$\begin{gathered} a\Delta u_t + \Delta u_x = q(\Delta v - \Delta u) - a(1 + f(z_1))\Delta u + a\Delta f(1 - u_2), \\ b\Delta v_t - \Delta v_x = q(\Delta u - \Delta v) - b(1 + f(z_1))\Delta v + b\Delta f(1 - v_2), \\ \Delta u(x,t) = \Delta v(x,t),\ x = 0, h, \quad \Delta u(x,0) = \Delta v(x,0) = 0, \end{gathered} \tag{20}$$

где $\Delta f = f(z_1) - f(z_2)$.

Применяя оценку (7) к решению задачи (20) и учитывая непрерывность по Липшицу функции $f(z)$, найдем

$$\|\Delta U\|_{C(\Pi_T)} \le K_0 \|\Delta z\|_{C(\Pi_T)}.$$

Используя эту оценку, из уравнений (19) и (1) получим

$$\|\Delta c\|_{C(\Pi_T)} \le K_1 \|\Delta z\|_{C(\Pi_T)}, \quad \|\Delta c_x\|_{C(\Pi_T)} \le K_2 \|\Delta z\|_{C(\Pi_T)},$$

откуда следует непрерывность оператора L на множестве S в норме пространства $C^{1,0}(\Pi_T)$.

Таким образом, выполнены все требования теоремы Шаудера. Следовательно, существует функция $z^* \in S$ такая, что $z^* = Lz^*$. Но тогда по определению оператора L функция $c(x,t) = z^*(x,t)$ и найденные при $z(x,t) = z^*(x,t)$ функции $u(x,t), v(x,t)$ являются непрерывным обобщенным решением задачи (1), (2). При этом $u(x,t), v(x,t) \in H^{\alpha,\alpha}(\Pi_T)$, $c(x,t) \in H^{1+\alpha,\alpha}(\Pi_T)$ и справедливы оценки

$$0 \le c(x,t) \le c_0, \quad 0 \le u(x,t), v(x,t) \le 1.$$

Из существования непрерывного обобщенного решения задачи (1), (2) в области Π_T для произвольного $T > 0$ и полученных выше оценок следует существование такого решения при любом $T > 0$, т. е. во всей области Π.

Замечание 1. Изложенным выше методом, используя утверждения 1 и 2 работы [3] и приведенное в ней доказательство непрерывности оператора A (с. 33), можно доказать существование непрерывного обобщенного решения задачи (1), (2) в предположении, что $f(c) \equiv 0$ при $c \le 0$ и $f(c) \in H^\beta[0, r]$, где $\beta \in (0, 1]$. При этом компоненты вектора решения будут принадлежать следующим классам функций: $c(x,t) \in H^{1+\gamma,\gamma}(\Pi)$, $u(x,t), v(x,t) \in H^{\gamma,\gamma}(\Pi)$, где $\gamma = \alpha\beta$.

Докажем единственность обобщенного решения задачи (1), (2).

Пусть c_1, u_1, v_1 и c_2, u_2, v_2 — два различных непрерывных обобщенных решения задачи (1), (2). Обозначим $\Delta u = u_1 - u_2$, $\Delta v = v_1 - v_2$, $\Delta c = c_1 - c_2$. Тогда $\Delta u(x,t)$ и $\Delta v(x,t)$ являются непрерывным обобщенным решением задачи (20) при $\Delta f = f(c_1) - f(c_2)$ и, следовательно, удовлетворяют системе интегральных уравнений вида (6) с подынтегральными выражениями

$$F_1[\Delta u, \Delta v] = q(\Delta v - \Delta u) - a(1 + f(z_1))\Delta u + a\Delta f(1 - u_2),$$

$$F_2[\Delta u, \Delta v] = q(\Delta u - \Delta v) - b(1 + f(z_1))\Delta v + b\Delta f(1 - v_2)$$

и соответствующими свободными членами $\Delta u^1(x,t)$ и $\Delta v^1(x,t)$. Оценивая при $t \in [0,\delta]$, $\delta > 0$, интегралы, входящие в правые части уравнений, и учитывая непрерывность по Липшицу функции $f(c)$, получим

$$\|\Delta U\|_{C(\Pi_\delta)} \le \delta K_1(\|\Delta U\|_{C(\Pi_\delta)} + \|\Delta c\|_{C(\Pi_\delta)}), \tag{21}$$

где $\Pi_\delta = \{(x,t) : 0 \le x \le h,\ 0 \le t \le \delta\}$.

Используя равенство (19), найдем оценку

$$\|\Delta c\|_{C(\Pi_\delta)} \le ph \max_{0 \le c \le c_0} f(c) \|\Delta U\|_{C(\Pi_\delta)},$$

подставляя которую в (21), приходим к неравенству

$$\|\Delta U\|_{C(\Pi_\delta)} \le \delta K \|\Delta U\|_{C(\Pi_\delta)}, \tag{22}$$

где константа K не зависит от начальных данных, значений t и δ. Полагая в (22) $\delta = 1/2K$, выводим неравенство, справедливое только при $\|\Delta U\|_{C(\Pi_\delta)} = 0$. Отсюда следует единственность непрерывного обобщенного решения задачи (1), (2).

Выше доказано, что $c(x,t) \in C^{1,0}(\Pi)$, но тогда из предположений (б) и (в) теоремы 2 следует соответственно справедливость предположений (в) и (г) теоремы 1, справедливость утверждений (б) и (в) теоремы 2 вытекает из соответствующих утверждений теоремы 1.

Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

4. Стабилизация функционала

Обозначим

$$V(t) = \Phi(u,v) = \int_0^h (au(x,t) + bv(x,t))\,dx.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения п.* (б) *теоремы* 2, $c^*(x)$, $u^*(x)$, $v^*(x)$ *и* $c(t,x)$, $u(t,x)$, $v(t,x)$ — *стационарное и обобщенное кусочно гладкое нестационарное решения задачи* (1), (2). *Тогда* $c(h,t)$ *и* $\Phi(u,v)$ *при* $t \to \infty$ *монотонно стремятся к* $c^*(h)$ *и* $\Phi(u^*,v^*)$ *соответственно и для всех* $t \ge 0$ *справедливы неравенства*

$$|\Phi(u,v) - \Phi(u^*,v^*)| \le |\Phi(u^0,v^0) - \Phi(u^*,v^*)|e^{-t},$$

$$|c(t,h) - c^*(h)| \le p \max_{0 \le c \le c_0} f(c) |\Phi(u^0,v^0) - \Phi(u^*,v^*)|e^{-t}.$$

Доказательство. Из пп. (а) и (б) теоремы 2 следуют существование и единственность для всех $t \ge 0$ кусочно гладкого обобщенного решения задачи (1), (2), т. е. такого решения, для которого $c(x,t)$ принадлежит $C^{1,0}(\Pi)$ и удовлетворяет уравнению (1), а функции $u(t,x), v(t,x)$ являются кусочно гладкими и почти всюду удовлетворяют уравнениям (2).

Существование стационарного решения задачи (1), (2) и единственность значений $c^*(h)$ и $\Phi(u^*, v^*)$ получаем из теоремы 1 работы [3]. Учитывая свойства кусочно гладкого обобщенного решения задачи (1), (2), несложно показать справедливость для всех $t \geq 0$ равенства

$$V_t(t) = \int\limits_0^h (au_t(x,t) + bv_t(x,t))\,dx.$$

В остальном доказательство теоремы 3 совпадает с доказательством теоремы 2 работы [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеплев В. С., Мещеряков В. Д.* Математическое моделирование реакторов с кипящим слоем катализатора // Математическое моделирование химических реакторов. Новосибирск: Наука, 1984. С. 44–66.
2. *Покровская С. А., Гаевой В. П., Садовская Е. М., Решетников С. И., Шеплев В. С.* Математическое моделирование процессов в кипящем слое с учетом нестационарного состояния катализатора // Математическое моделирование каталитических реакторов. Новосибирск: Наука, 1989. С. 85–106.
3. *Гаевой В. П.* Анализ циркуляционной модели каталитического процесса в кипящем слое // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 4. С. 29–35.
4. *Люлько Н. А.* Существование нестационарного решения одной математической модели каталитического процесса в кипящем слое // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2002. С. 50–58.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
6. *Аболиня В. Э., Мышкис А. Д.* Смешанная задача для линейной гиперболической системы на плоскости // Мат. сб. 1960. Т. 50, № 4. С. 423–442.

Статья поступила 17 апреля 2005 г.

Гаевой Виктор Павлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
gaev@math.nsc.ru