Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2005. Том 46, № 1

УДК 517.982

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МОРРИ

Лихун Цуй, Цисян Ян

Аннотация: Показана эквивалентность некоторой вещественнозначной характеризации и характеризации на основе всплесков для общих Q-пространств с привлечением $2n$-мерного всплеска для анализа элемента из $Q_p^{\alpha,q}$ на $\mathbb{R}^n$. Также построены предвойственные пространства $P_p^{\alpha,q}$ к $Q_p^{\alpha,q}$, где $P_p^{\alpha,q}$ порождены атомами, определяемыми всплесками.

Ключевые слова: $Q_p^{\alpha,q}$-пространство, n-мерный всплеск, атомарное разложение, предвойственное пространство, пространство колебаний.

1. Введение

Q-пространства изучались в последнее время многими авторами как вспомогательные к различным основным пространствам [1–6]. В [2] определены $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$ $(-\infty < \alpha < \infty)$ как вспомогательные к различным евклидовым пространствам. Считают, что $f(x) \in Q_\alpha = Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$, если

$$\sup[\ell(I)]^{2\alpha-n} \int\limits_I \int\limits_I \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\,dxdy < +\infty,$$

где I пробегает множество всех кубов в $\mathbb{R}^n$.

В [2] представлена характеризация Q_α-пространств с использованием всплесков. Недавно У и Се в статье [3] ввели $Q_p^{\alpha,q}$-пространства как обобщение Q-пространства. Они, по существу, использовали некоторые функции типа

$$\frac{1}{(1-\bar{z}_j z)^b}.$$

Согласно пояснениям из [7] эти функции могут рассматриваться в некотором смысле как всплески. С такой точки зрения эти пространства можно рассматривать как пространства со средним колебанием, связанные с всплесками [8, 9].

Всюду далее через C будем обозначать положительные постоянные, возможно, разные в различных ситуациях. Эти постоянные могут не зависеть от функций или объемлющих кубов. Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство. Под кубом мы всегда будем понимать куб в $\mathbb{R}^n$ с ребрами, параллельными координатным осям. Обозначим через D множество всех двоичных кубов в $\mathbb{R}^n$. Для пространства Q символ Q' используется для обозначения двойственного к Q пространства. Пусть $\Lambda = \{1, 2, \dots, 2^n - 1\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n$. Для $\lambda = (\varepsilon, j, k) \in \Lambda$ определим следующий двоичный куб:

$$I(\lambda) = \{x : 2^j x - k \in [0,1)^n\}.$$

The work is supported by SFYTBUCT QN.0414 and by NNSF (N 10001027).

Пусть $\ell(\lambda) = \ell(I(\lambda))$ — длина ребра куба I и $|I|$ — его мера Лебега. Для $\lambda = (\varepsilon, j, k) \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n$ введем функции

$$\psi_\lambda(x) = \Phi^\varepsilon_{j,k}(x) = 2^{\frac{jn}{2}} \Phi^\varepsilon(2^j x - k),$$

для которых существуют такие целые m, M, что $m \ge n+1$, $M > 0$, и такие положительные вещественные C_1, C_2, что $\Phi^\varepsilon(x)$ принадлежит C^m, обращаются в нуль моменты порядка m, $\operatorname{supp} \Phi^\varepsilon(x) \subset [-2^M, 2^M]^n$, $|\{x : \Phi'(x) > C_1\}| \ge C_2$, а кроме того, $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ составляют ортонормированный базис из всплесков в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\widetilde{m} = 2^{M+2}$ — фиксированная постоянная, зависящая от носителей всплесков.

Пусть $f(x)$ — распределение в $(C^2)'$. Тогда

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) \psi_\lambda(x)$$

для любого двоичного куба I. Символом $T_{a,\alpha}(I)$ обозначим $|I|^{-1+\frac{2\alpha}{n}} |a(\lambda)|^2$. Положим

$$\Psi_{f,\alpha}(I) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{J \in D_k(I)} \frac{2^{(2\alpha-n)k}}{|J|^2} \int\limits_J \int\limits_J |f(x) - f(y)|^2 \, dxdy.$$

В [2] предложено много характеризаций для Q_α-пространств и, в частности, рассмотрена связь Q_α-пространств с всплесковой характеризацией и пространствами со средним колебанием. Пусть $\tau_n = (0, \frac{1}{2})$, если $n = 1$, и $\tau_n = (0, 1)$, если $n \ge 2$.

Теорема А [2]. *Пусть $\alpha \in \tau_n$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(i) $f(x) \in Q_\alpha$;

(ii) $\sup\limits_I T_{a,\alpha}(I) < +\infty$;

(iii) $\sup \Psi_{f,\alpha}(I) < +\infty$.

Вместе с тем Морри в [10] ввел в рассмотрение $Q_p^{0,2}$-пространства и поставил задачу описания предвойственных пространств к ним. В 1998 г. эта задача решена Е. А. Калитой в работе [11]. Идея решения основывается на методах функционального анализа.

В настоящей работе мы будем рассматривать Q-пространства, определяемые следующим условием: соотношение

$$f(x) = \sum_{\varepsilon,j,k} a^\varepsilon_{j,k} \Phi^\varepsilon_{j,k}(x) \in Q_p^{\alpha,q} \quad (0 < \alpha < 1,\ 2 \le q < p < +\infty)$$

означает, что

$$|I|^{\frac{q}{p}-1} \sum_{I_{j,k} \subset I} 2^{qj(\alpha + \frac{n}{2}) - nj} \left| a^\varepsilon_{j,k} \right|^q < +\infty.$$

Во-первых, мы покажем, что указанные Q-пространства могут быть охарактеризованы с помощью пространств $Q_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$ $(0 < \alpha < 1,\ 2 \le q < p < +\infty)$, состоящих из распределений $f(x)$ таких, что $f(x) - f(y)$ — измеримая функция, для которой

$$\sup |I|^{\frac{q}{p}-1} \int\limits_I \int\limits_I \frac{|f(x) - f(y)|^q}{|x-y|^{n+q\alpha}} \, dxdy < +\infty,$$

где точная верхняя граница берется по всем кубам I с длиной ребра, равной $\ell(I)$, и ребрами, параллельными координатным осям в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, мы дадим другую вещественнозначную характеризацию при $q = 2$. Мы основываемся на характеристике $Q_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$-пространств в терминах $2n$-мерных всплесков и показываем эквивалентность некоторой вещественнозначной характеризации и всплесковой характеризации. Во-вторых, мы конструктивно опишем предвойственные пространства к $Q_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$.

Работа организована следующим образом. В разд. 2, 3 мы используем $2n$-мерные всплески для изучения функционального пространства $Q_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$. Точнее, в разд. 2 мы исследуем две характеристики: через всплески и через среднее колебание в частном случае $Q_p^{\alpha,2} = Q_\alpha^p$ пространства $Q_p^{\alpha,q}$. В разд. 3 мы даем характеризацию с использованием всплесков для общих $Q_p^{\alpha,q}$-пространств. В последнем разделе мы используем всплески для конструкции предвойственного пространства $P_p^{\alpha,q}$ к $Q_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$ $(0 < \alpha < 1,\ 2 \le q < p < +\infty)$.

2. Пространства колебаний Q_α^p

В этом разделе сосредоточим внимание на $Q_\alpha^p = Q_p^{\alpha,2}$. Пусть $0 < \alpha < 1$, $p > 2$.

Теорема 1. *Эквивалентны следующие утверждения:*

$$\Psi_{\alpha,I}^{f,1} = |I|^{\frac{2}{p}-1} \int\limits_I \int\limits_I \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\,dxdy \le C \text{ для произвольного куба } I; \tag{i}$$

$$\Psi_{\alpha,I}^{f,2} = |I|^{\frac{2}{p}-\frac{2\alpha}{n}} \sum_{s\ge 0} \sum_{J\in D_s(I)} \frac{2^{(2\alpha-n)s}}{|J|^2} \times \int\limits_J \int\limits_J |f(x)-f(y)|^2\,dxdy \le C \text{ для произвольного куба } I; \tag{ii}$$

$$\Psi_{\alpha,I}^{f,3} = |I|^{\frac{2}{p}-1} \sum_{I_{j,k}\subset I} 2^{2j\alpha}|a_{j,k}^{\varepsilon}|^2 \le C \text{ для произвольного двоичного куба } I. \tag{iii}$$

Доказательство. Шаг 1. Пусть $|t|_\infty = \max\limits_{1\le s\le n} |t_s|$. Согласно [4] имеем

$$K_I(x,y) = |I|^{\frac{2}{p}-\frac{2\alpha}{n}} \sum_{s\ge 0} \sum_{J\in D_s(I)} 2^{(2\alpha+n)s}|I|^{-2}\chi_J(x)\chi_J(y) \le C|I|^{\frac{2}{p}-1}|x-y|^{-2\alpha-n}.$$

Отсюда
$$\Psi_{\alpha,I}^{f,2} \le C\Psi_{\alpha,I}^{f,1}.$$

Шаг 2. Разложим
$$f(x) = \sum_{\varepsilon,j,k} a_{j,k}^{\varepsilon}\Phi_{j,k}^{\varepsilon}(x)$$
на три составляющих. Для $t = 0, 1, 2$ обозначим

$$f_t(x) = \sum_{(\varepsilon,j,k)\in\Lambda_t(I)} a_{j,k}^{\varepsilon}\Phi_{j,k}^{\varepsilon}(x),$$

где

$$\Lambda_0(I) = \{(\varepsilon,j,k),\ \widetilde{m}I_{j,k}\cap I = \phi\}, \quad \Lambda_1(I) = \{(\varepsilon,j,k),\ \widetilde{m}I_{j,k}\cap I \ne \phi,\ 2^{-nj} \le |I|\},$$

$$\Lambda_2(I)=\{(\varepsilon,j,k),\ \widetilde{m}I_{j,k}\cap I\neq\phi,\ 2^{-nj}>|I|\}.$$

Пусть

$$\Psi^{f,4}_{\alpha,I}=\sup_{(\varepsilon,j,k)\in\Lambda_2(I)}2^{nj(1-\frac{2}{p})}2^{2j\alpha}\big|a^{\varepsilon}_{j,k}\big|^2.$$

Тогда $\Psi^{f,4}_{\alpha,I}\leq\sup\limits_I\Psi^{f,3}_{\alpha,I}$ и для $(\varepsilon,j,k)\in\Lambda_2(I)$ имеем $|a^{\varepsilon}_{j,k}|\leq 2^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})nj-\alpha j}\big(\Psi^{f,4}_{\alpha,I}\big)^{\frac{1}{2}}$. Тем самым

$$\int\limits_I\int\limits_I\frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\,dxdy\leq\int\limits_I\int\limits_I\frac{|f_1(x)-f_1(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\,dxdy+\int\limits_I\int\limits_I\frac{|f_2(x)-f_2(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\,dxdy=I_1(I)+I_2(I).$$

Однако

$$I_1(I)\leq\int\int\frac{|f_1(x)-f_1(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\,dxdy=\|f_1(x)\|^2_{\dot{B}^{\alpha,2}_2}=\sum_{(\varepsilon,j,k)\in\Lambda_1(I)}2^{2j\alpha}\big|a^{\varepsilon}_{j,k}\big|^2$$

и

$$|f_2(x)-f_2(y)|\leq C\sum_{(\varepsilon,j,k)\in\Lambda_2(I)}2^{(1+\frac{n}{2})j}\big|a^{\varepsilon}_{j,k}\big||x-y|.$$

Кроме того, для $(\varepsilon,j,k)\in\Lambda_2(I)$ имеем

$$\big|a^{\varepsilon}_{j,k}\big|\leq 2^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})nj-\alpha j}\big(\Psi^{f,4}_{\alpha,I}\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$|f_2(x)-f_2(y)|\leq C\sum_{2^{-nj}>|I|}2^{(\frac{n}{p}+(1-\alpha))j}\big(\Psi^{f,4}_{\alpha,I}\big)^{\frac{1}{2}}|x-y|\leq C|I|^{-\frac{1}{p}-\frac{1-\alpha}{n}}\big(\Psi^{f,4}_{\alpha,I}\big)^{\frac{1}{2}}|x-y|.$$

Тогда

$$\Psi^{f,1}_{\alpha,I}\leq|I|^{\frac{2}{p}-1}\sum_{(\varepsilon,j,k)\in\Lambda_1(I)}2^{2j\alpha}\big|a^{\varepsilon}_{j,k}\big|^2+C|I|^{-1-\frac{2}{n}(1-\alpha)}\Psi^{f,4}_{\alpha,I}\int\limits_I\int\limits_I\frac{|x-y|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\,dxdy\leq C\Psi^{f,3}_{\alpha,mI}+C\Psi^{f,4}_{\alpha,I}.$$

Шаг 3. Пусть $\Xi(I)$ — множество двоичных кубов I' того же размера, что и I, с $\widetilde{m}I'\cap I\neq\varnothing$. Используем $2n$-мерные всплески для доказательства того, что

$$\Psi^{f,3}_{\alpha,I}\leq C\Psi^{f,1}_{\alpha,I},\quad \Psi^{f,2}_{\alpha,I}\leq C\sum_{I'\in\Xi(I)}\Psi^{f,3}_{\alpha,I'}+C\Psi^{f,4}_{\alpha,I}.$$

Пусть

$$f(x)=\sum_{\varepsilon,j,k}a^{\varepsilon}_{j,k}\Phi^{\varepsilon}_{j,k}(x)$$

и

$$f(x)-f(y)=\sum_{\varepsilon,\varepsilon',j,k,l}a^{\varepsilon,\varepsilon'}_{j,k,l}\Phi^{\varepsilon,\varepsilon'}_{j,k,l}(x,y)=\sum_{\varepsilon,\varepsilon',j,k,l}a^{\varepsilon,\varepsilon'}_{j,k,l}\Phi^{\varepsilon}_{j,k}(x)\Phi^{\varepsilon'}_{j,l}(y).$$

Тогда

(1) если $|\varepsilon||\varepsilon'|\neq 0$, то $a^{\varepsilon,\varepsilon'}_{j,k,l}=0$,

(2) если $\varepsilon \neq 0, \varepsilon' = 0$, то $a^{\varepsilon,0}_{j,k,l} = 2^{-\frac{nj}{2}} a^{\varepsilon}_{j,k}$,
(3) если $\varepsilon = 0, \varepsilon' \neq 0$, то $a^{0,\varepsilon'}_{j,k,l} = -2^{-\frac{nj}{2}} a^{\varepsilon'}_{j,l}$.
Итак,

$$\sum_{I_{j,k}\times I_{j,l}\subset J\times J} \left|a^{\varepsilon,\varepsilon'}_{j,k,l}\right|^2 \sim |J| \sum_{I_{j,k}\subset J} \left|a^{\varepsilon}_{j,k}\right|^2.$$

Во-первых,

$$\begin{aligned}\Psi^{f,3}_{\alpha,I} = |I|^{1-\frac{2\alpha}{n}} \sum_{s\geq 0} 2^{(2\alpha-n)s} \sum_{J\in D_s(I)} \frac{1}{|J|} \sum_{I_{j,k}\subset J} \left|a^{\varepsilon}_{j,k}\right|^2 \\ = C|I|^{1-\frac{2\alpha}{n}} \sum_{s\geq 0} 2^{(2\alpha-n)s} \sum_{J\in D_s(I)} \frac{1}{|J|^2} \sum_{I_{j,k}\times I_{j,l}\subset J\times J} \left|a^{\varepsilon,\varepsilon'}_{j,k,l}\right|^2 \\ \leq C|I|^{1-\frac{2\alpha}{n}} \sum_{s\geq 0} 2^{(2\alpha-n)s} \sum_{J\in D_s(I)} \frac{1}{|J|^2} \iint\limits_{\widetilde{m}J\times\widetilde{m}J} |f(x)-f(y)|^2\,dxdy \leq C\Psi^{f,1}_{\alpha,\widetilde{m}I}.\end{aligned}$$

Далее, пусть

$$\Lambda_0(J) = \{(\varepsilon,\varepsilon',j,k,l),\ \widetilde{m}I_{j,k}\times\widetilde{m}I_{j,l}\cap J\times J\neq\phi\},$$

$$\widetilde{\Lambda}_0(J) = \{(\varepsilon,j,k),\ \widetilde{m}I_{j,k}\cap J\neq\phi\};$$

$$Z_1 = \{j\in\mathbb{Z},\ 2^{-nj}\leq|J|\},\quad Z_2 = \{j\in\mathbb{Z},\ |J|<2^{-nj}\leq|I|\},$$

$$Z_3 = \{j\in\mathbb{Z},\ |I|<2^{-nj}\}.$$

Для $s=1,2,3$ обозначим

$$\Lambda_s(J) = \{(\varepsilon,\varepsilon',j,k,l)\in\Lambda_0(J),\ j\in Z_s\};\quad \widetilde{\Lambda}_s(J) = \{(\varepsilon,j,k)\in\widetilde{\Lambda}_0(J),\ j\in Z_s\};$$

$$f_s(x,y) = \sum_{(\varepsilon,\varepsilon',j,k,l)\in\Lambda_s(J)} a^{\varepsilon,\varepsilon'}_{j,k,l}\Phi^{\varepsilon}_{j,k}(x)\Phi^{\varepsilon'}_{j,l}(y).$$

Тогда

$$\int\limits_J\int\limits_J |f(x)-f(y)|^2\,dxdy \leq \sum_{1\leq s\leq 3}\int\limits_J\int\limits_J |f_s(x,y)|^2\,dxdy = \sum_{1\leq s\leq 3} I_s(J).$$

Легко видеть, что

$$I_1(J) \leq \sum_{(\varepsilon,\varepsilon',j,k,l)\in\Lambda_1(J)}\ \sum_{(\varepsilon,\varepsilon',j,k,l)\in\Lambda_1(J)} \left|a^{\varepsilon,\varepsilon'}_{j,k,l}\right|^2 \leq C|J| \sum_{(\varepsilon,j,k)\in\widetilde{\Lambda}_1(J)} \left|a^{\varepsilon}_{j,k}\right|^2.$$

Для $s=2,3$ имеем

$$\begin{aligned}f_s(x,y) &= \sum_{(\varepsilon,\varepsilon',j,k,l)\in\Lambda_s(J)} a^{\varepsilon,\varepsilon'}_{j,k,l}\Phi^{\varepsilon,\varepsilon'}_{j,k,l}(x) \\ &= \sum_{(\varepsilon,\varepsilon',j,k,l)\in\Lambda_s(J)} 2^{\frac{nj}{2}} a^{\varepsilon}_{j,k}(\Phi^{\varepsilon}(2^jx-k)\Phi^0(2^jy-l)-\Phi^{\varepsilon}(2^jy-k)\Phi^0(2^jx-l)) \\ &= \sum_{(\varepsilon,\varepsilon',j,k,l)\in\Lambda_s(J)} 2^{\frac{nj}{2}} a^{\varepsilon}_{j,k}[(\Phi^{\varepsilon}(2^jx-k)-\Phi^{\varepsilon}(2^jy-k))\Phi^0(2^jy-l) \\ &\qquad + \Phi^{\varepsilon}(2^jy-k)(\Phi^0(2^jy-l)-\Phi^0(2^jx-l))].\end{aligned}$$

Тогда
$$|f_s(x,y)| \le C \sum_{(\varepsilon,j,k)\in\widetilde{\Lambda}_s(J)} 2^{(1+\frac{n}{2})j}\left|a^{\varepsilon}_{j,k}\right||x-y|.$$
Взяв $0<\delta<2-2\alpha$ и использовав неравенство Коши — Шварца, получим
$$I_2(J) \le C|J|^{2+\frac{2}{n}-\delta} \sum_{(\varepsilon,j,k)\in\widetilde{\Lambda}_2(J)} 2^{(2+n)j-\delta j}\left|a^{\varepsilon}_{j,k}\right|^2.$$
Кроме того, для $(\varepsilon,j,k)\in\Lambda_3(J)$ имеем
$$\left|a^{\varepsilon}_{j,k}\right| \le 2^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})nj-\alpha j}\left(\Psi^{f,4}_{\alpha,I}\right)^{\frac{1}{2}}.$$
Тогда
$$|f_3(x,y)| \le \sum_{2^{-nj}\ge|I|} 2^{(\frac{n}{p}+(1-\alpha))j}|x-y| \le |I|^{-\frac{1}{p}-\frac{1-\alpha}{n}}|x-y|$$
и
$$I_3(J) \le |J|^{2+\frac{2}{n}}|I|^{-\frac{2}{p}-\frac{2}{n}(1-\alpha)}\Psi^{f,4}_{\alpha,I}.$$
Отсюда
$$\Psi^{f,2}_{\alpha,I} \le |I|^{\frac{2}{p}-\frac{2\alpha}{n}} \sum_{s\ge0}\sum_{J\in D_s(I)} \frac{2^{(2\alpha-n)s}}{|J|^2}\sum_{1\le t\le3} I_t(J).$$

Повторив рассуждения, подобные приведенным в разд. 6 из [4], получим
$$\Psi^{f,2}_{\alpha,I} \le C\sum_{I'\in\Xi(I)}\Psi^{f,3}_{\alpha,I'} + C\Psi^{f,4}_{\alpha,I}.$$
Теорема доказана.

3. Пространства колебаний $Q^{\alpha,q}_p$

В этом разделе изучим обобщенные $Q^{\alpha,q}_p$-пространства.

Теорема 2. *Пусть* $0<\alpha<1$, $2\le q<p<+\infty$. *Тогда для*
$$f(x)=\sum_{\varepsilon,j,k} a^{\varepsilon}_{j,k}\Phi^{\varepsilon}_{j,k}(x)$$
следующие утверждения эквивалентны:
$$\Psi^{f,1}_{\alpha,I} = |I|^{\frac{q}{p}-1}\int_I\int_I \frac{|f(x)-f(y)|^q}{|x-y|^{n+q\alpha}}\,dxdy < \infty \text{ для любого куба } I; \tag{i}$$
$$\Psi^{f,2}_{\alpha,I} = |I|^{\frac{q}{p}-1}\sum_{I_{j,k}\subset I} 2^{qj(\alpha+\frac{n}{2})-nj}|a^{\varepsilon}_{j,k}|^q < \infty \text{ для любого двоичного куба } I. \tag{ii}$$

Доказательство. Шаг 1. Представим $f(x)$ в виде трех слагаемых. Для $t=0,1,2$ положим
$$f_t(x)=\sum_{(\varepsilon,j,k)\in\Lambda_t(I)} a^{\varepsilon}_{j,k}\Phi^{\varepsilon}_{j,k}(x),$$
где
$$\Lambda_0(I)=\{(\varepsilon,j,k),\ \widetilde{m}I_{j,k}\cap I=\phi\},\quad \Lambda_1(I)=\{(\varepsilon,j,k),\ \widetilde{m}I_{j,k}\cap I\ne\phi,\ 2^{-nj}\le|I|\}$$
$$\Lambda_2(I)=\{(\varepsilon,j,k),\ \widetilde{m}I_{j,k}\cap I\ne\phi,\ 2^{-nj}>|I|\}.$$

Пусть
$$\Psi^{f,3}_{\alpha,I} = \sup_{(\varepsilon,j,k)\in\Lambda_2(I)} 2^{nj(1-\frac{q}{p})+qj(\alpha+\frac{n}{2})-nj}\big|a^{\varepsilon}_{j,k}\big|^q.$$

Тогда $\Psi^{f,3}_{\alpha,I} \le \sup\limits_I \Psi^{f,2}_{\alpha,I}$ и для $(\varepsilon,j,k)\in\Lambda_2(I)$ имеем

$$\big|a^{\varepsilon}_{j,k}\big| \le 2^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})nj-\alpha j}\big(\Psi^{f,3}_{\alpha,I}\big)^{\frac{1}{q}}.$$

Далее,

$$\int\limits_I\int\limits_I \frac{|f(x)-f(y)|^q}{|x-y|^{n+q\alpha}}\,dxdy \le \int\limits_I\int\limits_I \frac{|f_1(x)-f_1(y)|^q}{|x-y|^{n+q\alpha}}\,dxdy + \int\limits_I\int\limits_I \frac{|f_2(x)-f_2(y)|^q}{|x-y|^{n+q\alpha}}\,dxdy = I_1(I)+I_2(I).$$

Однако

$$I_1(I) \le \iint \frac{|f_1(x)-f_1(y)|^q}{|x-y|^{n+q\alpha}}\,dxdy = \|f_1(x)\|^q_{\dot B^{\alpha,q}_q} = \sum_{(\varepsilon,j,k)\in\Lambda_1(I)} 2^{qj(\alpha+\frac{n}{2})-nj}\big|a^{\varepsilon}_{j,k}\big|^q$$

и

$$|f_2(x)-f_2(y)| \le C\sum_{(\varepsilon,j,k)\in\Lambda_2(I)} 2^{(1+\frac{n}{2})j}\big|a^{\varepsilon}_{j,k}\big||x-y|.$$

Кроме того, для $(\varepsilon,j,k)\in\Lambda_2(I)$ будет

$$|a^{\varepsilon}_{j,k}| \le 2^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})nj-\alpha j}\big(\Psi^{f,3}_{\alpha,I}\big)^{\frac{1}{q}},$$

откуда

$$|f_2(x)-f_2(y)| \le C\sum_{2^{-nj}>|I|} 2^{(\frac{n}{p}+(1-\alpha))j}\big(\Psi^{f,3}_{\alpha,I}\big)^{\frac{1}{q}}|x-y| \le C|I|^{-\frac{1}{p}-\frac{1-\alpha}{n}}\big(\Psi^{f,3}_{\alpha,I}\big)^{\frac{1}{q}}|x-y|.$$

Тогда

$$\Psi^{f,1}_{\alpha,I} \le |I|^{\frac{q}{p}-1}\sum_{(\varepsilon,j,k)\in\Lambda_1(I)} 2^{jq(\alpha+\frac{n}{2})-nj}\big|a^{\varepsilon}_{j,k}\big|^q + C|I|^{-1-\frac{q}{n}(1-\alpha)}\Psi^{f,3}_{\alpha,I}\int\limits_I\int\limits_I \frac{|x-y|^q}{|x-y|^{n+q\alpha}}\,dxdy \le C\Psi^{f,2}_{\alpha,\widetilde{m}I} + C\Psi^{f,3}_{\alpha,I}.$$

Шаг 2. Пусть $f(x)=\sum\limits_{\varepsilon,j,k} a^{\varepsilon}_{j,k}\Phi^{\varepsilon}_{j,k}(x)$ и

$$f(x)-f(y) = \sum_{\varepsilon,\varepsilon',j,k,l} a^{\varepsilon,\varepsilon'}_{j,k,l}\Phi^{\varepsilon}_{j,k}(x)\Phi^{\varepsilon'}_{j,l}(y).$$

Тогда

(1) если $|\varepsilon||\varepsilon'|\ne 0$, то $a^{\varepsilon,\varepsilon'}_{j,k,l}=0$;

(2) если $\varepsilon\ne 0, \varepsilon'=0$, то $a^{\varepsilon,0}_{j,k,l} = 2^{-\frac{nj}{2}}a^{\varepsilon}_{j,k}$;

(3) если $\varepsilon=0, \varepsilon'\ne 0$, то $a^{0,\varepsilon'}_{j,k,l} = -2^{-\frac{nj}{2}}a^{\varepsilon'}_{j,l}$.

Для $I_{j,k}\times I_{j,l}\subset J\times J$ коэффициентами всплеска $(f(x)-f(y))\chi_{\widetilde{m}J}(x)\chi_{\widetilde{m}J}(y)$ будут $a^{\varepsilon,\varepsilon'}_{j,k,l}$, откуда

$$\int\limits_{\widetilde{m}J}\int\limits_{\widetilde{m}J}|f(x)-f(y)|^q\,dxdy \\ \geq \iint\Big(\sum_{I_{j,k}\times I_{j,l}\subset J\times J} 2^{2jn}\big|a^{\varepsilon,\varepsilon'}_{j,k,l}\big|^2\chi(2^jx-k)\chi(2^jy-l)\Big)^{\frac{q}{2}}\,dxdy.$$

Используя зависимость между $a^{\varepsilon}_{j,k}$ и $a^{\varepsilon,\varepsilon'}_{j,k,l}$, получим

$$\int\limits_{\widetilde{m}J}\int\limits_{\widetilde{m}J}|f(x)-f(y)|^q\,dxdy\geq C|J|\int\Big(\sum_{I_{j,k}\subset J}2^{jn}\big|a^{\varepsilon}_{j,k}\big|^2\chi(2^jx-k)\Big)^{\frac{q}{2}}\,dx.$$

Если $q\geq 2$, то

$$\int\limits_{\widetilde{m}J}\int\limits_{\widetilde{m}J}|f(x)-f(y)|^q\,dxdy\geq C|J|\int\sum_{I_{j,k}\subset J}2^{\frac{q}{2}jn}\big|a^{\varepsilon}_{j,k}\big|^q\chi(2^jx-k))\,dx \\ =C|J|\sum_{I_{j,k}\subset J}2^{(\frac{q}{2}-1)jn}\big|a^{\varepsilon}_{j,k}\big|^q.$$

Отсюда

$$\sum_{I_{j,k}\subset I}2^{jq(\alpha+\frac{n}{2})-nj}\big|a^{\varepsilon}_{j,k}\big|^q=|I|^{1-\frac{q\alpha}{n}}\sum_{s\geq 0}2^{(q\alpha-n)s}\sum_{J\in D_s(I)}\frac{|J|}{|J|^2}\sum_{I_{j,k}\subset J}2^{(\frac{q}{2}-1)nj}\big|a^{\varepsilon}_{j,k}\big|^q \\ \leq C|I|^{1-\frac{q\alpha}{n}}\sum_{s\geq 0}2^{(q\alpha-n)s}\sum_{J\in D_s(I)}\frac{1}{|J|^2}\int\limits_{\widetilde{m}J}\int\limits_{\widetilde{m}J}|f(x)-f(y)|^q\,dxdy \\ \leq C\int\limits_{\widetilde{m}I}\int\limits_{\widetilde{m}I}\frac{|f(x)-f(y)|^q}{|x-y|^{n+q\alpha}}\,dxdy.$$

Тем самым $\Psi^{f,2}_{\alpha,I}\leq C\Psi^{f,1}_{\alpha,\widetilde{m}I}$. Теорема доказана.

Замечание 1. (a) Остается открытым вопрос, справедлива ли теорема 2 и для $1<q<2$?

(b) Авторам не известно, как охарактеризовать Q-пространства с использованием разложения Литтлвуда — Пэли.

4. Предвойственное $P^{\alpha,q}_p$ к $Q^{\alpha,q}_p$

Известно, что предвойственное к BMO-пространству — это пространство Харди H^1 (см. [12]) и для пространств Морри $Q^{0,2}_p$ [10] предвойственные к ним описаны в [11]. В этом разделе мы дадим конструктивное описание предвойственного $P^{\alpha,q}_p$ к более общему $Q^{\alpha,q}_p$-пространству ($0<\alpha<1$, $2\leq q<p<+\infty$).

Пусть $q'=\frac{q}{q-1}$. Для $b(x)=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}b(\lambda)\psi_\lambda(x)$ положим

$$\widetilde{T}^{\alpha,q}_{p,b}(I)=|I|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\Big(\sum_{I(\lambda)\subseteq I}2^{q'j(-\alpha+\frac{n}{2})-nj}|b(\lambda)|^{q'}\Big)^{\frac{1}{q'}}.$$

Определение 1. Говорят, что $b(x) = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} b(\lambda)\psi_\lambda(x)$ — *атом*, если существует двоичный куб I такой, что

(i) если $I(\lambda)$ не содержится в I, то $b(\lambda) = 0$,

(ii) $\widetilde{T}^{\alpha;q}_{p,b}(I) < +\infty$.

Определение 2. Положим $P_p^{\alpha,q} = \{f(x) = \sum\limits_{s\in Z} u_s b_s(x), u_s \in l^1$, где $b_s(x)$ атомы$\}$. Обозначим $\|f\| = \inf \|u_s\|_{l^1}$, где точная нижняя граница берется по всевозможным атомам.

Замечание 2. Пусть

$$a(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a(\lambda)\psi_\lambda(x), \quad b(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} b(\lambda)\psi_\lambda(x)$$

— два распределения. По теории всплесков в случае конечной правой части имеет место следующее уравнение:

$$\langle a(x), b(x)\rangle = \sum_{\lambda\in\Lambda} a(\lambda)\bar{b}(\lambda).$$

Используя обозначения из введенных определений и применяя замечание 2, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Если* $0 < \alpha < 1$, $2 \le q < p < +\infty$, *то* $Q_p^{\alpha,q}$ *— двойственное пространство к* $P_p^{\alpha,q}$.

Доказательство. Во-первых, каждый элемент

$$a(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a(\lambda)\psi_\lambda(x)$$

в $Q_p^{\alpha,q}$ определяет линейный функционал на $P_p^{\alpha,q}$.

Действительно, для любого $b(x)$ из $P_p^{\alpha,q}$ существуют наборы двоичных кубов I_s, атомов $b(x)$ на I_s и чисел u_s в l^1 такие, что

$$b(x) = \sum_s u_s b_s(x),$$

где

$$b_s(x) = \sum_{I_{j,k}\subset I_s} b^{\varepsilon,s}_{j,k}\Phi^{\varepsilon}_{j,k}(x).$$

Применяя замечание 2 и неравенство Гёльдера, получим

$$|\langle b_s(x), a(x)\rangle| = \Big|\sum_{I_{j,k}\subset I_s} b^{\varepsilon,s}_{j,k} a^{\varepsilon}_{j,k}\Big| < +\infty.$$

Отсюда

$$|\langle b(x), a(x)\rangle| < +\infty.$$

Тем самым $a(x)$ определяет линейный функционал на $P_p^{\alpha,q}$.

Обратно, всякий линейный функционал на $P_p^{\alpha,q}$ должен определяться элементом из $Q_p^{\alpha,q}$. Иначе говоря, если для распределения

$$f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a(\lambda)\psi_\lambda(x)$$

существует положительная постоянная C такая, что для любого атома

$$b(x) = \sum_{\lambda} b(\lambda)\psi_\lambda(x)$$

в $P_p^{\alpha,q}$ имеет место следующее неравенство:

$$\Big|\sum a(\lambda)\overline{b}(\lambda)\Big| \le C,$$

то $f(x)$ должно определяться элементом из $Q_p^{\alpha,q}$.

Для доказательства этого факта для произвольного двоичного куба I возьмем

$$b_I(x) = \big(T_{p,a}^{\alpha,q}(I)\big)^{-\frac{q}{q'}} |I|^{\frac{2}{q'}(\frac{q}{p}-1)} \sum_{I(\lambda)\subseteq I} 2^{q(\alpha+\frac{n}{2})-n} |a(\lambda)|^{\frac{q}{q'}-1} a(\lambda)\psi_\lambda(x).$$

Тогда $b_I(x)$ должно быть атомом в P_α (для всякого двоичного куба I можно считать, что $T_{a,\alpha}(I) < \infty$, ибо иначе можно рассмотреть распределение

$$f_m(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda, j\le m} a(\lambda)\psi_\lambda(x)).$$

Это может быть доказано следующим образом:

$$\widetilde{T}_{p,b}^{\alpha,q}(I) = |I|^{1-\frac{q}{p}} \sum_{I(\lambda)\subset I} \big(T_{p,a}^{\alpha,q}(I)\big)^{-q} |I|^{-2+\frac{2q}{p}} 2^{qj(\alpha+\frac{n}{2})-nj} |a(\lambda)|^q$$
$$= \big(T_{p,a}^{\alpha,q}(I)\big)^{-q} |I|^{-1+\frac{q}{p}} \sum_{I(\lambda)\subset I} 2^{qj(\alpha+\frac{n}{2})-nj} |a(\lambda)|^q = 1.$$

Кроме того, то, что $f(x)$ — линейный функционал на $P_p^{\alpha,q}$, означает, что

$$T_{p,a}^{\alpha,q}(I) = \big(T_{p,a}^{\alpha,q}(I)\big)^{-\frac{q}{q'}} |I|^{-1+\frac{q}{p}} \sum_{I(\lambda)\subseteq I} 2^{qj(\alpha+\frac{n}{2})-nj} |a(\lambda)|^q = \langle a(x), b_I(x)\rangle \le C.$$

Доказательство закончено.

Замечание 3. Мы получили предвойственное пространство атомарным методом, но нам не известна характеристика норм этих пространств в терминах всплесковых коэффициентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aulaskari R., Xiao J., Zhao R. H.* On subspaces and subsets of $BMOA$ and UBC // Analysis. 1995. V. 15. P. 101–121.
2. *Essén M., Xiao J.* Some results on Q_p spaces, $0 < p < 1$ // J. Reine Angew. Math. 1997. V. 485. P. 173–195.
3. *Wu Z., Xie C.* Decomposition theorems for Q_p spaces // Ark. Mat. 2002. V. 40. P. 383–401.
4. *Essén M., Janson S., Peng L., Xiao J.* Q spaces of several real variables // Indiana Univ. Math. J. 2000. V. 2. P. 575–615.
5. *Janson S.* On the space Q_p and its dyadic counterpart // Proc. Sympos. "Complex Analysis and Differential Equations", June 15–18, 1997. Uppsala (Sweden), 1999. P. 194-205. (Acta Univ. Upsaliensis. C. 64).
6. *Peng L., Yang Q. X.* Predual space for Q-spaces. Math. Sci. of Pekin University in Beijing of China.
7. *Meyer Y.* Ondelettes et opérateur, I, II. Paris: Hermann, 1990–1991.
8. *Yang Q. X.* Wavelets and distribution (in chinese). Beijing: Beijing Sci. Technol. Publ. Company, 2002.

9. *Yang Q. X.* Wavelets and geometric structure for function spaces // Acta Math. Sinica. English series. 2004. V. 20, N 2. P. 357–366.

10. *Morrey C. B., Jr.* On the solutions of quas-linear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1938. V. 43, N 1. P. 126–166.

11. *Калита Е. А.* Дуальные пространства Морри // Докл. АН РАН. 1998. Т. 361, № 4. С. 447–449.

12. *Coifman R., Weiss G.* Extensions of Hardy spaces and their use in analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83, N 4. P. 569–645.

Статья поступила 27 ноября 2002 г.

Лихун Цуй (Lihong Cui)
School of science, Beijing University of Chemical Technology
Beijing, 100029, P. R. China
lhongcui@163.com

Цисян Ян (Qixiang Yang)
Department of mathematics, Wuhan University
Wuhan, 430072, P. R. China
yangqi99@public.wh.hb.cn