Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2005. Том 46, № 1

УДК 517.946

НЕКОРРЕКТНАЯ НЕЛОКАЛЬНАЯ ДВУХТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В. С. Илькив, Б. И. Пташник

Аннотация: Изучены условия существования и единственности псевдорешения из соболевского пространства двухточечной нелокальной краевой задачи для безтипной неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных с непрерывными коэффициентами. Для построения решения задачи используется метод минимизации в соболевских пространствах.

Ключевые слова: уравнения с частными производными, нелокальные условия, некорректная задача, псевдорешения, выпуклая задача минимизации.

Задачи с нелокальными условиями по «временно́й» переменной для уравнений в частных производных, вообще говоря, некорректны по Адамару [1–3] в шкалах соболевских пространств функций, периодических по пространственным переменным. Единственность решения таких задач в ряде случаев зависит от диофантовых свойств их коэффициентов и параметров [1, 2], а разрешимость и гладкость решений связаны с проблемой малых знаменателей [2, 4, 5]. В работах [2, 3, 5–7] с помощью метрического подхода установлены однозначная разрешимость нелокальных задач, а также гладкость их решений для почти всех значений коэффициентов дифференциальных уравнений и условий.

Для фиксированных дифференциальных уравнений и нелокальных условий в случае, когда задача некорректна, мы будем изучать приближенные решения (псевдорешения) рассматриваемой задачи [8, 9]. В настоящей работе, которая является развитием работы [10] на случай систем неоднородных уравнений, изучены условия существования и единственности псевдорешения нелокальной двухточечной краевой задачи в соболевских пространствах.

1. Постановка задачи. В области $Q = (0,T) \times \Omega_p$ переменных $(t,x) \equiv (t, x_1, \dots, x_p)$, где Ω_p — p-мерный тор, рассмотрим систему m дифференциальных уравнений с частными производными n-го порядка:

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \sum_{j=1}^{n} L_j(t,D) \frac{\partial^{n-j} u}{\partial t^{n-j}} + f, \tag{1}$$

где $L_j(t,D) \equiv \sum\limits_{|s|\le j} a_{js}(t) D^s$, $a_{js}(t)$ — непрерывные на $[0,T]$ комплекснозначные матричные коэффициенты размера m; $D^s \equiv D_1^{s_1} \cdots D_p^{s_p}$, $D_j \equiv -i\partial/\partial x_j$, $j = 1, \dots, p$, $|s| = s_1 + \dots + s_p$; $f \equiv f(t,x) \equiv \operatorname{col}(f_1, \dots, f_m)$ — заданная вектор-функция, $u \equiv u(t,x) \equiv \operatorname{col}(u_1, \dots, u_m)$ — искомое решение. Требуется найти решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$lu \equiv \sum_{j=1}^{n} \left(B_{0j}(D) \frac{\partial^{n-j} u}{\partial t^{n-j}} \bigg|_{t=0} + B_{Tj}(D) \frac{\partial^{n-j} u}{\partial t^{n-j}} \bigg|_{t=T} \right) = \varphi, \qquad (2)$$

где

$$B_{0j}(D) \equiv \sum_{|s| \le j} B_{0js} D^s, \quad B_{Tj}(D) \equiv \sum_{|s| \le j} B_{Tjs} D^s;$$

B_{0js}, B_{Tjs} — матричные комплексные коэффициенты размера $nm \times m$, $\varphi \equiv \varphi(x) \equiv \mathrm{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_{nm})$ — заданная вектор-функция. Условия (2) являются нелокальными и связывают значения искомого решения и его производных на нижней и верхней крышках цилиндра Q.

2. Операторы и пространства вектор-функций. Пусть $\overline{H}_q$, $q \in \mathbb{R}$, — соболевское пространство периодических вектор-функций

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \hat{\psi}(k) e^{i(k,x)}$$

со скалярным произведением

$$(\psi_1, \psi_2)_q = (2\pi)^p \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{2q} \hat{\psi}_2^*(k) \hat{\psi}_1(k),$$

где

$$k = (k_1, \dots, k_p), \quad (k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_p x_p, \quad \tilde{k} = \sqrt{1 + k_1^2 + \dots + k_p^2},$$

A^* — матрица, эрмитово сопряженная к матрице A. Пространства $\overline{H}_q$ образуют шкалу пространств; из этих пространств выбирается вектор-функция φ в условиях (2).

Решение $u(t,x)$ нелокальной задачи (1), (2) ищем в пространствах $\overline{H}_q^n$, $q \in \mathbb{R}$, получаемых пополнением множества бесконечно дифференцируемых по переменной t конечных векторных сумм

$$v(t,x) = \sum_{k} \hat{v}(t,k) e^{i(k,x)}$$

по норме, порожденной скалярным произведением

$$(v_1, v_2)_{q,n} = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\partial^j v_1}{\partial t^j}, \frac{\partial^j v_2}{\partial t^j} \right)_{q-j} dt.$$

Пространства $\overline{H}_q^n$ образуют шкалу относительно нижнего индекса $q \in \mathbb{R}$.

Ниже используем такие псевдодифференциальные операторы [3]. Пусть $F(k)$ — комплекснозначная матричная функция переменной $k \in \mathbb{Z}^p$. Под $F(D) \equiv F(D_1, \dots, D_p)$ понимаем оператор, который действует на вектор-функции

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \hat{\psi}(k) e^{i(k,x)} \in \overline{H}_q$$

по правилу

$$F(D)\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} F(k) \hat{\psi}(k) e^{i(k,x)}.$$

Операции над операторами $F(D)$ определяем как соответствующие операции над $F(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$. В частности, сопряженный оператор $F^*(D)$ определяется матричной функцией $F^*(k)$. Если матрицы (числа) $F(k)$ обладают некоторым свойством для всех $k \in \mathbb{Z}^p$, то будем говорить, что это свойство *присуще* оператору $F(D)$. Если хотя бы один из операторов $F_1(D)$ и $F_2(D)$ скалярный, то они коммутируют: $F_1(D)F_2(D) = F_2(D)F_1(D)$; также «коммутируют» оператор $F(D)$ и функция $\psi(x)$ в том смысле, что

$$F(D)\psi(x)=\hat{\psi}(D)\widehat{F}(x),$$

где $\widehat{F}(x) \equiv \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} F(k)e^{i(k,x)}$.

Определим оператор $\widetilde{D}$ последовательностью чисел $\{\tilde{k}\}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, т. е.

$$\widetilde{D}\psi(x) \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}\hat{\psi}(k)e^{i(k,x)}.$$

Тогда для произвольных q, $r \in \mathbb{R}$ имеем

$$\|\psi\|_q^2 = (\psi,\psi)_q = (\widetilde{D}^{2r}\psi,\psi)_{q-r} = \|\widetilde{D}^r\psi\|_{q-r}^2,$$

$$\|u\|_{q,n}^2 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \sum_{j=0}^n \left(\widetilde{D}^{2(r-j)}\frac{\partial^j u}{\partial t^j}, \frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right)_{q-r} dt = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \sum_{j=0}^n \left\|\widetilde{D}^{r-j}\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right\|_{q-r}^2 dt.$$

3. Псевдорешения задачи (1), (2). Оператор из уравнения (1)

$$L = I\frac{\partial^n}{\partial t^n} - \sum_{j=1}^n L_j(t,D)\frac{\partial^{n-j}}{\partial t^{n-j}}$$

непрерывно действует из пространства $\overline{H}_{q+n}^n$ в пространство $\overline{H}_q^0$, а оператор l — из пространства $\overline{H}_{q+n}^n$ в пространство $\overline{H}_{q-1/2}$, т. е. оператор $\mathscr{L}$ задачи (1), (2) непрерывно действует из $\overline{H}_{q+n}^n$ в $\overline{H}_q^0 \times \overline{H}_{q-1/2}$. Однако обратный оператор $\mathscr{L}^{-1} : \overline{H}_q^0 \times \overline{H}_{q-1/2} \to \overline{H}_{q+n}^n$ не является непрерывным, более того, он, вообще говоря, не является непрерывным даже в шкалах указанных пространств. Таким образом, задача (1), (2) является в общем случае некорректной по Адамару, поэтому будем искать ее приближенное решение (псевдорешение).

Псевдорешением задачи (1), (2) назовем функцию $u \in \overline{H}_{q+n}^n$, которая принадлежит шару $\|u - u_0\|_{q+n,n} \leq \varepsilon$ и минимизирует невязку $\|Lu - f\|_{q,0}^2 + \|lu - \varphi\|_{q-1/2}^2$, где $u_0 \in \overline{H}_{q+n}^n$ и $\varepsilon > 0$ заданы и являются априорной информацией о решении задачи (1), (2). Назовем *v-нормальным псевдорешением* ($v \in \overline{H}_{q+n}^n$) задачи (1), (2) такое псевдорешение u_v, для которого

$$\|u_v - v\|_{q+n,n} = \min_u \|u - v\|_{q+n,n},$$

где минимум берется по всем псевдорешениям; если $v = 0$, то соответствующее псевдорешение u_v называем *нормальным псевдорешением*. Если на псевдорешении u невязка $\|Lu-f\|_{q,0}^2+\|lu-\varphi\|_{q-1/2}^2$ равняется нулю, то u будет решением задачи (1), (2).

Пусть u — произвольная функция из пространства $\overline{H}_{q+n}^n$. Тогда $g = Lu$ принадлежит пространству $\overline{H}_q^0$, а $C_j \equiv C_j(x) \equiv \partial^{j-1}u(0,x)/\partial t^{j-1}$ принадлежит пространству $\overline{H}_{q+n-j+1/2}$, $j=1,\dots,n$. Обратно, для $g\in\overline{H}_q^0$ и $C_j\in\overline{H}_{q+n-j+1/2}$, $j=1,\dots,n$, определим $u\in\overline{H}_{q+n}^n$ как решение задачи Коши

$$Lu=g,\quad \frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}(0,x)=C_j(x),\ j=1,\dots,n,$$

с помощью формулы

$$u(t,x)=E(t,D)\left(C(x)+\int\limits_0^t \mathscr{E}_n^{-1}(\tau,D)g(\tau,x)\,d\tau\right),\tag{3}$$

в которой $E(t,D)$ — нормальная фундаментальная система решений системы дифференциальных уравнений (1), т. е. решение матричного дифференциального уравнения

$$L(\partial/\partial t,D)E(t,D)=0$$

такое, что $\mathscr{E}(0,D)=I$, где

$$\mathscr{E}(t,D)=\operatorname{col}\left(E(t,D),\frac{\partial E(t,D)}{\partial t},\dots,\frac{\partial^{n-1}E(t,D)}{\partial t^{n-1}}\right);$$

$\mathscr{E}_n^{-1}(\tau,D)$ — матрица, составленная из последних m столбцов матрицы $\mathscr{E}^{-1}(\tau,D)$; $C\equiv C(x)\equiv\operatorname{col}(C_1,\dots,C_n)$. В сокращенном виде формулу (3) запишем так: $u=F_{u1}C+F_{u2}\,g\equiv F_u\operatorname{col}(C,g)$. Пусть

$$Vu\equiv\operatorname{col}\left(\widetilde{D}^n u,\widetilde{D}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial t},\dots,\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\right)\equiv\begin{pmatrix}Z\\A\end{pmatrix}\operatorname{col}\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\dots,\frac{\partial^{n-1}u}{\partial t^{n-1}}\right)+\begin{pmatrix}0\\g\end{pmatrix},$$

где

$$Z=\operatorname{diag}(\widetilde{D}^n,\dots,\widetilde{D}^2,\widetilde{D}),\quad A\equiv A(t,D)\equiv(L_n(t,D),\dots,L_1(t,D)),$$

$$B_0(D)=\widetilde{D}^{-1/2}(B_{0n}(D),\dots,B_{01}(D)),\quad B_T(D)=\widetilde{D}^{-1/2}(B_{Tn}(D),\dots,B_{T1}(D)).$$

С помощью формулы (3) определим действие на функцию u операторов L, $\widetilde{D}^{-1/2}l$ и V следующими равенствами:

$$\begin{gathered}Lu=F_{L1}C+F_{L2}\,g=F_L\operatorname{col}(C,g),\\ \widetilde{D}^{-1/2}lu=F_{l1}C+F_{l2}\,g=F_l\operatorname{col}(C,g),\\ Vu=F_{V1}C+F_{V2}\,g=F_V\operatorname{col}(C,g),\end{gathered}\tag{4}$$

где $F_{L1}=0$, $F_{L2}=I$, $F_{l1}\equiv F_{l1}(D)\equiv B_0(D)+B_T(D)\mathscr{E}(T,D)$,

$$F_{l2}\,g\equiv(F_{l2}\,g)(x)\equiv B_T(D)\mathscr{E}(T,D)\int\limits_0^T\mathscr{E}_n^{-1}(\tau,D)g(\tau,x)\,d\tau,$$

$$F_{V1}\equiv\begin{pmatrix}Z\\A(t,D)\end{pmatrix}\mathscr{E}(t,D),$$

$$F_{V2}\,g\equiv(F_{V2}\,g)(t,x)\equiv\begin{pmatrix}Z\\A(t,D)\end{pmatrix}\mathscr{E}(t,D)\int\limits_0^t\mathscr{E}_n^{-1}(\tau,D)g(\tau,x)\,d\tau+\begin{pmatrix}0\\g(t,x)\end{pmatrix}.$$

Тогда псевдорешение задачи (1), (2) имеет вид $u^\varepsilon = F_u \operatorname{col}(C_\varepsilon, g_\varepsilon)$, где вектор-функция $\operatorname{col}(C_\varepsilon, g_\varepsilon)$ — решение задачи

$$\|Lu^\varepsilon - f\|^2_{q,0} + \|lu^\varepsilon - \varphi\|^2_{q-1/2} = \inf\left\{ \left\| \begin{pmatrix} F_L \\ F_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ \widetilde{D}^{-1/2}\varphi \end{pmatrix} \right\|^2_{q,0} \right.$$
$$\left. : F_u \begin{pmatrix} C \\ g \end{pmatrix} \in H^n_{q+n}, \quad \left\| F_V \begin{pmatrix} C \\ g \end{pmatrix} - Vu_0 \right\|_{q,0} \le \varepsilon \right\}. \quad (5)$$

4. Решение задачи минимизации (5). Заметим, что задача (5) является выпуклой задачей минимизации в соболевском пространстве и удовлетворяет условию Слейтера [11, с. 97]. Запишем для нее функцию Лагранжа

$$\mathscr{L}_\omega(C, g) = \left\| \begin{pmatrix} F_L \\ F_l \\ \sqrt{\omega} F_V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ \widetilde{D}^{-1/2}\varphi \\ \sqrt{\omega} V u_0 \end{pmatrix} \right\|^2_{q,0} - \omega\varepsilon^2$$
$$= \left\| \begin{pmatrix} F_L \\ F_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ \widetilde{D}^{-1/2}\varphi \end{pmatrix} \right\|^2_{q,0} + \omega \left(\left\| F_V \begin{pmatrix} C \\ g \end{pmatrix} - Vu_0 \right\|^2_{q,0} - \varepsilon^2 \right), \quad (6)$$

где $\omega \ge 0$ — множитель Лагранжа, и найдем седловую точку этой функции [11, с. 95]. Вследствие теоремы Куна — Таккера [11, с. 97] для определения множителя ω и вектор-функции $\operatorname{col}(C, g)$ получаем следующую задачу: найти такие вектор-функцию $\operatorname{col}(C_\varepsilon, g_\varepsilon)$ и действительное число $\omega_\varepsilon \ge 0$, для которых

$$\mathscr{L}_\omega(C_\varepsilon, g_\varepsilon) = \min_{C,\, g} \mathscr{L}_\omega(C, g), \quad (7)$$

$$\omega_\varepsilon\bigl(\|F_V \operatorname{col}(C_\varepsilon, g_\varepsilon) - Vu_0\|^2_{q,0} - \varepsilon^2\bigr) = 0, \quad \|F_V \operatorname{col}(C_\varepsilon, g_\varepsilon) - Vu_0\|^2_{q,0} \le \varepsilon^2. \quad (8)$$

Решим задачу минимизации функции Лагранжа $\mathscr{L}_\omega(C, g)$ относительно вектор-функции $\operatorname{col}(C, g)$ при произвольном фиксированном $\omega > 0$. Легко видеть, что оператор F^*, сопряженный к оператору

$$F = \operatorname{col}(F_L, F_l, \sqrt{\omega} F_V),$$

имеет вид $F^* = \bigl(F_L^*, F_l^*, \sqrt{\omega} F_V^*\bigr)$, где

$$F_L^* = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad F_l^* = \begin{pmatrix} B_0^*(D) + \mathscr{E}^*(T, D) B_T^*(D) \\ T\mathscr{E}_n^{-1*}(t, D)\mathscr{E}^*(T, D) B_T^*(D) \end{pmatrix}, \quad F_V^* = \begin{pmatrix} F_{V1}^* \\ F_{V2}^* \end{pmatrix},$$

$$\bigl(F_{V1}^* U\bigr)(x) = \int\limits_0^T \mathscr{E}^*(\tau, D)(Z, A^*(\tau, D)) U(\tau, x)\, d\tau / T,$$

$$\bigl(F_{V2}^* U\bigr)(t, x) = \mathscr{E}_n^{-1*}(t, D) \int\limits_t^T \mathscr{E}^*(\tau, D)(Z, A^*(\tau, D)) U(\tau, x)\, d\tau + (0, I) U(t, x).$$

Теорема 1. *При $\omega > 0$ функция $\mathscr{L}_\omega(C, g)$ достигает минимального значения $\mathscr{L}_{\omega,\min}$:*

$$\mathscr{L}_{\omega,\min} \le \|Lu_0 - f\|^2_{q,0} + \|lu_0 - \varphi\|^2_{q-1/2} - \omega\varepsilon^2, \quad (9)$$

$$\mathscr{L}_{\omega,\min} \le \|f\|^2_{q,0} + \|\varphi\|^2_{q-1/2} + \omega\bigl(\|u_0\|^2_{q+n,n} - \varepsilon^2\bigr), \quad (10)$$

тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{col}(C,g)(x) \equiv \operatorname{col}(C,g)(\omega,x) = H^{-1}(\omega,D)h(\omega,x), \tag{11}$$

т. е. когда $u_\omega = F_u H^{-1}(\omega,D)h(\omega,x)$, *где*

$$H(\omega,D) = F^*(D)F(D), \quad h(\omega,x) = F^* \operatorname{col}(f, \widetilde{D}^{-1/2}\varphi, \sqrt{\omega}Vu_0). \tag{12}$$

Доказательство. Для оператора F справедливы соотношения

$$\left\| F\begin{pmatrix} C \\ g \end{pmatrix} \right\|_{q,0}^2 = \left(H(\omega,D)\begin{pmatrix} C \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C \\ g \end{pmatrix} \right)_{q,0}$$
$$= \left\| F_L\begin{pmatrix} C \\ g \end{pmatrix} \right\|_{q,0}^2 + \left\| F_l\begin{pmatrix} C \\ g \end{pmatrix} \right\|_{q-1/2}^2 + \omega\left\| F_V\begin{pmatrix} C \\ g \end{pmatrix} \right\|_{q,0}^2,$$

откуда вытекает положительная определенность операторов $H(\omega,D)$ и $F_V^*F_V$, поскольку

$$\left(H(\omega,D)\begin{pmatrix} C \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C \\ g \end{pmatrix} \right)_{q,0} \geq \omega\left(F_V^*F_V\begin{pmatrix} C \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C \\ g \end{pmatrix} \right)_{q,0} = \omega\|u\|_{q+n,n}^2,$$

где $u = L_u \operatorname{col}(C,g)$. Тогда проектор P_F на множество значений оператора F имеет вид $P_F = FH^{-1}(\omega,D)F^*$ и

$$\mathscr{L}_\omega(C,g) = \left\| F\begin{pmatrix} C \\ g \end{pmatrix} - P_F\begin{pmatrix} f \\ \widetilde{D}^{-1/2}\varphi \\ \sqrt{\omega}Vu_0 \end{pmatrix} \right\|_{q,0}^2$$
$$+ \left\| (I-P_F)\begin{pmatrix} f \\ \widetilde{D}^{-1/2}\varphi \\ \sqrt{\omega}Vu_0 \end{pmatrix} \right\|_{q,0}^2 - \omega\varepsilon^2 \geq \left\| (I-P_F)\begin{pmatrix} f \\ \widetilde{D}^{-1/2}\varphi \\ \sqrt{\omega}Vu_0 \end{pmatrix} \right\|_{q,0}^2 - \omega\varepsilon^2. \tag{13}$$

Так как

$$F\operatorname{col}(C,g) - P_F\operatorname{col}(f,\widetilde{D}^{-1/2}\varphi,\sqrt{\varepsilon}Vu_0) = F(\operatorname{col}(C,g) - H^{-1}(\omega,D)h(\omega,x)),$$

равенство в (13) достигается лишь в случае (11).

Для каждой функции $v \in H_{q+n}^n$

$$\mathscr{L}_{\omega,\min} = \|Lu_\omega - f\|_{q,0}^2 + \|lu_\omega - \varphi\|_{q-1/2}^2 + \omega(\|u_\omega - u_0\|_{q+n,n}^2 - \varepsilon^2)$$
$$\leq \|Lv - f\|_{q,0}^2 + \|lv - \varphi\|_{q-1/2}^2 + \omega(\|v - u_0\|_{q+n,n}^2 - \varepsilon^2), \tag{14}$$

откуда при $v = u_0$ вытекает неравенство (9), а при $v = 0$ — неравенство (10), что и требовалось доказать.

Исследуем теперь задачу (8). Для этого изучим поведение функции $\mathscr{U}_\omega \equiv \|u_\omega - u_0\|_{q+n,n}^2$ на полуоси $\omega > 0$.

Теорема 2. *Функция* $\mathscr{U}_\omega$ *строго монотонно убывает на полуоси* $\omega > 0$ *и удовлетворяет неравенству* $0 \leq \mathscr{U}_\omega \leq \varepsilon_0$. *При этом справедливы соотношения*

$$\varepsilon_0^2 = \lim_{\omega\to+0}\mathscr{U}_\omega \equiv \mathscr{U}_{+0} = \|g_0\|_{q+n,n}^2 \leq \infty, \quad \lim_{\omega\to+\infty}\mathscr{U}_\omega \equiv \mathscr{U}_{+\infty} = 0,$$

где $g_0 = F_u F_V^{-1} G^+ \xi_0$, $\xi_0 = \mathrm{col}\big(f - Lu_0, \widetilde{D}^{-1/2}(\varphi - lu_0)\big)$, $G = \mathrm{col}(F_L, F_l) F_V^{-1}$, G^+ — *псевдообратная матрица к матрице* G [11, с. 121; 12, с. 47], *т. е.* $G^+ = \lim\limits_{\omega \to +0} (G^* G + \omega)^{-1} G^*$.

Доказательство. Из равенств

$$F_u F_V^{-1} V u_0 = u_0, \quad F_L F_V^{-1} V u_0 = L u_0, \quad F_l F_V^{-1} V u_0 = \widetilde{D}^{-1/2} l u_0$$

следует, что

$$u_\omega = F_u H^{-1}(\omega, D)\big(F_L^* f + F_l^* \widetilde{D}^{-1/2} \varphi + H(\omega, D) F_V^{-1} V u_0 \\ - \big(F_L^* F_L + F_l^* F_l\big) F_V^{-1} V u_0\big) = F_u H^{-1}(\omega, D)\big(F_L^*, F_l^*\big)\xi_0 + u_0 \\ = F_u F_V^{-1} (G^* G + \omega)^{-1} G^* \xi_0 + u_0.$$

Покажем, что $\mathscr{U}_\omega$ строго монотонно убывает. Действительно,

$$\mathscr{U}_\omega = ((G^* G + \omega)^{-2} G^* \xi_0, G^* \xi_0)_{q,0},$$

и для $\omega_2 > \omega_1 > 0$ матрица

$$(G^* G + \omega_2)^2 - (G^* G + \omega_1)^2 = (\omega_2 - \omega_1)(2 G^* G + \omega_2 + \omega_1)$$

является положительно определенной, поэтому $\mathscr{U}_{\omega_2} < \mathscr{U}_{\omega_1}$. При $\omega \to 0$ функция $\mathscr{U}_\omega$ монотонно возрастает, причем

$$u_\omega - u_0 = F_u F_V^{-1} (G^* G + \omega)^{-1} G^* \xi_0 \to g_0$$

и

$$\mathscr{U}_\omega = \|u_\omega - u_0\|^2_{q+n,n} \to \varepsilon_0^2 = \|G^+ \xi_0\|^2_{q+n,n}.$$

Здесь использовано определение псевдообратной матрицы G^+ к матрице G.

Из экстремальных свойств решения u_ω получаем, что при $\omega \to +\infty$

$$\mathscr{U}_\omega \le \mathscr{L}_\omega(C_\omega, g_\omega)/\omega \le \big(\|Lu_0 - f\|^2_{q,0} + \|lu_0 - \varphi\|^2_{q-1/2}\big)/\omega \to 0.$$

Отсюда следует, что $u_\omega = u_0 + (u_\omega - u_0) \to u_0$ при $\omega \to +\infty$. Теорема доказана.

5. Существование и единственность псевдорешения. В следующей теореме доказано существование псевдорешения задачи (1), (2) и установлены условия его единственности.

Теорема 3. *Если* $\varepsilon \le \varepsilon_0$, *то псевдорешение* u^ε *задачи* (1), (2) *существует, единственно и не является решением этой задачи; при этом*

$$u^\varepsilon = u_0 + F_u F_V^{-1} (G^* G + \omega_\varepsilon)^{-1} G^* \xi_0 = u^+ + \omega_\varepsilon u_{1\varepsilon}, \tag{15}$$

$$\|u^\varepsilon - u_0\|^2_{q+n,n} = \|(G^* G + \omega_\varepsilon)^{-1} G^* \xi_0\|^2_{q,0}, \tag{16}$$

$$\|Lu^\varepsilon - f\|^2_{q,0} + \|lu^\varepsilon - \varphi\|^2_{q-1/2} = \|(I - GG^+)\xi\|^2_{q,0} \\ + \omega_\varepsilon^2 \|(G^* G + \omega_\varepsilon)^{-1}(\xi_0 - (I - GG^+)\xi)\|^2_{q,0} = \|f\|^2_{q,0} \\ + \|\varphi\|^2_{q-1/2} - \|Lu^+\|^2_{q,0} - \|lu^+\|^2_{q-1/2} + \omega_\varepsilon^2 \|Lu_{1\varepsilon}\|^2_{q,0} + \omega_\varepsilon^2 \|lu_{1\varepsilon}\|^2_{q-1/2}, \tag{17}$$

где

$$u^+ \equiv F_u F_V^{-1} G^+ \xi, \; u_{1\varepsilon} \equiv F_u F_V^{-1} \big(G^* G + \omega_\varepsilon\big)^{-1} \big(V u_0 - G^+ \xi\big), \; \xi \equiv \mathrm{col}(f, \widetilde{D}^{-1/2} \varphi),$$

ω_ε — решение алгебраического уравнения $\mathscr{U}_\omega = \varepsilon^2$. Если $\varepsilon > \varepsilon_0$, то задача (1), (2) *имеет псевдорешения вида*

$$u^\varepsilon = u^+ + F_u F_V^{-1}(I - G^+G)Q = u_0 + g_0 + F_u F_V^{-1}(I - G^+G)(Q - Vu_0) \tag{18}$$

для произвольного $Q \in \overline{H}^0_q$ такого, что

$$\|(I - G^+G)(Q - Vu_0)\|^2_{q,0} \le \varepsilon^2 - \varepsilon_0^2,$$

а также существуют единственное u_0-нормальное псевдорешение $u^\varepsilon = u_0 + g_0$ и единственное нормальное псевдорешение, которое при $\alpha > 0$ имеет вид

$$u^\varepsilon = u^+ + \frac{\alpha}{\alpha + \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}} F_u F_V^{-1}(I - G^+G)Vu_0,$$

а при $\alpha \le 0$ — вид $u^\varepsilon = u^+$, где $\alpha \equiv \|(I - G^+G)Vu_0\|_{q,0} - \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2} > 0$, причем для функций (18) *выполняются соотношения*

$$\|u^\varepsilon - u_0\|^2_{q+n,n} = \varepsilon_0^2 + \|(I - G^+G)(Q - Vu_0)\|^2_{q,0}, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\|Lu^\varepsilon - f\|^2_{q,0} + \|lu^\varepsilon - \varphi\|^2_{q-1/2} &= \|(I - GG^+)\xi\|^2_{q,0} \\ &= \|f\|^2_{q,0} + \|\varphi\|^2_{q-1/2} - \|Lu^+\|^2_{q,0} - \|lu^+\|^2_{q-1/2}.\end{aligned} \tag{20}$$

При этом если $\xi = GG^+\xi$, то все псевдорешения u^ε являются решениями задачи (1), (2). *Решение единственно и имеет вид $u^\varepsilon = u^+ = u_0 + g_0$, если существует обратный оператор G^{-1}.*

Доказательство. Если $\varepsilon \le \varepsilon_0$, то согласно теореме 2 уравнение $\mathscr{U}_\omega = \varepsilon^2$ имеет единственное решение ω_ε. Тогда в силу теоремы 1 существует единственное псевдорешение задачи (1), (2), которое имеет следующий вид:

$$u^\varepsilon = u_{\omega_\varepsilon} = F_u H^{-1}(\omega_\varepsilon, D) h(\omega_\varepsilon, x) = F_u F_V^{-1}(G^*G + \omega_\varepsilon)^{-1}(G^*\xi + \omega_\varepsilon V u_0). \tag{21}$$

Из (21) и равенства

$$G^*\xi + \omega_\varepsilon V u_0 = (G^*G + \omega_\varepsilon)G^+\xi + \omega_\varepsilon(Vu_0 - G^+\xi)$$

следует второе из равенств формулы (15), а именно

$$u^\varepsilon = F_u F_V^{-1} G^+\xi + \omega_\varepsilon F_u F_V^{-1}(G^*G + \omega_\varepsilon)^{-1}(Vu_0 - G^+\xi) = u^+ + \omega_\varepsilon u_{1\varepsilon}.$$

Из первого равенства (15), которое установлено в теореме 2, вытекает, что $u^\varepsilon - u_0 = F_u F_V^{-1}(G^*G + \omega_\varepsilon)^{-1} G^*\xi_0$; отсюда получаем формулу (16).

На основании (15) и тождества $G(G^*G + \omega_\varepsilon)^{-1} = (GG^* + \omega_\varepsilon)^{-1}G$ получаем формулу

$$\begin{aligned}\|Lu^\varepsilon - f\|^2_{q,0} + \|lu^\varepsilon - \varphi\|^2_{q-1/2} &= \|GG^+\xi + G(G^*G + \omega_\varepsilon)^{-1}(Vu_0 - G^+\xi) - \xi\|^2_{q,0} \\ &= \|\omega_\varepsilon(G^*G + \omega_\varepsilon)^{-1}G(Vu_0 - G^+\xi)\|^2_{q,0} + \|(I - GG^+)\xi\|^2_{q,0},\end{aligned}$$

которая легко преобразуется в формулу (17).

Если предположить, что псевдорешение (15) является решением задачи (1), (2), т. е. что $Lu^\varepsilon = f$ и $lu^\varepsilon = \varphi$, то из (17) следует, что $(I - GG^+)\xi = 0$ и $\xi_0 - (I - GG^+)\xi = 0$. Это возможно лишь при $\xi_0 = 0$, откуда $0 = \|G^+\xi_0\|^2_{q,0} = \varepsilon_0^2 < \varepsilon^2$, что противоречит условию $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$.

Если $\varepsilon > \varepsilon_0$, то $\mathscr{U}_\omega < \varepsilon^2$ и равенства (8) выполняются только при $\omega = 0$. Рассмотрим задачу минимизации функции Лагранжа $\mathscr{L}_\omega(C, g)$ при $\omega = 0$. Функция

$$\mathscr{L}_0(C,g) = \|GF_V \operatorname{col}(C,g) - \xi\|^2_{q,0} \\ = \left\|GF_V\big(\operatorname{col}(C,g) - F_V^{-1}G^+\xi\big)\right\|^2_{q,0} + \|(I - GG^+)\xi\|^2_{q,0}$$

достигает минимального значения $\|(I - GG^+)\xi\|^2_{q,0}$ при условии

$$GF_V\big(\operatorname{col}(C,g) - F_V^{-1}G^+\xi\big) = 0,$$

из которого следует, что

$$\operatorname{col}(C,g) = F_V^{-1}(G^+\xi + (I - G^+G)Q),$$

где $Q \in \overline{H}{}^0_q$ — произвольная вектор-функция. Отсюда получаем, что функции

$$u^\varepsilon = F_uF_V^{-1}G^+\xi + F_uF_V^{-1}(I - G^+G)Q = u^+ + F_uF_V^{-1}(I - G^+G)Q \tag{22}$$

являются псевдорешениями задачи (1), (2), если функция Q удовлетворяет условию

$$\|u^\varepsilon - u_0\|^2_{q+n,n} = \varepsilon_0^2 + \|(I - G^+G)(Q - Vu_0)\|^2_{q,0} \le \varepsilon^2.$$

Вычитая и прибавляя в правой части равенства (22) функцию

$$u_0 = F_uF_V^{-1}G^+GVu_0 + F_uF_V^{-1}(I - G^+G)Vu_0,$$

получим вторую часть формулы (18), т. е.

$$u^\varepsilon = u_0 + g_0 + F_uF_V^{-1}(I - G^+G)(Q - Vu_0),$$

где функция g_0 определена в теореме 2. Из неравенства

$$\|u^\varepsilon - u_0\|^2_{q+n,n} = \|g_0\|^2_{q+n,n} + \|(I - G^+G)(Q - Vu_0)\|^2_{q,0} \ge \varepsilon_0^2$$

следует, что функция $u^\varepsilon = u_0 + g_0$ является u_0-нормальным псевдорешением задачи (1), (2).

Для построения нормального решения вычислим минимальное значение нормы $\|u^\varepsilon\|^2_{q+n,n}$ при условии $\|u^\varepsilon - u_0\|_{q+n,n} \le \varepsilon$. Если обозначить $Q_1 \equiv (I - G^+G)Q$, то из (21) получим $u^\varepsilon = F_uF_V^{-1}(G^+\xi + Q_1)$. Составим функцию Лагранжа

$$\|u^\varepsilon\|^2_{q+n,n} + \Omega(\|u^\varepsilon - u_0\|^2_{q+n,n} - \varepsilon^2) = \|G^+\xi\|^2_{q,0} + \|Q_1\|^2_{q,0} \\ + \Omega\big(\|Q_1 - (I - G^+G)Vu_0\|^2_{q,0} + \varepsilon_0^2 - \varepsilon^2\big),$$

где $\Omega \ge 0$ — множитель Лагранжа. Выделим в правой части последней формулы полный квадрат:

$$\|u^\varepsilon\|^2_{q+n,n} + \Omega(\|u^\varepsilon - u_0\|^2_{q+n,n} - \varepsilon^2) = (1+\Omega)\left\|Q_1 - \frac{\Omega}{1+\Omega}(I - G^+G)Vu_0\right\|^2_{q,0} \\ + \frac{\Omega}{(1+\Omega)^2}\|(I - G^+G)Vu_0\|^2_{q,0} + \|G^+\xi\|^2_{q,0} + \Omega\big(\varepsilon_0^2 - \varepsilon^2\big) \\ \ge \frac{\Omega}{(1+\Omega)^2}\|(I - G^+G)Vu_0\|^2_{q,0} + \|G^+\xi\|^2_{q,0} + \Omega\big(\varepsilon_0^2 - \varepsilon^2\big).$$

Тогда при единственном значении $Q_1 = \frac{\Omega}{1+\Omega}(I - G^+G)Vu_0$ последнее неравенство преобразуется в равенство; при этом

$$u^\varepsilon = u_0 + g_0 - \frac{1}{1+\Omega}F_uF_V^{-1}(I - G^+G)Vu_0,$$

$$\|u^\varepsilon - u_0\|^2_{q+n,n} = \varepsilon_0^2 + \frac{1}{(1+\Omega)^2}\|(I - G^+G)Vu_0\|^2_{q,0}.$$

Если $\alpha > 0$, то $\Omega \equiv \Omega_\varepsilon = \alpha/\sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}$ является решением алгебраического уравнения

$$\varepsilon_0^2 + \frac{1}{(1+\Omega)^2}\|(I - G^+G)Vu_0\|^2_{q,0} = \varepsilon^2,$$

а нормальное псевдорешение задачи (1), (2) определяется значением

$$Q_{1\varepsilon} = \frac{\alpha}{\alpha + \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}}(I - G^+G)Vu_0$$

и представляется формулой

$$u^\varepsilon = u^+ + \frac{\alpha}{\alpha + \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}}F_uF_V^{-1}(I - G^+G)Vu_0.$$

При $\alpha \le 0$ нормальное псевдорешение $u^\varepsilon = u^+$ соответствует нулевому множителю Лагранжа Ω.

Для функций (18) справедливо равенство

$$\|Lu^\varepsilon - f\|^2_{q,0} + \|lu^\varepsilon - \varphi\|^2_{q-1/2} = \|GG^+\xi - \xi\|^2_{q,0} = \|(I - GG^+)\xi\|^2_{q,0}; \tag{23}$$

из (23) следуют формула (20) и условие $\xi = GG^+\xi$ того, что псевдорешение является решением задачи (1), (2). Наконец, если существует оператор G^{-1}, то слагаемые $F_uF_V^{-1}(I - G^+G)Q$ и $F_uF_V^{-1}(I - G^+G)(Q - Vu_0)$ в формуле (18) обращаются в нуль, а значит, псевдорешение

$$u^\varepsilon = u^+ = u_0 + g_0 = F_uF_V^{-1}G^{-1}\xi = F_u(\mathrm{col}(F_L, F_l))^{-1}\xi$$

будет единственным решением задачи (1), (2), так как $\xi = GG^{-1}\xi$ для всякого ξ. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980.
2. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наук. думка, 1984.
3. *Илькив В. С.* Возмущения нелокальной задачи для дифференциальных уравнений с псевдодифференциальными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 11. С. 1962–1971.
4. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 4. С. 637–645.
5. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для нормальних анізотропних систем із частинними похідними і сталими коефіцієнтами // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 84–95.
6. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для систем із частинними похідними в анізотропних просторах // Нелинейные граничные задачи. 2001. Вип. 11. С. 57–64.
7. *Поліщук В. М.* Задача з нелокальними крайовими умовами для гіперболічних систем диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1979. № 3. С. 171–175.

8. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.

9. *Морозов В. А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.

10. *Ільків В. С.* Дослідження нелокальної крайової задачі для рівнянь з частинними похідними за допомогою методу мінімізації в соболєвських просторах // Мат. студії. 1999. Т. 11, № 2. С. 167–176.

11. *Пытьев Ю. П.* Математические методы интерпретации эксперимента. М.: Высш. шк., 1989.

12. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.

Статья поступила 4 октября 2003 г.

Илькив Владимир Степанович
Национальный университет «Львовская политехника»,
кафедра вычислительной математики и программирования,
ул. С. Бандеры, 12, Львов 79013, Украина

Пташник Богдан Иосифович
Институт прикладных проблем механики и математики НАН Украины
ул. Научная, 3б, Львов 79053, Украина
ptashnyk@lms.lviv.ua