Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2004. Том 45, № 3

УДК 517.956

ИНВАРИАНТЫ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

О. В. Капцов

Аннотация: Вводится понятие инварианта характеристик для системы уравнений в частных производных первого порядка. Доказывается, что существование инвариантов связано с пассивностью некоторых систем. Описываются способы построения новых инвариантов из известных. Приводится схема применения инвариантов к редукции и интегрированию систем уравнений с частными производными. В качестве приложения рассматриваются уравнения газовой динамики.

Ключевые слова: характеристики, инварианты, метод Дарбу.

§ 1. Введение

Хорошо известно, что интегралы характеристик играют главную роль при решении одного уравнения с частными производными первого порядка. Для решения нелинейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными Монжем и Ампером был разработан метод промежуточного интеграла [1]. Функции, задающие промежуточные интегралы, остаются постоянными вдоль соответствующих характеристик. В 1870 г. Дарбу предложил метод интегрирования [2], который включал подход Монжа и Ампера в качестве частного случая. Подробное описание этого метода с большим числом примеров имеется в книге [3], другое изложение можно найти в монографии [4]. Несмотря на то, что основную роль в развитии этого метода играли французские математики, российскими и советскими исследователями также были получены интересные результаты [5, 6]. В последнее время вновь появились публикации, посвященные данному методу [7–10].

Основные приложения метод Дарбу нашел при интегрировании уравнений второго порядка

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \tag{1.1}$$

Функция I, зависящая от x, y, u и производных функции u, называется *инвариантом характеристик*, если равенство

$$d(I) = 0$$

выполняется в силу (1.1) и системы

$$dy = m dx, \quad du = u_x dx + u_y dy,$$

$$du_x = u_{xx} dx + u_{xy} dy, \quad du_y = u_{xy} dx + u_{yy} dy, \dots,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 04–01–00130, 04–01–00209).

где m — корень уравнения

$$F_{u_{xx}}m^2 - F_{u_{xy}}m + F_{u_{yy}} = 0.$$

Если I и J — два инварианта характеристик, то соотношение $J = f(I)$ называется *промежуточным интегралом* уравнения (1.1).

В настоящей работе рассматриваются системы уравнений в частных производных первого порядка с двумя и n независимыми переменными. В § 2 вводится понятие инварианта характеристик для эволюционных систем с двумя независимыми переменными. Доказывается, что существование инвариантов связано с формальной пассивностью некоторых систем. Описываются способы построения новых инвариантов из уже известных. Приводится схема применения инвариантов к редукции и интегрированию систем уравнений с частными производными. В § 3 описанная выше схема применяется к одномерным нестационарным уравнениям газовой динамики. Там же приводятся инварианты нулевого и первого порядков для двумерных стационарных уравнений газовой динамики с произвольным уравнением состояния. В § 4 введены инварианты характеристик для невырожденных систем уравнений с двумя независимыми переменными. Кроме того, доказано, что инварианты должны удовлетворять «уравнениям характеристик», в которых частные производные заменяются полными. Заключительный параграф посвящен инвариантам характеристик для многомерных систем первого порядка. В нем даны необходимые определения и доказана теорема, устанавливающая связь между существованием инвариантов и формальной пассивностью специальных систем.

Все рассматриваемые в работе функции предполагаются дифференцируемыми необходимое число раз.

§ 2. Системы уравнений с двумя независимыми переменными

Пусть имеется система m уравнений с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными t, x:

$$u_t + F(t, x, u, u_x) = 0, \tag{2.1}$$

где $u = (u^1, \dots, u^m)$, $u_t = \left(u_t^1, \dots, u_t^m\right)$, $u_x = \left(u_x^1, \dots, u_x^m\right)$, $F = (F^1, \dots, F^m)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение характеристик

$$\frac{dx}{dt} = \lambda, \tag{2.2}$$

отвечающее корню уравнения

$$\det\left(\frac{\partial(F)}{\partial(u_x)} - \lambda E\right) = 0, \tag{2.3}$$

здесь $\frac{\partial(F)}{\partial(u_x)} = \frac{\partial(F^1,\dots,F^m)}{\partial(u_x^1,\dots,u_x^m)}$ — матрица Якоби, E — единичная матрица. Тогда оператор

$$L = D_t + \lambda D_x \tag{2.4}$$

называется оператором дифференцирования вдоль характеристики, где D_t, D_x — полные производные по t и x.

Как известно [11, 12], инвариант Римана I системы (2.1) удовлетворяет соотношению $L(I) = 0$ в силу (2.1). Обобщим теперь понятие инвариантов Римана. Сначала введем еще одно обозначение. Если $u^i_k = \frac{\partial^k u^i}{\partial x^k}$ — частная производная порядка k, то $u_k = \left(u^1_k, \ldots, u^m_k\right)$ будет обозначать вектор, составленный из таких производных.

Определение. Пусть задана система (2.1) и λ — корень уравнения (2.3). *Инвариантом порядка n дифференциального уравнения характеристик* (2.2) будем называть функцию $I(t, x, u, u_1, \ldots, u_n)$, удовлетворяющую соотношению

$$L(I)|_{[S]} = 0. \tag{2.5}$$

Здесь и во всем этом параграфе $[S]$ означает систему (2.1) и ее дифференциальные следствия, L — оператор (2.4). В дальнейшем для краткости будем говорить об инвариантах характеристик.

Несложно видеть, что нахождение инвариантов характеристик сводится к решению системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка относительно функции I. Эквивалентное определение инвариантов характеристик в терминах дифференциальных форм дано в книге [3].

Утверждение 1. *Пусть $I_1, \ldots, I_k$ — инварианты дифференциального уравнения характеристик* (2.2). *Тогда функция $f(I_1, \ldots, I_k)$ тоже является инвариантом характеристик.*

Доказательство сразу получается из следующих равенств:

$$L(f) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial I_i} D_t(I_i) + \lambda \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial I_i} D_x(I_i) = \frac{\partial f}{\partial I_1} L(I_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial I_k} L(I_k).$$

Известными инвариантами характеристик в гидродинамике являются энтропия, функция Бернулли, инвариант Эртеля [11, 13]. Инварианты характеристик можно использовать для построения редукций и решений систем (2.1).

Как показано в [3] для уравнений второго порядка, существование инварианта тесно связано с инволютивностью системы, образованной исходным уравнением и дополнительным уравнением $I = c$, $c \in \mathbb{R}$. Для того чтобы выделить алгебраический аспект такой связи для систем (2.1), введем понятие пассивной системы.

Рассмотрим кольцо K, состоящее из функций, зависящих от $t, x, u, u_1, \ldots, u_n$ ($n \geq 1$). Обозначим систему (2.1) и ее дифференциальные следствия по переменной x через $[S]_x$, а $D_t h|_{[S]}$ — через $D_1 h$, где $h \in K$. Пусть M — модуль над K, порожденный элементами h, $D_x h$, $D_1 h$. Если M порождается только элементами h и $D_x h$, то будем говорить, что система, состоящая из уравнений (2.1) и $h = 0$, *формально пассивна.*

Рассмотрим теперь уравнение

$$h + c = 0, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Теорема 1. *Система* (2.1), (2.6) *формально пассивна при произвольном $c \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда h — инвариант характеристик.*

Доказательство. Пусть система (2.1), (2.6) формально пассивна, тогда должно выполняться равенство

$$D_1 h = \alpha D_x h + (h + c)\beta, \quad \alpha, \beta \in K. \tag{2.7}$$

Нетрудно видеть, что

$$D_x h \simeq \sum_{i=1}^{m} u^i_{n+1} h_{u^i_n}, \quad D_1 h \simeq -\sum_{1\le i,j\le m} u^j_{n+1} F^i_{u^j_1} h_{u^i_n}. \tag{2.8}$$

Здесь символ $\simeq$ означает, что разность между левой и правой частями не содержит производных порядка выше n. Из соотношений (2.7), (2.8) получаем равенство

$$-\sum_{1\le i,j\le m} u^j_{n+1} F^i_{u^j_1} h_{u^i_n} = \alpha \sum_{i=1}^{m} u^i_{n+1} h_{u^i_n}. \tag{2.9}$$

Коэффициенты при всех производных порядка $n+1$ в (2.9) должны совпадать. Это дает m уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} \bigl(F^i_{u^j_1} + \delta^i_j \alpha\bigr) h_{u^i_n} = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

где δ^i_j — символ Кронекера. Эти уравнения удобно представить в матричном виде

$$\left(\frac{\partial(F)}{\partial(u_x)} + \alpha E\right)(h_{u^1_n}, \dots, h_{u^m_n})^* = 0,$$

здесь символ $*$ означает транспонирование. Поскольку вектор $(h_{u^1_n}, \dots, h_{u^m_n})$ не равен нулю, то α должна быть корнем уравнения

$$\det\left(\frac{\partial(F)}{\partial(u_x)} + \alpha E\right) = 0.$$

Записывая (2.7) в виде

$$D_1 h - \alpha D_x h = (h + c)\beta$$

и замечая, что левая часть не зависит от β, приходим к выводу о том, что $\beta = 0$. Обозначая $\lambda = -\alpha$, получаем (2.3). Обратное утверждение очевидно.

Каждый инвариант I дифференциального уравнения характеристик (2.2) порождает согласно [14] инвариантное многообразие системы (2.1), т. е. выполняется равенство

$$v_F(I)|_{[I]_x} = 0, \tag{2.10}$$

где $[I]_x$ обозначает уравнение $I = 0$ и его дифференциальные следствия по x, а v_F — векторное поле:

$$v_F = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} F^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,k} D^k_x(F^i) \frac{\partial}{\partial u^i_k}.$$

Действительно, поскольку I удовлетворяет соотношению (2.5), значит, выполнено равенство

$$D_t I|_{[S]}|_{[I]_x} = 0,$$

которое равносильно условию инвариантности (2.10). Заметим, что множество

$$I + c = 0$$

также является инвариантным многообразием системы (2.1) для любого c.

При выполнении некоторых условий инвариантные многообразия, рассматриваемые одновременно с (2.1), приводят к системам, имеющим локальные решения. Рассмотрим, например, гиперболическую систему (2.1), для которой существуют m различных вещественных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, удовлетворяющих (2.3). Допустим, что для каждого λ_i найдется один или два независимых инварианта I_i, J_i. С помощью этих инвариантов составим инвариантное многообразие

$$f_1(I_1, J_1) = 0, \ldots, f_m(I_m, J_m) = 0, \tag{2.11}$$

где f_i — произвольные функции. Предположим, что (2.11) можно разрешить относительно старших производных

$$u^i_{n_i} = g^i(t, x, u_1, \ldots, u_{n_i-1}), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2.12}$$

Тогда, как показано в [14], система (2.1), (2.12) имеет локальное решение, удовлетворяющее начальным данным

$$u^i_{k_i}(t_0, x_0) = c^i_{k_i}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $c^i_{k_i} \in \mathbb{R}$, $0 \le k_i < n_i$.

Приведенное рассуждение приводит к следующей схеме применения инвариантов для построения редукций и решений гиперболических систем (2.1).

1. Пусть для каждого λ_i, удовлетворяющего (2.3), найдутся один или два инварианта I_i, J_i. Тогда составляем инвариантное многообразие (2.11) и проверяем, что его можно записать в нормальной форме (2.12).

2. Находим общее решение системы (2.12), представляющей собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной x (t входит как параметр).

3. Подставляем найденное общее решение в исходную систему (2.1) и получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной t. Решая эту систему, получаем точное решение уравнений (2.1).

Таким образом, процесс построения решений системы (2.1) сводится к решению двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений по t и x соответственно. В книге Гурса [3] имеются многочисленные примеры использования инвариантов для интегрирования уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Когда для каждых λ_1, λ_2 существуют по два инварианта, то в особых случаях удается найти общее решение уравнения второго порядка. В заключение данного параграфа укажем способ построения инвариантов из двух известных. Фактически этот способ имеется в [3]. Здесь же приводится новое доказательство.

Лемма 1. *Если I и J — инварианты дифференциального уравнения характеристик* (2.2), *то $h = D_x(J)/D_x(I)$ тоже инвариант.*

Доказательство. По условию I, J удовлетворяют соотношениям

$$D_t(I) + \lambda D_x(I)|_{[S]} = 0, \quad D_t(J) + \lambda D_x(J)|_{[S]} = 0. \tag{2.13}$$

Покажем, что h тоже удовлетворяет соотношению (2.13). Поскольку верно равенство

$$D_t(h) + \lambda D_x(h) = \frac{D_x(I)\big[D_t D_x(J) + \lambda D_x^2(J)\big] - D_x(J)\big[D_t D_x(I) + \lambda D_x^2(I)\big]}{D_x(I)^2},$$

нужно проверить, что числитель последней дроби равен нулю на множестве [S]. Дифференцируя (2.13) по x, имеем

$$D_t(D_x(I)) + \lambda D_x^2(I) + D_x(\lambda)D_x(I)|_{[S]} = 0, \tag{2.14}$$

$$D_t(D_x(J)) + \lambda D_x^2(J) + D_x(\lambda)D_x(J)|_{[S]} = 0. \tag{2.15}$$

Умножая (2.14) на $D_x(J)$, а (2.15) на $D_x(I)$ и находя разность этих выражений, получим требуемый числитель.

Однако новые инварианты можно получать несколько иным способом с помощью операторов инвариантного дифференцирования.

Определение. Дифференциальный оператор

$$\mathscr{D} = \mu D_x,$$

где μ — функция, которая может зависеть от t, x, u, u_1, называется *оператором инвариантного дифференцирования*, если он переводит любой инвариант дифференциального уравнения характеристик (2.2) в инвариант того же уравнения.

§ 3. Примеры

Рассмотрим одномерную нестационарную систему уравнений газовой динамики:

$$u_t + uu_x + p_x/\rho = 0, \quad \rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad s_t + us_x = 0, \tag{3.1}$$

где u, ρ, p, s — скорость, плотность, давление и энтропия. При произвольном уравнении состояния, как хорошо известно [11], соответствующее уравнение (2.3) имеет три решения $\lambda_1 = u$, $\lambda_2 = u + c$, $\lambda_3 = u - c$, где $c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$ — скорость звука.

Уравнение для инвариантов (2.5) при $\lambda_1 = u$ имеет вид

$$D_t h + uD_x h|_{[S]} = 0, \tag{3.2}$$

где $[S]$ — система (3.1) и ее дифференциальные следствия. Решая (3.2), можно показать, что существуют только два функционально независимых инварианта нулевого и первого порядков:

$$I_1 = s, \quad I_2 = s_x/\rho.$$

Другие инварианты находятся по рекуррентной формуле

$$I_{k+1} = \frac{1}{\rho} D_x(I_k).$$

Оператор $\mathscr{D} = \frac{1}{\rho} D_x$ является оператором инвариантного дифференцирования в силу леммы 1 и того, что s_x/ρ является инвариантом.

Найдем теперь решения уравнения (2.5) (при $\lambda = \lambda_2$)

$$D_t h + (u + c)D_x h|_{[S]} = 0. \tag{3.3}$$

Для этого удобно перейти от системы (3.1) к равносильной:

$$u_t + uu_x + p_x/\rho = 0, \quad \rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad p_t + up_x + \rho c^2 u_x = 0. \tag{3.4}$$

Найдем сначала решения уравнения (3.3), которые могут зависеть только от t, x, u, ρ, p. В этом случае левая часть уравнения (3.3) является многочленом первой степени относительно u_x, ρ_x, p_x. Собирая подобные члены в (3.3) при этих переменных, приходим к системе

$$h_\rho = 0, \quad h_u = \rho c h_p, \quad h_t + (u + c)h_x = 0. \tag{3.5}$$

Из первого и второго уравнений системы (3.5) следует, что непостоянное решение h существует только тогда, когда

$$c = g(p)/\rho, \tag{3.6}$$

где g — произвольная функция от p. Тогда согласно третьему уравнению h не зависит от t, x. Из второго уравнения системы (3.5) получаем, что h является произвольной функцией от

$$I = u + \int \frac{dp}{g(p)}.$$

Таким же образом показывается, что корню $\lambda_3 = u - c$ соответствует инвариант Римана

$$I = u - \int \frac{dp}{g(p)}.$$

Следовательно, справедливо следующее

Утверждение 2. *Система одномерных уравнений газовой динамики* (3.4) *обладает тремя инвариантами Римана тогда и только тогда, когда скорость звука задается формулой* (3.6).

Замечание. Если скорость звука задается формулой (3.6), то соответствующее уравнение состояния имеет вид

$$V = G(p) + A(s),$$

где $V = 1/\rho$ — удельный объем, A — произвольная функция от энтропии, $G'(p) = -1/g^2(p)$.

Будем теперь искать инварианты первого порядка, определенные как решения уравнения (3.3), т. е. ищется функция h, которая может зависеть от t, x, u, ρ, p и обязана зависеть хотя бы от одной из производных u_x, ρ_x, p_x. В этом случае левая часть (3.3) является многочленом первой степени от u_{xx}, ρ_{xx}, p_{xx}. Собирая подобные члены при этих переменных, приходим к двум уравнениям (третье является их следствием)

$$h_{\rho_x} = 0, \quad h_{u_x} = \rho c h_{p_x}. \tag{3.7}$$

Оставшиеся слагаемые в левой части в силу первого уравнения системы (3.7) можно рассматривать как многочлен первой степени относительно ρ_x. Это дает еще два уравнения

$$h_{u_x} p_x/\rho^2 - u_x c(c + 2\rho c_\rho)h_{p_x} + c h_\rho = 0, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} h_t - (u u_x + p_x/\rho)h_u - \rho u_x h_\rho - (u p_x + \rho c^2 u_x)h_p - u_x^2 h_{u_x} \\ - (u_x p_x + 2\rho c c_p u_x p_x)h_{p_x} + (u + c)(h_x + u_x h_u + p_x h_p) = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Приводя систему уравнений первого порядка (3.7)–(3.9) в инволюцию, непосредственно или с помощью стандартных программ пакета Maple можно показать, что эти уравнения имеют решения, зависящие от первых производных только тогда, когда скорость звука задается выражением

$$c = \frac{(a+bp)^{2/3}}{\rho}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

В этом случае имеется следующее решение уравнения (3.3):

$$I_1^+ = \frac{-btp_x - bt(a+bp)^{2/3}u_x + 3(a+bp)^{1/3}\rho}{p_x + (a+bp)^{2/3}u_x}. \tag{3.11}$$

Если искать решение уравнения (2.5) при $\lambda = u - c$, зависящее от первых производных, то оно существует только при условии (3.10). Соответствующий инвариант задается формулой

$$I_1^- = \frac{-btp_x + bt(a+bp)^{2/3}u_x - 3(a+bp)^{1/3}\rho}{p_x - (a+bp)^{2/3}u_x}. \tag{3.12}$$

Утверждение 3. *Система одномерных уравнений газовой динамики* (3.4) *обладает тремя инвариантами характеристик первого порядка, если скорость звука задается формулой* (3.10). *Соответствующие инварианты имеют вид* s_x/ρ, (3.11), (3.12).

Если $a = 1$, $b = 0$ в формуле (3.10), то инварианты нулевого порядка имеют вид

$$I_1 = p + \frac{1}{\rho}, \quad I_2 = p + u, \quad I_2 = u - p, \tag{3.13}$$

а инварианты первого порядка получаются из инвариантов (3.13) по формуле

$$J_i = \frac{1}{\rho} D_x(I_i). \tag{3.14}$$

Применим описанную выше схему для редукции системы уравнений газовой динамики, предполагая, что скорость звука равна $\frac{1}{\rho}$. В этом случае инвариантные многообразия системы (3.4), построенные по инвариантам характеристик (3.13), (3.14), можно записать следующим образом:

$$D_x(I_i) = \rho F_i(I_i), \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.15}$$

где F_i — произвольные функции. Уравнения (3.15) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для функций u, ρ, p по переменной x. Чтобы получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной t, нужно все производные u_x, ρ_x, p_x в (3.4) выразить с помощью уравнений (3.15). Эти системы (по переменным t и x) проще записываются в инвариантах Римана:

$$\frac{dI_i}{dx} = \rho F_i(I_i), \tag{3.16}$$

$$\frac{dI_i}{dt} = -\lambda_i \rho F_i(I_i), \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.17}$$

Величины ρ, λ_i выражаются формулами

$$\rho = \frac{2}{2I_1 + I_3 - I_2}, \quad \lambda_1 = \frac{I_3 + I_2}{2}, \quad \lambda_2 = I_3 + I_1, \quad \lambda_3 = I_2 - I_1. \tag{3.18}$$

Таким образом, в данном специальном случае система уравнений газовой динамики редуцирована к системе шести уравнений (3.16), (3.17).

Эта система может быть сведена к двум уравнениям. Для этого введем функции

$$G_i = \int \frac{dI_i}{F_i(I_i)}.$$

Тогда системы (3.16), (3.17) можно переписать так:

$$\frac{dG_i}{dx} = \rho, \quad \frac{dG_i}{dt} = -\lambda_i \rho, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.19}$$

Первая из систем (3.19) имеет два первых интеграла

$$G_1 - G_2 = s_1(t), \quad G_3 - G_1 = s_2(t).$$

Выражая G_1, G_2 и подставляя во вторую систему (3.19), получаем уравнения

$$s_1' = \rho c = 1, \quad s_2' = -1.$$

Таким образом, находим s_1, s_2:

$$s_1 = t + k_1, \quad s_2 = -t + k_2, \quad k_i \in \mathbb{R}.$$

В результате система (3.19) сводится к двум уравнениям

$$\frac{dG_1}{dx} = \rho, \quad \frac{dG_1}{dt} = -u\rho.$$

Используя (3.18), определение G_1 и два первых интеграла, последние уравнения можно записать в виде

$$\frac{dI_1}{dx} = \frac{2}{(2I_1 + I_3 - I_2)G_1'(I_1)}, \quad \frac{dI_1}{dt} = -\frac{I_2 + I_3}{(2I_1 + I_3 - I_2)G_1'(I_1)}, \tag{3.20}$$

где $I_2 = Q_2(G_1(I_1) - t)$, $I_3 = Q_3(G_1(I_1) + t)$, Q_1, Q_2 — обратные функции для G_2 и G_3. Правые части редуцированной системы (3.20) зависят от трех произвольных функций. Задавая вид этих функций и интегрируя уравнения (3.20), можно находить решения уравнений газовой динамики.

Остановимся кратко на двумерных стационарных уравнениях газовой динамики:

$$\begin{gathered} (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0, \quad \rho(uu_x + vu_y) + p_x = 0, \\ \rho(uv_x + vv_y) + p_y = 0, \quad us_x + vs_y = 0 \end{gathered} \tag{3.21}$$

с произвольным уравнением состояния $p = p(\rho, s)$.

Оператор дифференцирования вдоль линии тока

$$L = uD_x + vD_y$$

является оператором дифференцирования вдоль характеристики. Инвариантами характеристик нулевого порядка для этого оператора будут энтропия s и функция Бернулли

$$I_B = \frac{u^2 + v^2}{2} + \int \frac{1}{\rho} p_\rho' d\rho.$$

Из леммы 1 следует, что

$$J_0 = \frac{D_y(I_B)}{s_y}$$

— инвариант. Можно показать, что инвариантами характеристик первого порядка являются только функции J_0 и $J_1 = s_y/u\rho$. Оператор

$$\mathscr{D} = \frac{1}{u\rho} D_y$$

является оператором инвариантного дифференцирования. Действительно, в силу леммы 1 и утверждения 1 функция

$$\frac{D_y(J)}{s_y} J_1$$

— инвариант, если J — инвариант.

Замечание. В случае, если газ политропный ($p = A(s)\rho^\gamma$), инвариант J_0 можно представить в виде

$$J_0 = \frac{\omega}{\rho} + J_1 \frac{p}{(\gamma - 1)\rho},$$

где ω — завихренность.

§ 4. Некоторые обобщения

Можно обобщить понятие инварианта характеристик для систем уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производных по t.

Рассмотрим систему из m уравнений для m неизвестных функций

$$F(t, x, u, u_t, u_x) = 0. \tag{4.1}$$

Мы используем обозначения из § 2.

Введем оператор дифференцирования вдоль векторного поля $v = (\lambda_1, \lambda_2)$:

$$L_v = \lambda_1 D_t + \lambda_2 D_x, \tag{4.2}$$

где λ_i — функции от t, x, u, u_t, u_x. Предполагается, что векторное поле невырожденное, т. е. λ_1 и λ_2 не равны нулю одновременно.

Определение. Оператор (4.2) называется *оператором дифференцирования вдоль характеристики системы* (4.1), если λ_1, λ_2 удовлетворяют уравнению

$$\det\left(\lambda_1 \frac{\partial(F)}{\partial(u_x)} - \lambda_2 \frac{\partial(F)}{\partial(u_t)}\right) = 0. \tag{4.3}$$

Определение. Функция h, зависящая от $t, x, u, u_1, \dots, u_n$, называется *инвариантом порядка n дифференциальных уравнений характеристик*

$$\frac{dt}{ds} = \lambda_1, \quad \frac{dx}{ds} = \lambda_2, \tag{4.4}$$

если оператор дифференцирования вдоль характеристики обращает в нуль функцию h на множестве $[S]$, т. е.

$$L_v h|_{[S]} = 0, \tag{4.5}$$

где $[S]$ означает систему (4.1) и ее дифференциальные следствия.

Будем говорить, что система (4.1) *невырожденная*, если существуют такие функции $\alpha_1(t, x, u, u_t, u_x)$, $\alpha_2(t, x, u, u_t, u_x)$, что определитель

$$\det\left(\alpha_1 \frac{\partial(F)}{\partial(u_x)} + \alpha_2 \frac{\partial(F)}{\partial(u_t)}\right)$$

не равен тождественно нулю. Следующая лемма дает еще один способ определения инвариантов невырожденных систем.

Лемма 2. *Функция h является инвариантом дифференциальных уравнений характеристик* (4.4) *невырожденной системы* (4.1) *тогда и только тогда, когда h удовлетворяет условию*

$$\det\left(\frac{\partial(F)}{\partial(u_x)}D_x h + \frac{\partial(F)}{\partial(u_t)}D_t h\right)\bigg|_{[S]} = 0. \tag{4.6}$$

Доказательство. Пусть h — инвариант, отвечающий векторному полю $v = (\lambda_1, \lambda_2)$. Значит, h удовлетворяет (4.5). Предположим, что $\lambda_1 \neq 0$ (случай $\lambda_2 \neq 0$ рассматривается аналогично). Тогда $\lambda = \lambda_2/\lambda_1$ удовлетворяет соотношениям

$$\det\left(\frac{\partial(F)}{\partial(u_x)} - \lambda\frac{\partial(F)}{\partial(u_t)}\right) = 0, \quad D_t h + \lambda D_x h|_{[S]} = 0. \tag{4.7}$$

Если $D_x h|_{[S]} \neq 0$, то из второго соотношения (4.7) выражаем λ, подставляем в первое и получаем (4.6). Если же $D_x h|_{[S]} = 0$, то $D_t h|_{[S]} = 0$ и (4.6) тоже выполняется.

Докажем обратное утверждение. Определитель

$$\Delta = \det\left(\frac{\partial(F)}{\partial(u_x)}D_x h + \frac{\partial(F)}{\partial(u_t)}D_t h\right)$$

является однородным многочленом степени m относительно $D_t h$ и $D_x h$. В силу невырожденности системы он разлагается на линейные множители

$$\Delta = (\mu_1 D_t h + \mu_2 D_x h)\dots(\mu_{2n-1}D_t h + \mu_{2n}D_x h).$$

Поскольку $\Delta|_{[S]} = 0$, существуют μ_i, μ_{i+1} такие, что

$$\mu_i D_t h + \mu_{i+1} D_x h|_{[S]} = 0. \tag{4.8}$$

Если $\mu_i \neq 0$, то выражая $D_t h$ из (4.8) и подставляя в (4.6), получаем (4.3).

Замечание 1. Если $\det\left(\frac{\partial(F)}{\partial(u_t)}\right) \neq 0$, то можно доказать аналог теоремы 1 для систем (4.1).

Замечание 2. Если заменить в (4.6) полные производные частными, то получим уравнение для характеристик.

§ 5. Системы с произвольным числом независимых переменных

Рассмотрим эволюционную систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$u_t + F(t, x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0, \tag{5.1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u = (u^1, \dots, u^m)$, $u_{x_i} = \left(u^1_{x_i}, \dots, u^m_{x_i}\right)$, $F = (F^1, \dots, F^m)$.

Оператор дифференцирования вдоль векторного поля $v = (1, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ задается формулой

$$L_v = D_t + \lambda_1 D_{x_1} + \dots + \lambda_n D_{x_n},$$

где D_t и D_{x_i} — полные производные по t и x_i, λ_i — функции от $t, x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}$.

Определение. Функция $I(t, x, u, u_1, \dots, u_n)$, где u_j означает набор из частных производных порядка j от функций $u^1, \dots, u^m$, называется *инвариантом векторного поля* $v = (1, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ *для системы* (5.1), если

$$L_v I|_{[S]} = 0.$$

Здесь, как и ранее, $[S]$ означает систему (5.1) и ее дифференциальные следствия.

Определение. Функция $I(t, x, u, u_1, \dots, u_n)$ называется *инвариантом характеристик системы* (5.1), если

1) I является инвариантом некоторого векторного поля $v = (1, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$;

2) I удовлетворяет «уравнению характеристик»

$$\det\left(D_t I + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(F)}{\partial(u_{x_i})} D_{x_i} I\right)\Bigg|_{[S]} = 0. \tag{5.2}$$

Обобщим понятие формально пассивной системы. Введем кольцо K, состоящее из функций, зависящих от переменных $t, x, u, u_1, \dots, u_k$ $(k \geq 1)$. Пусть $h \in K$. Обозначим через $D_0 h$ выражение $D_t h|_{[S]_x}$, где $[S]_x$ — система (5.1), и ее дифференциальные следствия по $x_1, \dots, x_n$. Пусть M — модуль над K, порожденный элементами $h, D_0 h, D_{x_1} h, \dots, D_{x_n} h$. Если M может быть порожден элементами $h, D_{x_1} h, \dots, D_{x_n} h$, то мы говорим, что система, состоящая из уравнений (5.1) и $h = 0$, *формально пассивна.*

Рассмотрим теперь уравнение

$$h + c = 0, \quad c \in \mathbb{R}, \tag{5.3}$$

где $h \in K$.

Теорема 2. *Система* (5.1), (5.3) *формально пассивна для любого* $c \in \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* h *— инвариант характеристик системы* (5.1).

Доказательство. Пусть система (5.1), (5.3) формально пассивна. Тогда элемент $D_0 h$ выражается через $h + c, D_{x_1} h, \dots, D_{x_n} h$. Значит, должно выполняться соотношение

$$D_0 h + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D_{x_i} h + \lambda_{n+1}(h + c) = 0,$$

где $\lambda_i \in K$. Если перенести последнее слагаемое в правую часть, то получим соотношение, левая часть которого не зависит от c, а правая включает c. Это может иметь место только при $\lambda_{n+1} = 0$.

Докажем теперь, что h удовлетворяет (5.2). Поскольку h удовлетворяет условию

$$D_0 h + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D_{x_i} h = 0, \tag{5.4}$$

то коэффициенты, стоящие при производных порядка $k+1$ в левой части (5.4), должны обращаться в нуль. Чтобы найти эти коэффициенты, выпишем выражения $D_{x_i} h$ с точностью до производных порядка k:

$$D_{x_1} h \simeq \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} u^j_{\alpha+1_1} h_{u^j_\alpha}, \dots, D_{x_n} h \simeq \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} u^j_{\alpha+1_n} h_{u^j_\alpha}.$$

Здесь u^j_α обозначает производную $\frac{\partial^{|\alpha|} u^j}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ порядка $k = |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $u^j_{\alpha+1_i}$ — производную $\frac{\partial^{|\alpha|+1} u^j}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_i^{\alpha_i+1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, символ $\simeq$ означает, что разность между левой и правой частями не содержит производных порядка $k+1$. Следовательно, сумма

$$\lambda_1 D_{x_1} h + \dots + \lambda_n D_{x_n} h,$$

с точностью до производных порядка k, равна

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} u^j_{\alpha+1_i} h_{u^j_\alpha}.$$

С другой стороны, имеем

$$D_0 h \simeq -\sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha(F^j) h_{u^j_\alpha} \simeq -\sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} u^s_{\alpha+1_i} F^j_{u_{x^s_i}} \right) h_{u^j_\alpha}.$$

Значит, справедливы следующие соотношения:

$$D_0 h + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D_{x_i} h \simeq -\sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{m} u^s_{\alpha+1_i} F^j_{u_{x^s_i}} - \lambda_i u^j_{\alpha+1_i} \right) \right] h_{u^j_\alpha} = 0.$$

Последнее соотношение удобно представить в матричной форме

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} u_{\alpha+1_i} A^{x_i} h_{u_\alpha} = 0, \tag{5.5}$$

где $u_\alpha = \left(u^1_\alpha, \ldots, u^m_\alpha\right)$, $h_{u_\alpha} = (h_{u^1_\alpha}, \ldots, h_{u^m_\alpha})$, $A^{x_i} = \frac{\partial(F)}{\partial(u_{x_i})} - \lambda_i E$, E — единичная матрица.

Нам надо доказать, что h удовлетворяет уравнению (5.2), которое равносильно следующему:

$$\det\left(\sum_{i=1}^{n} A^{x_i} D_{x_i} h \right) = 0. \tag{5.6}$$

С этой целью покажем, что линейная однородная система

$$\left(\sum_{i=1}^{n} A^{x_i} D_{x_i} h \right) r = 0 \tag{5.7}$$

имеет нетривиальное решение r. Это решение представляется в явном виде

$$r = \sum_{|\alpha|=k} (Dh)^\alpha h_{u_\alpha}, \tag{5.8}$$

где $(Dh)^\alpha = (D_{x_1} h)^{\alpha_1} \ldots (D_{x_n} h)^{\alpha_n}$. Проверим, что это действительно решение. Подставив (5.8) в (5.7), имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{n} A^{x_i} D_{x_i} h \right) \Big(\sum_{|\alpha|=k} (Dh)^\alpha h_{u_\alpha} \Big) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} A^{x_i} (Dh)^{\alpha+1_i} h_{u_\alpha}. \tag{5.9}$$

Выражения, стоящие при $u_{\alpha+1_i}$ в (5.5), совпадают с выражениями, стоящими в (5.9) при $(Dh)^{\alpha+1_i}$. Поскольку левая часть в (5.5) равна нулю, то и (5.9) тоже есть нуль. Значит, справедлива формула (5.6). Следовательно, h является инвариантом. Обратное утверждение очевидно.

Классическими примерами инвариантов характеристик для трехмерных стационарных уравнений газовой динамики с произвольным уравнением состояния $p = p(\rho, s)$ являются энтропия, инвариант Бернулли

$$\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \int \frac{1}{\rho} p'_\rho \, d\rho,$$

а также инвариант Эртеля

$$\frac{(\nabla s, \mathrm{rot} U)}{\rho},$$

где $U = (u, v, w)$ — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление, s — энтропия.

Нижеследующая лемма показывает, каким образом можно получать новые инварианты из имеющихся. Символом $\frac{D(I_1,\ldots,I_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}$ обозначается матрица с элементами $D_{x_i}(I_j)$.

Лемма 3. *Пусть $I_1, \ldots, I_n, I_{n+1}$ — инварианты характеристик системы* (5.1), *соответствующие некоторому векторному полю $v = (1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Предположим, что $I_1, \ldots, I_n$ функционально независимы на любом решении системы* (5.1). *Тогда функция*

$$J = \frac{D(I_{n+1}, I_2, \ldots, I_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \bigg/ \frac{D(I_1, I_2, \ldots, I_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \tag{5.10}$$

тоже инвариант характеристик системы (5.1).

Доказательство. Поскольку $I_1, \ldots, I_n, I_{n+1}$ — инварианты характеристик, на произвольном решении $u(t, x)$ системы (5.1) имеют место равенства

$$D_t(\widetilde{I}_j) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D_{x_i}(\widetilde{I}_j) = 0,$$

где $j = 1, \ldots, n+1$, $\widetilde{I}_j$ получается из I_j подстановкой решения $u(t, x)$. Следовательно, определитель матрицы

$$\det\left(\frac{D(\widetilde{I}_1, \ldots, \widetilde{I}_{n+1})}{D(t, x_1, \ldots, x_n)}\right)$$

равен нулю. Значит, $\widetilde{I}_1, \ldots, \widetilde{I}_{n+1}$ функционально зависимы. Поэтому $\widetilde{I}_{n+1}$ функционально выражается через $\widetilde{I}_1, \ldots, \widetilde{I}_n$, т. е.

$$\widetilde{I}_{n+1} = f(\widetilde{I}_1, \ldots, \widetilde{I}_n). \tag{5.11}$$

Дифференцируя (5.11) по переменным $x_1, \ldots, x_n$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} f'_{\widetilde{I}_i} D_{x_j}(\widetilde{I}_i) = D_{x_j}(\widetilde{I}_{n+1}), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Согласно формулам Крамера имеем

$$f'_{\widetilde{I}_i} = \frac{D(\widetilde{I}_{n+1}, \widetilde{I}_2, \ldots, \widetilde{I}_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \bigg/ \frac{D(\widetilde{I}_1, \widetilde{I}_2, \ldots, \widetilde{I}_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Поскольку f'_{I_i} — инвариант характеристик, то и правая часть (5.10) тоже инвариант.

Пользуясь этой леммой, можно построить последовательность инвариантов для трехмерных стационарных уравнений газовой динамики в неизэнтропическом случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М.: Наука, 1981. Т. 4.
2. *Darboux G.* Sur la théorie des équations aux dérivées partielles // C. R. 1870. V. 70. P. 746–749.
3. *Goursat E.* Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second order a deux variables indépendantes. Paris: Librairie scientifique A. Hermann, 1898. V. II.
4. *Forsyth A. R.* Theory of differential equations. Part IV. Partial differential equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1906. V. 6.
5. *Егоров Д. Ф.* Уравнение с частными производными 2-го порядка по двум независимым переменным // Уч. зап. Императорского Моск. ун-та. 1899. № 15. С. 1–392.
6. *Куренский М. К.* Дифференциальные уравнения. Книга вторая. Дифференциальные уравнения с частными производными. Л.: Артиллерийская академия РККА им. Дзержинского, 1934.
7. *Kamran N., Tenenblat K.* Laplace transformation in higher dimensions // Duke Math. J. 1996. V. 84, N 1. P. 237–266.
8. *Царев С. П.* О нелинейных уравнениях с частными производными, интегрируемыми по Дарбу // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1999. Т. 225. С. 389–399.
9. *Stormark O.* Lie's structural approach to PDE systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
10. *Жибер А. В., Соколов В. В., Старцев С. Я.* О нелинейных гиперболических уравнениях, интегрируемых по Дарбу // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 6. С. 746–748.
11. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
12. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
13. *Ландау Л. Д, Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
14. *Kaptsov O. V.* Invariant sets of evolution equations // Nonlinear Anal. 1992. V. 19, N 8. P. 753–761.

Статья поступила 27 мая 2003 г.

Капцов Олег Викторович
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, Красноярск 660036
kaptsov@ksc.krasn.ru