Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2004. Том 45, № 2

УДК 517.98

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СРЕДНИХ ВАЛЛЕ–ПУССЕНА ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СУММ ФУРЬЕ — ЯКОБИ

Ф. М. Коркмасов

Аннотация: Рассмотрена система классических многочленов Якоби степени не выше N, образующих ортогональную систему на дискретном множестве, состоящем из нулей многочлена Якоби степени N. Для произвольной непрерывной на отрезке $[-1,1]$ функции построены средние типа Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье — Якоби по введенной выше ортонормированной системе. Доказано, что при соблюдении определенных условий, связывающих N и параметры, входящие в определение средних Валле-Пуссена, последние приближают непрерывную функцию со скоростью наилучшего приближения в пространстве непрерывных функций $C[-1,1]$.

Ключевые слова: многочлены Якоби, средние Валле-Пуссена, ортонормированная система, дискретное множество, наилучшее приближение, дискретные суммы Фурье — Якоби, числа Кристоффеля, квадратурная формула Гаусса, норма.

§ 1. Введение

В различных прикладных и теоретических задачах широко используются разложения функций в ряды Фурье по ортонормированным системам, в частности по ортонормированным системам многочленов (Чебышева, Якоби и др.). Нередко вместо частичной суммы ряда Фурье по выбранной ортонормированной системе в качестве аппарата приближения используются суммы (или средние) Фейера и Валле-Пуссена по той же ортонормированной системе. В современных задачах, связанных с обработкой, сжатием и передачей дискретной информации, вопросы приближения функций, заданных на дискретных множествах точек (сетках), часто решаются с помощью рядов Фурье (или их средних) по соответствующей системе ортонормированных на этих сетках многочленов. Выбор того или иного аппарата приближения продиктован стремлением обеспечить как можно лучшее приближение данной функции.

Пусть H^n — пространство алгебраических многочленов $p_n = p_n(x)$ степени не выше n, $C[-1,1]$ — пространство непрерывных на $[-1,1]$ функций. Сетка $\Omega = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ — дискретное множество, состоящее из конечного или бесконечного числа различных точек действительной оси $\mathbf{R}$. Обозначим через $P_N^{\alpha,\beta}(x)$ $(\alpha,\beta > -1)$ классические многочлены Якоби степени N, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ по весу $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Теория классических ортогональных многочленов, в частности многочленов Якоби, хорошо изучена в научной литературе. Однако, как будет показано ниже, многочлены Якоби $P_0^{\alpha,\beta}(x)$, $P_1^{\alpha,\beta}(x), \dots, P_{N-1}^{\alpha,\beta}(x)$ $(N = 1, 2, \dots)$ могут быть рассмотрены как многочлены, образующие ортогональную систему на сетке $\Omega = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, состоящей из нулей многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$. В этом смысле многочлены Якоби являются ортогональными многочленами дискретной переменной. Поэтому представляет интерес исследование свойств дискретных сумм Фурье — Якоби и их линейных средних. В настоящей статье мы рассмотрим аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье — Якоби.

Хорошо известна следующая квадратурная формула Гаусса [1]:

$$\int_{-1}^{1} \rho(x)\sigma_{2N-1}(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} \mu_j \sigma_{2N-1}(x_j), \tag{1}$$

справедливая для любого многочлена $\sigma_{2N-1}(x) \in H^{2N-1}$. В (1) $x_j = x_j^{\alpha,\beta}$ — нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$, $\mu_j = \mu_j^{\alpha,\beta}$ — числа Кристоффеля (или веса квадратурной формулы),

$$\mu_j = 2^{\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(N+\alpha+1)\Gamma(N+\beta+1)}{\Gamma(N+1)\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{1}{(1-x_j^2)\left\{P_N^{\alpha,\beta\prime}(x_j)\right\}^2}. \tag{2}$$

Если, в частности, положить $\sigma_{2N-1}(x) = P_n^{\alpha,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta}(x)$, $m+n \le 2N-1$, то из (1) получаем

$$\int_{-1}^{1} \rho(x)P_n^{\alpha,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta}(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} \mu_j P_n^{\alpha,\beta}(x_j)P_m^{\alpha,\beta}(x_j) = h_n^{\alpha,\beta}\delta_{mn}, \tag{3}$$

где $h_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$, δ_{mn} — символ Кронекера.

Из (3) видно, что система многочленов Якоби $\left\{P_i^{\alpha,\beta}(x)\right\}_{i=0}^{N-1}$ является ортогональной на сетке $\Omega_N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, состоящей из нулей многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$, относительно скалярного произведения

$$(f,g) = \sum_{x\in\Omega_N} \mu(x)f(x)g(x) \quad (\mu(x_j) = \mu_j).$$

Полагая

$$\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) = \left\{h_n^{\alpha,\beta}\right\}^{-1/2} P_n^{\alpha,\beta}(t), \tag{4}$$

определим для произвольной функции $f(t) \in C[-1,1]$ дискретную частную сумму Фурье — Якоби порядка $n \le N-1$ по ортонормированной системе $\left\{\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)\right\}_{n=0}^{N-1}$:

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f) = S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,t) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_{k,N}^{\alpha,\beta}\widehat{P}_k^{\alpha,\beta}(t), \tag{5}$$

где $\hat{f}_{k,N}^{\alpha,\beta} = \sum\limits_{j=1}^{N} \mu_j f(x_j)\widehat{P}_k^{\alpha,\beta}(x_j)$ — дискретные коэффициенты Фурье — Якоби.

Составим средние Валле-Пуссена функции $f(t) \in C[-1,1]$:

$$v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f) = v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f,t) = \frac{1}{n+1}\left[S_{m,N}^{\alpha,\beta}(f,t) + S_{m+1,N}^{\alpha,\beta}(f,t) + \dots + S_{m+n,N}^{\alpha,\beta}(f,t)\right], \tag{6}$$

где $m+n \le N-1$.

Будем рассматривать $v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f)$ как линейный оператор, действующий в пространстве $C[-1,1]$, норму которого обозначим через $\left\|v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}\right\|$. В настоящей статье при условии $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$, $m \le aN$ $(0 < a < 1)$, $0 < bm \le n \le dm$ (a, b и d — фиксированные действительные числа) доказывается равномерная ограниченность в $C[-1,1]$ нормы операторов Валле-Пуссена $v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f)$. Как следствие этого результата устанавливается порядок приближения произвольной функции $f(t) \in C[-1,1]$ средними Валле-Пуссена $v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f,t)$ в пространстве $C[-1,1]$.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Приведем без доказательства следующее очевидное утверждение.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на промежутке $[a_1, b_1]$ и $\{t_j\}_{j=0}^m$ — сетка такая, что $a_1 < t_0 < t_1 < \dots < t_m < b_1$. Пусть $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ и $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. Тогда если*

1) $f(x)$ монотонно возрастает на $[a_2, b_2]$, то

$$\sum_{a_2 \le t_j \le b_2} f(t_j)\Delta t_j \le \int_{a_2}^{b_2} f(x)\,dx + f(b_2)\Delta^*, \tag{7}$$

2) $f(x)$ монотонно убывает на $[a_2, b_2]$, то

$$\sum_{a_2 \le t_j \le b_2} f(t_j)\Delta t_j \le \int_{a_2}^{b_2} f(x)\,dx + f(a_2)\Delta^*, \tag{8}$$

где $\Delta^* = \max\limits_j \Delta t_j$.

Лемма 2 [1, п. 15.3]. *Если $x_j = \cos\theta_j$ $(0 < \theta_j < \pi)$ — нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$, $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$, то для чисел Кристоффеля μ_j, определенных равенствами (2), справедливы следующие оценки:*

$$\mu_j \le \frac{\lambda}{N}(\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \quad (0 < \theta_j \le \pi - \varepsilon_0), \tag{9}$$

$$\mu_j \le \frac{\lambda}{N}(\sin\theta_j)^{2\beta+1} \quad (\varepsilon_0 \le \theta_j < \pi), \tag{10}$$

где λ и ε_0 — фиксированные положительные числа, $j = 1, 2, \dots, N$.

Нам понадобятся некоторые свойства многочленов Якоби [1]. Для удобства ссылок мы соберем их в этом параграфе.

Справедливо равенство

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = (-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(-x). \tag{11}$$

Для $-1 \le t \le 1$, $n \ge 1$ справедлива оценка

$$\left|P_n^{\alpha,\beta}(t)\right| \le \frac{c(\alpha,\beta)}{n^{1/2}}\left(\sqrt{1-t} + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha-1/2}\left(\sqrt{1+t} + \frac{1}{n}\right)^{-\beta-1/2}. \tag{12}$$

Здесь и далее через $c_k, c(\alpha, \beta, \dots, \omega)$ обозначаются положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров.

Если $x_j = cos\theta_j$ — нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$, $-1/2 \le \alpha, \beta \le 1/2$, занумерованные в убывающем порядке:

$$1 > x_1 > x_2 > \dots > x_N > -1, \quad 0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N < \pi,$$

то [1]

$$\frac{2j-1}{2N+1}\pi \le \theta_j \le \frac{2j}{2N+1}\pi \quad (j=1,2,\ldots,N). \tag{13}$$

Отсюда

$$\Delta\theta_j = \theta_{j+1} - \theta_j \ge \frac{\pi}{2N+1}, \tag{14}$$

$$\Delta\theta_j \le \frac{3\pi}{2N+1}. \tag{15}$$

Имеют место следующие равенства [2].

I. При $-1 \le x, t \le 1$, $x \ne t$

$$K_k^{\alpha,\beta}(t,x) = \sum_{i=0}^{k} \left\{h_i^{\alpha,\beta}\right\}^{-1} P_i^{\alpha,\beta}(t) P_i^{\alpha,\beta}(x) = \frac{-k(1-t)(1+x)}{2^{\alpha+\beta+1}(t-x)} P_k^{\alpha+1,\beta}(t) P_k^{\alpha,\beta+1}(x)$$

$$+H_k^1 \frac{P_{k+1}^{\alpha,\beta}(t)P_k^{\alpha,\beta}(x)}{t-x} + H_k^2 \frac{P_k^{\alpha,\beta}(t)P_{k+1}^{\alpha,\beta}(x)}{t-x} + H_k^3 \frac{P_k^{\alpha,\beta}(t)P_k^{\alpha,\beta}(x)}{t-x} + H_k^4 \frac{P_{k+1}^{\alpha,\beta}(t)P_{k+1}^{\alpha,\beta}(x)}{t-x}$$

$$-\frac{(k+1)P_{k+1}^{\alpha,\beta}(t)P_{k+1}^{\alpha,\beta}(x) - kP_k^{\alpha,\beta}(t)P_k^{\alpha,\beta}(x)}{2^{\alpha+\beta+1}(t-x)} + \delta_k \frac{(1-t)(1+x)}{t-x} P_k^{\alpha+1,\beta}(t) P_k^{\alpha,\beta+1}(x), \tag{16}$$

где $H_k^i = O(1)$, $\delta_k = O(1)$ $(k \to \infty)$. В дальнейшем будем предполагать, что существуют такие положительные постоянные q_1 и q_2, что $|H_k^i| \le q_1$ и $|\delta_k| \le q_2$. При желании значение постоянных q_1 и q_2 можно найти, используя текст доказательства равенства (16), приведенного в работе [2].

II. При $-1 \le x, t \le 1$, $x \ne t$

$$\frac{(1-t)(1+x)}{t-x} \sum_{k=m}^{m+n} kP_k^{\alpha+1,\beta}(t) P_k^{\alpha,\beta+1}(x) = \sum_{i=1}^{6} g_i(t,x), \tag{17}$$

где

$$g_1(t,x) = \frac{(1-t)(1+x)(1-x)}{2(t-x)^2} \Big[(m+n+\alpha+\beta+2) P_{m+n}^{\alpha+1,\beta+1}(x) P_{m+n}^{\alpha+1,\beta}(t)$$
$$- (m+\alpha+\beta+1) P_m^{\alpha+1,\beta+1}(x) P_m^{\alpha+1,\beta}(t)\Big], \tag{18}$$

$$g_2(t,x) = \frac{(1-t)^2(1+x)}{2(t-x)^2} \Big[(m+\alpha+\beta+1) P_m^{\alpha+2,\beta}(t) P_m^{\alpha,\beta+1}(x)$$
$$- (m+n+\alpha+\beta+2) P_{m+n}^{\alpha+2,\beta}(t) P_{m+n}^{\alpha,\beta+1}(x)\Big], \tag{19}$$

$$g_3(t,x) = \frac{(1-t)(1+x)}{(t-x)^2} \left[\frac{m+n+\alpha+\beta+2}{2(m+n)+\alpha+\beta+3} P_{m+n}^{\alpha+1,\beta}(t) P_{m+n}^{\alpha,\beta+1}(x)\right.$$
$$\left. - \frac{m+\alpha+\beta+1}{2m+\alpha+\beta+1} P_m^{\alpha+1,\beta}(t) P_m^{\alpha,\beta+1}(x)\right], \tag{20}$$

$$g_4(t,x) = -\frac{(1-t)(1+x)}{(t-x)^2} \sum_{k=m}^{m+n} \frac{(\alpha+\beta+1)(2k+\alpha+\beta+2)}{(2k+\alpha+\beta+3)(2k+\alpha+\beta+1)} P_k^{\alpha+1,\beta}(t) P_k^{\alpha,\beta+1}(x), \tag{21}$$

$$g_5(t,x)=\frac{(\alpha+\beta+2)(1-t)(1+x)}{2(t-x)}\sum_{k=m}^{m+n}P_k^{\alpha+1,\beta}(t)P_k^{\alpha,\beta+1}(x), \tag{22}$$

$$g_6(t,x)=\frac{(1-t)(1+x)}{(t-x)^2}\sum_{k=m}^{m+n}\frac{1}{2k+\alpha+\beta+1}\big[(\alpha+1)\beta P_{k-1}^{\alpha+1,\beta}(t)P_k^{\alpha,\beta+1}(x) \\ -\alpha(\beta+1)P_k^{\alpha+1,\beta}(t)P_{k-1}^{\alpha,\beta+1}(x)\big]. \tag{23}$$

§ 3. Оценка норм средних Валле-Пуссена дискретных сумм Фурье — Якоби

Теорема 1. *Пусть $-1/2<\alpha,\beta<1/2$, b,d — фиксированные положительные действительные числа ($b\le d$). Тогда нормы средних Валле-Пуссена $v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f)$ при условии $m\le aN$ $(0<a<1)$, $0<bm\le n\le dm$ равномерно ограничены в пространстве $C[-1,1]$.*

Доказательство. Подставляя в (6) соотношение (5) и учитывая равенства (4), (16), имеем

$$v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f)=v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f,t)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{N}\mu_j f(x_j)\sum_{k=m}^{m+n}K_k^{\alpha,\beta}(t,x_j). \tag{24}$$

Из (24) получаем

$$\big\|v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}\big\|=\sup_{\|f\|\le1}\big\|v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f)\big\|=\big\|V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}\big\|, \tag{25}$$

где

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}=V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{N}\mu_j\left|\sum_{k=m}^{m+n}K_k^{\alpha,\beta}(t,x_j)\right|. \tag{26}$$

Оценим величину $V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ при $-1\le t\le 1$. Рассмотрим сначала случай $0\le t\le 1$, который, в свою очередь, разобьем на следующие случаи: 1) $t\in[0,1-4/m^2]$, 2) $t\in[1-4/m^2,1]$.

1. Запишем нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$ в убывающем порядке $-1<x_N<x_{N-1}<\dots<x_1<1$ и сделаем замену $t=\cos\varphi$, $x_j=\cos\theta_j$. С учетом оценки (14) из (26) следует, что

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\le\frac{3N}{\pi(n+1)}\sum_{j=1}^{N}\mu_j\left|\sum_{k=m}^{m+n}K_k^{\alpha,\beta}(\cos\varphi,\cos\theta_j)\right|\Delta\theta_j. \tag{27}$$

Положим $\Delta_1=[2\pi/3,\pi)$, $\Delta_2=[\varphi+1/m,2\pi/3)$, $\Delta_3=(\varphi-1/m,\varphi+1/m)$, $\Delta_4=(0,\varphi-1/m]$. Величину $V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)$ оценим по следующей схеме:

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\le\frac{3N}{\pi(n+1)}\Big(\sum_{\theta_j\in\Delta_1}+\sum_{\theta_j\in\Delta_2}+\sum_{\theta_j\in\Delta_3}+\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\Big)=U_1+U_2+U_3+U_4. \tag{28}$$

С учетом равенства (16) каждую из сумм U_i $(i=1,2,4)$ оценим так:

$$U_i\le\sum_{l=0}^{6}U_{il}, \tag{29}$$

где

$$U_{i0}=\frac{3N}{\pi(n+1)}\sum_{\theta_j\in\Delta_i}\mu_j\left|\frac{(1-\cos\varphi)(1+\cos\theta_j)}{2^{\alpha+\beta+1}(\cos\varphi-\cos\theta_j)}\right.$$
$$\left.\times\sum_{k=m}^{m+n}kP_k^{\alpha+1,\beta}(\cos\varphi)P_k^{\alpha,\beta+1}(\cos\theta_j)\right|\Delta\theta_j,\quad(30)$$

$$U_{i1}=\frac{3N}{\pi(n+1)}\sum_{\theta_j\in\Delta_i}\mu_j\left|\frac{1}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\sum_{k=m}^{m+n}H_k^1P_{k+1}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)P_k^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)\right|\Delta\theta_j,\quad(31)$$

$$U_{i2}=\frac{3N}{\pi(n+1)}\sum_{\theta_j\in\Delta_i}\mu_j\left|\frac{1}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\sum_{k=m}^{m+n}H_k^2P_{k}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)P_{k+1}^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)\right|\Delta\theta_j,\quad(32)$$

$$U_{i3}=\frac{3N}{\pi(n+1)}\sum_{\theta_j\in\Delta_i}\mu_j\left|\frac{1}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\sum_{k=m}^{m+n}H_k^3P_{k}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)P_{k}^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)\right|\Delta\theta_j,\quad(33)$$

$$U_{i4}=\frac{3N}{\pi(n+1)}\sum_{\theta_j\in\Delta_i}\mu_j\left|\frac{1}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\sum_{k=m}^{m+n}H_k^4P_{k+1}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)P_{k+1}^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)\right|\Delta\theta_j,\quad(34)$$

$$U_{i5}=\frac{3N}{\pi(n+1)}\sum_{\theta_j\in\Delta_i}\mu_j\frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}|\cos\varphi-\cos\theta_j|}$$
$$\times\left|\sum_{k=m}^{m+n}(k+1)P_{k+1}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)P_{k+1}^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)-kP_k^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)P_k^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)\right|\Delta\theta_j$$
$$=\frac{3N}{\pi(n+1)}\sum_{\theta_j\in\Delta_i}\mu_j\frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}|\cos\varphi-\cos\theta_j|}$$
$$\times\left|(m+n+1)P_{m+n+1}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)P_{m+n+1}^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)-mP_m^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)P_m^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)\right|\Delta\theta_j,\quad(35)$$

$$U_{i6}=\frac{3N}{\pi(n+1)}\sum_{\theta_j\in\Delta_i}\mu_j\left|\frac{(1-\cos\varphi)(1+\cos\theta_j)}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\right.$$
$$\left.\times\sum_{k=m}^{m+n}\delta_kP_k^{\alpha+1,\beta}(\cos\varphi)P_k^{\alpha,\beta+1}(\cos\theta_j)\right|\Delta\theta_j.\quad(36)$$

Для определенности в лемме 2 будем считать $\varepsilon_0=\frac{\pi}{3}$. Поэтому на интервале Δ_1 будем пользоваться оценкой (10), а на интервалах Δ_2, Δ_3, Δ_4 — оценкой (9).

Оценим U_1. При оценивании U_{1i} $(i=0,1,2,3,4,5,6)$ будем учитывать, что для $\theta_j\in\Delta_1$

$$(\sin\theta_j)^{2\beta+1}=(1-\cos\theta_j)^{\beta+1/2}(1+\cos\theta_j)^{\beta+1/2}\le 2(1+\cos\theta_j)^{\beta+1/2},$$

а также $\cos\varphi-\cos\theta_j\ge 1/2$, $(1-\cos\theta_j)^{-\alpha/2-1/4}\le 1$ и $(1+\cos\varphi)^{-\beta/2-1/4}\le 1$. Принимая во внимание (10), (12), (30)–(34), при $m\le aN$ $(0<a<1)$, $0<bm\le n\le dm$ имеем

$$U_{10}\le\frac{6\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}\sum_{\theta_j\in\Delta_1}(\sin\theta_j)^{2\beta+1}\Delta\theta_j\le\frac{6\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}\sum_{\theta_j\in\Delta_1}\Delta\theta_j\le 2\lambda c^2(\alpha,\beta),\quad(37)$$

$$U_{11} \le \frac{12\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} q_1 (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4} \times \sum_{\theta_j\in\Delta_1} (1+\cos\theta_j)^{\beta/2+1/4} \left(\sum_{k=m}^{m+n} \frac{1}{k}\right) \Delta\theta_j \le 4\lambda q_1 c^2(\alpha,\beta). \quad (38)$$

Оценивание величин U_{12}, U_{13}, U_{14} аналогично оценке U_{11}. Поэтому

$$U_{1i} \le 4\lambda q_1 c^2(\alpha,\beta) \quad (i = 2,3,4). \quad (39)$$

Далее, из (35) и (36) с учетом (10) и (12)

$$U_{15} \le \frac{12\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4} \sum_{\theta_j\in\Delta_1} (1+\cos\theta_j)^{\beta/2+1/4} \Delta\theta_j \le \frac{4\lambda}{b} c^2(\alpha,\beta), \quad (40)$$

$$U_{16} \le \frac{6\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} q_2 (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2+1/4} \times \sum_{\theta_j\in\Delta_1} (\sin\theta_j)^{2\beta+1} \left(\sum_{k=m}^{m+n} \frac{1}{k}\right) \Delta\theta_j \le 2\lambda q_2 c^2(\alpha,\beta). \quad (41)$$

Объединяя оценки (37)–(41) и сравнивая их с (29), получим

$$U_1 \le 2\lambda c^2(\alpha,\beta)[8q_1 + q_2 + 2/b + 1]. \quad (42)$$

Оценим величину U_2. Предварительно докажем следующее

Утверждение 1. *Если $m \le aN$ $(0 < a < 1)$, $0 < bm \le n \le dm$, то*

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^{-\alpha/2+5/4}} \le \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(c_1(\alpha) + \frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right) m^{-\alpha+1/2}, \quad (43)$$

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^2} \Delta\theta_j \le \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right) m (1-\cos\varphi)^{-1/2}, \quad (44)$$

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^{-\alpha/2+7/4}} \Delta\theta_j \le \frac{\pi}{2} \left(c_2(\alpha) + \frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right) m^{-\alpha/2+3/4} (1-\cos\varphi)^{\alpha/4-3/8}, \quad (45)$$

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_2} \frac{\sin\theta_j}{\cos\varphi-\cos\theta_j} \Delta\theta_j \le \ln\frac{3\pi}{8} m^2 + \frac{3\pi a}{4}(\pi+1). \quad (46)$$

Доказательство. Заметим, что функция $g(\theta) = \sin\theta/(\cos\varphi - \cos\theta)^\gamma$ $(\gamma \ge 1)$ монотонно убывает на $(\varphi, \pi]$. Поэтому для доказательства оценок (43)–(46) используем оценки (8) и (15). Ввиду очевидных неравенств

$$\sin\left(\varphi + \frac{1}{m}\right) = \sin\varphi\cos\frac{1}{m} + \sin\frac{1}{m}\cos\varphi \le \sin\varphi + \sin\frac{1}{m}, \quad (47)$$

$$\cos\varphi - \cos\left(\varphi + \frac{1}{m}\right) = 2\sin\left(\varphi + \frac{1}{2m}\right)\sin\frac{1}{2m} \ge \sin\varphi\sin\frac{1}{m} \ge (1-\cos\varphi)^{1/2}\sin\frac{1}{m}, \quad (48)$$

получим $\left(\sin\frac{1}{m} \ge \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{m}\right)$

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^{-\alpha/2+5/4}}$$

$$\le \int\limits_{\varphi+\frac{1}{m}}^{2\pi/3}\frac{\sin\theta}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{-\alpha/2+5/4}}d\theta+\frac{\sin\left(\varphi+\frac{1}{m}\right)}{\left(\cos\varphi-\cos\left(\varphi+\frac{1}{m}\right)\right)^{-\alpha/2+5/4}}\Delta^*$$

$$\le \frac{\left(\cos\varphi-\cos\left(\varphi+\frac{1}{m}\right)\right)^{\alpha/2-1/4}}{-\alpha/2+1/4}+\frac{\sin\left(\varphi+\frac{1}{m}\right)}{\left(\cos\varphi-\cos\left(\varphi+\frac{1}{m}\right)\right)^{-\alpha/2+5/4}}\cdot\frac{3\pi}{2m}a$$

$$\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(c_1(\alpha)+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right)m^{-\alpha+1/2},$$

где $c_1(\alpha)=(-\alpha/2+1/4)^{-1}$.

Используя (47), (48), имеем

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^2}\Delta\theta_j\le\int\limits_{\varphi+\frac{1}{m}}^{2\pi/3}\frac{\sin\theta}{(\cos\varphi-\cos\theta)^2}d\theta+\frac{\sin\left(\varphi+\frac{1}{m}\right)}{\left(\cos\varphi-\cos\left(\varphi+\frac{1}{m}\right)\right)^2}\Delta^*$$

$$\le\frac{1}{\cos\varphi-\cos\left(\varphi+\frac{1}{m}\right)}+\frac{3\pi a}{2m}\cdot\frac{1}{\sin\varphi\sin^2\frac{1}{m}}+\frac{3\pi a}{2m}\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi\sin\frac{1}{m}}$$

$$\le\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right)m(1-\cos\varphi)^{-1/2}.$$

Аналогично, учитывая (47), (48), приходим к неравенствам

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^{-\alpha/2+7/4}}\Delta\theta_j$$

$$\le \int\limits_{\varphi+\frac{1}{m}}^{2\pi/3}\frac{\sin\theta}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{-\alpha/2+7/4}}d\theta+\frac{\sin\left(\varphi+\frac{1}{m}\right)}{\left(\cos\varphi-\cos\left(\varphi+\frac{1}{m}\right)\right)^{-\alpha/2+7/4}}\Delta^*$$

$$\le\frac{1}{\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)\left(\cos\varphi-\cos\left(\varphi+\frac{1}{m}\right)\right)^{-\alpha/2+3/4}}+\frac{3\pi a}{2m}\cdot\frac{1}{(\sin\varphi)^{-\alpha/2+3/4}(\sin\frac{1}{m})^{-\alpha/2+7/4}}$$

$$+\frac{3\pi a}{2m}\cdot\frac{1}{(\sin\varphi)^{-\alpha/2+7/4}(\sin\frac{1}{m})^{-\alpha/2+3/4}}$$

$$\le\frac{\pi}{2}\left(c_2(\alpha)+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right)m^{-\alpha/2+3/4}(1-\cos\varphi)^{\alpha/4-3/8},$$

где $c_2(\alpha)=(-\alpha/2+3/4)^{-1}$. Далее,

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\sin\theta_j}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\Delta\theta_j\le\int\limits_{\varphi+\frac{1}{m}}^{2\pi/3}\frac{\sin\theta}{\cos\varphi-\cos\theta}d\theta+\frac{\sin\left(\varphi+\frac{1}{m}\right)}{\cos\varphi-\cos\left(\varphi+\frac{1}{m}\right)}\Delta^*$$

$$\le\ln(\cos\varphi-\cos(2\pi/3))-\ln\left(\cos\varphi-\cos\left(\varphi+\frac{1}{m}\right)\right)+\frac{3\pi a}{2m}\cdot\frac{1}{\sin\frac{1}{m}}+\frac{3\pi a}{2m}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}$$

$$\le\ln\frac{3/2}{(1-\cos\varphi)^{1/2}\sin\frac{1}{m}}+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\le\ln\frac{3\pi}{8}m^2+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1).$$

Утверждение 1 доказано.

При оценивании U_{2i} $(i=0,1,2,3,4,5,6)$ учтем, что для $\theta_j \in \Delta_2$ будет $(1+\cos\theta_j)^{-\beta/2-1/4} \le \sqrt{2}$, $(1+\cos\theta_j)^{-\beta/2+1/4} \le \sqrt{2}$, $(\sin\theta_j)^{2\alpha+1} = (1-\cos\theta_j)^{\alpha}(1+\cos\theta_j)^{\alpha}\sin\theta_j \le \sqrt{2}(1-\cos\theta_j)^{\alpha}\sin\theta_j$, а также $(1+\cos\varphi)^{-\beta/2-1/4} \le 1$.

Из (31) с учетом (9), (12) и (43) имеем

$$U_{21} \le \frac{6\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} q_1 (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4} \times \sum_{\theta_j\in\Delta_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^{-\alpha/2+5/4}} \Delta\theta_j \left(\sum_{k=m}^{m+n} \frac{1}{k}\right) \Delta\theta_j \le c^2(\alpha,\beta)\frac{3\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{\pi}} q_1 \left(c_1(\alpha) + \frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right). \quad (49)$$

Аналогично

$$U_{2i} \le c^2(\alpha,\beta)\frac{3\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{\pi}} q_1 \left(c_1(\alpha) + \frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right) \quad (i=2,3,4). \quad (50)$$

Оценивание величин U_{25} и U_{26} аналогично оцениванию U_{21}. Действительно, из (35), (36) с учетом (9), (12) и (43) имеем

$$U_{25} \le c^2(\alpha,\beta)\frac{3\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{\pi}b} \left(c_1(\alpha) + \frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right), \quad (51)$$

$$U_{26} \le c^2(\alpha,\beta)\frac{3\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{\pi}} q_2 \left(c_1(\alpha) + \frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right). \quad (52)$$

Наконец, перейдем к оцениванию величины U_{20}.

С учетом (9) и (17) из (30) следует, что

$$U_{20} \le \frac{3\lambda}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j\in\Delta_2} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \sum_{i=1}^{6} |g_i(\cos\varphi,\cos\theta_j)|\Delta\theta_j = \sum_{i=1}^{6} U_{20}^{(i)}, \quad (53)$$

где

$$U_{20}^{(i)} = \frac{3\lambda}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j\in\Delta_2} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} |g_i(\cos\varphi,\cos\theta_j)|\Delta\theta_j \quad (i=1,2,3,4,5,6). \quad (54)$$

Оценим $U_{20}^{(1)}$. Используя (12) и (18), получим

$$U_{20}^{(1)} \le \frac{3\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} \left(2+\frac{5}{m}\right)(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2+1/4} \sum_{\theta_j\in\Delta_2} \sin\theta_j \frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4}}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^2}\Delta\theta_j. \quad (55)$$

Воспользовавшись неравенством

$$(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4} \le (1-\cos\varphi)^{\alpha/2+1/4} + (\cos\varphi-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4} \quad (56)$$

и оценками (44), (45), из (55) выводим, что

$$U_{20}^{(1)} \le \frac{21\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}(1-\cos\varphi)^{1/2} \sum_{\theta_j\in\Delta_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^2}\Delta\theta_j + \frac{21\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2+1/4} \sum_{\theta_j\in\Delta_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^{-\alpha/2+7/4}}\Delta\theta_j \le \frac{21\lambda c^2(\alpha,\beta)}{2b}\left(1+c_2(\alpha)+\frac{3\pi a}{2}(\pi+1)\right). \quad (57)$$

Далее, принимая во внимание оценки (12), (44), (46), равенства (19)–(23), из (54) имеем

$$U_{20}^{(2)} \le \frac{3\lambda c^2(\alpha,\beta)}{2\pi(n+1)}\left(2+\frac{5}{m}\right)(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2+3/4}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\sin\theta_j\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^2}\Delta\theta_j$$
$$\le \frac{21\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}(1-\cos\varphi)^{1/2}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^2}\Delta\theta_j$$
$$\le \frac{21\lambda c^2(\alpha,\beta)}{2b}\left(1+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right), \quad (58)$$

$$U_{20}^{(3)} \le \frac{6\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi m(n+1)}\cdot\frac{2+b}{1+b}(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2+1/4}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\sin\theta_j\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^2}\Delta\theta_j$$
$$\le \frac{12\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi m(n+1)}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^2}\Delta\theta_j \le \frac{3\lambda c^2(\alpha,\beta)}{b}\left(1+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right), \quad (59)$$

$$U_{20}^{(4)} \le \frac{6\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2+1/4}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\sin\theta_j\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^2}\left(\sum_{k=m}^{m+n}\frac{1}{k^2}\right)\Delta\theta_j$$
$$\le \frac{6\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi m}\cdot\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right)(1-\cos\varphi)^{-1/2} \le \frac{3\lambda c^2(\alpha,\beta)}{2}\left(1+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right), \quad (60)$$

$$U_{20}^{(5)} \le \frac{9\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2+1/4}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\sin\theta_j\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\left(\sum_{k=m}^{m+n}\frac{1}{k}\right)\Delta\theta_j$$
$$\le \frac{9\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi m}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\sin\theta_j}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\Delta\theta_j$$
$$\le \frac{9\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi}\left(\frac{1}{m}\ln\frac{3\pi}{8}m^2+\frac{3\pi a}{4m}(\pi+1)\right) \le 9\lambda c^2(\alpha,\beta)\gamma(m),$$

где $\gamma(m) = \frac{1}{\pi m}\ln\frac{3\pi}{8}m^2 + \frac{3a}{4m}(\pi+1)$.

Нетрудно видеть, что

$$\gamma(m) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\ln\sqrt{\frac{3\pi}{8}}m}{m} + \frac{3a}{4m}(\pi+1) \le \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{5} + \frac{3a}{4}(\pi+1) \le \frac{4}{5\pi} + \frac{3a}{4}(\pi+1).$$

Поэтому

$$U_{20}^{(5)} \le 9\lambda c^2(\alpha,\beta)\left(\frac{4}{5\pi}+\frac{3a}{4}(\pi+1)\right). \quad (61)$$

Далее,

$$U_{20}^{(6)} \le \frac{9\lambda c^2(\alpha,\beta)}{2\pi(n+1)}(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2+1/4}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\sin\theta_j\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^2}\left(\sum_{k=m}^{m+n}\frac{1}{k^2}\right)\Delta\theta_j$$
$$\le \frac{9\lambda c^2(\alpha,\beta)}{2\pi m^2}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^2}\Delta\theta_j \le \frac{9\lambda c^2(\alpha,\beta)}{8}\left(1+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right). \quad (62)$$

Собирая оценки (57)–(62) и сравнивая с (53), заключаем, что

$$U_{20} \le 3\lambda c^2(\alpha,\beta)\Bigg[\left(\frac{8}{b}+\frac{7}{8}\right)\left(1+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right) + \frac{7}{2b}\left(c_2(\alpha)+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right)+\frac{12}{5\pi}+\frac{9a}{4}(\pi+1)\Bigg]. \quad (63)$$

Из (29) и (49)–(52), (63) выводим

$$U_2 \le 3\lambda H_1(\alpha,a,b)c^2(\alpha,\beta), \quad (64)$$

где

$$H_1(\alpha,a,b)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(c_1(\alpha)+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right)\left(4q_1+q_2+\frac{1}{b}\right) + \left(\frac{8}{b}+\frac{7}{8}\right)\left(1+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right)+\frac{7}{2b}\left(c_2(\alpha)+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right)+\frac{12}{5\pi}+\frac{9a}{4}(\pi+1). \quad (65)$$

Оценим величину U_4. Докажем предварительно следующее

Утверждение 2. *Если $m \le aN$ $(0<a<1)$, $0<bm\le n\le dm$, то*

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\sin\theta_j(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4}\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{\cos\theta_j-\cos\varphi}\Delta\theta_j \le \left[\frac{\pi}{3}+c_1(\alpha)(\pi+1)+\frac{3\pi a}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}\right)\right]m, \quad (66)$$

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\theta_j-\cos\varphi)^2}\Delta\theta_j \le \frac{\pi^2}{2}\left(1+\frac{3\pi^2 a}{4}\right)m(1-\cos\varphi)^{-1/2}, \quad (67)$$

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4}}{(\cos\theta_j-\cos\varphi)^2}\Delta_j \le \left(\frac{(2\alpha+1)^{\alpha+1/2}}{16(3-2\alpha)^{\alpha-3/2}}+\frac{3\pi^7 a}{16}\right)m\varphi^{\alpha-3/2}. \quad (68)$$

Доказательство. Докажем первое неравенство. Разобьем интервал суммирования $\Delta_4=(0,\varphi-\frac{1}{m}]$ на три промежутка: $\Delta^{(1)}=\left(0,\arccos\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\right]$, $\Delta^{(2)}=\left(\arccos\left(1-\frac{1}{m^2}\right),\arccos\frac{1+\cos\varphi}{2}\right]$, $\Delta^{(3)}=\left(\arccos\frac{1+\cos\varphi}{2},\varphi-\frac{1}{m}\right]$.

Тогда $(\sin\theta_j \le \sqrt{2}(1-\cos\theta_j)^{1/2})$

$$\sum_{\theta_j\in\Delta^{(1)}}\sin\theta_j(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4}\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{\cos\theta_j-\cos\varphi}\Delta\theta_j \le \sum_{\theta_j\in\Delta^{(1)}}\left(\frac{1-\cos\theta_j}{1-\cos\varphi}\right)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta_j-\cos\varphi}\Delta\theta_j \le \sum_{\theta_j\in\Delta^{(1)}}\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta_j-\cos\varphi}\Delta\theta_j \le \sqrt{2}\sum_{\theta_j\in\Delta^{(1)}}\frac{1}{1-\frac{1}{m^2}-\left(1-\frac{4}{m^2}\right)}\Delta\theta_j \le \frac{\sqrt{2}m^2}{3}\arccos\left(1-\frac{1}{m^2}\right). \quad (69)$$

Обозначим $\arccos\left(1-\frac{1}{m^2}\right)=\omega$. Тогда $1-\cos\omega=\frac{1}{m^2}$ или $\frac{1}{\sqrt{2}m}=\sin\frac{\omega}{2}\ge\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\omega}{2}=\frac{\omega}{\pi}$. Отсюда

$$\omega \le \frac{\pi}{\sqrt{2}m}. \tag{70}$$

Учитывая (70), из (69) получим

$$\sum_{\theta_j \in \Delta^{(1)}} \sin\theta_j (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4} \frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{\cos\theta_j - \cos\varphi} \Delta\theta_j \le \frac{\pi}{3} m. \tag{71}$$

Для промежутка $\Delta^{(2)}$ имеем оценку

$$\sum_{\theta_j \in \Delta^{(2)}} \sin\theta_j (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4} \frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{\cos\theta_j - \cos\varphi} \Delta\theta_j$$
$$\le (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4} \sum_{\theta_j \in \Delta^{(2)}} \frac{\sin\theta_j}{(1-\cos\theta_j)^{-\alpha/2+5/4}} \Delta\theta_j. \tag{72}$$

Так как функция $g(\theta) = \frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)^{-\alpha/2+5/4}}$ монотонно убывает на $(0,\varphi)$, используя (8), (15), получаем

$$\sum_{\theta_j \in \Delta^{(2)}} \frac{\sin\theta_j}{(1-\cos\theta_j)^{-\alpha/2+5/4}} \Delta\theta_j$$
$$\le \int\limits_{\arccos\left(1-\frac{1}{m^2}\right)}^{\arccos\frac{1+\cos\varphi}{2}} \frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)^{-\alpha/2+5/4}} d\theta + \frac{\sin\left(\arccos\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\right)}{\left(1-\cos\left(\arccos\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\right)\right)^{-\alpha/2+5/4}} \Delta^*$$
$$\le \frac{\left(1-\cos\left(\arccos\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\right)\right)^{\alpha/2-1/4}}{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} + \frac{\left[1-\left(1-\frac{1}{m^2}\right)^2\right]^{1/2}}{m^{\alpha-5/2}} \cdot \frac{3\pi a}{2m}$$
$$\le \left(c_1(\alpha) + \frac{3\pi a}{\sqrt{2}}\right) m^{-\alpha+1/2}. \tag{73}$$

Подставляя (73) в (72), имеем

$$\sum_{\theta_j \in \Delta^{(2)}} \sin\theta_j (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4} \frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{\cos\theta_j - \cos\varphi} \Delta\theta_j \le \left(c_1(\alpha) + \frac{3\pi a}{\sqrt{2}}\right) m. \tag{74}$$

Наконец,

$$\sum_{\theta_j \in \Delta^{(3)}} \sin\theta_j (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4} \frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{\cos\theta_j - \cos\varphi} \Delta\theta_j$$
$$\le (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4} \sum_{\theta_j \in \Delta^{(3)}} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\theta_j - \cos\varphi)^{-\alpha/2+5/4}} \Delta\theta_j. \tag{75}$$

В силу монотонного возрастания функции $g(\theta) = \frac{\sin\theta}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{-\alpha/2+5/4}}$, условия (7) леммы 1 и очевидных соотношений $(m \to \infty)$

$$2\sin\left(\varphi - \frac{1}{2m}\right)\sin\frac{1}{2m} = 2\sin\left(\varphi - \frac{1}{m} + \frac{1}{2m}\right)\sin\frac{1}{2m} \ge \sin\left(\varphi - \frac{1}{m}\right)\sin\frac{1}{m}, \tag{76}$$

$$\sin\left(\varphi-\frac{1}{m}\right)\geq\frac{2}{\pi}\left(\varphi-\frac{1}{m}\right)\geq\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\varphi}{2}\geq\frac{1}{\pi}\sin\varphi, \tag{77}$$

получим ($\sin\frac{1}{m}\geq\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{m}$)

$$\sum_{\theta_j\in\Delta^{(3)}}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\theta_j-\cos\varphi)^{-\alpha/2+5/4}}\Delta\theta_j$$

$$\leq\int\limits_{\arccos\frac{1+\cos\varphi}{2}}^{\varphi-\frac{1}{m}}\frac{\sin\theta}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{-\alpha/2+5/4}}d\theta+\frac{\sin\left(\varphi-\frac{1}{m}\right)}{\left(\cos\left(\varphi-\frac{1}{m}\right)-\cos\varphi\right)^{-\alpha/2+5/4}}\Delta^*$$

$$\leq\frac{\left(\cos\left(\varphi-\frac{1}{m}\right)-\cos\varphi\right)^{\alpha/2-1/4}}{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}+\frac{\sin\left(\varphi-\frac{1}{m}\right)}{\left(2\sin\left(\varphi-\frac{1}{2m}\right)\sin\frac{1}{2m}\right)^{-\alpha/2+5/4}}\cdot\frac{3\pi a}{2m}$$

$$\leq\pi\left(c_1(\alpha)+3a\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)m^{-\alpha+1/2}. \tag{78}$$

Подставляя (78) в (75), имеем

$$\sum_{\theta_j\in\Delta^{(3)}}\sin\theta_j(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4}\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{\cos\theta_j-\cos\varphi}\Delta\theta_j\leq\pi\left(c_1(\alpha)+\frac{3\pi^2a}{4}\right)m. \tag{79}$$

Объединяя оценки (71), (74), (79), приходим к оценке (66).

Для доказательства оценки (67) заметим, что функция $g(\theta)=\frac{\sin\theta}{(\cos\theta-\cos\varphi)^2}$ монотонно возрастает на $(0,\varphi)$. Поэтому, используя оценку (7) леммы 1, неравенства (15), (76), (77), получаем

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\theta_j-\cos\varphi)^2}\Delta\theta_j\leq\int\limits_0^{\varphi-\frac{1}{m}}\frac{\sin\theta}{(\cos\theta-\cos\varphi)^2}d\theta+\frac{\sin\left(\varphi-\frac{1}{m}\right)}{\left(\cos\left(\varphi-\frac{1}{m}\right)-\cos\varphi\right)^2}\cdot\Delta^*$$

$$\leq\frac{1}{\cos\left(\varphi-\frac{1}{m}\right)-\cos\varphi}+\frac{\sin\left(\varphi-\frac{1}{m}\right)}{\left(2\sin\left(\varphi-\frac{1}{2m}\right)\sin\frac{1}{2m}\right)^2}\cdot\frac{3\pi a}{2m}$$

$$\leq\frac{\pi^2}{2}\left(1+\frac{3\pi^2a}{4}\right)m(1-\cos\varphi)^{-1/2}.$$

Наконец, применим к функции $g(\theta)=\frac{(1-\cos\theta)^{\alpha/2+1/4}}{(\cos\theta-\cos\varphi)^2}$ на промежутке Δ_4 оценку (7) леммы 1. Так как $|\cos\theta-\cos\varphi|\geq\frac{(\theta^2-\varphi^2)^2}{\pi^2}$ для $\varphi,\theta\in(0,\pi/2]$, учитывая (76), (77), находим

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4}}{(\cos\theta_j-\cos\varphi)^2}\Delta\theta_j$$

$$\leq\int\limits_0^{\varphi-\frac{1}{m}}\frac{(1-\cos\theta)^{\alpha/2+1/4}}{(\cos\theta-\cos\varphi)^2}d\theta+\frac{\left(1-\cos\left(\varphi-\frac{1}{m}\right)\right)^{\alpha/2+1/4}}{\left(\cos\left(\varphi-\frac{1}{m}\right)-\cos\varphi\right)^2}\Delta^*$$

$$\leq\int\limits_0^{\varphi-\frac{1}{m}}\frac{(\sin\theta)^{\alpha+1/2}}{(\cos\theta-\cos\varphi)^2}d\theta+\frac{\left(\sin\left(\varphi-\frac{1}{m}\right)\right)^{\alpha+1/2}}{\left(2\sin\left(\varphi-\frac{1}{2m}\right)\sin\frac{1}{2m}\right)^2}\cdot\frac{3\pi a}{2m}$$

$$\leq \pi^4 \int\limits_0^{\varphi-\frac{1}{m}} \frac{\theta^{\alpha+1/2}}{(\theta-\varphi)^2(\theta+\varphi)^2}d\theta + \frac{1}{\left(\frac{1}{\pi}\sin\varphi\right)^{-\alpha+3/2}\sin^2\frac{1}{m}} \cdot \frac{3\pi a}{2m}. \quad (80)$$

На промежутке $\left(0, \varphi - \frac{1}{m}\right]$ функция $f(\theta) = \frac{\theta^{\alpha+1/2}}{(\theta+\varphi)^2}$ в точке $\theta = \frac{2\alpha+1}{3-2\alpha}\varphi$ достигает своего максимального значения $f_{\max} = c_3(\alpha)\varphi^{\alpha-3/2}$, где $c_3(\alpha) = \frac{(2\alpha+1)^{\alpha+1/2}}{16(3-2\alpha)^{\alpha-3/2}}$. Поэтому ввиду (80)

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_4} \frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4}}{(\cos\theta_j-\cos\varphi)^2}\Delta\theta_j \leq c_3(\alpha)\varphi^{\alpha-3/2} \int\limits_0^{\varphi-\frac{1}{m}} \frac{d\theta}{(\theta-\varphi)^2} + \frac{3\pi^5 a}{8} m(\sin\varphi)^{\alpha-3/2}$$
$$\leq c_3(\alpha)\varphi^{\alpha-3/2}\left(m-\frac{1}{\varphi}\right) + \frac{3\pi^7 a}{16} m\varphi^{\alpha-3/2} \leq \left(c_3(\alpha) + \frac{3\pi^7 a}{16}\right) m\varphi^{\alpha-3/2}.$$

Утверждение 2 доказано.

Принимая во внимание, что для $\theta_j \in \Delta_4$ будет

$$(1+\cos\theta_j)^{-\beta/2-1/4} \leq 1, \quad (1+\cos\theta_j)^{-\beta/2+1/4} \leq \sqrt{2},$$
$$(\sin\theta_j)^{2\alpha+1} = (1-\cos\theta_j)^\alpha (1+\cos\theta_j)^\alpha \sin\theta_j \leq \sqrt{2}(1-\cos\theta_j)^\alpha \sin\theta_j,$$
$$(\sin\theta_j)^{2\alpha+1} = (1-\cos\theta_j)^{\alpha+1/2}(1+\cos\theta_j)^{\alpha+1/2} \leq 2(1-\cos\theta_j)^{\alpha+1/2},$$

а также $(1+\cos\varphi)^{-\beta/2-1/4} \leq 1$, из (31) с учетом (9), (12), (66) получим

$$U_{41} \leq \frac{3\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} q_1$$
$$\times \sum_{\theta_j\in\Delta_4} \sin\theta_j (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4} \frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{\cos\theta_j - \cos\varphi}\left(\sum_{k=m}^{m+n}\frac{1}{k}\right)\Delta\theta_j$$
$$\leq \frac{3\sqrt{2}\lambda q_1 c^2(\alpha,\beta)}{\pi}\left[\frac{\pi}{3} + c_1(\alpha)(\pi+1) + \frac{3\pi a}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}\right)\right]. \quad (81)$$

Совершенно аналогично можно доказать, что

$$U_{4i} \leq \frac{3\sqrt{2}\lambda q_1 c^2(\alpha,\beta)}{\pi}\left[\frac{\pi}{3} + c_1(\alpha)(\pi+1) + \frac{3\pi a}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}\right)\right] \quad (i=2,3,4), \quad (82)$$

а из (35) и (36) с учетом (9), (12) и (66), следует, что

$$U_{45} \leq \frac{3\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi b}\left[\frac{\pi}{3} + c_1(\alpha)(\pi+1) + \frac{3\pi a}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}\right)\right], \quad (83)$$

$$U_{46} \leq \frac{6\lambda q_2 c^2(\alpha,\beta)}{\pi}\left[\frac{\pi}{3} + c_1(\alpha)(\pi+1) + \frac{3\pi a}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}\right)\right]. \quad (84)$$

При оценивании величины U_{40} поступим так же, как и при оценивании U_{20}. Из (30), с учетом (9) и (17)–(23) вытекает, что

$$U_{40} \leq \frac{3\lambda}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j\in\Delta_4} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \sum_{i=1}^{6} |g_i(\cos\varphi,\cos\theta_j)|\Delta\theta_j = \sum_{i=1}^{6} U_{40}^{(i)}, \quad (85)$$

где

$$U_{40}^{(i)} = \frac{3\lambda}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j \in \Delta_4} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} |g_i(\cos\varphi, \cos\theta_j)| \Delta\theta_j \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6). \tag{86}$$

Величины $U_{40}^{(i)}$ оцениваем так же, как $U_{20}^{(i)}$, используя вместо оценок (44)–(46) оценки (66)–(68):

$$U_{40}^{(1)} \le \frac{21\lambda c^2(\alpha,\beta)}{b} \cdot \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{3\pi^2 a}{4}\right), \tag{87}$$

$$U_{40}^{(2)} \le \frac{21\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi b}\left(\frac{(2\alpha+1)^{\alpha+1/2}}{16(3-2\alpha)^{\alpha-3/2}} + \frac{3\pi^7 a}{16}\right), \tag{88}$$

$$U_{40}^{(3)} \le \frac{6\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi b}\left(\frac{(2\alpha+1)^{\alpha+1/2}}{16(3-2\alpha)^{\alpha-3/2}} + \frac{3\pi^7 a}{16}\right), \tag{89}$$

$$U_{40}^{(4)} \le \frac{3\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi}\left(\frac{(2\alpha+1)^{\alpha+1/2}}{16(3-2\alpha)^{\alpha-3/2}} + \frac{3\pi^7 a}{16}\right), \tag{90}$$

$$U_{40}^{(5)} \le \frac{9\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi}\left[\frac{\pi}{3} + c_1(\alpha)(\pi+1) + \frac{3\pi a}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}\right)\right], \tag{91}$$

$$U_{40}^{(6)} \le \frac{9\lambda c^2(\alpha,\beta)}{2\sqrt{2}\pi}\left(\frac{(2\alpha+1)^{\alpha+1/2}}{16(3-2\alpha)^{\alpha-3/2}} + \frac{3\pi^7 a}{16}\right). \tag{92}$$

Собирая оценки (87)–(92) и подставляя их в (85), получим

$$U_{40} \le \frac{3\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi}\left[\frac{7\pi^2}{2b}\left(1 + \frac{3\pi^2 a}{4}\right) + \left(\frac{9\sqrt{2}}{b} + \frac{7}{2\sqrt{2}}\right)\left(c_3(\alpha) + \frac{3\pi^7 a}{16}\right)\right.$$
$$\left. + \pi + 3c_1(\alpha)(\pi+1) + \frac{9\pi a}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}\right)\right], \tag{93}$$

где $c_3(\alpha) = \frac{(2\alpha+1)^{\alpha+1/2}}{16(3-2\alpha)^{\alpha-3/2}}$.

Из (81)–(84), (93) следует, что

$$U_4 \le 3\lambda H_2(\alpha, a, b) c^2(\alpha,\beta), \tag{94}$$

где

$$H_2(\alpha, a, b) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{7\pi^2}{2b}\left(1 + \frac{3\pi^2 a}{4}\right) + \left(\frac{9\sqrt{2}}{b} + \frac{7}{2\sqrt{2}}\right)\left(c_3(\alpha) + \frac{3\pi^7 a}{16}\right)\right.$$
$$\left. + \left(\sqrt{2}\left(4q_1 + \sqrt{2}q_2 + \frac{1}{b}\right) + 3\right)\left(\frac{\pi}{3} + c_1(\alpha)(\pi+1) + \frac{3\pi a}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right]. \tag{95}$$

Оценим величину U_3. Из (28), учитывая оценки (9), (16), имеем

$$U_3 \le \frac{3N}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} \mu_j \left|\sum_{k=m}^{m+n} K_k^{\alpha,\beta}(\cos\varphi, \cos\theta_j)\right| \Delta\theta_j$$
$$\le \frac{3\lambda}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=0}^{k} \left\{h_i^{\alpha,\beta}\right\}^{-1} \left|P_i^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\right| \cdot \left|P_i^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)\right| \Delta\theta_j$$

$$= \frac{3\lambda}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \Delta\theta_j \sum_{k=m}^{m+n} \left\{h_0^{\alpha,\beta}\right\}^{-1}$$

$$+ \frac{3\lambda}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=1}^{k} \left\{h_i^{\alpha,\beta}\right\}^{-1} \left|P_i^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\right| \cdot \left|P_i^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)\right| \Delta\theta_j$$

$$= U_3^{(1)} + U_3^{(2)}. \quad (96)$$

Оценим сумму $U_3^{(1)}$. Учитывая, что для $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$ (см. (3))

$$\left\{h_0^{\alpha,\beta}\right\}^{-1} = \frac{\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \le \frac{\Gamma(3)}{[\Gamma(1.462)]^2} \le 2.56,$$

получаем

$$U_3^{(1)} \le \frac{7.68\lambda}{\pi(n+1)}(n+1) \sum_{\theta_j \in \Delta_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \Delta\theta_j \le \frac{7.68\lambda}{\pi} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} \Delta\theta_j \le \frac{15.36\lambda}{\pi}. \quad (97)$$

Для оценки $U_3^{(2)}$ нам понадобится

Утверждение 3 [3]. *При фиксированном p имеет место равенство*

$$\frac{\Gamma(N+p)}{\Gamma(N)} = N^p \left[1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right], \quad N \to \infty, \quad (98)$$

основанное на хорошо известной формуле Стирлинга.

В силу этого утверждения величина $\left\{h_i^{\alpha,\beta}\right\}^{-1}$ имеет порядок $O(i)$, так что $\left\{h_i^{\alpha,\beta}\right\}^{-1} \le c_4 i$. Учитывая, что для $\theta_j \in \Delta_3$ будет $(1+\cos\theta_j)^{-\beta/2-1/4} \le \sqrt{2}$, $(\sin\theta_j)^{2\alpha+1} = (1-\cos\theta_j)^{\alpha+1/2}(1+\cos\theta_j)^{\alpha+1/2} \le \sqrt{2}(1-\cos\theta_j)^{\alpha+1/2}$ и $(1+\cos\varphi)^{-\beta/2-1/4} \le 1$, из (96) получаем

$$U_3^{(2)} \le \frac{6\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=1}^{k} (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} (1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4} \Delta\theta_j$$

$$\le \frac{6\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=1}^{k} (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4}$$

$$\times \left[\left(1-\cos\left(\varphi-\frac{1}{m}\right)\right)^{\alpha/2+1/4} + \left(\cos\left(\varphi-\frac{1}{m}\right) - \cos\left(\varphi+\frac{1}{m}\right)\right)^{\alpha/2+1/4}\right] \frac{2}{m}$$

$$\le \frac{12\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta)}{\pi m(n+1)} \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=1}^{k} (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4}$$

$$\times \left[\left(1-\cos\left(\varphi-\frac{1}{m}\right)\right)^{\alpha/2+1/4} + \left(2\sin\varphi\sin\frac{1}{m}\right)^{\alpha/2+1/4}\right]$$

$$\le \frac{12\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta)}{\pi m(n+1)} \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=1}^{k} \left[\left(\frac{1-\cos\left(\varphi-\frac{1}{m}\right)}{1-\cos\varphi}\right)^{\alpha/2+1/4}\right.$$

$$\left. + 2^{3/4} \frac{(1-\cos\varphi)^{\alpha/4+1/8}}{(1-\cos\varphi)^{\alpha/2+1/4}} m^{-\alpha/2-1/4}\right]$$

$$\le \frac{12\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta)}{\pi m(n+1)} \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=1}^{k} \left[1 + \frac{2^{3/4} m^{-\alpha/2-1/4}}{(1-\cos\varphi)^{\alpha/4+1/8}}\right]$$

$$\le \frac{12(1+2^{3/4})\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta)}{\pi m(n+1)} \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=1}^{k} 1 \le \frac{12(1+2^{3/4})\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta)}{\pi m(n+1)}(m+n)(n+1)$$

$$\le \frac{12(1+2^{3/4})\lambda(d+1)c_4}{\pi} c^2(\alpha,\beta). \quad (99)$$

Объединяя (97), (99), получим

$$U_3 \le \frac{\lambda(d+1)}{\pi}[12(1+2^{3/4})c_4 c^2(\alpha,\beta)] + \frac{15.36\lambda}{\pi}. \quad (100)$$

Собирая оценки (42), (64), (94), (100) и сопоставляя их с (28), при $-1/2 < \alpha,\beta < 1/2$, $m \le aN$ $(0 < a < 1)$, $0 < bm \le n \le dm$ приходим к оценке

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(t) \le \lambda c^2(\alpha,\beta) H_3(\alpha,a,b,d) + \frac{\lambda}{\pi} 15.36 \quad \left(0 \le t \le 1 - \frac{4}{m^2}\right), \quad (101)$$

где

$$H_3(\alpha,a,b,d) = 2(8q_1 + q_2 + 2/b + 1) + 3H_1(\alpha,a,b)$$
$$+ 3H_2(\alpha,a,b) + \frac{12(1+2^{3/4})}{\pi} c_4(d+1), \quad (102)$$

а $H_1(\alpha,a,b)$ и $H_2(\alpha,a,b)$ определяются из соотношений (65) и (95).

2. Неравенство (27) запишем в следующем виде:

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi) \le \frac{2N+1}{\pi(n+1)} \sum_{j=1}^{N} \mu_j \left| \sum_{k=m}^{m+n} K_k^{\alpha,\beta}(\cos\varphi, \cos\theta_j) \right| \Delta\theta_j$$
$$\le \frac{3N}{\pi(n+1)} \Big(\sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_1} + \sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_2} + \sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_3} \Big) = W_1 + W_2 + W_3, \quad (103)$$

где $\overline{\Delta}_1 = \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$, $\overline{\Delta}_2 = \left[\arccos\left(1 - \frac{8}{m^2}\right), \frac{2\pi}{3}\right)$, $\overline{\Delta}_3 = \left(0, \arccos\left(1 - \frac{8}{m^2}\right)\right)$, а суммы W_i $(i = 1, 2)$ оцениваются с помощью равенства (16) аналогично суммам U_i:

$$W_i \le \sum_{l=1}^{6} W_{il}. \quad (104)$$

Суммы W_{il} имеют тот же смысл, что и U_{il}. Поэтому всюду далее при оценке W_{il} будем пользоваться равенствами (30)–(36).

При оценивании величин W_1 и W_2 вместо оценки (см. (12))

$$\left|P_k^{\alpha,\beta}(t)\right| \le c(\alpha,\beta) k^{-1/2} (1-t)^{-\alpha/2-1/4}$$

следует воспользоваться оценкой

$$\left|P_k^{\alpha,\beta}(t)\right| \le c(\alpha,\beta) k^{\alpha} \quad (1 - 4/m^2 \le t \le 1). \quad (105)$$

Оценим величину W_1. Учитывая, что для $\theta_j \in \overline{\Delta}_1$ будет $\cos\varphi - \cos\theta_j \ge 1/2$, $(1-\cos\theta_j)^{-\alpha/2-1/4} \le 1$, $(\sin\theta_j)^{2\beta+1} = (1-\cos\theta_j)^{\beta+1/2}(1+\cos\theta_j)^{\beta+1/2} \le$

$2(1+\cos\theta_j)^{\beta+1/2}$, и используя равенство (16) и оценки (10), (12), (105), получим $(1-4/m^2\le\cos\varphi\le 1)$

$$W_{10}\le\frac{12\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}(1-\cos\varphi)\sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_1}(1+\cos\theta_j)^{\beta/2+3/4}\times\left(\sum_{k=m}^{m+n}k^{\alpha+1/2}\right)\Delta\theta_j\le 16\lambda(d+1)c^2(\alpha,\beta),\quad(106)$$

$$W_{11}\le\frac{12\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}q_1\sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_1}(1+\cos\theta_j)^{\beta/2+1/4}\times\left(2\sum_{k=m}^{m+n}(k+1)^{\alpha-1/2}\right)\Delta\theta_j\le 8\lambda q_1c^2(\alpha,\beta).\quad(107)$$

Аналогично можно показать, что

$$W_{1i}\le 8\lambda q_1c^2(\alpha,\beta)\quad(i=2,3,4).\quad(108)$$

Далее,

$$W_{15}\le\frac{12\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}\sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_1}(1+\cos\theta_j)^{\beta/2+1/4}((m+n+1)^{\alpha+1/2}+m^{\alpha+1/2})\Delta\theta_j\le\frac{4\lambda(d+3)}{b}c^2(\alpha,\beta),\quad(109)$$

$$W_{16}\le\frac{12\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}q_2(1-\cos\varphi)\sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_1}(1+\cos\theta_j)^{\beta/2+3/4}\left(\sum_{k=m}^{m+n}k^{\alpha+1/2}\right)\Delta\theta_j\le 16\lambda(d+1)q_2c^2(\alpha,\beta).\quad(110)$$

Собирая оценки (106)–(110) и подставляя их в (104), выводим, что

$$W_1\le 16\lambda c(\alpha,\beta)\left[2q_1+(q_2+1)(d+1)+\frac{d+3}{4b}\right].\quad(111)$$

Для оценки W_{2i} $(i=\overline{1,6})$ докажем предварительно следующее

Утверждение 4. *Если $m\le aN$ $(0<a<1)$, $0<bm\le n\le dm$, то*

$$\sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_2}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^{-\alpha/2+5/4}}\Delta\theta_j\le\left(c_1(\alpha)+\frac{3\pi a}{2}\right)m^{-\alpha+1/2}.\quad(112)$$

Доказательство. Ясно, что функция $g(\theta)=\frac{\sin\theta}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{-\alpha/2+5/4}}$ монотонно убывает на промежутке $(\varphi,\pi]$. Поэтому, воспользовавшись оценками (8) и (15), получим

$$\sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_2}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^{-\alpha/2+5/4}}\Delta\theta_j$$

$$\le\int\limits_{\arccos\left(1-\frac{8}{m^2}\right)}^{2\pi/3}\frac{\sin\theta}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{-\alpha/2+5/4}}d\theta+\frac{\sin\left(\arccos\left(1-\frac{8}{m^2}\right)\right)}{\left(\cos\varphi-\left(1-\frac{8}{m^2}\right)\right)^{-\alpha/2+5/4}}\Delta^*$$

$$\le\frac{\left(\cos\varphi-\left(1-\frac{8}{m^2}\right)\right)^{\alpha/2-1/4}}{-\alpha/2+1/4}+\frac{m^{-\alpha+5/2}\left(1-\left(1-\frac{8}{m^2}\right)^2\right)^{1/2}}{4}\cdot\frac{3\pi a}{2m}$$

$$\le\left(c_1(\alpha)+\frac{3\pi a}{2}\right)m^{-\alpha+1/2}.$$

Утверждение 4 доказано.

Для W_{21} с учетом оценок (9) и (112) и неравенств $(\sin\theta_j)^{2\alpha} \le \sqrt{2}(1-\cos\theta_j)^\alpha$, $(1+\cos\theta_j)^{-\beta/2-1/4} \le \sqrt{2}$, $(1+\cos\theta_j)^{-\beta/2+1/4} \le \sqrt{2}$ имеем

$$W_{21} \le \frac{6\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} q_1 \sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_2} \sin\theta_j \frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\left(2\sum_{k=m}^{m+n}(k+1)^{\alpha-1/2}\right)\Delta\theta_j$$
$$\le \frac{12\lambda q_1}{\pi} c^2(\alpha,\beta) m^{\alpha-1/2} \sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^{-\alpha/2+5/4}}\Delta\theta_j$$
$$\le \frac{12\lambda q_1}{\pi}\left(c_1(\alpha)+\frac{3\pi a}{2}\right)c^2(\alpha,\beta). \quad (113)$$

Аналогично доказывается, что

$$W_{2i} \le \frac{12\lambda q_1}{\pi}\left(c_1(\alpha)+\frac{3\pi a}{2}\right)c^2(\alpha,\beta) \quad (i=2,3,4). \quad (114)$$

Далее, используя равенства (35), (36) и оценки (9), (112), получим

$$W_{25} \le \frac{6\lambda(d+3)}{\pi(n+1)} c^2(\alpha,\beta) m^{\alpha+1/2} \sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_2} \sin\theta_j \frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\Delta\theta_j$$
$$\le \frac{6\lambda(d+3)}{\pi(n+1)} c^2(\alpha,\beta) m^{\alpha+1/2} \sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^{-\alpha/2+5/4}}\Delta\theta_j$$
$$\le \frac{6\lambda(d+3)}{\pi b}\left(c_1(\alpha)+\frac{3\pi a}{2}\right)c^2(\alpha,\beta), \quad (115)$$

$$W_{26} \le \frac{48\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi m^2(n+1)} q_2 \sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_2} \sin\theta_j \frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\left(\sum_{k=m}^{m+n} k^{\alpha+1/2}\right)\Delta\theta_j$$
$$\le \frac{48\lambda q_2 c^2(\alpha,\beta)}{\pi m^2}(m+n)^{\alpha+1/2} \sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^{-\alpha/2+5/4}}\Delta\theta_j$$
$$\le \frac{48\lambda(d+1)q_2}{\pi}\left(c_1(\alpha)+\frac{3\pi a}{2}\right)c^2(\alpha,\beta). \quad (116)$$

Наконец, оценим W_{20}. Для этого приведем без доказательства

Утверждение 5. *Если* $m \le aN$ $(0<a<1)$, $0<bm\le n\le dm$, *то*

$$\sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^2}\Delta\theta_j \le \frac{m^2}{4}\left(1+\frac{3\pi a}{2}\right), \quad (117)$$

$$\sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^{-\alpha/2+7/4}}\Delta\theta_j \le \frac{m^{-\alpha+3/2}}{2}\left(c_2(\alpha)+\frac{3\pi a}{2}\right), \quad (118)$$

$$\sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_2} \frac{\sin\theta_j}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\Delta\theta_j \le \ln\frac{3}{8}m^2+\frac{3\pi a}{2}. \quad (119)$$

Величину W_{20} оцениваем точно таким же способом, что U_{20}, используя везде оценку (105), а вместо оценок (44)–(46) — оценки (116)–(118). В конечном итоге получаем

$$W_{20} \le 3\lambda H_4(\alpha, a, b, d) c^2(\alpha, \beta), \tag{120}$$

где

$$H_4(\alpha, a, b, d) = \frac{4(d+4)^2}{\pi b}\left(1 + c_2(\alpha) + \frac{3\pi a}{2}\right)$$
$$+ \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{3\pi a}{2}\right)\left(\frac{7}{2} + 12(d+1) + \frac{2}{b}\left(4(d+4)^{3/2} + (d+2)\right) - \frac{36}{5\pi}(d+1)\right). \tag{121}$$

Собирая оценки (113)–(116), (120), приходим к неравенству

$$W_2 \le \lambda H_5(\alpha, a, b, d) c^2(\alpha, \beta), \tag{122}$$

где

$$H_5(\alpha, a, b, d) = \frac{6}{\pi}\left(c_1(\alpha) + \frac{3\pi a}{2}\right)\left(8(q_1 + (d+1)q_2) + \frac{d+3}{b}\right) + 3H_4(\alpha, a, b, d). \tag{123}$$

Оценим величину W_3. Из (103) с учетом (9), (16) и (105) имеем

$$W_3 \le \frac{3\lambda}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=0}^{k} \left\{h_i^{\alpha,\beta}\right\}^{-1} \left|P_i^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\right| \cdot \left|P_i^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)\right| \Delta\theta_j$$
$$= \frac{3\lambda}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \Delta\theta_j \sum_{k=m}^{m+n} \left\{h_0^{\alpha,\beta}\right\}^{-1}$$
$$+ \frac{3\lambda}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=1}^{k} \left\{h_i^{\alpha,\beta}\right\}^{-1} \left|P_i^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\right| \cdot \left|P_i^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)\right| \Delta\theta_j$$
$$= W_3^{(1)} + W_3^{(2)}. \tag{124}$$

Величина $W_3^{(1)}$ оценивается аналогично $U_3^{(1)}$ (см. (97)):

$$W_3^{(1)} \le \frac{7.68\lambda}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \left(\sum_{k=m}^{m+n} 1\right) \Delta\theta_j \le \frac{7.68\lambda}{\pi} \sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \Delta\theta_j$$
$$\le \frac{7.68\lambda}{\pi} \arccos\left(1 - \frac{8}{m^2}\right) \le \frac{7.68\lambda}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{m} \le 15.36\lambda. \tag{125}$$

Как показано при оценке величины $U_3^{(2)}$, в силу утверждения 3 будет $\left\{h_i^{\alpha,\beta}\right\}^{-1} \le c_4 i$. Кроме того, для $\theta_j \in \overline{\Delta}_3$ имеем $(1+\cos\theta_j)^{-\beta/2-1/4} \le 1$, $(\sin\theta_j)^{2\alpha+1/2} \le \sqrt{2}(1-\cos\theta_j)^{\alpha+1/2}$. Поэтому

$$W_3^{(2)} \le \frac{3\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} c_4 \sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_3} (1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4} \left(\sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=1}^{k} i^{\alpha+1/2}\right) \Delta\theta_j$$
$$\le \frac{3\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} c_4 \sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_3} (1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4} \left(\sum_{k=m}^{m+n} k^{\alpha+3/2}\right) \Delta\theta_j$$

$$\leq \frac{3\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} c_4 \left(\frac{8}{m^2}\right)^{\alpha/2+1/4} (m+n+1)^{\alpha+3/2}(n+1)\arccos\left(1-\frac{8}{m^2}\right)$$

$$\frac{24(d+2)^2\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta)}{\pi} m\frac{2\pi}{m} \leq 24(d+2)^2\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta). \quad (126)$$

Окончательно из (124)–(126) следует, что

$$W_3 \leq 24(d+2)^2\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta) + 15.36\lambda. \quad (127)$$

Объединяя оценки (111), (122), (127) и сопоставляя их с (103), при $-1/2 < \alpha,\beta < 1/2$, $m \leq aN$ $(0 < a < 1)$, $0 < bm \leq n \leq dm$ получаем

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(t) \leq \lambda c^2(\alpha,\beta) H_6(\alpha,a,b,d) + 15.36\lambda \quad (1 - 4/m^2 \leq t \leq 1), \quad (128)$$

где

$$H_6(\alpha,a,b,d) = 16\left[2q_1 + (q_2+1)(d+1) + \frac{d+3}{4b}\right] + H_5(\alpha,a,b,d) + 24(d+2)^2 c_4. \quad (129)$$

Из (101) и (128), в свою очередь, при $-1/2 < \alpha,\beta < 1/2$, $m \leq aN$ $(0 < a < 1)$, $0 < bm \leq n \leq dm$ выводим, что

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(t) \leq \lambda c^2(\alpha,\beta) H_7(\alpha,a,b,d) + \frac{\pi+1}{\pi} 15.36\lambda \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (130)$$

где $H_7(\alpha,a,b,d) = H_3(\alpha,a,b,d) + H_6(\alpha,a,b,d)$.

Перейдем теперь к случаю $-1 \leq t \leq 0$. Покажем, что его можно свести к уже рассмотренному случаю $0 \leq t \leq 1$. Используя свойство (11), из (26) для произвольного $t \in [0,1]$ имеем

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(-t) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{N}\mu_j\left|\sum_{k=m}^{m+n} K_k^{\alpha,\beta}(-t,x_j)\right|$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{N}\mu_j\left|\sum_{k=m}^{m+n}\left\{h_k^{\alpha,\beta}\right\}^{-1} P_k^{\alpha,\beta}(-t) P_k^{\alpha,\beta}(x_j)\right|$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{N}\mu_j\left|\sum_{k=m}^{m+n}\left\{h_k^{\beta,\alpha}\right\}^{-1} P_k^{\beta,\alpha}(t) P_k^{\beta,\alpha}(-x_j)\right|. \quad (131)$$

Сделав замену переменных $t = \cos\varphi$, $x_j = \cos\theta_j$, из (131) получим

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(-\cos\varphi) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{N}\mu_j\left|\sum_{k=m}^{m+n}\left\{h_k^{\beta,\alpha}\right\}^{-1} P_k^{\beta,\alpha}(\cos\varphi) P_k^{\beta,\alpha}(\cos(\pi-\theta_j))\right|$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{N}\mu_j\left|\sum_{k=m}^{m+n}\left\{h_k^{\beta,\alpha}\right\}^{-1} P_k^{\beta,\alpha}(\cos\varphi) P_k^{\beta,\alpha}(\cos\xi_j)\right| = \widetilde{V}_{m,n,N}^{\beta,\alpha}(\cos\varphi).$$

Так как $\xi_j = \pi - \theta_j$ имеют одинаковые свойства с θ_j, то, проводя те же рассуждения, что при оценке величины $V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)$ (заменив везде α на β и β на α, $-1/2 < \alpha,\beta < 1/2$), выводим, что

$$\widetilde{V}_{m,n,N}^{\beta,\alpha}(\cos\varphi) \leq \lambda c^2(\alpha,\beta) H_8(\beta,a,b,d) + \frac{\pi+1}{\pi} 15.36\lambda \quad (0 \leq \cos\varphi \leq 1),$$

где величина $H_8(\beta,a,b,d)$ получается из $H_7(\alpha,a,b,d)$ заменой α на β во всех постоянных, входящих в $H_7(\alpha,a,b,d)$.

Тем самым доказано, что

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(t) \leq \lambda c^2(\alpha,\beta) H_8(\beta,a,b,d) + \frac{\pi+1}{\pi} 15.36\lambda \quad (-1 \leq t \leq 0) \quad (132)$$

при $-1/2 < \alpha,\beta < 1/2$, $m \leq aN$ $(0 < a < 1)$, $0 < bm \leq n \leq dm$.

Сопоставляя (130), (132) с (26) и (25), приходим к выводу, что при $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$, $m \le aN$ $(0 < a < 1)$, $0 < bm \le n \le dm$ будет

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(t) \le \lambda c^2(\alpha,\beta)H(\alpha,\beta,a,b,d) + \frac{\pi+1}{\pi}30.72\lambda \quad (-1 \le t \le 1), \tag{133}$$

где $H(\alpha,\beta,a,b,d) = H_7(\alpha,a,b,d) + H_8(\beta,a,b,d)$.

Теорема доказана.

§ 4. Приближение непрерывных функций средними Валле-Пуссена

Пусть $f(t) \in C[-1,1]$, $p_m^*(t) \in H^m$ — многочлен наилучшего приближения функции $f(t)$ в пространстве $C[-1,1]$. Обозначим через $E_m(f) = \max_{t\in[-1,1]} |f(t) - p_m^*(t)|$ наилучшее приближение функции $f(t)$ алгебраическими многочленами степени m.

Теорема 2. *Если $f(t) \in C[-1,1]$, $v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f) = v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f,t)$ — средние Валле-Пуссена дискретных сумм Фурье — Якоби, то при $-1/2 < \alpha,\beta < 1/2$, $m \le aN$ $(0 < a < 1)$, $0 < bm \le n \le dm$, $m + n \le N - 1$*

$$\left|v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f,t) - f(t)\right| \le cE_m(f),$$

где c — некоторая положительная постоянная, зависящая от α, β, a, b, d.

Доказательство. Из соотношений (5), (6) следует, что средние Валле-Пуссена $v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f)$ не изменяют алгебраического многочлена $p_m \in H^m$, т. е. $v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(p_m,t) \equiv v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(p_m)$. Используя соотношения (24), (26) и (133), имеем

$$\left|v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f,t) - f(t)\right| \le \left|v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f,t) - p_m^*(t)\right| + \left|p_m^*(t) - f(t)\right| \le \left|v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f - p_m^*,t)\right|$$
$$+ E_m(t) \le E_m(t)V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(t) + E_m(t) = (1 + H(\alpha,\beta,a,b,d))E_m(t) \le cE_m(t).$$

Теорема доказана.

Таким образом, средние Валле-Пуссена $v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f,t)$ дискретных сумм Фурье — Якоби приближают непрерывную функцию (при наличии лишь информации о значениях этой функции в конечном числе точек $\Omega_N \in [-1,1]$) со скоростью наилучшего приближения $E_m(f)$ этой функции среди алгебраических многочленов степени m.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
2. *Шарапудинов И. И., Вагабов И. А.* О сходимости средних Валле-Пуссена для сумм Фурье — Якоби // Мат. заметки. 1996. Т. 60, № 4. С. 569–586.
3. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976.

Статья поступила 17 июля 2003 г.

Коркмасов Фуад Муэддинович
Институт проблем геотермии Дагестанского научного центра РАН,
пр. Имама Шамиля, 39а, Махачкала 367030
layuza@dinet.ru, kfuad@mail.ru