Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2004. Том 45, № 1

УДК 517.946

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ В ЦЕЛОМ ПО ВРЕМЕНИ КОМПАКТНОГО НОСИТЕЛЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Ф. Тедеев

Аннотация: Исследуется квазилинейное вырождающееся параболическое уравнение с неоднородной плотностью. Установлено, что в зависимости от поведения плотности на бесконечности для решения задачи Коши имеют место либо свойство конечной скорости распространения возмущений, либо разрушение носителя за конечное время.

Ключевые слова: квазилинейное вырождающееся параболическое уравнение, неоднородная плотность, носитель, исчезновение носителя.

1. Введение

В работе рассматривается следующая задача Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho(|x|)u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}u_{x_i}) \tag{1.1}$$

в $Q_T = \mathbb{R}^N \times (0,T)$, $N \geq 1$,

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,\ u_0(x) \geq 0 \text{ для п. в. } x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.2}$$

Здесь $u = u(x,t)$, $x = (x_1,\dots,x_N)$, $|x| = \left(x_1^2 + \dots + x_N^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $Du = (u_{x_1},\dots,u_{x_N})$. Всюду в дальнейшем предполагается, что

$$m + \lambda - 2 > 0, \quad \lambda > 0, \tag{1.3}$$

$\rho(s)$, $s \geq 0$, — убывающая, непрерывная, положительная функция; $\rho(0) = 1$. Кроме того,

$$\operatorname{supp} u_0 \subset B_{R_0} \equiv \{|x| < R_0\}, \quad \|u_0\|_{\infty,\mathbb{R}^N} < \infty. \tag{1.4}$$

Типичным примером функции ρ является

$$\rho = (1+|x|)^{-l}, \quad l > 0. \tag{1.5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (код проекта 97–30551) и ДФФД Украины (код проекта 01.07/00252).

Будем говорить, что решение уравнения (1.1) *обладает свойством конечной скорости распространения возмущений* (КСР), если из условия $\operatorname{supp} u(.,t_0) < \infty$ в какой-то момент времени $t_0 \geq 0$ следует, что это свойство сохраняется для всех моментов времени $t > t_0$. В противном случае будем говорить, что носитель решения (1.1) *разрушается за конечное время* (РНКВ). Основной целью данной работы является выяснение условий на $\rho(|x|)$, при которых имеют место свойства КСР либо РНКВ для решений задачи (1.1), (1.2). Отметим, что если $\rho \equiv 1$, то в силу условий (1.3) и (1.4) решения задачи (1.1), (1.2) обладают свойством КСР (см., например, обзорную работу [1]). Однако если, например, в (1.5) l «слишком велика», то имеет место РНКВ (см. [2–7] при $\lambda \equiv 1$).

Прежде чем перейти к формулировкам результатов работы, опишем некоторые условия на функцию ρ, характеризующие ее поведение на бесконечности. Положим $K = N(m+\lambda-2)+\lambda+1$, $l^* = K(m+\lambda-1)^{-1}$, если $\lambda+1 < N$, и $l^* = \lambda+1$, если $\lambda+1 \geq N$. Будем говорить, что функция $f(r) = \rho(r)r^{l^*}$ *удовлетворяет условию* (1.6), если существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $r > 0$

$$f(r)r^{-\varepsilon_0} \quad \text{не убывает.} \tag{1.6}$$

Далее, будем говорить, что $f(r)$ *удовлетворяет условию* (1.7), если существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что

$$f(r)r^{\varepsilon_1} \quad \text{ограничена для всех } r > 0. \tag{1.7}$$

Пусть

$$\omega_1(R) = \int\limits_0^R \rho(s)(1+s)^\lambda\, ds, \quad \omega_2(R) = \int\limits_0^R \rho(s)((s+1)\ln(s+2))^\lambda\, ds.$$

Основными результатами данной работы являются следующие утверждения.

Теорема 1.1. *Пусть $u(x,t)$ — решение задачи* (1.1), (1.2) *в Q_T. Тогда если $\rho(|x|)$ удовлетворяет условию* (1.6), *то $u(x,t)$ обладает свойством* КСР.

Теорема 1.2. *Пусть $u(x,t)$ — решение задачи* (1.1), (1.2) *в Q_T. Тогда $u(x,t)$ обладает свойством* РНКВ *при следующих условиях:*

$$\lambda+1 < N \quad \text{и выполнено условие (1.7)}, \tag{1.8}$$

$$\lambda+1 > N \quad \text{и} \quad \omega_1(\infty) < \infty, \tag{1.9}$$

$$\lambda+1 = N \quad \text{и} \quad \omega_2(\infty) < \infty. \tag{1.10}$$

Замечание 1.1. Определение решения задачи (1.1), (1.2) будет дано в п. 2.

Замечание 1.2. Если ρ определено в (1.5), то в качестве ε_0 и ε_1 можно взять l^*-l и $l-l^*$ соответственно, и, следовательно, (1.6) выполнено при $l < l^*$, а (1.7) при $l > l^*$. Таким образом, l^* играет роль критического показателя в задаче (1.1), (1.2). Более того, условия (1.9), (1.10) при $\lambda = 1$ совпадают с ранее известными точными результатами работы [6].

Отметим также, что в работе [4] наличие свойства РНКВ при $\lambda = 1$, $N \geq 3$ доказано при условии

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho |x|^{-\frac{N-2}{m}}\, dx < \infty.$$

В случае примера (1.5) это условие переходит в $l > N - \frac{N-2}{m}$, что соответствует условию $l > l^*$.

В работе [8] при $\lambda = 1$ получены точные условия на ρ и поведение $u(x,t)$ на бесконечности, гарантирующие единственность задачи (1.1), (1.2). Наконец, в недавнем интересном цикле работ [9–11] исследованы вопросы корректности задачи Коши для линейных уравнений и систем со степенным характером поведения ρ на бесконечности.

В данной работе развиваются энергетические подходы, предложенные в работах [12–14], которые позволяют значительно расширить классы рассматриваемых задач.

Через c, c_i ниже будем обозначать постоянные, зависящие лишь от m, λ, N.

Структура работы следующая. В п. 2 даются вспомогательные утверждения. В пп. 3 и 4 приводятся доказательства теорем 1.1 и 1.2.

2. Вспомогательные утверждения

Прежде всего отметим, что задача (1.1), (1.2) заменой $v = u^\sigma$, $\sigma = \frac{m+\lambda-1}{\lambda}$, допускает эквивалентную запись

$$\rho \frac{\partial v^{\frac{1}{\sigma}}}{\partial t} = \sigma^{-\lambda} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(|Dv|^{\lambda-1} v_{x_i}), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2.1}$$

$$v^{\frac{1}{\sigma}}(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.2}$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей. Будем говорить, что $v(x,t)$ есть *слабое решение задачи* (2.1), (2.2) с граничным условием Дирихле

$$v|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0 \tag{2.3}$$

в $D_T = \Omega \times (0,T)$, если $v \geq 0$ для п. в. $(x,t) \in D_T$, $v \in L_\infty\big([\tau,T) : \overset{\circ}{W}{}^1_{\lambda+1}(\Omega)\big)$ с $v^{1/\sigma} \in C([0,T) : L_1(\Omega))$ для любого $\tau > 0$, и v удовлетворяет (2.1)–(2.3) в смысле интегрального тождества

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\rho v^{1/\sigma} \eta_t - \sigma^{-\lambda} \sum_{i=1}^{N} |Dv|^{\lambda-1} v_{x_i} \eta_{x_i} \right) dxdt = 0 \tag{2.4}$$

для любой функции $\eta(x,t) \in C_0^1(D_T)$. Кроме того, (2.2) понимается в следующем смысле:

$$\lim_{t\to 0} \big\| v^{1/\sigma}(.,t) - v_0^{1/\sigma} \big\|_{L_1(\Omega)} = 0. \tag{2.5}$$

Замечание 2.1. Существование и единственность решения задачи (2.1)–(2.3) для любого $T > 0$ следуют из результатов работы [15].

Далее, под решением $v(x,t)$ задачи Коши (2.1), (2.2) в Q_T будем понимать предел в смысле интегрального тождества (2.4) при $n \to \infty$ соответствующих решений $v^{(n)}(x,t)$ задач Коши — Дирихле в $D_T^{(n)} = B_n \times (0,T)$. При этом $\big(v_0^{(n)}\big)^{1/\sigma} \to v_0^{1/\sigma}$ при $n \to \infty$ в L_1 (функции $v^{(n)}(x,t)$, $v_0^{(n)}$ считаются продолженными нулем вне $B_n \times (0,T)$).

Отметим, что если решения $v^{(n)}$ обладают свойством КСП, то доказательство существования решения (2.1), (2.2), по существу, сводится к доказательству существования решения задачи Коши — Дирихле и, следовательно, гарантировано.

В дальнейшем нам потребуется следующая

Лемма 2.1. *Предположим, что выполнены условия* (1.9), (1.10). *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho(|x|)|v|^{\lambda+1}\,dx \le C(\lambda,N)\int\limits_{\mathbb{R}^N} |Dv|^{\lambda+1}\,dx. \tag{2.6}$$

Если же $\lambda+1<N$, *то*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|v|^{\lambda+1}}{|x|^{\lambda+1}}\,dx \le C(\lambda,N)\int\limits_{\mathbb{R}^N} |Dv|^{\lambda+1}\,dx. \tag{2.7}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $v\ge 0$, $v\in \overset{\circ}{C}{}^1(\mathbb{R}^N)$. Пусть $\lambda+1>N$. Непосредственные вычисления дают

$$\sum_{i=1}^N\left[\frac{\omega_1(|x|)v^{\lambda+1}}{(1+|x|)^\lambda}\frac{x_i}{|x|}\right]_{x_i} = -\rho(|x|)v^{\lambda+1} - \lambda\frac{\omega_1(|x|)v^{\lambda+1}}{(1+|x|)^{\lambda+1}} + \frac{(N-1)}{|x|}\frac{\omega_1(|x|)v^{\lambda+1}}{(1+|x|)^\lambda} + (1+\lambda)\frac{\omega_1(|x|)v^\lambda}{(1+|x|)^\lambda|x|}\sum_{i=1}^N v_{x_i}x_i.$$

Интегрируя это равенство по $\mathbb{R}^N$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho(|x|)|v|^{\lambda+1}\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N}\left[\lambda - \frac{(N-1)(1+|x|)}{|x|}\right]\frac{\omega_1(|x|)v^{\lambda+1}}{(1+|x|)^{\lambda+1}}\,dx \le (\lambda+1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{\omega_1(|x|)v^\lambda}{(1+|x|)^\lambda}|Dv|\,dx \equiv (\lambda+1)J_1. \tag{2.8}$$

Заметим, что если $\lambda+1>N$, то для $|x|>\frac{2(N-1)}{\lambda+1-N}\equiv c_1$ будет

$$\lambda - \frac{(N-1)(1+|x|)}{|x|} \ge \frac{\lambda+1-N}{2}. \tag{2.9}$$

Применяя к правой части (2.8) неравенство Юнга, получаем

$$J_1 \le \frac{\varepsilon_1^{\lambda+1}}{\lambda+1}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{\omega_1(|x|)}{(1+|x|)^{\lambda+1}}v^{\lambda+1}\,dx + \frac{\lambda}{\lambda+1}\varepsilon_1^{-\frac{\lambda+1}{\lambda}}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\omega_1(|x|)|Dv|^{\lambda+1}\,dx \equiv \frac{1}{\lambda+1}\varepsilon_1^{\lambda+1}J_2 + \frac{\lambda}{\lambda+1}\varepsilon_1^{-\frac{\lambda+1}{\lambda}}J_3. \tag{2.10}$$

Оценим J_2 следующим образом:

$$J_2 \le \omega_1(\infty)\int\limits_{|x|<c_1} v^{\lambda+1}\,dx + \int\limits_{|x|>c_1}\frac{\omega_1(|x|)}{(1+|x|)^{\lambda+1}}v^{\lambda+1}\,dx.$$

Поскольку

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho(|x|)v^{\lambda+1}\,dx \ge \frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho(|x|)v^{\lambda+1}\,dx + \frac{\rho(c_1)}{2}\int\limits_{|x|<c_1}v^{\lambda+1}\,dx,$$

выбирая в (2.10) $\varepsilon_1 = \min\{(\frac{\lambda+1-N}{4})^{\frac{1}{\lambda+1}}, (\frac{\rho(c_1)}{2\omega(\infty)})^{\frac{1}{\lambda+1}}\}$, приходим к требуемой оценке.

Докажем (2.6) при $\lambda+1=N$. Рассуждая аналогично, имеем

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\omega_2(|x|)v^N}{[(2+|x|)\ln(2+|x|)]^{N-1}}\frac{x_i}{|x|}\right)_{x_i}=-\rho(|x|)v^N-(N-1)\left[1-\frac{1}{|x|}\ln(2+|x|)\right]$$

$$\times\frac{v^N}{[(2+|x|)\ln(2+|x|)]^{N}}+N\frac{\omega_2(|x|)v^{N-1}}{[(2+|x|)\ln(2+|x|)]^{N-1}}\sum_{i=1}^{N}v_{x_i}\frac{x_i}{|x|}. \quad (2.11)$$

Заметим, что $1-\frac{1}{|x|}\ln(2+|x|)>\frac{1}{2}$, если $|x|>4$. Следовательно, интегрируя по $\mathbb{R}^N$ обе части (2.11) и применяя неравенство Юнга, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho(|x|)v^N\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{|x|>4}\frac{\omega_2(|x|)v^N}{[(2+|x|)\ln(2+|x|)]^{N}}\,dx$$

$$\le\varepsilon_2^N\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{\omega_2(|x|)v^N}{[(2+|x|)\ln(2+|x|)]^{N}}\,dx+(N-1)\varepsilon_2^{-\frac{N}{N-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\omega_2(|x|)|Dv|^N\,dx.$$

Первое слагаемое в правой части оценим через

$$\frac{\varepsilon_2^N\omega_2(\infty)}{[2\ln 2]^N}\int\limits_{|x|<4}v^N\,dx+\varepsilon_2^N\int\limits_{|x|>4}\frac{\omega_2(|x|)v^N}{[(2+|x|)\ln(2+|x|)]^{N}}\,dx.$$

Следовательно, выбирая

$$\varepsilon_2=\min\left\{2\ln 2\left[\frac{\rho(4)}{2\omega_2(\infty)}\right]^{\frac{1}{N}},2^{-\frac{2}{N}}\right\},$$

приходим к требуемой оценке. Доказательство (2.7) стандартно, и мы его опускаем.

Лемма 2.1 доказана.

3. Доказательство теоремы 1.1

Прежде чем перейти непосредственно к доказательству теоремы 1.1, сделаем одно замечание. Для получения нужных интегральных оценок приходится интегрировать по частям по времени в первом слагаемом в уравнении (1.1). Однако, для этого требуется некоторая гладкость $u(x,t)$ по времени. Чтобы избежать такого требования, обычно пользуются сглаживанием с помощью стекловских усреднений и последующим предельным переходом по параметру усреднения. Другим способом обойти указанную трудность является требование дополнительной гладкости начальной функции. Например, если предположить дополнительно, что $v_0\in\overset{\circ}{W}{}^1_{\lambda+1}(\Omega)$, то, как следует из результатов работы [15], решение (1.1)–(1.3) можно понимать почти всюду в D_T. Ради простоты изложения всюду в дальнейшем будем предполагать, что $u(x,t)$ обладает достаточной гладкостью.

Доказательство проведем методом работ [12–14].

Пусть

$$R_n=R+\delta 2^{-n}R,\quad \overline{R}_n=\frac{1}{2}(R-\delta 2^{-n}R),\quad R>4R_0,\ n=0,1,\dots.$$

Рассмотрим последовательность срезающих функций $\zeta_n(x)$ таких, что $\zeta_n=1$ при $x\in B_{R_n}\backslash B_{\overline{R}_n}$, $\zeta_n=0$ вне $B_{R_{n-1}}\backslash B_{\overline{R}_{n-1}}$, $|D\zeta_n|\le\frac{c2^n}{\delta R}$, где $0<\delta<1/2$ —

заданное число. Отметим, что $R_{n-1} \ge R_n \ge R$, $\overline{R}_{n-1} \le \overline{R}_n \le \frac{R}{2}$. Кроме того, $\operatorname{supp}\zeta_n \cap \operatorname{supp} u_0 = \varnothing$. Пусть $0 < \theta < 1$. Умножим обе части (1.1) на $\zeta_n^{\lambda+1} u^\theta$ и результат проинтегрируем по Q_t. Это даст равенство

$$\frac{1}{1+\theta}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u^{1+\theta}\zeta_n^{\lambda+1}\,dx + \theta\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} u^{m+\theta-2}|Du|^{\lambda+1}\zeta_n^{\lambda+1}\,dxd\tau$$
$$= -(\lambda+1)\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} \zeta_n^{\lambda} u^{m+\theta-1}|Du|^{\lambda-1} DuD\zeta_n\,dxd\tau. \quad (3.1)$$

Применяя неравенство Юнга к правой части (3.1), оценим ее через

$$\lambda h^{\lambda+1}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} \zeta_n^{\lambda+1} u^{m+\theta-2}|Du|^{\lambda+1}\,dxd\tau + h^{-\frac{\lambda+1}{\lambda}}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} |D\zeta_n|^{\lambda+1} u^{m+\theta+\lambda-1}\,dxd\tau,$$

где $h > 0$ — произвольное число. Выбирая $h = (\frac{\theta}{2\lambda})^{\frac{1}{\lambda+1}}$, приходим к неравенству

$$\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u^{\theta+1}(.,\tau)\zeta_n^{\lambda+1}\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} u^{m+\theta-2}|Du|^{\lambda+1}\zeta_n^{\lambda+1}\,dxd\tau$$
$$\le c\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} u^{m+\theta+\lambda-1}|D\zeta_n|^{\lambda+1}\,dxd\tau. \quad (3.2)$$

Пусть $v_n = u^{\frac{m+\lambda+\theta-1}{\lambda+1}}\zeta_n^s$, $s > (m+\lambda+\theta-1)/(1+\theta)$. Тогда с учетом свойств ζ_n из (3.2) получим

$$Y_n \equiv \sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho v_n^\beta\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} |Dv_n|^{\lambda+1}\,dxd\tau$$
$$\le c\frac{2^{n(\lambda+1)}}{(\delta R)^{\lambda+1}}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_{n-1}^{\lambda+1}\,dxd\tau, \quad \beta = \frac{(1+\theta)(\lambda+1)}{m+\lambda+\theta-1}. \quad (3.3)$$

В силу неравенства Ниренберга — Гальярдо (см., например, [16]) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_{n-1}^{\lambda+1}\,dx \le c\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |Dv_{n-1}|^{\lambda+1}\,dx\Bigg)^a\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_{n-1}^\beta\,dx\Bigg)^{\frac{(1-a)(\lambda+1)}{\beta}}, \quad (3.4)$$

где $a = \frac{N(m+\lambda-2)}{K_\theta}$, $K_\theta = N(m+\lambda-2) + (1+\theta)(\lambda+1)$.

Отметим, что в силу свойств (1.6) $f(Cr) \ge C^{\varepsilon_0} f(r)$ для любого $C > 1$, $r > 0$. Следовательно,

$$\rho(Cr) \ge C^{\varepsilon_0 - l^*}\rho(r). \quad (3.5)$$

Значит,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_{n-1}^\beta\,dx \le \frac{c}{\rho(R)}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho v_{n-1}^\beta\,dx. \quad (3.6)$$

Интегрируя (3.4) по времени и применяя неравенство Гёльдера, с учетом (3.6) приходим к неравенству

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} v_{n-1}^{\lambda+1}\,dxd\tau \le c\left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |Dv_{n-1}|^{\lambda+1}\,dxd\tau\right]^a$$
$$\times\, t^{1-a}\left[\sup_{0<\tau<t}\int_{\mathbb{R}^N} v_{n-1}^{\beta}\,dx\right]^{\frac{(1-a)(\lambda+1)}{\beta}} \le c\frac{t^{1-a}}{\rho(R)^{\frac{(1-a)(\lambda+1)}{\beta}}}Y_{n-1}^{1+(1-a)(\frac{\lambda+1}{\beta}-1)}. \quad (3.7)$$

Наконец, из (3.6) и (3.3) выводим

$$Y_n \le c\frac{2^{n(\lambda+1)}t^{1-a}}{R^{\lambda+1}\rho(R)^{\frac{(1-a)(\lambda+1)}{\beta}}}Y_{n-1}^{1+(1-a)(\frac{\lambda+1}{\beta}-1)}. \quad (3.8)$$

Значит, в силу леммы 5.6 из [17, с. 113] заключаем, что $Y_n \to 0$, если

$$\frac{Y_0^{(1-a)(\frac{\lambda+1}{\beta}-1)}t^{1-a}}{R^{\lambda+1}\rho(R)^{\frac{(1-a)(\lambda+1)}{\beta}}} \le c. \quad (3.9)$$

Отметим, что

$$Y_0 \le \frac{c}{R^{\lambda+1}}\int_0^t \int_{\frac{R}{2}<|x|<R} u^{m+\lambda+\theta-1}\,dxd\tau \le c\|u_0\|_\infty^{m+\lambda+\theta-1}tR^{N-\lambda-1}. \quad (3.10)$$

Усиливая (3.9) с помощью (3.10), приходим к выводу, что $u \equiv 0$, если

$$\frac{t}{R^{\lambda+1}\rho(R)} \le c. \quad (3.11)$$

Возьмем в (3.5) $C = R$, $r = 1$; тогда $\rho(R) \ge R^{\varepsilon_0 - l^*}$. Следовательно, (3.11) выполнено, если $\frac{t}{R^{\lambda+1+\varepsilon_0-l^*}} \le c$. Это означает, что если $\lambda+1 \ge N$, т. е. $l^* = \lambda+1$, то $u \equiv 0$ для всех $R \ge ct^{\frac{1}{\varepsilon_0}} + 4R_0$.

Докажем теперь теорему 1.1 при $\lambda + 1 < N$. Рассмотрим последовательности r_i, $\bar r_i$: $r_i = r_{i-1} + (1-\delta)\delta^i(R_{n-1} - R_n)$, $\bar r_i = \bar r_{i-1} - (1-\delta)\delta^i(\overline{R}_n - \overline{R}_{n-1})$, $r_0 = R_n$, $\bar r_0 = \overline{R}_n$, $r_\infty = R_n$, $\bar r_\infty = \overline{R}_{n-1}$. Пусть $U_i = B_{r_i} \setminus B_{\bar r_i}$. Точно так же, как при выводе неравенств (3.3), (3.8), получаем

$$y_i \equiv \sup_{0<\tau<t}\int_{U_i} \rho w^\beta\,dx + \int_0^t \int_{U_i} |Dw|^{\lambda+1}\,dxd\tau \le c\frac{2^{n(\lambda+1)}\delta^{-i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}}\int_0^t \int_{U_{i+1}} w^{\lambda+1}\,dxd\tau$$
$$\le c\frac{2^{n(\lambda+1)}\delta^{-i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}\rho(R)^{\frac{(1-a)(\lambda+1)}{\beta}}}\left(\int_0^t \int_{U_{i+1}} |Dw|^{\lambda+1}\,dxd\tau\right)^a$$
$$\times \int_0^t \left(\int_{U_{i+1}} \rho w^\beta\,dx\right)^{\frac{(1-a)(\lambda+1)}{\beta}} d\tau \le h_1 y_{i+1} + Ah_1^{-\frac{a}{1-a}}\delta^{-\frac{i(\lambda+1)}{1-a}},$$

$w = u^{\frac{m+\lambda+\theta-1}{\lambda+1}}\zeta_i^s, \zeta_i$ — стандартные срезающие функции U_{i+1},

$$A \equiv \frac{b^n}{R^{\frac{\lambda+1}{1-a}}\rho(R)^{\frac{\lambda+1}{\beta}}}\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho v_{n-1}^\beta\,dx\right)^{\frac{\lambda+1}{\beta}} d\tau, \quad h_1 > 0,\ b = b(N,\lambda,m).$$

По индукции имеем

$$y_0 \le h_1^j y_j + cAh_1^{-\frac{a}{1-a}} \sum_{i=1}^{j} \left(\frac{h_1}{\delta^{(\lambda+1)/(1-a)}} \right)^i.$$

Пусть $h_1 = \frac{\delta^{(\lambda+1)/(1-a)}}{2}$. Устремляя $j \to \infty$, находим $y_0 \le cA$. Из этого неравенства следует, что

$$z_n \le \frac{cb^n t z_{n-1}^{1+(\frac{\lambda+1}{\beta}-1)}}{R^{\frac{\lambda+1}{1-a}} \rho(R)^{\frac{\lambda+1}{\beta}}}, \tag{3.12}$$

где $z_n = \sup\limits_{0<\tau<t} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho v_n^\beta \, dx$.

Из (3.12) заключаем, что $z_n \to 0$ при $n \to \infty$, если

$$\frac{t z_0^{\frac{\lambda+1}{\beta}-1}}{R^{\frac{\lambda+1}{1-a}} \rho(R)^{\frac{\lambda+1}{\beta}}} \le c. \tag{3.13}$$

Для оценки z_0 умножим обе части (1.1) на u^θ и результат проинтегрируем по Q_t. Это даст оценку

$$z_0 \le \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u^{1+\theta} \, dx \le \int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u_0^{1+\theta} \, dx \equiv C_0.$$

Следовательно, (3.13) выполнено, если

$$\frac{t C_0^{\frac{\lambda+1}{\beta}-1}}{R^{\frac{\lambda+1}{1-a}} \rho(R)^{\frac{\lambda+1}{\beta}}} \le c. \tag{3.14}$$

В силу условия (1.6) неравенство (3.14) выполнено, если

$$\frac{t^{1+\theta}}{R^{\varepsilon_0(m+\lambda-1)+\theta(\lambda+1+\varepsilon_0-l^*)}} \le c.$$

В частности, выбирая $\theta < \frac{\varepsilon_0(m+\lambda-1)}{2l^*}$, заключаем, что $u \equiv 0$ при $|x| > 4R_0 + ct^{\frac{(1+\theta)2l^*}{\varepsilon_0(m+\lambda-1)}}$.

Теорема 1.1 доказана полностью.

4. Доказательство теоремы 1.2

Предположим противное. Пусть $\operatorname{supp} u(\cdot,t) \subset B_{\widetilde{R}(t)}, \widetilde{R}(t) < \infty$ для любого $t > 0$. Пусть $\zeta(x)$ — гладкая срезающая функция шара $B_R(x_0)$, равная 1 при $|x - x_0| < R/2$ и 0 вне $B_R(x_0)$. Кроме того, пусть $|D\zeta| \le c/R$. Выберем x_0 и R так, что $B_R(x_0) \subset \operatorname{supp} u(\cdot,1)$.

Рассмотрим функцию

$$v(x,t) = k^{\frac{1}{m+\lambda-2}} u(x, 1 + k(t-1)).$$

Она, как легко видеть, удовлетворяет (1.1) и, кроме того, при $t = 1$ имеем $v(x,1) = k^{\frac{1}{m+\lambda-2}} u(x,1)$. Параметр k будет выбран позже. Умножим обе части (1.1) с $u = v$ на $(v+\varepsilon)^{-\theta}\zeta^s$, где $0 < \theta < 1$, $s \ge \lambda + 1$, $\varepsilon > 0$, и результат проинтегрируем по $B_R(x_0)$. Это даст

$$\frac{1}{1-\theta}\frac{d}{d\tau}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho\zeta^s(v+\varepsilon)^{1-\theta}\,dx=\theta\int\limits_{\mathbb{R}^N}v^{m-1}(v+\varepsilon)^{-(\theta+1)}\zeta^s|Dv|^{\lambda+1}\,dx$$
$$-s\int\limits_{\mathbb{R}^N}v^{m-1}(v+\varepsilon)^{-\theta}\zeta^{s-1}|Dv|^{\lambda-1}DvD\zeta\,dx\equiv\theta I_1-sI_2. \quad (4.1)$$

Применяя неравенство Юнга, оценим I_2 следующим образом:

$$I_2\le\frac{\lambda}{\lambda+1}\delta^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}I_1+\frac{1}{\lambda+1}\delta^{-(\lambda+1)}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\zeta^{s-(\lambda+1)}|D\zeta|^{\lambda+1}v^{m-1}(v+\varepsilon)^{-\theta+\lambda}\,dx. \quad (4.2)$$

Выберем δ из условия $\frac{s\lambda}{\lambda+1}\delta^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}=\theta/2$. Тогда из (4.1) и (4.2) получим

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho\zeta^s(v+\varepsilon)^{1-\theta}\,dx\ge\theta(1-\theta)/2\int\limits_{\mathbb{R}^N}v^{m-1}(v+\varepsilon)^{-\theta-1}\zeta^s|Dv|^{\lambda+1}\,dx$$
$$-\frac{c}{R^{\lambda+1}}\int\limits_{R/2<|x-x_0|<R}v^{m-1}(v+\varepsilon)^{\lambda-\theta}\zeta^{s-\lambda-1}\,dx.$$

Устремляя $\varepsilon\to0$ в последнем неравенстве, имеем

$$\frac{d}{d\tau}E(\tau)\ge\frac{\theta(1-\theta)}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|Dv^{\frac{m+\lambda-\theta-1}{\lambda+1}}|^{\lambda+1}\zeta^s\,dx$$
$$-\frac{c}{R^{\lambda+1}}\int\limits_{R/2<|x-x_0|<R}v^{m+\lambda-\theta-1}\zeta^{s-\lambda-1}\,dx\equiv\frac{\theta(1-\theta)}{2}I_3-cI_4, \quad (4.3)$$

где $E(\tau)=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho v^{1-\theta}\zeta^s\,dx$.

Пусть

$$w=v^{\frac{m+\lambda-\theta-1}{\lambda+1}}\zeta^{\frac{s(m+\lambda-\theta-1)}{(\lambda+1)(1-\theta)}},\quad\beta=\frac{(\lambda+1)(1-\theta)}{m+\lambda-\theta-1}.$$

Тогда $E(\tau)=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho w^\beta\,dx$. Если $N>\lambda+1$, то, применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$E(\tau)\le\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{w^{\lambda+1}}{|x|^{\lambda+1}}\,dx\right)^{\frac{\beta}{\lambda+1}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}|x|^{\frac{\beta(\lambda+1)}{\lambda+1-\beta}}\rho^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-\beta}}\,dx\right)^{\frac{\lambda+1-\beta}{\lambda+1}}\equiv I_5^{\frac{\beta}{\lambda+1}}I_6^{\frac{\lambda+1-\beta}{\lambda+1}}. \quad (4.4)$$

В силу леммы 2.1

$$I_5\le c(I_3+I_4). \quad (4.5)$$

Для оценки I_6 заметим, что из условия (1.7) следует оценка

$$I_6=c\int\limits_0^\infty r^{\frac{\beta(\lambda+1)}{\lambda+1-\beta}+N-1}\rho(r)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-\beta}}\,dr\le c\int\limits_1^\infty r^{\frac{\beta(\lambda+1)-(l^*+\varepsilon_1)(\lambda+1)}{\lambda+1-\beta}+N-1}\,dr+c<\infty \quad (4.6)$$

при условии, что $\theta<\frac{\varepsilon_1(m+\lambda-1)}{l^*+\varepsilon_1-\lambda-1}$. Таким образом, из (4.3)–(4.6) находим

$$\frac{d}{d\tau}E(\tau)\ge cE(\tau)^{\frac{\lambda+1}{\beta}}-\frac{c}{R^{\lambda+1}}\int\limits_{R/2<|x-x_0|<R}v^{m+\lambda-\theta-1}\,dx. \quad (4.7)$$

Для оценки второго слагаемого в правой части (4.7) умножим обе части (1.1) с $u = v$ на v^p, $p = m + \lambda - \theta - 2 > 0$ и результат проинтегрируем по $\mathbb{R}^N$. Имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho w^\gamma \, dx = -c(p,m,\lambda)\int\limits_{\mathbb{R}^N} |Dw|^{\lambda+1}\, dx, \tag{4.8}$$

где $w = v^{\frac{p+m+\lambda-1}{\lambda+1}}$, $\gamma = \frac{(p+1)(\lambda+1)}{p+m+\lambda-1}$. Поскольку $N > \lambda + 1$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho w^\gamma \, dx \le \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{w^{\lambda+1}}{|x|^{\lambda+1}}\, dx\Bigg)^{\frac{\gamma}{\lambda+1}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-\gamma}} |x|^{\frac{\gamma(\lambda+1)}{\lambda+1-\gamma}}\, dx\Bigg)^{\frac{\lambda+1-\gamma}{\lambda+1}}$$
$$\le c\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |Dw|^{\lambda+1}\, dx\Bigg)^{\frac{\gamma}{\lambda+1}}. \tag{4.9}$$

Следовательно, из (4.8) и (4.9) имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho w^\gamma \, dx \le -c\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho w^\gamma\, dx\Bigg)^{\frac{\lambda+1}{\gamma}}.$$

Интегрируя это неравенство, приходим к оценке

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho w^\gamma \, dx \le ct^{-\frac{p+1}{m+\lambda-2}}. \tag{4.10}$$

В силу (4.10)

$$\int\limits_{R/2<|x-x_0|<R} v^{m+\lambda-\theta-1}\, dx \le \frac{c}{\rho(R)}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho v^{m+\lambda-\theta-1}\, dx \le \frac{c}{\rho(R)} t^{-\frac{m+\lambda-\theta-1}{m+\lambda-2}}. \tag{4.11}$$

Значит, из (4.7) и (4.11) следует, что

$$\frac{d}{d\tau}E(\tau) \ge cE(\tau)^{\frac{\lambda+1}{\beta}} - \frac{c\tau^{-\frac{m+\lambda-\theta-1}{m+\lambda-2}}}{\rho(R)R^{\lambda+1}} \equiv I_7. \tag{4.12}$$

Покажем, что $I_7(\tau, R) > 0$ для $\tau \ge 1$ при определенном выборе k. Действительно,

$$I_7(1,R) = c_1 E(1)^{\frac{\lambda+1}{\beta}} - \frac{c_2}{\rho(R)R^{\lambda+1}}$$
$$= c_1 k^{\frac{m+\lambda-\theta-1}{m+\lambda-2}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u^{1-\theta}(.,1)\zeta^s\, dx\Bigg)^{\frac{(\lambda+1)}{\beta}} - \frac{c_2}{\rho(R)R^{\lambda+1}} > 0$$

при

$$k = \Bigg(\frac{2c_2}{c_1\rho(R)R^{\lambda+1}\big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u^{1-\theta}(.,1)\zeta^s\, dx\big)^{(\lambda+1)/\beta)}}\Bigg)^{\frac{m+\lambda-2}{m+\lambda-\theta-1}}.$$

Следовательно, в силу (4.12) $E(\tau)$ — монотонно растущая функция для $\tau \ge 1$, и мы получаем

$$\frac{d}{d\tau}E(\tau) \ge cE(\tau)^{\frac{\lambda+1}{\beta}}, \quad \tau \ge 1. \tag{4.13}$$

Замечая, что $\frac{\lambda+1}{\beta} = \frac{m+\lambda-\theta-1}{1-\theta} > 1$, и интегрируя (4.13), приходим к следующей оценке:

$$E(\tau) \geq \frac{1}{\left[E(1)^{-\frac{m+\lambda-2}{1-\theta}} - c^*(\tau-1)\right]^{\frac{1-\theta}{m+\lambda-2}}}. \tag{4.14}$$

Отсюда следует, что $E(\tau) \to \infty$, при $\tau \to T = 1 + E(1)^{-\frac{m+\lambda-2}{1-\theta}}(c^*)^{-1}$. С другой стороны,

$$E(\tau) = k^{\frac{1-\theta}{m+\lambda-2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^{1-\theta}(x,\tau)\zeta^s\,dx \leq ck^{\frac{1-\theta}{m+\lambda-2}} \|u_0\|^{1-\theta}_{\infty,\mathbb{R}^N} \widetilde{R}^N(\tau) < \infty$$

для любого $\tau < \infty$. Полученное противоречие доказывает теорему 2.1 в случае $\lambda + 1 < N$.

При $\lambda+1 \geq N$ доказательство проводится с незначительными изменениями. В этом случае вместо оценки (4.4) имеем

$$E(\tau) \leq \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho w^{\lambda+1}\,dx\Bigg)^{\frac{\beta}{\lambda+1}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho\,dx\Bigg)^{\frac{\lambda+1-\beta}{\lambda+1}} \leq c\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |Dw|^{\lambda+1}\,dx\Bigg)^{\frac{\beta}{\lambda+1}}.$$

Здесь мы воспользовались леммой 2.1 при $\lambda + 1 \geq N$ и тем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho\,dx < \infty,$$

а это, в свою очередь, гарантировано условиями $\omega_1(\infty)$, $\omega_2(\infty) < \infty$. Дальнейшие рассуждения опускаем. Теорема 1.2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. 1987. Т. 42, № 2. С. 135–176.
2. *Kamin S., Rosenau P.* Propagation of thermal waves in an inhomogeneous medium // Comm. Pure. Appl. Math. 1981. V. 34. P. 831–852.
3. *Kamin S., Rosenau P.* Nonlinear diffusion in a finite mass medium // Comm. Pure Appl. Math. 1982. V. 35. P. 113–127.
4. *Kamin S., Kersner R.* Disappearence of interfaces in finite time // Meccanica. 1993. V. 28. P. 117–120.
5. *Peletier M. A.* A supersolution for the porous media equation with nonuniform density // Appl. Math. Lett. 1994. V. 7, N 3. P. 29–32.
6. *Guedda M., Hilhorst D., Peletier M. A.* Disappearing interfaces in nonlinear diffusion // Adv. Math. Sci. Appl. 1997. V. 7. P. 695–710.
7. *Galaktionov V. A., King J. R.* On the behaviour of blow-up interfaces for an inhomogeneous filtration equation // J. Appl. Math. 1996. V. 57. P. 53–77.
8. *Eidus D., Kamin S.* The filtration equation in a class of functions decreasing at infinity // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 120, N 3. P. 825–830.
9. *Eidelman S. D., Kamin S., Porper F.* Uniqueness of solutions of the Cauchy problem for parabolic equations degenerating at infinity // Asymptotic Anal. 2000. V. 22, N 3–4. P. 349–358.
10. *Eidelman S. D., Kamin S., Porper F.* On classes of uniqueness of the Cauchy problem for some evolution second order equations // Доповіді НАНУ. 2000. N 1. P. 34–37.
11. *Eidelman S. D., Kamin S., Porper F.* Once more about Cauchy problem for evolution equation // Нелинейные граничные задачи. 2000. V. 10. P. 75–82.
12. *Andreucci D., Tedeev A. F.* A Fujita type result for degenerate Neumann problem in domains with noncompact boundary // J. Math. Anal. Appl. 1999. V. 231. P. 543–567.
13. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Sharp estimates and finite speed of propagation for a Neumann problem in domains narrowing at infinity // Adv. Differential Equations. 2000. V. 5. P. 833–860.

14. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Finite speed of propagation for the thin film equations and other higher order parabolic equations with general nonlinearity // Interfaces and free boundaries. 2001. V. 3, N 3. P. 233–264.
15. *Tsutsumi M.* On solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations with absorption // J. Math. Anal. Appl. 1988. V. 132. P. 187–212.
16. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
17. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Наука: М., 1967.

Статья поступила 17 мая 2002 г.

Тедеев Анатолий Федорович
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Р. Люксембург, 74, Донецк 83114, Украина
tedeev@iamm.ac.donetsk.ua