Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 517.55

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА ТЕМЛЯКОВА И ТИПА ТЕМЛЯКОВА — БАВРИНА

А. С. Якшина

Аннотация: Установлена формула, выражающая значения плотности интеграла типа Темлякова с определяющей областью типа A через указанный интеграл посредством дифференциального оператора. Операторная связь распространяется на интеграл типа Темлякова — Баврина k-го порядка. Исследование проводится методом линейных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами, развиваемым А. В. Нелаевым.

Ключевые слова: многомерный комплексный анализ, интегральные представления, интегралы типа Темлякова, интегральные представления Темлякова, интеграл Темлякова.

А. А. Темляков (см., например, [1]) установил два интегральных представления для функций двух комплексных переменных, голоморфных в выпуклых ограниченных полных двоякокруговых областях, которые принято называть интегральными представлениями Темлякова I и II рода. На основе интеграла Темлякова Л. А. Айзенберг [2] ввел в рассмотрение интеграл типа Темлякова и начал его исследование в пространстве $\mathbb{C}^2$. В дальнейшем Г. Л. Луканкин и В. И. Боганов, изучив поведение функций, представимых интегралом типа Темлякова, при стремлении точки из $\mathbb{C}^2$ к точкам окружностей особенностей, указали применение математического аппарата этого интеграла к постановке и решению задач линейного сопряжения. Для исследования свойств интеграла типа Темлякова вне области голоморфности в $\mathbb{C}^2$ А. Т. Хвостовым [3] впервые был предложен метод однородных линейных дифференциальных операторов первого порядка, существенно дополненный в дальнейшем А. В. Нелаевым новыми положениями (см., например, [4]). В настоящее время этот метод носит название метода линейных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами.

Одновременно с развитием теории интегралов типа Темлякова велись исследования по распространению интегральных представлений Темлякова на более широкие классы двоякокруговых областей и обобщению на случай n ($n \geq 2$) комплексных переменных. На этом пути И. И. Баврин (см., например, [5]), используя созданный им метод интегродифференциальных операторов, установил для областей типа (T) интегральные представления более общей операторной природы. На основе одного из них А. В. Нелаевым [6] был введен в рассмотрение интеграл типа Темлякова — Баврина I рода k-го порядка ($k \in \mathbb{N}$).

Остановимся подробнее на свойствах функций, определяемых интегралом типа Темлякова и интегралом типа Темлякова — Баврина.

§ 1. Свойства интеграла типа Темлякова

Рассмотрим область D типа A:

$$D = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : c_1|z_1| + c_2|z_2| < 1,\ c_1 > 0,\ c_2 > 0\}.$$

В этом случае интеграл типа Темлякова I рода имеет вид

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_{|\eta|=1} \frac{\varphi(t,\eta)}{\eta - u}\, d\eta, \tag{1}$$

где $\varphi(t,\eta) = \int\limits_0^1 f(\tau,t,\eta)\, d\tau$, $f(\tau,t,\eta)$ принадлежит γ, т. е. непрерывна по совокупности вещественных переменных τ и t $(0 \le \tau \le 1,\ \ 0 \le t \le 2\pi)$, 2π-периодична по t, а по комплексному переменному η $(|\eta| = 1)$ удовлетворяет условию ГЁльдера H_α $(0 < \alpha \le 1)$, независимому от τ и t; $u = c_1 z_1 + c_2 z_2 e^{it}$.

В [2] доказано, что функции, определяемые интегралом (1), являются голоморфными функциями в областях D, $E_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : c_1|z_1| - c_2|z_2| > 1\}$, $E_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : c_2|z_2| - c_1|z_1| > 1\}$, неголоморфными, вообще говоря, в области

$$D^- = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : c_1|z_1| + c_2|z_2| > 1,\ |c_1|z_1| - c_2|z_2|| < 1\}$$

и непрерывными во всем пространстве $\mathbb{C}^2$, за исключением окружностей особенностей: $B_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = c_1^{-1},\ z_2 = 0\}$, $B_{-1} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 = 0,\ |z_2| = c_2^{-1}\}$.

Указанные свойства интегралов типа Темлякова позволяют применять метод линейных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами при исследовании дифференциальных свойств интеграла (1) в области неголоморфности D^-.

Установленная в [3] формула действия на интеграл типа Темлякова I рода вне области голоморфности произвольным однородным дифференциальным оператором в формальных производных первого порядка

$$H = \sum_{\nu=1}^{2}\left(A_\nu(z_1, z_2, \bar z_1, \bar z_2)\frac{\partial}{\partial z_\nu} + A_{2+\nu}(z_1, z_2, \bar z_1, \bar z_2)\frac{\partial}{\partial \bar z_\nu}\right)$$

имеет в рассматриваемом случае вид

$$H[F(z_1, z_2)] = \frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_{|\eta|=1} \varphi(t,\eta) H\left[\frac{1}{\eta - u}\right] d\eta \\ + \frac{1}{2\pi} H[\beta - \alpha]\varphi^- - \frac{1}{2\pi} H[\beta + \alpha]\varphi^+, \tag{2}$$

где $(z_1, z_2) \in D^-$,

$$\alpha = \arccos\frac{1 - c_1^2|z_1|^2 - c_2^2|z_2|^2}{2c_1c_2|z_1||z_2|}, \quad \beta = \arg z_1 - \arg z_2, \quad \varphi^\pm = \varphi(t,\eta)|_{\substack{\eta=u \\ t=\beta\pm\alpha}}.$$

Важно отметить, что в случае операторов вида

$$\widetilde{H} = A_3(z_1, z_2, \bar z_1, \bar z_2)\frac{\partial}{\partial \bar z_1} + A_4(z_1, z_2, \bar z_1, \bar z_2)\frac{\partial}{\partial \bar z_2} \tag{3}$$

формула (2) существенно упрощается: в ней в силу голоморфности u в правой части отсутствует первое (интегральное) слагаемое.

Укажем устанавливаемые непосредственным подсчетом равенства

$$\frac{\partial\beta}{\partial\bar{z}_1}=\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1}\left[\frac{1}{i}\ln\frac{z_1}{|z_1|}\right]=-\frac{1}{2i}\frac{1}{\bar{z}_1},\quad \frac{\partial\beta}{\partial\bar{z}_2}=\frac{1}{2i}\frac{1}{\bar{z}_2},$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}_1}=\frac{c_1^2|z_1|^2-c_2^2|z_2|^2+1}{2\bar{z}_1\Delta},\quad \frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}_2}=\frac{c_2^2|z_2|^2-c_1^2|z_1|^2+1}{2\bar{z}_2\Delta},$$

где

$$\Delta=\sqrt{(c_1|z_1|+c_2|z_2|+1)(c_1|z_1|+c_2|z_2|-1)}\times\sqrt{(c_1|z_1|-c_2|z_2|+1)(-c_1|z_1|+c_2|z_2|+1)}.$$

С учетом сказанного, применяя к интегралу (1) оператор (3), после соответствующих упрощений для любой точки $(z_1,z_2)\in D^-$ получаем

$$\widetilde{H}[F(z_1,z_2)]=\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{A_3}{\bar{z}_1}\frac{c_2^2|z_2|^2-c_1^2|z_1|^2-1}{\Delta}+\frac{A_4}{\bar{z}_2}\frac{c_1^2|z_1|^2-c_2^2|z_2|^2-1}{\Delta}\right)\times(\varphi^-+\varphi^+)+i\left(\frac{A_3}{\bar{z}_1}-\frac{A_4}{\bar{z}_2}\right)(\varphi^--\varphi^+)\right]. \quad (4)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Интеграл типа Темлякова* I *рода с определяющей областью* D *типа* A *в области неголоморфности* D^- *связан со значениями своей плотности дифференциальным соотношением* (4).

Следствие 1. *Если определяющей областью для интегралов типа Темлякова* I *рода является единичный гиперконус* ($c_1=c_2=1$), *то в специальных случаях* а) $A_3=\bar{z}_1$, $A_4\equiv 0$ *и* б) $A_3\equiv 0$, $A_4=\bar{z}_2$ *формула* (4) *совпадает с дифференциальным соотношением, полученным иным способом и в несколько иной форме Б. Н. Кукушкиным* [7].

§ 2. Свойства интеграла типа Темлякова — Баврина

В [6] введен в рассмотрение интеграл типа Темлякова — Баврина I рода k-го порядка ($k\in\mathbb{N}$), который в случае определяющей области D типа A условимся рассматривать в виде

$$F_k=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^1\varepsilon_k^{\gamma_k-1}\,d\varepsilon_k\int_0^1\varepsilon_{k-1}^{\gamma_{k-1}-1}\,d\varepsilon_{k-1}\cdots\int_0^1\varepsilon_1^{\gamma_1-1}\,d\varepsilon_1\int_0^{2\pi}dt\int_{|\eta|=1}\frac{\varphi(t,\eta)}{\eta-u_k}\,d\eta, \quad (5)$$

где плотность $\varphi(t,\eta)$ такая же, как и в интеграле (1);

$$u_k=c_1\varepsilon_1^{\delta_1^{(1)}}\varepsilon_2^{\delta_2^{(1)}}\ldots\varepsilon_k^{\delta_k^{(1)}}z_1+c_2\varepsilon_1^{\delta_1^{(2)}}\varepsilon_2^{\delta_2^{(2)}}\ldots\varepsilon_k^{\delta_k^{(2)}}z_2e^{it},$$

ε_j — вещественные параметры, γ_j, $\delta_j^{(1)}$, $\delta_j^{(2)}$ — неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям $\gamma_j\geq 1$, $\delta_j^{(1)}+\delta_j^{(2)}>0$, $j=1,2,\ldots,k$.

Согласно результатам работы [6] в пространстве $\mathbb{C}^2$ и, в частности, в рассматриваемой нами области D^- интеграл (4) связан с интегралом типа Темлякова I рода (1) формулой дифференциальной связи

$$F=P^{(k)}[F_k], \quad (6)$$

где

$$P^{(k)} = P_k[P_{k-1}\dots[P_1]\dots],\ P_j = \gamma_j + \sum_{\nu=1}^{2} \delta_j^{(\nu)}\left(z_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu} + \bar{z}_\nu \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\nu}\right), \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

С учетом (6) на основе формулы (4) получаем соотношение

$$\widetilde{H}[P^{(k)}[F_k(z_1,z_2)]] = \frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{A_3}{\bar{z}_1}\frac{c_2^2|z_2|^2 - c_1^2|z_1|^2 - 1}{\Delta} + \frac{A_4}{\bar{z}_2}\frac{c_1^2|z_1|^2 - c_2^2|z_2|^2 - 1}{\Delta}\right)\right.$$
$$\left.\times(\varphi^- + \varphi^+) + i\left(\frac{A_3}{\bar{z}_1} - \frac{A_4}{\bar{z}_2}\right)(\varphi^- - \varphi^+)\right]. \quad (7)$$

Итак, справедлива следующая

Теорема 2. *Интеграл типа Темлякова — Баврина* I *рода k-го порядка с определяющей областью D типа A в области неголоморфности D^- связан со значениями своей плотности дифференциальным соотношением* (7).

Следствие 2. *В двух частных случаях формула* (7) *обращается в соотношения, установленные ранее В. А. Литвинюком* [8], *для интеграла типа Темлякова — Баврина* I *рода первого порядка.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Темляков А. А.* Интегральные представления функций двух комплексных переменных // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 5. С. 976–979.
2. *Айзенберг Л. А.* О граничных свойствах функций, аналитических в двоякокруговых областях // Уч. зап. МОПИ. 1960. Т. 96. С. 15–38.
3. *Хвостов А. Т.* Исследование поведения интегралов типа Темлякова вне области аналитичности // Уч. зап. МОПИ. 1967. Т. 188. С. 113–136.
4. *Нелаев А. В.* Метод линейных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами в исследовании комплексных интегралов в $\mathbb{C}^n$ // Математика. Компьютер. Образование: Сб. науч. тр. 2000. Т. 7, № 2. С. 444–451.
5. *Баврин И. И.* Операторный метод в комплексном анализе. М.: Прометей, 1991.
6. *Нелаев А. В.* Дифференциальные свойства функций, определяемых интегралами типа Темлякова — Баврина // Математический анализ и теория функций: Респ. сб. тр. 1973. № 1. С. 154–163.
7. *Кукушкин Б. Н.* Аналитичность интегралов типа Темлякова и функциональная связь их производных с плотностями в случае гиперконуса // Математический анализ и теория функций: Респ. сб. тр. 1975. № 5. С. 148–153.
8. *Литвинюк В. А.* Об одном дифференциальном свойстве интегралов типа Темлякова — Баврина // Математический анализ: Межвуз. сб. науч. тр. 2000. С. 92–98.

Статья поступила 11 февраля 2003 г.

Якшина Анна Сергеевна
Благовещенский гос. педагогический университет,
кафедра математического анализа,
ул. Ленина, 104, Благовещенск 675000, Амурская обл.
`Yakshina@freemail.ru`