Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 512.542

ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ СИЛОВА

Л. А. Шеметков

Аннотация: Изучаются свойства максимальных π-подгрупп конечной группы.

Ключевые слова: конечная группа, максимальная π-подгруппа.

Посвящается профессору В. Д. Мазурову
в связи с его 60-летием

1. Введение

Теореме Силова и ее приложениям уже в книге У. Бернсайда [1] была посвящена целая глава, но длительное время никто не предпринимал попыток к нахождению ее обобщений. В 1928 г. Ф. Холл доказал свою знаменитую теорему.

Теорема 1 (Ф. Холл [2]). *$G \in D_\omega$ для любой конечной разрешимой группы G и любого множества простых чисел ω.*

В то далекое время многим казалось, что изучение холловых групп в неразрешимых конечных группах не имеет перспективы. В этом как будто бы убеждал и тот факт, что конечная группа оказывается разрешимой, если она обладает холловыми подгруппами любого возможного порядка (этот результат был получен Ф. Холлом [3] и независимо С. А. Чунихиным [4]). Но С. А. Чунихин думал иначе. Его основная идея состояла в том, что надо искать связь между подгрупповой структурой конечной группы и подгрупповой структурой ее главных и композиционных факторов. Работая в нелегкие сороковые-пятидесятые годы XX в. в сибирском городе Томске, он выполнил серию работ, посвященных π-свойствам и, в частности, силовским свойствам конечных групп. С. А. Чунихин ввел важное понятие π-разрешимой группы. Пусть π — некоторое фиксированное множество простых чисел. Конечная группа G называется *π-разрешимой*, если каждый ее главный фактор является либо π'-группой, либо абелевой π-группой. Это понятие позволило включить теорему 1 Ф. Холла и теорему Шура — Цассенхауза [5] в один общий результат.

Теорема 2 (С. А. Чунихин [6]). *Каждая конечная π-разрешимая группа обладает свойствами D_π и $D_{\pi'}$.*

Конечную группу называют *π-разделимой* (π-separable), если каждый ее главный фактор является либо π-группой, либо π'-группой. Легко видеть, что теорему 2 можно привести формально в более общем виде.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф03–110).

Теорема 2*. *Пусть K — π-разделимая нормальная подгруппа конечной группы G такая, что $G/K \in D_\pi$. Тогда $G \in D_\pi$.*

Исследования С. А. Чунихина получили высокую оценку в докладе Х. Виландта на Эдинбургском математическом конгрессе [7]. Из других результатов С. А. Чунихина мы приведем следующую теорему, которая широко используется.

Теорема 3 (С. А. Чунихин [8, 9]). *Пусть K — нормальная подгруппа конечной группы G. Справедливы следующие утверждения:*
(1) *если $K \in C_\pi$ и $G/K \in E_\pi$, то $G \in E_\pi$;*
(2) *если $K \in C_\pi$ и $G/K \in C_\pi$, то $G \in C_\pi$.*

Если задан некоторый ряд $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_t = 1$, состоящий из нормальных подгрупп конечной группы G, то в каждом факторе G_{i-1}/G_i этого ряда мы можем выбрать произвольным образом силовскую подгруппу P_i/G_i, пусть ее порядок будет $p_i^{\beta_i}$. С. А. Чунихин доказал, что при таком выборе G имеет разрешимую подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_t^{\alpha_t}$, где $\beta_i \leq \alpha_i$ (этот результат следует из основной теоремы С. А. Чунихина об индексиалах (см. [10, теорема 5.3.17]). Если к тому же наибольший π-делитель порядка G совпадает с $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_t^{\beta_t}$, то по теореме 3 группа G обладает единственным классом сопряженных холловых π-подгрупп; такую группу С. А. Чунихин назвал π-отделимой. Другими словами, конечная группа π-*отделима* (π-selected), где π — некоторое фиксированное множество простых чисел, если порядок каждого ее главного фактора делится не более чем на одно простое число из π.

Исследования С. А. Чунихина были продолжены Ф. Холлом [11], который расширил идею π-отделимых групп, используя теорему Х. Виландта $E_\pi^n \Longrightarrow D_\pi$.

Теорема 4 (Ф. Холл [11]). *Пусть K — нормальная подгруппа конечной группы G. Если $K \in E_\pi^n$ и $G/K \in D_\pi^s$, то $G \in D_\pi^s$.*

Отсюда, в частности, следует, что каждая конечная π-отделимая группа обладает свойством D_π. Кстати сказать, каждая конечная π-разрешимая группа является ω-отделимой, где $\omega = \pi \cup \{q\}$ и q — любое простое число.

В этой же работе [11] Ф. Холл ввел удобную символику для силовских свойств конечной группы G, которую мы используем в данной статье:
$G \in E_\pi \Longleftrightarrow G$ обладает холловой π-подгруппой;
$G \in E_\pi^n \Longleftrightarrow G$ обладает нильпотентной холловой π-подгруппой;
$G \in C_\pi \Longleftrightarrow G \in E_\pi$ и любые две холловы π-подгруппы в G сопряжены;
$G \in D_\pi \Longleftrightarrow$ любые две максимальные π-подгруппы группы G сопряжены;
$G \in D_\pi^s \Longleftrightarrow G \in D_\pi$ и все ее π-подгруппы разрешимы.

К 1958 г. стало ясно, что конечной целью является следующая проблема: доказать, что всякое конечное расширение D_π-группы с помощью D_π-группы является D_π-группой. Эту проблему мы будем называть *D_π-проблемой*; в 1969 г. она была включена в «Коуровскую тетрадь» [12]. В докладе Х. Виландта [7] эта проблема формулируется следующим образом: верно ли, что конечная группа G обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда свойством D_π обладает каждый фактор некоторого ее нормального ряда?

Скажем, что конечная группа G является E_π^c-группой, если G имеет холлову π-подгруппу H, у которой все силовские подгруппы циклические. По теореме С. А. Русакова [13] E_π^c влечет D_π. Этот результат побудил автора настоящей статьи доказать аналог теоремы 4 с заменой E_π^n на E_π^c. Вначале был рассмотрен [14] случай, когда в G/K все π-подгруппы сверхразрешимы, а затем в [15] этот аналог был доказан без всяких ограничений.

Теорема 5 (Л. А. Шеметков [15]). *Пусть K — нормальная подгруппа конечной группы G. Если $K \in E_\pi^c$ и $G/K \in D_\pi$, то $G \in D_\pi$.*

С помощью индукции теореме 5 можно придать следующий более общий вид.

Теорема 5*. *Пусть конечная группа G обладает таким субнормальным рядом*

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_t = 1,$$

что $G/G_1 \in D_\pi$, а для любого $i > 1$ фактор-группа G_{i-1}/G_i либо является π-группой, либо обладает свойством E_π^c. Тогда $G \in D_\pi$.

Теорема 5 была бы доказана уже в работе [14], если бы нам удалось тогда установить, что $N_K(M) \in E_\pi$ для любой разрешимой π-подгруппы M конечной группы G, имеющей нормальную E_π^c-подгруппу K. Не имея возможности доказать этот факт, мы внесли в 1969 г. открытый вопрос в «Коуровскую тетрадь» [12, вопрос 3.61].

Пусть σ — автоморфизм простого порядка $p \in \pi$ конечной E_π^c-группы G. Верно ли, что $C_G(\sigma) \in E_\pi$?

Вопрос оказался трудным. Он был решен положительно В. Д. Мазуровым лишь в 1992 г. по модулю классификации конечных простых групп.

Теорема 6 (В. Д. Мазуров [16]). *Пусть K — нормальная E_π^c-подгруппа конечной группы G. Тогда $N_K(M) \in E_\pi$ для любой разрешимой π-подгруппы M из G.*

При доказательстве теоремы 5 приходится рассматривать следующую ситуацию: в G имеется разрешимая максимальная π-подгруппа, которая не является холловой π-подгруппой в G и тривиально пересекается с K. В такой ситуации можно завершить доказательство, применив теорему 6, а можно вообще установить невозможность данной ситуации, что и было сделано в [15] с помощью следующего результата.

Если A — разрешимая π-группа операторов конечной группы G, то либо G является π'-группой, либо в G имеется разрешимая A-допустимая π-подгруппа, отличная от 1.

Аналогичный факт был использован также Б. Хартли [17], но в то время мы не знали, что результаты такого рода были давно известны Х. Виландту [18] (см. по этому поводу комментарии Б. Хартли в [19]). Приведем результат Х. Виландта в более общей формулировке, следуя анонсу в [20].

Теорема 7 (Х. Виландт [20]). *Пусть A — максимальная π-подгруппа конечной группы G. И пусть K — субнормальная подгруппа из G, не являющаяся π'-группой. Предположим, что либо A разрешима, либо гипотеза Шрайера верна для любой простой группы, являющейся секцией группы K. Тогда $A \cap K \neq 1$.*

Первые попытки применить теорию простых групп к изучению D_π-проблемы были сделаны Б. Хартли [17] и Л. С. Казариным [21]. В последние годы D_π-проблема с помощью классификации простых групп была атакована В. Д. Мазуровым и его учениками [22–24], и к моменту написания настоящей статьи она, видимо, уже решена полностью.

Теоремам силовского типа посвящен специальный параграф книги [10], где можно найти теоремы 1–5, а также теорему 7 для случая $K \trianglelefteq G$; правда, ссылки в [10] не полны, а теорема 5 ошибочно отнесена к статье другого автора. В подробной схеме доказательства теоремы 5, приведенной в [10] в разделе «Exercises» на с. 188–189, читателю предлагается доказать сформулированную выше теорему 6. Но как мы видели, теорема 6 была доказана В. Д. Мазуровым лишь шесть лет спустя после выхода книги М. Судзуки, и ее доказательство оказалось весьма трудным даже с использованием классификации простых групп.

В настоящей статье мы приводим доказательство теоремы 7 (насколько нам известно, доказательство этой теоремы ранее никем не было опубликовано). С помощью теоремы 7 мы дадим экономное доказательство теоремы 5, которую мы усилим следующим образом.

Теорема 8. *Пусть K — нормальная подгруппа конечной группы G такая, что $G/K \in D_\pi$. Предположим, что K обладает циклической силовской p-подгруппой для любого $p \in \pi$. Тогда любая максимальная π-подгруппа A группы G обладает следующими свойствами:*

1) AK/K — холлова π-подгруппа в G/K;

2) если H — еще одна максимальная π-подгруппа группы G такая, что $|A|$ делит $|H|$, то $A^x = H$ для некоторого $x \in G$.

Используемые обозначения стандартны. Мы будем рассматривать только конечные группы. На протяжении всей статьи π обозначает некоторое фиксированное множество простых чисел, π' — дополнение к π во множестве всех простых чисел. Под максимальной π-подгруппой группы G мы понимаем такую π-подгруппу, которая не содержится ни в какой другой π-подгруппе из G.

2. Доказательство теоремы 7

Лемма 1. *Пусть R — субнормальная, но не нормальная неабелева подгруппа группы G. Если R проста, то $[R, R^x] = 1$ для любого $x \in G \backslash N_G(R)$; в частности, R содержится в минимальной нормальной подгруппе группы G.*

Доказательство. Так как R совпадает со своим коммутантом, по теореме Виландта [25] R и R^x перестановочны, а значит, они нормальны в подгруппе RR^x. Следовательно, нормальное замыкание подгруппы R является минимальной нормальной подгруппой.

Лемма 2. *Пусть A — некоторая π-подгруппа группы G, R — нормальная π'-подгруппа группы G. Следующие условия эквивалентны:*

1) AR/R — максимальная π-подгруппа группы G/R;

2) A — максимальная π-подгруппа группы G.

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) очевидна. Пусть дано 2), и пусть AR/R содержится в π-подгруппе B/R. По теореме 2* A содержится в холловой π-подгруппе H из B. Ясно, что $B = HR$. Из условия 2) следует, что $A = H$, а значит, $AR/R = B/R$. Таким образом, из 2) следует 1).

Лемма 3. *Пусть A — максимальная π-подгруппа группы G, и пусть $K/O_{\pi'}(G)$ — минимальная субнормальная подгруппа группы $G/O_{\pi'}(G)$. Предположим, что либо A разрешима, либо гипотеза Шрайера верна для $K/O_{\pi'}(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $A \cap K = N_A(K) \cap K \neq 1$;

2) $N_A(K)$ — максимальная π-подгруппа в $N_A(K)K$.

Доказательство. Положим $R = O_{\pi'}(G)$. Предположим, что $R \neq 1$. По лемме 2 AR/R — максимальная π-подгруппа в G/R. По индукции имеем $AR/R \cap K/R \neq 1$ и, кроме того, $N_{AR/R}(K/R)$ — максимальная π-подгруппа в $N_{AR/R}(K/R)(K/R)$. Так как $AR \cap K = R(A \cap K) \neq R$, то $A \cap K \neq 1$. Поскольку $N_{AR/R}(K/R) = N_A(K)R/R$, то $N_A(K)R/R$ — максимальная π-подгруппа в $N_A(K)K/R$. Но тогда по лемме 2 $N_A(K)$ — максимальная π-подгруппа в

$N_A(K)K$. Равенство $A \cap K = N_A(K) \cap A$ очевидно. Таким образом, в случае $R \neq 1$ лемма верна.

Пусть теперь $R = O_{\pi'}(G) = 1$. Тогда K — простая группа, порядок которой делится хотя бы на одно число из π. Если K абелева, то $K \subseteq O_\pi(G) \subseteq A$, и в этом случае лемма верна. Пусть теперь K — неабелева простая группа. По лемме 1 $S = \langle K^x : x \in G\rangle$ является минимальной нормальной подгруппой группы G. Если $AS \neq G$, то для AS лемма верна по индукции, а значит, она верна и для G. Поэтому будем предполагать, что $AS = G$. Положим $A_1 = N_A(K)$. Нам надо доказать, что $A_1 \cap K \neq 1$ и, кроме того, A_1 является максимальной π-подгруппой в A_1K. Предположим, что $S \neq K$, и пусть A_1 содержится в некоторой π-подгруппе A_2 группы A_1K. Рассмотрим подгруппу $D = \langle (A_2 \cap K)^x : x \in A\rangle$. Если $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_1 a_i$ — разложение A в сумму смежных классов по A_1, то $\{K^x : x \in G\} = \{K^a : a \in A\} = \{K^{a_1}, K^{a_2}, \dots, K^{a_n}\}$. Таким образом, $S = K^{a_1} \times K^{a_2} \times \dots \times K^{a_n}$ — единственное разложение S в прямое произведение простых групп. Кроме того, из $A_2 \cap K \trianglelefteq A_2$ и $A_2 \supseteq A_1$ вытекает, что

$$\{(A_2 \cap K)^x : x \in A\} = \{(A_2 \cap K)^{a_1}, (A_2 \cap K)^{a_2}, \dots, (A_2 \cap K)^{a_n}\}.$$

Поэтому D совпадает с произведением поэлементно перестановочных подгрупп $(A_2 \cap K)^{a_1}, (A_2 \cap K)^{a_2}, \dots, (A_2 \cap K)^{a_n}$. Значит, D — π-подгруппа. Легко также заметить, что $D^a = D$ для любого $a \in A$, поскольку

$$D^a = \langle (A_2 \cap K)^{xa} : x \in A\rangle = \langle (A_2 \cap K)^y : y \in A\rangle.$$

Но тогда AD — π-подгруппа, а значит, $AD = A \supseteq D \supseteq A_2 \cap K$. Так как $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_1K$, согласно тождеству Дедекинда $A_2 = A_1(A_2 \cap K)$. Из $A_2 \cap K \subseteq A$ следует, что $A_2 \cap K = A_1 \cap K = A \cap K$. Следовательно, $A_2 = A_1(A_2 \cap K) = A_1$. Мы видим, что в случае $S \neq K$ лемма верна.

Теперь предположим, что K нормальна в G. Нам надо доказать, что $A \cap K \neq 1$. Так как $G = AK$, то $C = C_G(K)$ является π-группой. Поэтому $C \subseteq A$. Если $C \neq 1$, то по индукции $A/C \cap KC/C \neq 1$, т. е. $A \cap KC = C(A \cap K) \neq C$ и тем самым $A \cap K \neq 1$. Остается рассмотреть случай, когда $C = C_G(K) = 1$ и $A \cap K = 1$. Значит, G изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}(K)$, а A изоморфна подгруппе из $\mathrm{Out}(K)$. По условию гипотеза Шрайера верна для K. Тем самым A — разрешимая π-группа. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа из A. Ясно, что L — p-группа для некоторого $p \in \pi$. Кроме того, $N_K(L) \neq K$. Ввиду равенства $G = AK$ будет $N_G(L) = AN_K(L)$. Поскольку для $N_G(L)$, A и $N_K(L)$ лемма верна, мы можем считать, что $N_K(L)$ — π'-группа. Но тогда p не делит $|K|$. Возьмем любое число q из π, делящее $|K|$. Положим $\omega = \{p, q\}$. Согласно теореме 4 $LK \in D_\omega$. Пусть $\{L, Q\}$ —силовский базис холловой ω-подгруппы из LK. Тогда $G = NLK$, где $N = N_G(\{L, Q\}) = N_G(L) \cap N_G(Q)$. Так как Q нормальна в LQ, то $L \subseteq N$. Итак, $G = NK$. Но тогда $N_G(L) = NN_K(L) = AN_K(L)$, где, как отмечалось, $N_K(L)$ является π'-группой. Таким образом, $N_G(L)$ π-разрешима, и $A \subseteq N^z$ для некоторого $z \in N_K(L)$. Поскольку $N \subseteq N_G(Q)$, отсюда получаем, что $A \subseteq N_G(Q^z)$, т. е. $Q^zA = AQ^z = A$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 7. Пусть $K_1/O_{\pi'}(K)$ — минимальная субнормальная подгруппа из $K/O_{\pi'}(K)$. Положим $K_2 = K_1O_{\pi'}(G)$. Очевидно, $K_2/O_{\pi'}(G) \simeq K_1/O_{\pi'}(K)$. По лемме 3 $A \cap K_2 \neq 1$. Но тогда $A \cap K_1 \neq 1$, ибо K_1 и K_2 имеют одно и то же множество π-элементов. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 8

Пусть G и ее нормальная подгруппа K удовлетворяют условию теоремы 8. Если $2 \in \pi$, то K разрешима, и мы можем применить теорему 2*. Пусть $2 \notin \pi$ и $|K|_\pi \neq 1$. Тогда любая π-подгруппа из G разрешима по теореме Фейта — Томпсона. Пусть A — максимальная π-подгруппа группы G. Применяя теорему 7, получаем, что $A \cap K \neq 1$. В группе K любые две π-подгруппы одинакового порядка сопряжены по теореме С. А. Русакова [13] (см. также [26, теорема 18.7]). Значит, по обобщенной лемме Фраттини имеем $NK = G$, где $N = N_G(A \cap K)$. Максимальная π-подгруппа $A/A \cap K$ группы $N/A \cap K$ тривиально пересекается с $N \cap K/A \cap K$; значит, по теореме 7 $N \cap K/A \cap K$ — π'-группа. Таким образом, $N \cap K$ π-разрешима, а группа $N/N \cap K$ изоморфна G/K и потому является D_π-группой. Теперь имеем $N \in D_\pi$ по теореме 2*. Рассмотрим отображение $\alpha : x(N \cap K) \to xK$, $x \in N$, являющееся изоморфизмом $N/N \cap K$ на G/K. Так как $(A(N \cap K)/N \cap K)^\alpha = AK/K$, видим, что утверждение 1 верно. Пусть H — еще одна максимальная π-подгруппа группы G. Предположим, что $|A|$ делит $|H|$. Тогда $|A \cap K|$ делит $|H \cap K|$ и, снова применяя теорему С. А. Русакова, мы можем считать, что $A \cap K$ содержится в $H \cap K$. Кроме того, $N_H(A \cap K)(H \cap K) = H$, поэтому $N_H(A \cap K)$ и A имеют одинаковые порядки. Вспоминая, что $N \in D_\pi$, получаем, что $A^x = N_H(A \cap K)$ для некоторого $x \in N$. Следовательно, $A^x = H$, и теорема 8 доказана.

4. Следствия

Пусть $K \trianglelefteq G$, $K \in E_\pi^c$ и $G/K \in D_\pi$. Тогда по теореме 3 группа G имеет холлову π-подгруппу H. Но по теореме 8 любая максимальная π-подгруппа из G сопряжена с H. Таким образом, мы видим, что теорема 5 есть следствие теоремы 8.

Дадим еще одно приложение теоремы 7.

Определение. Будем говорить, что группа G *обладает свойством* E_π^{nc}, если G имеет холлову π-подгруппу H, представимую в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, где $(|H_1|, |H_2|) = 1$, H_1 нильпотентна, а все силовские подгруппы в H_2 циклические.

Теорема 9. *Пусть конечная группа G обладает субнормальным рядом $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_r = 1$ таким, что $G/G_1 \in D_\pi$, а для любого $i > 1$ факторгруппа G_{i-1}/G_i либо является π-группой, либо обладает свойством E_π^{nc}. Тогда $G \in D_\pi$.*

Доказательство. Хорошо известно, что E_π^{nc}-группы являются D_π-группами (см. [26, теорема 18.8]). Мы можем предположить, что $O_\pi(G) = O_{\pi'}(G) = 1$. По индукции $G_1 \in D_\pi$. Поэтому $G \in C_\pi$ по теореме 3. Пусть H — холлова π-подгруппа, а A — произвольная максимальная π-подгруппа группы G. Пусть K — минимальная субнормальная подгруппа группы G, содержащаяся в G_1, а R — нормальное замыкание K в G. Ясно, что $R \in D_\pi$ и $G/R \in D_\pi$. Мы должны рассмотреть случай $HR = AR = G$. Если R проста, то согласно гипотезе Шрайера G/R разрешима, и $G \in D_\pi$ по теореме 18.14 из [26]. Пусть R не проста. Тогда $K \in E_\pi^{nc}$, а по теореме 7 имеем $A \cap K \neq 1$. Более того, по лемме 3 $N_A(K)$ является максимальной π-подгруппой в $N_A(K)K$. Так как по индукции $N_A(K)K \in D_\pi$, получаем, что $A \cap K$ является холловой π-подгруппой в K, а значит, $A \cap R$ — холлова π-подгруппа в R. Теорема доказана.

Заметим, что в теореме 9 используется гипотеза Шрайера. Без нее можно обойтись, если дополнительно потребовать, чтобы в G все π-подгруппы были разрешимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Burnside W.* Theory of groups of finite order. 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1911.
2. *Hall P.* A note on soluble groups // J. London Math. Soc. 1928. V. 3. P. 98–105.
3. *Hall P.* A characteristic property of soluble groups // J. London Math. Soc. 1937. V. 12, N 2. P. 188–200.
4. *Чунихин С. А.* О разрешимых группах // Изв. Научно-исслед. ин-та математики и механики при Томском ун-те. 1938. № 2. С. 220–223.
5. *Zassenhaus H.* The theory of groups. 2nd ed. New York: Chelsea, 1958.
6. *Чунихин С. А.* О силовских свойствах конечных групп // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73, № 1. С. 29–32.
7. *Wielandt H.* Entwicklungslinien in der Strukturtheorie der endlichen Gruppen // Proc. Intern. Congress Math., Edinburgh, 1958. London: Cambridge Univ. Press, 1960. P. 268–278.
8. *Чунихин С. А.* О существовании и сопряженности подгрупп у конечной группы // Мат. сб. 1953. Т. 33, № 1. С. 111–132.
9. *Чунихин С. А.* О силовски-правильных группах // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 5. С. 773–774.
10. *Suzuki M.* Group theory. II. New York; Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer-Verl., 1986.
11. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 3, N 22. P. 286–304.
12. *Нерешенные* вопросы теории групп: Коуровская тетрадь. Изд. 15-е. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 2002.
13. *Русаков С. А.* Аналоги теоремы Силова о существовании и вложении подгрупп // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 5. С. 325–342.
14. *Шеметков Л. А.* Новая D-теорема в теории конечных групп // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160, № 2. С. 290–293.
15. *Шеметков Л. А.* О силовских свойствах конечных групп // Докл. АН БССР. 1972. Т. 16, № 10. С. 881–883.
16. *Мазуров В. Д.* Об одном вопросе Л. А. Шеметкова // Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 6. С. 624–636.
17. *Hartley B.* A theorem of Sylow type for finite groups // Math. Z. 1971. Bd 122. S. 223–226.
18. *Wielandt H.* Sur la Structure des groupes composés // Séminaire Dubreil-Pisot (Algèbre et Théorie des Nombres), 17e année, 10 pp. 1963/64. N 17.
19. *Hartley B.* Helmut Wielandt on the π-structure of finite groups // Helmut Wielandt. Mathematische Werke = Mathematical Works. V. 1. Ed. by B. Huppert and H. Schneider. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1994. P. 511–516.
20. *Wielandt H.* Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute // The Santa Cruz conf. on finite groups, Santa Cruz, 1979: Proc. Sympos. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1980. P. 161–173. (Pure Math.; 37).
21. *Казарин Л. С.* Теоремы силовского типа для конечных групп // Структурные свойства алгебраических систем. Нальчик: Кабардино-Балкарск. ун-т, 1981. С. 42–52.
22. *Мазуров В. Д., Ревин Д. О.* О холловом D_π-свойстве для конечных групп // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 125–134.
23. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Холловы подгруппы нечетного порядка в конечных группах // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 1. С. 15–56.
24. *Ревин Д. О.* Свойство D_π в одном классе конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 3. С. 335–370.
25. *Wielandt H.* Vertauschbare nachinvariante Untergruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1957. Bd 21, N 1–2. S. 55–62.
26. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

Статья поступила 28 мая 2003 г.

Шеметков Леонид Александрович
Гомельский университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь

shemetkov@gsu.unibel.by