Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 519.9,514.7:519.46

О СВЯЗИ НЕГОЛОНОМНОЙ МЕТРИКИ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА С МЕТРИКОЙ ГРУШИНА

Р. Р. Файзуллин

Аннотация: Вычисляются геодезических на плоскости Грушина и изучаются утверждения о связи сфер плоскости Грушина и сфер группы Гейзенберга. Выяснено, что утверждение о получении сфер группы Гейзенберга непосредственным вращением сфер Грушина нуждается в корректировке. Найдена модифицированная метрика Грушина, для которой справедливо последнее утверждение, также доказано несколько имеющих самостоятельное значение теорем о связях плоскости Грушина и группы Гейзенберга.

Ключевые слова: геодезическая, риманова метрика, группа Гейзенберга, Грушин.

В работах [1, 2] рассматривается гипоэллиптический оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

естественно связанный с вырожденной римановой метрикой

$$ds^2 = dx^2 + \frac{dy^2}{x^2}$$

на R^2, так называемой *метрикой Грушина.*

В [3] даны изображения сфер неголономной метрики ρ на группе Гейзенберга H, но не приведены точные формулы для них. Там же без всяких деталей отмечается связь между группой Гейзенберга (H, ρ) и плоскостью Грушина. В частности, в [3] упоминается 1-параметрическая группа подобий для плоскости Грушина, $(x, y) \to (\lambda x, \lambda^2 y)$. Без вычисления приведены формулы для геодезических и на плоскости Грушина:

$$x(t) = \frac{a}{b}\sin(bt), \quad y(t) = \frac{a}{b}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2bt)}{4b}\right),$$

и на группе Гейзенберга. Отсюда можно было бы легко найти формулы сфер метрики Грушина и группы Гейзенберга (H, ρ), но этого в явном виде не сделано. В статье [4] найдены точные формулы для сфер группы Гейзенберга. Там же было указано, что сферы на группе Гейзенберга получаются вращением «сфер Грушина» вокруг оси z:

$$r(t) = \frac{2T}{t}\sin(t/2); \quad z(t) = \frac{T^2}{2t^2}(t - \sin(t)), \quad 0 < t \leq 2\pi, \tag{1}$$

с продолжением по непрерывности до $t = 0$: $z = 0$; $r = T$. В этой же статье ошибочно предполагается, что эта связь отмечена в статье [3]. Мы докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Параметризованные длиной дуги (максимальные) геодезические на полуплоскости* $(x \geq 0)$ *с метрикой*

$$ds_v^2 = dx^2 + \frac{dy^2}{v^2 x^2}$$

имеют вид или

$$x(t) = \frac{\sin(t\sqrt{c})}{\sqrt{c}}, \quad y(t) = \pm v\left(\frac{t}{2\sqrt{c}} - \frac{\sin(2t\sqrt{c})}{4c}\right) + \mathrm{const}, \quad t \in [0, \pi/\sqrt{c}] \qquad (2)$$

при $c > 0$, *или*

$$x(t) = t, \quad y(t) = \mathrm{const}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

При этом каждый отрезок этой геодезической является кратчайшей.

Вращения (H, ρ) вокруг оси z в соответствующей системе координат первого рода на H являются изометриями (H, ρ) [4].

Теорема 2. *В цилиндрических координатах* (z, r, ϕ) *проекция* $p : (z, r, \phi) \to (z, r)$ *группы Гейзенберга* H *с левоинвариантной метрикой* ρ *на пространство орбит относительно группы вращений вокруг оси* z *является субметрией на плоскость* $(r \geq 0)$ *с метрикой Грушина*

$$ds^2 = dr^2 + \frac{4dz^2}{r^2}.$$

Кроме того, проекция p *сохраняет длины всех спрямляемых кривых на группе* (H, ρ).

Заметим, что не всякая субметрия отображает геодезические на геодезические, примером тому может служить субметрия $H \to E^2$, рассматриваемая в работе [4]. Поэтому представляет интерес

Теорема 3. *Проекция* p *отображает геодезические группы* H *с началом на оси* z *на геодезические модифицированной плоскости Грушина с сохранением длин дуг.*

Следствие 4. *Сферы группы Гейзенберга* (H, ρ) *с центром в* E *получаются вращением сфер модифицированной метрики Грушина с центром в* 0 *вокруг оси* z.

Предложение 5. *Параметризованные длиной дуги (максимальные) геодезические на плоскости Грушина с метрикой*

$$ds_v^2 = dx^2 + \frac{dy^2}{v^2 x^2}$$

имеют вид или

$$x(t) = \pm\frac{\sin(t\sqrt{c})}{\sqrt{c}}, \quad y(t) = \pm v\left(\frac{t}{2\sqrt{c}} - \frac{\sin(2t\sqrt{c})}{4c}\right) + \mathrm{const}, \quad t \in \mathbb{R},$$

при $c > 0$, *или*

$$x(t) = \pm t, \quad y(t) = \mathrm{const}, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

При этом каждый отрезок геодезической (первого вида), длина которого не превосходит $\frac{\pi}{\sqrt{c}}$, *является кратчайшей. Каждый отрезок прямой* (3) *будет тоже кратчайшей.*

1. Уравнения геодезических плоскости Грушина

Плоскость Грушина — двумерное пространство с метрикой G, $g_{11} = 1$; $g_{12} = 0$; $g_{21} = 0$; $g_{22} = 1/x_1^2$. Найдем уравнения геодезических:

$$\frac{d^2x_j}{dt^2} + \sum_{k,i} \Gamma^j_{ki} \frac{dx_k}{dt} \frac{dx_i}{dt} = 0, \quad j = 1, 2. \tag{4}$$

Коэффициенты связности (символы Кристоффеля) Γ^j_{ki} посчитаем по формуле

$$\Gamma^j_{ki} = \sum_m \frac{1}{2} g^{jm} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_m} \right), \tag{5}$$

где g^{ij} — элементы матрицы G^{-1}. Выпишем ненулевые коэффициенты связности:

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} g^{12} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{x_1^3},$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2} g^{21} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} \right) = -\frac{1}{x_1},$$

$$\Gamma^2_{21} = \frac{1}{2} g^{21} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x_2} \right) = -\frac{1}{x_1}.$$

Далее, переобозначив $x_1 = x$ и $x_2 = y$, перепишем систему (4) в следующем виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{x^3} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2}{x} \frac{dy}{dt} \frac{dx}{dt} = 0. \tag{7}$$

2. Нахождение геодезических

Замечание 6. Нетрудно заметить, что отражения относительно горизонтальных прямых $y = \mathrm{const}$ и прямой $x = 0$, а также параллельные сдвиги $(x, y) \to (x, y + a), a \in \mathbb{R}$, являются изометриями плоскости Грушина на себя. Поэтому если пара функций $(x(t), y(t))$ является решением (6), (7), то и $(x(t), -y(t))$, и $(x(t), y(t) + \mathrm{const})$, и $(-x(t), y(t))$ также являются решениями.

Напишем формулу, тождественно выражающую $\frac{d^2y}{dx^2}$ через $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2x}{dt^2}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{(\frac{dx}{dt})^3},$$

и используем уравнения (6), (7) для выражения вторых производных по t:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{2}{x}\frac{dy}{dt}(\frac{dx}{dt})^2}{(\frac{dx}{dt})^3} + \frac{\frac{1}{x^3}(\frac{dy}{dt})^3}{(\frac{dx}{dt})^3}.$$

Так как x, y — функции одной переменной t, то можно там, где $\frac{dx}{dt} \neq 0$, считать, что

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = y'.$$

Получаем уравнение

$$y'' = \left(\frac{y'}{x}\right)^3 + 2\frac{y'}{x}. \tag{8}$$

Частное решение этого уравнения запишется в виде $y(x) = \mathrm{const}$, $x(t) = t$. Оно доставляет нам геодезические второго типа, т. е. прямые вида

$$y(t) = \mathrm{const}, \quad x(t) = \pm t.$$

Для решения уравнения в общем случае рассмотрим функцию $u(x) = y'/x$. Из тождества

$$\frac{du}{dx} = \frac{y''}{x} - \frac{u}{x}$$

находим $y'' = x\frac{du}{dx} + u$. Уравнение (8) принимает вид

$$u'x = u^3 + u.$$

Решаем уравнение, разделяя переменные:

$$du\left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}\right) = \frac{dx}{x},$$

$$\ln|u| - \frac{1}{2}\ln(|u^2+1|) = \ln x + c_0, \quad \ln\left(\left|\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\right|\right) = \ln x + c_0.$$

Учитывая вышеприведенные очевидные соображения о решениях и рассматривая случай $u > 0$, получаем

$$\frac{u^2}{u^2+1} = cx^2 \ (c > 0), \quad u = \sqrt{\frac{cx^2}{1-cx^2}}. \tag{9}$$

Воспользовавшись тем, что $u = \frac{y'}{x}$, имеем соотношение для дифференциалов:

$$\frac{dy}{xdx} = \sqrt{\frac{cx^2}{1-cx^2}}, \tag{10}$$

$$dy = \frac{d(cx^2)}{2c}\sqrt{\frac{cx^2}{1-cx^2}}. \tag{11}$$

Интегрируя уравнение, получаем

$$\int dy = \int \sqrt{\frac{cx^2}{1-cx^2}}\frac{d(cx^2)}{2c} = \int \sqrt{\frac{w}{1-w}}\frac{d(w)}{2c},$$

$$\int dy = \int \sqrt{\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}\frac{d(\sin^2(\alpha))}{2c} = \frac{1}{c}\int \sin^2(\alpha)d\alpha, \quad y = \frac{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{2c} + c_2$$

(здесь использовались подстановки $cx^2 = w = \sin^2(\alpha)$),

$$y(x) = \frac{\arcsin\sqrt{cx^2}}{2} - \frac{\sin(2\arcsin(\sqrt{cx^2}))}{4c} + c_2. \tag{12}$$

Зная, как выражается dy через dx (см. (10), (11)), подставим в уравнение (6) вместо $\frac{dy}{dt}$ соответствующую функцию от $\frac{dx}{dt}$ и x. Тогда можно записать

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{x^3}\left(\frac{xdx}{dt}\sqrt{\frac{cx^2}{1-cx^2}}\right)^2 = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{cx}{1-cx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0. \tag{13}$$

Отметим, что из уравнения (9) следует неравенство

$$1 - cx^2 > 0. \tag{14}$$

Вводя переменную $p(x) = \frac{dx}{dt}$, получаем тождество

$$\frac{\frac{d}{dt}p}{p} = \frac{\frac{d}{dt}p}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dp}{dx} = p',$$

где штрих означает производную по x. Тогда уравнение (13) принимает вид

$$\frac{p'}{p} = \frac{cx}{cx^2 - 1}, \quad \frac{dp}{pdx} = \frac{cx}{cx^2 - 1}, \quad \frac{dp}{p} = \frac{d(cx^2 - 1)}{2(cx^2 - 1)}.$$

С учетом неравенства (14) имеем

$$\ln |p| = \frac{1}{2} \ln |cx^2 - 1| + c_3 = \frac{1}{2} \ln(1 - cx^2) + c_3.$$

Это уравнение показывает, что $c_3 = \lim\limits_{x \to 0} \ln |p(x)|$. Учитывая сингулярность метрики на прямой $x = 0$, инвариантность метрики относительно сдвигов по оси y и вводя параметризацию длиной дуги, найдем условия нормировки:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 1; \quad y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = 0. \tag{15}$$

Следовательно, $c_3 = 0$ и $p > 0$. Тогда

$$\ln \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \ln(1 - cx^2), \tag{16}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 - cx^2)}} = dt; \quad x(t) = \frac{\sin(t\sqrt{c})}{\sqrt{c}}. \tag{17}$$

Эта функция является решением (13) и при $dx/dt < 0$. Теперь найдем $y(t)$ по приведенной выше формуле (12), учитывая условия нормировки (15):

$$y(t) = \frac{\arcsin(\sin(t\sqrt{c})) - \sin(t\sqrt{c}) \cos(t\sqrt{c}))}{2c} = \frac{t}{2\sqrt{c}} - \frac{\sin(2t\sqrt{c})}{4c}, \tag{18}$$

$$x(t) = \frac{\sin(t\sqrt{c})}{\sqrt{c}}. \tag{19}$$

Из условия $1 - cx^2 > 0$, $x \geq 0$, следует ограничение для натурального параметра t: $t \in [0, t_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{c}})$, в формулах, зависящих от t. Здесь t_1 — значение параметра t, соответствующее особой точке уравнения (16) или (17). По непрерывности геодезическая продолжается в эту точку:

$$y_{\max} = y(t_1) = \frac{\pi}{4c}, \quad x_{\max} = x(t_1) = \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Из геометрических соображений и замечания (6) следует, что параметрические уравнения

$$x_1(t) = x(2t_1 - t), \quad y_1(t) = -y(2t_1 - t) + 2y_{\max}, \quad t \in (t_1, 2t_1],$$

задают продолжение рассматриваемой геодезической $(x(t), y(t))$, рассматриваемая геодезическая и ее продолжение имеют общий (вертикальный) касательный вектор. Можно заметить, что вместе они дают геодезическую, определяемую теми же формулами (19), (18), но на вдвое большем по длине отрезке $t \in [0, \frac{\pi}{\sqrt{c}}]$. Рассмотрим для параметра $v > 0$ метрику G_v:

$$ds_v^2 = dx^2 + \frac{dz^2}{v^2x^2} = dx^2 + \frac{1}{x^2} d\left(\frac{z}{v}\right)^2.$$

Рассматривая функцию z/v как компоненту y, получаем прежнюю метрику, т. е. отображение

$$(x, z) \to \left(x, y = \frac{z}{v}\right)$$

является изометрией плоскости (x, z) с метрикой ds_v^2 на плоскость (x, y) с метрикой ds^2. Простым вычислением можно показать, что изменится лишь коэффициент связности

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(-\frac{\frac{1}{v^2x^2}}{\partial x}\right) = \frac{1}{v^2x^3}.$$

Поэтому параметрические уравнения геодезических $(x(t), z(t))$ для метрики ds_v^2 получаются из параметрических уравнений геодезических $(x(t), y(t))$ умножением $y(t)$ на v. Таким образом, (максимальные) геодезические метрики ds_v^2 имеют вид (2).

3. Сферы плоскости Грушина

Найдем векторное параметрическое уравнение сферы радиуса R с центром в точке $(0, 0)$ на плоскости Грушина, пользуясь замечанием (6), фиксируя параметр $t = R$ и изменяя параметр c в уравнениях (19), (18):

$$\bar{r}(R, c) = \left(\frac{\sin(R\sqrt{c})}{\sqrt{c}}, \frac{R}{2\sqrt{c}} - \frac{\sin(2R\sqrt{c})}{4c}\right), \quad \sqrt{c} \in (0, \pi/R].$$

При замене переменной $2R\sqrt{c} = j$ эти уравнения приобретают вид

$$\bar{r}(R, j) = \left(\frac{2R}{j} \sin\left(\frac{j}{2}\right), \frac{R^2}{j^2}(j - \sin(j))\right), \quad 0 < j \le 2\pi.$$

По непрерывности $\bar{r}(R, 0) = (R, 0)$. Таким образом, получена формула для части сферы, лежащей в первом квадранте. Отражая эту кривую относительно осей координат, получим полную сферу в метрике ds^2. Для сравнения с [4] переобозначим $R = T$, $t = j$:

$$\bar{r}(T, t) = \left(\frac{2T}{t} \sin\left(\frac{t}{2}\right); \frac{T^2}{t^2}(t - \sin(t))\right).$$

Взяв метрику ds_v^2 при $v = \frac{1}{2}$ и проведя дополнительные замены

$$z = \frac{1}{2} y, \quad r = x,$$

получим формулы (1), которые предполагались в [4].

4. Доказательства

Теорема 1 доказана в разд. 2 (из вида геодезических следует, что существует только одна геодезическая, соединяющая различные точки на оси y, и всякая точка полуплоскости $x \geq 0$ лежит на одной из таких геодезических, откуда вытекает последнее утверждение теоремы). Теорема 3 следует из уравнения (2), инвариантности метрики на группе Гейзенберга относительно вращений вокруг оси z, сдвигов вдоль нее, а также из вида геодезических на группе Гейзенберга [4]. Напомним, что отображение p метрического пространства M на метрическое пространство N называется субметрией, если для всякой точки $x \in M$ и числа $r \geq 0$ имеем $p(B(x,r)) = B(p(x),r))$, где через $B(x,r)$ обозначается замкнутый шар с центром в точке x радиуса r.

Доказательство теоремы 2 и следствий. В координатах (x,y,z) (см. [4]) на группе Гейзенберга H левоинвариантное горизонтальное распределение, определяющее неголономную риманову метрику ρ на H, задается формулой

$$dz = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx),$$

причем

$$|v| = |(dx,dy,dz)| = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

где $|\ |$ обозначает длину горизонтального вектора $v = (dx,dy,dz)$. Потребуем, чтобы дифференциал p_* проекции p сохранял длины горизонтальных векторов. Тогда при $y = 0$

$$|p_*(dx,dy,dz)|^2 = |(dx,dz)|^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{4}{x^2}\,dz^2, \tag{20}$$

поскольку

$$dz = \frac{1}{2}x\,dy, \quad dy = \frac{2}{x}\,dz.$$

Таким образом, мы получили квадрат линейного элемента $ds^2_{v=\frac{1}{2}}$ для (модифицированной) плоскости Грушина. Так как выражение $dx^2 + dy^2$ и горизонтальное распределение на H инвариантны относительно вращений вокруг оси z, то и в общем случае выполняется уравнение (20). Каждая спрямляемая кривая на (H,ρ), параметризованная длиной дуги, является липшицевой кривой в координатах (x,y,z)) [5, с. 20]. Поэтому ее длина равна интегралу

$$\int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt.$$

Отсюда следует, что отображение

$$p : (H,\rho) \to (\Pi_+,\mu),$$

где μ — внутренняя метрика на модифицированной полуплоскости Грушина Π_+, сохраняет длины спрямляемых кривых. Следовательно, $p : (H,\rho) \to \Pi_+$ является субметрией. Поскольку расстояние между двумя орбитами A и B равно точной нижней границе расстояний $d(h_1,h_2)$, где $h_1 \in A, h_2 \in B$, причем граница достигается, то пространство орбит в (H,ρ) относительно группы вращений вокруг оси z естественно отождествляется с полуплоскостью (Π_+,μ). Следствие 4 непосредственно вытекает из теорем 2, 3. Предложение 5 вытекает из доказательства теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Грушин В. В.* Об одном классе гипоэллиптических операторов // Мат. сб. 1970. Т. 83, № 3. С. 456–473.
2. *Грушин В. В.* Об одном классе эллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на подмногообразии // Мат. сб. 1971. Т. 84, № 2. С. 163–195.
3. *Bellaiche A.* The tangent space in Sub-Riemannian geometry // Sub-Riemannian Geometry (ed. Bellaiche A., Risler J.-J.). Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 1996. P. 1–78. (Progress in Math.; 144).
4. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Формы сфер специальных неголономных левоинвариантных внутренних метрик на некоторых группах Ли // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 731–748.
5. *Берестовский В. Н.* Однородные многообразия с внутренней метрикой // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 6. С. 17–29.

Статья поступила 24 сентября 2002 г.

Файзуллин Рамиль Рашитович
Омский гос. университет, кафедра динамических систем,
пр. Мира, 55-А, Омск 644077
ramillien@mail.ru