Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 517.958

КОМПАКТНОСТЬ ОГРАНИЧЕННЫХ КВАЗИЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ГАЗА

В. В. Шелухин

Аннотация: Вводится понятие квазиэнтропийного решения уравнений изотермического газа в лагранжевых переменных. Установлена компактность ограниченных квазиэнтропийных решений. Сведение мер Янга к мерам Дирака основано на групповом анализе уравнения энтропийных волн.

Ключевые слова: законы сохранения, компактность, энтропийные решения, мера Янга

Введение

В лагранжевых переменных одномерные изотермические течения газа с плоскими волнами описываются системой

$$u_t = -p_x, \quad v_t = u_x, \quad p = \frac{k}{v}, \quad (t,x) \in Q = (0,T) \times \mathbb{R}, \tag{0.1}$$

где u — скорость, v — удельный объем, p — давление, k — положительная постоянная. Вопрос о глобальной разрешимости задачи Коши для (0.1) с начальными данными

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad v|_{t=0} = v_0(x) \geq 0 \tag{0.2}$$

остается открытым в случае $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. При $u_0, v_0 \in BV$ глобальная разрешимость доказана в работах $[1, 2]$. Компактность ограниченных энтропийных решений, удовлетворяющих оценкам

$$|u_n| \leq c, \quad 0 < c^{-1} \leq v_n, \tag{0.3}$$

равномерным по n, установлена в работе [3] для системы (0.1) в случае изэнтропических течений, т. е. при

$$p = kv^{-\gamma}, \quad \gamma > 1. \tag{0.4}$$

Глобальная разрешимость задачи Коши для системы (0.1) с уравнением состояния (0.4) также остается недоказанной при $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, главным образом, из-за отсутствия априорных оценок.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00645), INTAS (грант 01–868) и программы «Университеты России» (грант 04.01.038).

В то же время система уравнений изэнтропического движения газа в эйлеровых переменных

$$\rho(u_t + uu_x) = -p_x, \quad \rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad p = k\rho^\gamma, \quad \gamma > 1, \tag{0.5}$$

исследована гораздо полнее при $u_0, \rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Первым глобальную разрешимость задачи Коши для системы (0.5) с ограниченными начальными данными $u_0, \rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ доказал Р. Ди Перна [4] при $\gamma = 2k + 3/2k + 1$, $k \geq 1$. Чен [5, 6] и П.-Л. Лионс, Б. Пертам и П. Суганидис [6] распространили этот результат для случаев $\gamma \in (1, 5/3]$ и $\gamma > 1$ соответственно. Более общий класс уравнений состояния $p = p(\rho)$ исследован в работе [7], однако он также не включает случай $p = \rho$.

В данной работе вводятся квазиэнтропийные решения системы (0.1).

Определение 0.1. Функции $u, v \in L^\infty(Q)$, $v \geq 0$, *образуют квазиэнтропийное решение задачи Коши* (0.1), если

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} [\eta(u,v) - \eta(u_0,v_0)]\varphi_t + q(u,v)\varphi_x \, dxdt \geq 0 \tag{0.6}$$

для любой неотрицательной функции $\varphi(t,x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ и для всех квазиэнтропийных пар $(\eta, q) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, являющихся решениями системы

$$\eta_v = -q_u, \quad k\eta_u = -v^2 q_v \tag{0.7}$$

с условием

$$B_U[\xi,\zeta] \equiv \eta_{uu}\xi^2 + \left(\eta_{vv} + \frac{\eta_v}{v}\right)\zeta^2 + 2\eta_{uv}\xi\zeta \geq 0 \quad \forall (\xi,\zeta) \in \mathbb{R}^2. \tag{0.8}$$

Заметим, что определение энтропийного решения совпадает с вышеприведенным, если неравенство (0.8) заменить условием выпуклости функции $\eta(u,v)$.

Поясним, как связано определение 0.1 с методом исчезающей вязкости. В случае энтропийного решения приближенные решения $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ определяются из системы

$$u_t = -p(v)_x + \varepsilon u_{xx}, \quad v_t = u_x + \varepsilon v_{xx}.$$

Так как $\eta(u,v)$ и $q(u,v)$ удовлетворяют условиям (0.7), то

$$\eta(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_t + q(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_x = \varepsilon \eta(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{xx} - \varepsilon \eta''(u^\varepsilon, v^\varepsilon)\left[u_x^\varepsilon, v_x^\varepsilon\right].$$

Если каким-то образом удается доказать сходимость $u^\varepsilon, v^\varepsilon \to (u,v)$ п. в. в Q, то предельные функции (u,v) удовлетворяют неравенству (0.6) для выпуклой функции $\eta(u,v)$.

При определении квазиэнтропийного решения в качестве исходной можно взять аппроксимацию

$$u_t = -p(v)_x + \varepsilon u_{xx}, \quad v_t = u_x + \varepsilon v_{xx} - \varepsilon \frac{v_x^2}{v}.$$

В силу (0.7)

$$\eta(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_t + q(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_x = \varepsilon \eta(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{xx} - \varepsilon B_U\left[u_x^\varepsilon, v_x^\varepsilon\right].$$

Отсюда и вытекает неравенство (0.6), если форма $B_U[\xi,\zeta]$ неотрицательна.

Главная особенность квазиэнтропийного решения заключается в следующем. Уравнение импульса $u_t = -p_x$ выполняется в смысле распределений и вытекает из неравенства (0.6). Это обусловлено тем, что наряду с парой $\eta = u$, $q = p$ условиям (0.7) удовлетворяет и пара $\eta = -u$, $q = -p$. Однако, в то время как пара $\eta = v$, $q = -u$ удовлетворяет условиям (0.7), пара $\eta = -v$, $q = u$ условию (0.7) не удовлетворяет. Поэтому условие квазиэнтропийности гарантирует только выполнение соотношений

$$u_t = -p(v)_x, \quad v_t \le u_x \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'(Q).$$

Ниже мы покажем, что гладкое квазиэнтропийное решение удовлетворяет уравнениям (0.1). Таким образом, квазиэнтропийное решение описывает процесс, в котором в точках разрыва может нарушаться закон сохранения массы газа. Подобное возникает в физике взрыва. Так, при прохождении ударной волны по газообразному углероду из него выпадают частицы твердого углерода — алмаза [8, 9], а водород внутри фронта ударной волны может приобретать металлические свойства [10].

Цель данной работы — доказать компактность множества квазиэнтропийных решений, удовлетворяющих неравенствам

$$|u| \le c_0, \quad 0 < c_0^{-1} \le v \le c_0, \tag{0.9}$$

где c_0 — фиксированная положительная постоянная.

Теорема 0.1. *Если последовательность квазиэнтропийных решений (u_n, v_n) удовлетворяет условию (0.9), то найдется подпоследовательность (u_m, v_m), которая сходится п. в. в Q к квазиэнтропийному решению (u, v).*

Приведем схему доказательства. Оценки (0.9) позволяют считать [11], что имеются некоторая $*$-слабо сходящаяся в $L^\infty(Q)$ последовательность (u_m, v_m) и вероятностная мера Янга $\nu_{t,x} \ge 0$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, определенная для п. в. $(t, x) \in Q$ и такая, что

$$\operatorname{spt} \nu_{t,x} \subset \bigl\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) : |\lambda_1| \le c_0,\ c_0^{-1} \le \lambda_2 \le c_0\bigr\}$$

и

$$\lim_{m\to\infty} g(u_m, v_m) = \int g(\lambda)\, d\nu_{t,x}(\lambda)$$

для любой непрерывной функции $g(u, v)$. Первый шаг состоит в проверке п. в. в Q коммутационного соотношения Тартара — Мюра [12] для меры $\nu_{t,x}$ и для двух квазиэнтропийных пар (η_i, q_i):

$$\overline{\eta_1 q_2 - \eta_2 q_1} = \overline{\eta_1}\ \overline{q_2} - \overline{\eta_2}\ \overline{q_1}, \tag{0.10}$$

где

$$\bar{f} = \langle \nu_{t,x}, f(u, v)\rangle = \int f(\lambda)\, d\nu_{t,x}(\lambda).$$

Равенство (0.10) доказывается методом компенсированной компактности на основе известной div-curl-леммы Мюра [13]. С этой целью сначала доказывается, что последовательность мер

$$\theta_m = \eta(u_m, v_m)_t + q(u_m, v_m)_x$$

ограничена, т. е.

$$\|\theta_m\|_{M_{\mathrm{loc}}(Q)} \le c.$$

А затем с помощью леммы Мюра [13] показывается компактность последовательности θ_m в $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(Q)$.

Второй и самый важный шаг заключается в доказательстве того, что мера $\nu_{t,x}$ есть δ-мера Дирака на плоскости u, v. Это означает, в частности, что существуют функции u и v такие, что $u_m \to u$ и $v_m \to v$ п. в. в Q. После этого легко проверяется, что (u, v) является квазиэнтропийным решением.

Существуют несколько способов применения равенства (0.10) для сведения меры $\nu_{t,x}$ к точечной [4, 7, 14, 15]. Все они так или иначе используют семейства решений уравнения энтропийных волн

$$\eta_{vv} = -p'(v)\eta_{uu}, \tag{0.11}$$

которое получается из системы (0.7) после исключения функции q. Р. Ди Перна [4] использовал дискретное семейство приближенных решений, основываясь на асимптотике, которую предложил Лакс. П.-Л. Лионс, Б. Пертам и Е. Тадмор [14] вводили непрерывное семейство, построенное с помощью фундаментального решения уравнения (0.11).

В данной работе строятся семейства точных решений уравнения (0.11) с помощью однопараметрических групп симметрий, допускаемых этим уравнением.

План статьи следующий. 1. Доказательство равенства (0.10). 2. Групповой анализ уравнения энтропийных волн. 3. Сведение мер Янга $\nu_{t,x}$ к точечным. 4. Квазиэнтропийное решение в точках гладкости.

1. Коммутационное равенство

Рассматривается последовательность квазиэнтропийных решений, удовлетворяющих равномерным оценкам (0.9). В силу (0.6)

$$\theta_m = \eta(u_m, v_m)_t + q(u_m, v_m)_x \le 0 \quad \text{в } \mathscr{D}'(Q).$$

Поэтому распределения θ_m являются мерами, т. е. элементами пространства $M(Q) = C_0(Q)^*$, где $C_0(Q)$ — множество непрерывных на Q функций с компактным носителем.

Лемма 1.1. *Последовательность мер θ_m компактна в $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(Q)$.*

Доказательство. Докажем сначала, что оценка

$$|\langle \theta_m, f\rangle| \le c(K)\|f\|_{C_0(K)} \tag{1.1}$$

справедлива для любой функции $f \in C_0(K)$, где K — компакт в Q. По теореме Рисса [16] функционал θ_m является интегралом Даниеля и существует неотрицательная на Q мера μ_m такая, что

$$-\langle \theta_m, f\rangle = \int\limits_Q f\, d\mu_m \quad \forall f \in C_0(Q). \tag{1.2}$$

Пусть $Q \supset K$ — компакт. Покажем, что

$$\mu_m(K) \le c \tag{1.3}$$

равномерно по m. Пусть $\Pi = [t_1, t_2] \times [-R, R]$ — замкнутый прямоугольник, содержащий K и такой, что $h_0 = \mathrm{dist}(K, \Pi) > 0$. Обозначим

$$\eta_m = \eta(u_m v_m), \quad q_m = q(u_m, v_m).$$

По свойствам усреднений

$$-\langle\theta_m,((1_\Pi)_\delta)_h\rangle = \int\limits_Q \eta_m\frac{\partial((1_\Pi)_\delta)_h}{\partial t} + q_m\frac{\partial((1_\Pi)_\delta)_h}{\partial x}\,dxdt$$

$$= \int\limits_Q (\eta_m)_h\frac{\partial(1_\Pi)_\delta}{\partial t} + (q_m)_h\frac{\partial(1_\Pi)_\delta}{\partial x}\,dxdt = -\int\limits_Q\left(\frac{\partial(\eta_m)_h}{\partial t} + \frac{\partial(q_m)_h}{\partial x}\right)(1_\Pi)_\delta\,dxdt. \tag{1.4}$$

Здесь 1_Π — характеристическая функция множества П, $(1_\Pi)_h$ — усреднение с симметричным ядром, т. е.

$$(1_\Pi)_h(t,x) = \frac{1}{h^2}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}} 1_\Pi(\tau,\xi)\rho\left(\frac{\tau-t}{h}\right)\rho\left(\frac{\xi-x}{h}\right)d\tau d\xi,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\rho(\xi)d\xi = 1,\quad \rho\ge 0,\quad \rho\in C^\infty(\mathbb{R}),\quad \operatorname{spt}\rho\in(-1,1),\quad \rho(-\xi)=\rho(\xi).$$

Из равенства (1.4) в пределе при $\delta\to 0$ получаем

$$-\langle\theta_m,(1_\Pi)_h\rangle = -\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{-R}^{R}\frac{(\eta_m)_h}{\partial t} + \frac{\partial(q_m)_h}{\partial x}\,dxdt = \int\limits_{-R}^{R}(\eta_m)_h|_{t=t_2}^{t=t_1}\,dx + \int\limits_{t_1}^{t_2}(q_m)_h|_{x=R}^{x=-R}\,dt.$$

Ясно, что $|\langle\theta_m,(1_\Pi)_h\rangle|\le c$ равномерно по m и по $h\le h_0$. Конструкция меры μ_m такова, что [16]

$$\mu_m(K) = \inf\lim_{k\to\infty}\langle-\theta_m,f_k\rangle,$$

где inf берется по всем последовательностям $\{f_k\}$ таким, что

$$f_k\in C_0(Q),\quad 0\le f_1\le f_2\le\dots,\quad \lim_{k\to\infty}f_k(x)|_{x\in K}\ge 1.$$

Выбирая $f_k=(1_\Pi)_h$, $h<h_0$, $k=1,2,\dots$, приходим к оценке (1.3) и тем самым к оценке (1.1).

Соответствие между θ_m и μ_m, задаваемое равенством (1.2), позволяет считать θ_m элементом пространства $M(G)=C(\overline{G})^*$, где G — произвольная ограниченная область в Q. При этом

$$\langle-\theta_m,f\rangle = \int\limits_Q f\,d\mu_m\quad \forall f\in C(\overline{Q}).$$

Оценка (1.1) означает, что

$$\|\theta_m\|_{M(G)}\le c \tag{1.5}$$

равномерно по m. С другой стороны, выполнение оценки (0.9) позволяет считать, что

$$\|\theta_m\|_{W^{-1,\infty}(G)}\le c, \tag{1.6}$$

где $W^{-1,\infty}(G)=W_0^{1,1}(G)^*$. Пусть $\partial G\in C^{1,1}$. Тогда совокупность оценок (1.5) и (1.6) означает по лемме Мюра [13], что последовательность θ_m компактна в $H^{-1}(G)$.

Следствием леммы 1.1 является компактность в $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(Q)$ двух последовательностей

$$\operatorname{div}(\eta^1_m,q^1_m)^T\equiv\frac{\partial\eta^1_m}{\partial t}+\frac{\partial q^1_m}{\partial x}\quad\text{и}\quad \operatorname{curl}\big(-q^2_m,\eta^2_m\big)^T\equiv\frac{\partial\eta^2_m}{\partial t}+\frac{\partial q^2_m}{\partial x},$$

где (η^i,q^i) — U-энтропийные пары из определения 0.1. По div-curl-лемме [13] последовательность $\eta^1_mq^2_m-\eta^2_mq^1_m$ компактна в $\mathscr{D}'(Q)$ и справедливо коммутационное равенство (0.10).

2. Групповой анализ уравнения энтропийных волн

В инвариантах Римана

$$w = u + \sqrt{k}\ln(Mv), \quad z = u - \sqrt{k}\ln(Mv), \quad M = \mathrm{const} > 0,$$

уравнение (0.11) при $p = k/v$ записывается для функции $\eta(w,z)$ в виде уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу

$$F(\eta_w, \eta_z, \eta_{wz}) \equiv \eta_{wz} - a(\eta_z - \eta_w) = 0, \quad a = \frac{1}{4\sqrt{k}}. \tag{2.1}$$

В более общем случае, когда a — функция от w и z, полный групповой анализ дан в книге Л. В. Овсянникова [17]. В нашем случае, когда $a = \mathrm{const}$, этот анализ проще. Приведем лишь результаты. Пусть искомая однопараметрическая группа задается инфинитезимальным оператором

$$X = \xi(w,z,\eta)\frac{\partial}{\partial w} + \tau(w,z,\eta)\frac{\partial}{\partial z} + \varphi(w,z,\eta)\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Вычисления первого и второго продолжений этого оператора дают

$$X^1 = X + \zeta^{\eta_w}\frac{\partial}{\partial \eta_w} + \zeta^{\eta_z}\frac{\partial}{\partial \eta_z}, \quad X^2 = X^1 + \zeta^{\eta_{ww}}\frac{\partial}{\partial \eta_{ww}} + \zeta^{\eta_{wz}}\frac{\partial}{\partial \eta_{wz}} + \zeta^{\eta_{zz}}\frac{\partial}{\partial \eta_{zz}},$$

где

$$\zeta^{\eta_w} = D_w\varphi - \eta_w D_w\xi - \eta_z D_w\tau, \quad D_w = \frac{\partial}{\partial w} + \eta_w\frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\zeta^{\eta_z} = D_z\varphi - \eta_w D_z\xi - \eta_z D_z\tau, \quad D_z = \frac{\partial}{\partial z} + \eta_z\frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\begin{aligned}\zeta^{\eta_{wz}} &= D_z\varphi_w + \eta_w D_z\varphi_\eta + \varphi_\eta\eta_{wz} - \eta_{ww}D_z\xi - \eta_{wz}(D_w\xi + D_z\tau) \\ &\quad - \eta_w(D_z\xi_w + \eta_w D_z\xi_\eta + \xi_\eta\eta_{wz}) - \eta_{zz}D_w\tau - \eta_z(D_z\tau_w + \eta_w D_z\tau_\eta + \eta_{wz}\tau_\eta).\end{aligned}$$

Заметим, что в вычислении коэффициентов $\zeta^{\eta_{ww}}$ и $\zeta^{\eta_{zz}}$ нет необходимости. Применение оператора X^2 к F и анализ этого применения на многообразии $F = 0$ позволяют заключить, что уравнение (2.1) допускает четыре одномерных группы G_i и одну бесконечномерную группу G_5 с инфинитезимальными операторами

$$\frac{\partial}{\partial w}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad \eta\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad w\frac{\partial}{\partial w} - z\frac{\partial}{\partial z} + a(w+z)\eta\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \beta(w,z)\frac{\partial}{\partial \eta},$$

где β — решение уравнения (2.1). Тот факт, что уравнение (2.1) допускает группу G_i, означает, что если $\eta(w,z)$ — какое-либо решение, то при произвольных $c, \xi \in \mathbb{R}$ решениями являются также следующие функции:

$$\eta(w+c,z), \quad \eta(w,z+c), \quad c\eta(w,z),$$

$$\eta(e^{-\xi}w, e^{\xi}z)\exp\left(aw(1-e^{-\xi}) - az(1-e^{\xi})\right), \quad \eta(w,z) + \beta(w,z).$$

Заметим, что как только это утверждение получено, его справедливость может быть легко проверена непосредственно без группового анализа.

Методом разделения переменных получаются частные решения уравнения (0.11):

$$\eta = v^\beta e^{\alpha u}, \quad \beta(\beta - 1) = k\alpha^2. \tag{2.2}$$

Каждое такое решение с помощью группы G_4 порождает семейство новых решений уравнения (0.11):

$$\eta(u,v,\xi)=v^B e^{Au}, \tag{2.3}$$

$$B=\frac{e^{\xi}}{2}\left(\beta-\frac{1}{2}-\alpha\sqrt{k}\right)+\frac{e^{-\xi}}{2}\left(\beta-\frac{1}{2}+\alpha\sqrt{k}\right)+\frac{1}{2},$$

$$A=-\frac{e^{\xi}}{2\sqrt{k}}\left(\beta-\frac{1}{2}-\alpha\sqrt{k}\right)+\frac{e^{-\xi}}{2\sqrt{k}}\left(\beta-\frac{1}{2}+\alpha\sqrt{k}\right).$$

Выделим два семейства решений

$$\eta_i(u,v,\xi)=v^{B_i(\xi)}e^{A_i(\xi)u}=M^{-B_i(\xi)}e^{wn_i(\xi)+zm_i(\xi)},$$

соответствующие парам (α_i,β_i) таким, что $\alpha_1<0$, $\beta_1<0$, $\alpha_2>0$, $\beta_2>1$, где

$$n_i=\frac{e^{-\xi}}{2\sqrt{k}}\left(\beta_i-\frac{1}{2}+\alpha_i\sqrt{k}\right)+\frac{1}{4\sqrt{k}},\quad m_i=-\frac{e^{\xi}}{2\sqrt{k}}\left(\beta_i-\frac{1}{2}-\alpha_i\sqrt{k}\right)-\frac{1}{4\sqrt{k}}.$$

Отметим, что

$$n_1\to-\infty,\quad m_1\to-\frac{1}{4\sqrt{k}}\quad \text{при } \xi\to-\infty, \tag{2.4}$$

$$n_2\to\infty,\quad m_2\to-\frac{1}{4\sqrt{k}}\quad \text{при } \xi\to-\infty. \tag{2.5}$$

Согласуем пары (α_1,β_1) и (α_2,β_2) с помощью равенства

$$(\beta_2-1/2+\alpha_2\sqrt{k})=-(\beta_1-1/2+\alpha_1\sqrt{k}). \tag{2.6}$$

Такой выбор пар можно осуществить многими способами. Например, если

$$\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{k}}\ (>0),\quad \beta_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (>1),$$

то условие $(2.2)_2$ для пары (α_2,β_2) выполнено. Пусть λ — положительный корень уравнения

$$2\lambda+2\sqrt{\lambda(1+\lambda)}=1+\sqrt{5}.$$

Тогда пара

$$\alpha_1=-\sqrt{\frac{\lambda(1+\lambda)}{k}}\ (<0),\quad \beta_1=-\lambda\ (<0)$$

удовлетворяет условию $(2.2)_2$ и равенству (2.6).

Кроме согласованных семейств $\eta_1(\xi)$ и $\eta_2(\xi)$ важную роль далее будут играть два других согласованных семейства

$$\eta_i(u,v,\zeta)=v^{B_i(\zeta)}e^{A_i(\zeta)u}=M^{-B_i(\zeta)}e^{wn_i(\zeta)+zm_i(\zeta)},\quad i\in\{1,2\}, \tag{2.7}$$

$$n_i=\frac{A_i}{2}+\frac{B_i}{2\sqrt{k}},\quad m_i=\frac{A_i}{2}-\frac{B_i}{2\sqrt{k}},$$

соответствующие парам (α_i,β_i) таким, что

$$\alpha_1<0,\quad \beta_1<0,\quad \alpha_2>0,\quad \beta_2>1,\quad \beta_i(\beta_i-1)=k\alpha_i^2.$$

Условием согласования семейств $\eta_i(\zeta)$ является

$$(\beta_2-1/2-\alpha_2\sqrt{k})=-(\beta_1-1/2-\alpha_1\sqrt{k}). \tag{2.8}$$

Нетрудно видеть, что такое согласование возможно. Параметры $n_i(\zeta)$, $m_i(\zeta)$ задаются равенствами

$$n_i(\zeta)=\frac{e^{-\zeta}}{2\sqrt{k}}\left(\beta_i-\frac{1}{2}+\alpha_i\sqrt{k}\right)+\frac{1}{4\sqrt{k}},\quad m_i(\zeta)=-\frac{e^{\zeta}}{2\sqrt{k}}\left(\beta_i-\frac{1}{2}-\alpha_i\sqrt{k}\right)-\frac{1}{4\sqrt{k}}.$$

Поэтому

$$m_1(\zeta)+m_2(\zeta)=-\frac{1}{2\sqrt{k}},\quad n_i(\zeta)\to\frac{1}{4\sqrt{k}}\quad \text{при } \zeta\to\infty, \tag{2.9}$$

$$m_1(\zeta)\to\infty,\quad m_2\to-\infty\quad \text{при } \zeta\to\infty. \tag{2.10}$$

3. Сведение мер Янга к мерам Дирака

При выполнении условий (0.9) зависимость между переменными (u,v) и (w,z) взаимно однозначная. Поэтому достаточно доказать равенство $\nu_{t,x}=\delta$, рассматривая меры на плоскости переменных w,z. Пусть $E=[w_1,w_2]\times[z_1,z_2]$ — минимальный прямоугольник, содержащий носитель меры $\nu_{t,x}$. В силу оценок (0.9) постоянную M в определении инвариантов Римана можно выбрать такой, что $w_1>0$ и $z_2<0$.

Важную роль в дальнейшем играют меры $\mu^i_{t,x}$, определенные равенством

$$\left\langle \mu^i_{t,x}, h(u,v)\right\rangle = \lim_{\xi\to-\infty}\frac{\langle \nu_{t,x}, h\eta_i(\xi)\rangle}{\langle \nu_{t,x}, \eta_i(\xi)\rangle}, \quad i\in\{1,2\}.$$

Подобные меры использовал Р. Ди Перна [3].

Лемма 3.1. *Если $w_1<w_2$, то*

$$\operatorname{spt}\mu^i_{t,x}\subset\{w=w_i\}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Пусть $h(w,z)\in C^1(E)$ и $h=0$ при $w=w_2$. Тогда при достаточно большом $r>0$ выполняется неравенство

$$|h|\le r(w_2-w)\quad \forall (w,z)\in E.$$

Опуская индекс (t,x) у мер, запишем очевидное неравенство

$$|\langle\mu^2,h\rangle|\le\lim_{\xi\to-\infty}\frac{\int\limits_E r(w_2-w)e^{(w-w_2)n_2+zm_2}\,d\nu}{\int\limits_E e^{(w-w_2)n_2+zm_2}\,d\nu}\equiv\lim_{\xi\to-\infty}J_2(\xi).$$

Оценим величину $J_2(\xi)$, используя следующие разбиения прямоугольника E для числителя и знаменателя:

$$E=[w_1,w_2-\delta]\times[z_1,z_2]\cup[w_2-\delta,w_2]\times[z_1,z_2],$$

$$E=[w_1,w_2-\delta/2]\times[z_1,z_2]\cup[w_2-\delta/2,w_2]\times[z_1,z_2].$$

Имеем

$$J_2\le\delta r+\frac{r(w_2-w_1)e^{-\delta n_2}\int\limits_{z_1}^{z_2}\int\limits_{w_1}^{w_2-\delta}e^{zm_2}\,d\nu}{e^{-\delta n_2/2}\int\limits_{z_1}^{z_2}\int\limits_{w_2-\delta/2}^{w_2}e^{zm_2}\,d\nu}\le\delta r+\frac{ce^{-\delta n_2/2}\int\limits_{z_1}^{z_2}\int\limits_{w_1}^{w_2-\delta}e^{zm_2}\,d\nu}{\int\limits_{z_1}^{z_2}\int\limits_{w_2-\delta/2}^{w_2}e^{zm_2}\,d\nu}.$$

Так как множество E выбрано из условия минимальности, в пределе при $\xi\to-\infty$ получим

$$|\langle\mu^2,h\rangle|\le\delta r.$$

Вложение $C^1(E)\subset C(E)$ плотно, поэтому включение (3.1) для меры μ^2 доказано.

Рассмотрим меру μ^1. Пусть $h(w,z)\in C^1(E)$ и $h=0$ при $w=w_1$. Можно считать, что

$$|h|\le r(w-w_1)\quad\forall(w,z)\in E.$$

Верна оценка

$$|\langle \mu^1, h\rangle| \le \lim_{\xi\to-\infty} \frac{\int\limits_E r(w-w_1)e^{(w-w_1)n_1+zm_1}\,d\nu}{\int\limits_E e^{(w-w_1)n_1+zm_1}\,d\nu} \equiv \lim_{\xi\to-\infty} J_1(\xi).$$

Оценим $J_1(\xi)$, используя для числителя разбиение

$$E = [w_1, w_1+\delta]\times[z_1,z_2] \cup [w_1+\delta, w_2]\times[z_1,z_2],$$

а для знаменателя разбиение

$$E = [w_1, w_1+\delta/2]\times[z_1,z_2] \cup [w_1+\delta/2, w_2]\times[z_1,z_2].$$

Имеем

$$J_1 \le \delta r + \frac{ce^{\delta n_1(\xi)/2}\int\limits_{z_1}^{z_2}\int\limits_{w_1+\delta}^{w_2} e^{zm_1(\xi)}\,d\nu}{\int\limits_{z_1}^{z_2}\int\limits_{w_1}^{w_1+\delta/2} e^{zm_1(\xi)}\,d\nu}.$$

Отсюда и следует утверждение для меры μ^1.

Лемма 3.2. *Справедливо равенство*

$$\langle \mu^1, 1/v\rangle = \langle \mu^2, 1/v\rangle.$$

Доказательство. Заметим, что если $\eta = \eta_i$, то неравенство (0.8) выполнено, а равенства (0.7) выполняются при

$$q = q_i = -\frac{kA_i}{B_i-1}\frac{\eta_i}{v}.$$

Запишем равенства (0.10) для пар $(\eta_1(\xi), q_1(\xi))$ и $(\eta_2(\xi), q_2(\xi))$:

$$\frac{\langle \nu, q_2\rangle}{\langle \nu, \eta_2\rangle} - \frac{\langle \nu, q_1\rangle}{\langle \nu, \eta_1\rangle} = \frac{\langle \nu, \eta_1 q_2 - \eta_2 q_1\rangle}{\langle \nu, \eta_1\rangle\langle \nu, \eta_2\rangle} \equiv J. \tag{3.2}$$

Для J справедливо представление

$$J = k\frac{j_1}{j_2}, \quad j_1 = \left(\frac{A_1}{B_1-1} - \frac{A_2}{B_2-1}\right)\int\limits_E e^{wP(\xi)+zQ(\xi)}\,d\nu,$$

$$j_2 = \int\limits_E e^{wn_2(\xi)+zm_2(\xi)}\,d\nu \int\limits_E e^{wn_1(\xi)+zm_1(\xi)}\,d\nu,$$

$$P = n_1 + n_2 - \frac{1}{2\sqrt{k}}, \quad Q = m_1 + m_2 + \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

В силу условия согласования (2.6) и предельных соотношений (2.4), (2.5)

$$P = 0, \quad Q \to 0, \quad \frac{A_1}{B_1-1} - \frac{A_2}{B_2-1} \to 0 \quad \text{при } \xi\to-\infty.$$

Поэтому $j_1 \to 0$ при $\xi \to -\infty$. Оценим j_2, учитывая предельные соотношения (2.4), (2.5) и положительность переменной w. Имеем

$$
\begin{aligned}
j_2 &\geq \int\limits_{z_1}^{z_2} \int\limits_{w_1}^{w_1+\varepsilon} e^{wn_1+zm_1}\, d\nu \int\limits_{z_1}^{z_2} \int\limits_{w_2-\varepsilon}^{w_2} e^{wn_2+zm_2}\, d\nu \\
&\geq e^{w_1n_1+w_2n_2+\varepsilon(n_1-n_2)} \int\limits_{z_1}^{z_2} \int\limits_{w_1}^{w_1+\varepsilon} e^{zm_1}\, d\nu \int\limits_{z_1}^{z_2} \int\limits_{w_2-\varepsilon}^{w_2} e^{zm_2}\, d\nu \equiv e^{\Lambda(\xi)} c(\varepsilon, \xi).
\end{aligned}
$$

Выберем $2\varepsilon < w_2 - w_1$. Тогда в силу (2.6)

$$
\Lambda = \frac{w_1 + w_2}{4\sqrt{k}} + \frac{e^{-\xi}}{\sqrt{k}} \left(\beta_2 - \frac{1}{2} + \alpha_2 \sqrt{k} \right) \left(\frac{w_2 - w_1}{2} - \varepsilon \right) \to \infty
$$

при $\xi \to -\infty$. С другой стороны, предел $\lim c(\varepsilon, \xi)$ при $\xi \to -\infty$ конечен, так как прямоугольник E удовлетворяет условию минимальности и пределы $\lim m_i$ конечны при $\xi \to -\infty$. Значит, $\lim j_1/j_2 = 0$ при $\xi \to -\infty$.

Так как

$$
\lim_{\xi \to -\infty} \frac{kA_i}{B_i - 1} = \sqrt{k}, \tag{3.3}
$$

предельный переход в равенстве (3.2) приводит к утверждению леммы.

Лемма 3.3. *Для любой квазиэнтропийной пары (η, q) выполняется равенство*

$$
\left\langle \mu^1, q + \frac{\eta\sqrt{k}}{v} \right\rangle = \left\langle \mu^2, q + \frac{\eta\sqrt{k}}{v} \right\rangle. \tag{3.4}
$$

Доказательство. Запишем равенство (0.10) для пар (η, q) и $(\eta_1(\xi), q_1(\xi))$:

$$
\langle \nu, q \rangle - \frac{\langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, q_1(\xi) \rangle}{\langle \nu, \eta_1(\xi) \rangle} = \frac{\langle \nu, q\eta_1(\xi) - \eta q_1(\xi) \rangle}{\langle \nu, \eta_1(\xi) \rangle}.
$$

Отсюда в пределе при $\xi \to -\infty$ с учетом соотношений (3.3) следует, что

$$
\langle \nu, q \rangle - \langle \nu, \eta \rangle \left\langle \mu^1, -\frac{\sqrt{k}}{v} \right\rangle = \left\langle \mu^1, q + \frac{\eta\sqrt{k}}{v} \right\rangle.
$$

Аналогично доказывается равенство

$$
\langle \nu, q \rangle - \langle \nu, \eta \rangle \left\langle \mu^2, -\frac{\sqrt{k}}{v} \right\rangle = \left\langle \mu^2, q + \frac{\eta\sqrt{k}}{v} \right\rangle.
$$

Теперь справедливость соотношения (3.4) вытекает из леммы 3.2.

Лемма 3.4. *Выполнено равенство $w_1 = w_2$.*

Доказательство. Допустим $w_1 < w_2$. Запишем равенство (3.4) для пары $(\eta_2(\xi), q_2(\xi))$:

$$
\langle \mu^1, \eta_2(\xi)\sqrt{k}/v \rangle = \langle \mu^2, \eta_2(\xi)\sqrt{k}/v \rangle.
$$

Так как мера μ_i сосредоточена на множестве $w = w_i$, это равенство равносильно такому:

$$
e^{(w_2 - w_1)(n_2(\xi) - \frac{1}{2\sqrt{k}})} = \frac{\int_{z_1}^{z_2} e^{z(m_2(\xi) + \frac{1}{2\sqrt{k}})}\, d\mu_1}{\int_{z_1}^{z_2} e^{z(m_2(\xi) + \frac{1}{2\sqrt{k}})}\, d\mu_2}. \tag{3.5}
$$

Меры μ^i вероятностные, и предел $\lim m_2$ конечен при $\xi \to -\infty$. Поэтому правая часть равенства (3.5) имеет конечный предел при $\xi \to -\infty$. Левая же часть стремится к $+\infty$, так как $n_2 \to +\infty$ при $\xi \to -\infty$. Данное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3.5. *Имеет место равенство* $z_1 = z_2$.

Доказательство. Поскольку доказательство то же, что и в случае $w_1 = w_2$, опишем только его схему. Здесь используются семейства $\eta_i(\zeta)$, заданные формулами (2.7) и согласованные по равенству (2.8). Допустим, что $z_1 < z_2$, и введем вероятностные меры

$$\left\langle \pi^1_{t,x}, h(u,v) \right\rangle = \lim_{\zeta\to\infty} \frac{\langle \nu_{t,x}, h\eta_2(\zeta)\rangle}{\langle \nu_{t,x}, \eta_2(\zeta)\rangle}, \quad \left\langle \pi^2_{t,x}, h(u,v) \right\rangle = \lim_{\zeta\to\infty} \frac{\langle \nu_{t,x}, h\eta_1(\zeta)\rangle}{\langle \nu_{t,x}, \eta_1(\zeta)\rangle}.$$

Первый шаг в доказательстве леммы состоит в проверке вложения

$$\operatorname{spt} \pi^i \subset \{z = z_i\}. \tag{3.6}$$

Вывод этого включения тот же, что и в лемме 3.1. Так, например, для меры π^1 при любой гладкой функции $h(w,z)$, обращающейся в нуль на линии $z = z_1$, при любом δ верна оценка

$$|\langle \pi^1, h\rangle| \le \delta c + \frac{c e^{\delta m_2(\zeta)} \int\limits_{w_1}^{w_2} \int\limits_{z_1+\delta}^{z_2} e^{wn_2(\zeta)}\, d\nu}{e^{m_2(\zeta)\delta/2} \int\limits_{w_1}^{w_2} \int\limits_{z_1}^{z_1+\delta/2} e^{wn_2(\zeta)}\, d\nu}.$$

Поэтому $\operatorname{spt} \pi^1 \subset \{z = z_1\}$, так как область E удовлетворяет условию минимальности и справедливы предельные соотношения (2.9) и (2.10).

Второй шаг состоит в проверке равенства

$$\left\langle \pi^1, \frac{1}{v} \right\rangle = \left\langle \pi^2, \frac{1}{v} \right\rangle. \tag{3.7}$$

Его вывод основан на равенстве (3.2), в котором используются семейства $(\eta_i(\zeta), q_i(\zeta))$, согласованные по равенству (2.8). В силу (2.9) функция $Q(\zeta)$ равна нулю в равенстве (3.2). Кроме того, в равенстве (3.2)

$$P \to 0, \quad \frac{A_i}{B_i - 1} \to -\frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{при } \zeta \to \infty.$$

Поэтому числитель $j_1(\zeta)$ стремится к нулю при $\zeta \to \infty$.

Поскольку переменная z принимает отрицательные значения и параметры $n_i(\zeta)$, $m_i(\zeta)$ имеют асимптотику, указанную в (2.9), знаменатель j_2 допускает оценку снизу

$$j_2(\zeta) \ge \int\limits_{z_1}^{z_1+\varepsilon} \int\limits_{w_1}^{w_2} e^{wn_2 + zm_2}\, d\nu \int\limits_{z_2-\varepsilon}^{z_2} \int\limits_{w_1}^{w_2} e^{wn_1 + zm_1}\, d\nu \ge e^{\gamma} \int\limits_{z_1}^{z_1+\varepsilon} \int\limits_{w_1}^{w_2} e^{wn_2} \int\limits_{z_2-\varepsilon}^{z_2} \int\limits_{w_1}^{w_2} e^{wn_1},$$

$$\gamma = -\frac{z_1 + z_2}{4\sqrt{k}} + \frac{e^{\zeta}}{\sqrt{k}} \left(\beta_2 - \frac{1}{2} - \alpha_2\sqrt{k}\right) \left(\frac{z_2 - z_1}{2} - \varepsilon\right).$$

Теперь справедливость равенств становится объяснимой, если учесть предельные соотношения

$$\frac{q_i}{\eta_i} \to \frac{\sqrt{k}}{v} \quad \text{при } \zeta \to \infty.$$

Третий шаг заключается в доказательстве равенства

$$\left\langle \pi^1, q - \frac{\eta\sqrt{k}}{v} \right\rangle = \left\langle \pi^2, q - \frac{\eta\sqrt{k}}{v} \right\rangle. \tag{3.8}$$

Оно выводится по схеме, изложенной в лемме 3.3, если функции $\eta_i(\xi)$, $q_i(\xi)$ заменить на $\eta_i(\zeta)$, $q_i(\zeta)$ и воспользоваться равенством (3.7).

Последний шаг повторяет рассуждения в лемме 3.4. Запишем равенство (3.8) для пары $\eta_2(\zeta)$, $q_2(\zeta)$ с учетом (3.6). Тогда получим

$$e^{(z_1 - z_2)(m_2(\zeta) + \frac{1}{2\sqrt{k}})} = \frac{\int_{w_1}^{w_2} e^{w(n_2(\zeta) - \frac{1}{2\sqrt{k}})}\, d\pi_2}{\int_{w_1}^{w_2} e^{w(n_2(\zeta) - \frac{1}{2\sqrt{k}})}\, d\pi_1}.$$

Так как в пределе при $\zeta \to \infty$ это равенство нарушается, лемма 3.5 доказана.

Теорема 0.1 есть следствие лемм 3.4 и 3.5.

4. Квазиэнтропийные решения в точках гладкости

Пусть (u, v) — квазиэнтропийное решение такое, что $u, v \in C^1(\overline{G})$, где G — некоторая область в Q. Покажем, что в этой области пара (u, v) удовлетворяет уравнениям (0.1) в классическом смысле.

Обозначим

$$M = 2\sup_G v > 0, \quad U(t,x) = u\left(t, \frac{x}{M}\right), \quad V(t,x) = \frac{1}{M} v\left(t, \frac{x}{M}\right).$$

Инвариантность уравнения (2.1) относительно сдвигов по переменным w и z позволяет заключить, что уравнение (0.11) инвариантно относительно растяжений по переменной v. Впрочем, можно проверить непосредственно, что функция $\eta(u, cv)$ является решением уравнения (0.11) при любом значении постоянной c, если $\eta(u, v)$ — решение. После этого легко проверяется следующее свойство инвариантности системы (0.7): если (η, q) является квазиэнтропийной парой, т. е. удовлетворяет соотношениям (0.7) и (0.8), то пара

$$\eta_c(u, v) = \eta(u, cv), \quad q_c(u, v) = cq(u, cv)$$

тоже является квазиэнтропийной.

Убедимся, что (U, V) — квазиэнтропийное решение. Пусть $\varphi(t, x)$ — произвольная неотрицательная функция из $\mathscr{D}(Q)$. Тогда при $c = 1/M$ имеем

$$\begin{aligned} J &\equiv \int_Q \eta(U, V)\varphi_t + q(U, V)\varphi_x \, dxdt \\ &= \int_Q \eta_c(u(t, cx), v(t, cx))\varphi_t(t, x) + Mq_c(u(t, cx), v(t, cx))\varphi_x(t, x) \, dxdt. \end{aligned}$$

Делая замену переменных $y = cx$ и обозначая $\Phi(t, y) = \varphi(t, My)$, получаем

$$J = M \int_Q \eta_c(u(t, y), v(t, y))\Phi_t(t, y) + q_c(u(t, y), v(t, y))\Phi_y(t, y)\, dydt \geq 0.$$

Следовательно, (U, V) — квазиэнтропийное решение, гладкое в области

$$G_M = \{(t, x) : (t, x/M) \in G\}.$$

Значит, в области G_M выполняются равенства

$$U_t = -p(V)_x, \quad V_t - U_x = -\mu(t, x), \tag{4.1}$$

где μ — неотрицательная непрерывная в G_M функция. Умножение уравнения $(4.1)_2$ на $k(1 - 1/V)$ и $(4.1)_1$ на U приводит к равенству

$$\Psi(U, V)_t + H(U, V)_x = -k\mu(1 - 1/V), \tag{4.2}$$

где

$$\Psi(U, V) = U^2/2 + k(V - \ln V - 1), \quad H(U, V) = kU(1/V - 1).$$

Нетрудно проверить, что пара (Ψ, H) является квазиэнтропийной. Поэтому

$$\Psi(U, V)_t + H(U, V)_x \leq 0 \quad \text{в } \mathscr{D}'(Q).$$

Значит, в области G_M справедливо равенство

$$\Psi(U, V)_t + H(U, V)_x = \nu(t, x), \tag{4.3}$$

где $0 \leq \nu \in C(\overline{G}_M)$. Сравнение формул (4.2) и (4.3) приводит к противоречивому равенству $k\mu(1 - 1/V) = \nu$, поскольку в области G_M имеет место неравенство

$$\sup_{G_M} V \leq 1/2.$$

Таким образом,

$$u_t = -p(v)_x, \quad v_t = u_x \quad \text{при } (t, x) \in G.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nishida T.* Global solutions for an initial boundary value problem of a quasi-linear hyperbolic system // Proc. Japan Acad. 1968. V. 4. P. 642–646.
2. *Nishida T., Smoller J. A.* Solutions in the large for some nonlinear hyperbolic conservation laws // Comm. Pure Appl. Math. 1973. V. 26. P. 183–200.
3. *Lions P. L., Perthame B., Souganidis P. E.* Existence and stability of entropy solutions for the hyperbolic systems of isentropic gas dynamics in Eulerian and Largangian coordinates // Comm. Pure Appl. Math. 1996. V. 49. P. 599–638.
4. *DiPerna R. J.* Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics // Comm. Math. Phys. 1983. V. 91. P. 1–30.
5. *Chen G.-Q.* Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics. III // Acta Math. Sci. 1986. V. 6. P. 75–120.
6. *Ding X., Chen G.-Q., Luo P.* Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics. I, II // Acta Math. Sci. 1985. V. 5. P. 483–500; 501–540.
7. *Chen G.-Q., LeFloch P. G.* Compressible Euler equations with general pressure law // Arch. Rational Mech. Anal. 2000. V. 153. P. 221–259.
8. *Greiner N. R., Phillips D. S., Johnson J. D. et al.* Diamond in detonation soot // Nature. 1988. V. 333, N 5. P. 440–442.
9. *Титов В. М., Анисичкин В. Ф., Мальков И. Ю.* Исследования процесса синтеза ультрадисперсного алмаза в детонационных волнах // Физика горения и взрыва. 1989. Т. 25, № 3. С. 117–126.

10. *Weier S. T., Mitchelle A. C., Nellis W. J.* Metallization of fluid molecular hydrogen at 140 GPa (1.4 Mbar) // Phys. Rev. Letters. 1996. V. 76, N 11. P. 1860–1863.
11. *Shelukhin V. V.* Existence theorem in the variational problem for compressible inviscid fluids // Manuscripta Math. 1988. V. 61. P. 495–509.
12. *Tartar L.* Compensated compactness and applications to partial differential equations // Nonlinear analysis and mechanics. Edinburgh: Pitman Press, 1979. P. 136–212. (Heriot-Watt Sympos.; V. 4, ed. R. J. Knops; Research Notes in Math.; V. 39).
13. *Murat F.* Compacité par compensation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat. 1978. V. 5. P. 489–507.
14. *Lions P. L., Perthame B., Tadmor E.* Kinetic formulation for the isentropic gas dynamics and p-systems // Comm. Math. Phys. 1994. V. 163, N 2. P. 415–431.
15. *Serre D.* Systemes de lois de conservation. I, II. Paris: Art et Sciences, 1996.
16. *Federer H.* Geometric Measure Theory. New York: Springer-Verl., 1969.
17. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

Статья поступила 26 августа 2002 г.

Шелухин Владимир Валентинович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
shelukhin@hydro.nsc.ru