Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 517.11:518.5

АРИФМЕТИКА ВТОРОГО ПОРЯДКА И АВТОНОМНАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ

Е. В. Гайлит

Аннотация: Автономный процесс может быть описан либо в рамках арифметики второго порядка, либо близкой к ней теории Цермело — Френкеля (без аксиомы степени), что удобно. Ключевую роль играет следующий результат: доказывается, что если какой-нибудь автономный оракул дает модель для арифметики второго порядка, то он автоматически дает модель для теории Цермело — Френкеля (без аксиомы степени), которая естественно интерпретируется на наследственно-счетных множествах, легко представимых посредством счетных деревьев с обрывом цепей. Вообще, любой автономный процесс может быть описан в системе Цермело — Френкеля (без аксиомы степени), причем это описание абсолютное относительно любой оракульной модели. Следовательно, не может быть автономного процесса, дающего модель для полной теории арифметики второго порядка.

Ключевые слова: оракул, итерированная клиниевская вычислимость, автономная нумерация, арифметика второго порядка, система Цермело — Френкеля без аксиомы степени, лемма Хартогса

Данная статья относится к теории обобщенной вычислимости и продолжает исследования по оракульному моделированию арифметики второго порядка (A_2), начатому в работах [1, 2]. Основным инструментом исследования будет *итерированная клиниевская вычислимость*. Все нужные определения читатель найдет в [3, 4], здесь по мере надобности будем вкратце их напоминать.

В [2] построена *автономная нумерация*, у которой «замыкающий» оракул давал модель для двукванторного фрагмента A_2. Построенная модель *неравномерна* в том смысле, что, хотя в ней выполняется надлежащий вариант схемы аксиом свертывания, область истинности формулы $\varphi(x)$ (соответствующего вида), будучи разрешимой, не является тем не менее *равномерно разрешимой*. (Имеется в виду равномерность по геделевским номерам функциональных параметров формулы φ.) Вопрос об устранимости этого недостатка остается открытым.

Упомянутый оракул построен при помощи *автономной процедуры*, содержащей в себе моделирование описанного в [1] «пульсирующего» процесса. Этот процесс в принципе дает возможность построить оракульную модель для всей арифметики второго порядка, однако является менее эффективным по сравнению с автономными процедурами. Его эффективизация средствами автономной вычислимости, выводящая за рамки двукванторного фрагмента A_2, встречает трудности, связанные с вышеупомянутой неравномерностью. Возникает предположение, что полностью промоделировать A_2 в рамках автономной вычислимости невозможно.

В этой статье показано, что во всяком случае не может существовать автономной нумерации, которая давала бы равномерную (в указанном выше смысле) модель для всей арифметики второго порядка.

Автор выражает благодарность Н. В. Белякину за постановку проблемы и внимание к работе.

1. Арифметика второго порядка (A_2) — это теория, описывающая то, что можно назвать элементарным анализом. Объектами этой теории являются натуральные числа и числовые функции (или числовые множества), а также различные, представимые через них, математические объекты (как то: вещественные числа, непрерывные функции, борелевские множества, счетные ординалы, наследственно-счетные множества и т. д.). Нас эта теория будет интересовать не как способ представления анализа, а как возможность описывать в ней оракульную вычислимость и обобщенно-конструктивные модели. Отметим некоторые простейшие факты, относящиеся к арифметике второго порядка. Условимся обозначать числовые переменные через $x, y, \ldots$, а функциональные — через $\alpha, \beta, \ldots$. Аксиомами A_2 являются аксиомы Пеано, включая схему аксиом индукции (записанную в языке A_2), а также следующая схема аксиом свертывания:

$$\exists\alpha\,\forall x\,(\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x)).$$

Поскольку A_2 содержит арифметику Пеано, все основные свойства рекурсивных функций в ней выразимы и верифицируемы. В частности, поведение любой машины Тьюринга с любыми входными данными за любое число шагов можно описать при помощи A_2-формулы, не содержащей функциональных переменных. Лишь несколько сложнее выглядит в арифметике второго порядка изложение вопросов вычислимости с частичным оракулом. Так как частичные числовые функции всегда можно заменить их графиками, такие оракулы легко представимы как допустимые значения функциональных переменных. Поэтому нетрудно построить формулу без функциональных кванторов $\psi(z, x, t, y, \beta)$, описывающую работу машины с оракулом в нужном смысле. Пусть z — геделевский номер машины, x — кортеж входных данных (закодированный натуральным числом), t — число шагов, β — числовая функция, которая в вышеуказанном смысле представляет оракул, y — код машинного слова. Тогда ψ выражает утверждение: машина z с аргументом x за t шагов, соединенная с оракулом β, останавливается с результатом y. С помощью этой формулы не составляет труда выразить многие понятия, а именно легко определить $\mathscr{B}^*(F)$ — множество кодов тотальных F-вычислимых функций, а также понятие *регулярности* оракула и доказать в A_2 простейшие свойства регулярных оракулов. (Напомним, что оракул F называется регулярным, если существует F-вычислимая процедура, которая по геделевскому номеру F-вычислимой функции указывает некоторый элемент ее области определения, если таковая непуста.) Кроме того, в теории A_2 доказывается следующий факт: *если F-вычислимая функция имеет F-разрешимую область определения, то ее область значений тоже разрешима при условии регулярности оракула F.*

Далее, в рамках арифметики второго порядка можно говорить о счетных ординалах, поскольку каждый такой ординал можно представить как вполне упорядоченное множество натуральных чисел (ординальную нумерацию) либо как счетное дерево с обрывом цепей. Можно ввести формулу $\theta(\beta)$, означающую, что функция β является изображением ординала (например, в виде дерева с обрывом цепей). Благодаря этому можно, в частности, определить в языке A_2 понятие *слабо фундированного* оракула. Так называется оракул, у которого множество $T(F)$ кодов F-вычислимых деревьев с обрывом цепей F-перечислимо (т. е. является областью определения F-вычислимой функции). Подчеркнем, что формула $\theta(\beta)$ содержит один функциональный квантор.

Отметим, что в этом языке очевидным образом выразимы функционалы E и E_1:

$$E(\beta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists t\,(\beta(t) = 0), \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad E_1(\beta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \forall\eta\,\exists t\,(\beta(\bar\eta(t)) = 0), \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\bar\eta(t) = \langle \eta(0), \ldots, \eta(t-1) \rangle$.

В частности, предикат $E_1(\beta) = i$ выражается A_2-формулой:

$$E_1(\beta) = i \Leftrightarrow (i = 0 \,\&\, \forall\eta\,\exists t\,(\beta(\bar\eta(t)) = 0)) \vee (i = 1 \,\&\, \exists\eta\forall t\,(\beta(\bar\eta(t)) \neq 0))$$

Как известно из [4], если оракул регулярный и слабо фундированный, то с ним вычислим функционал E (т. е. для любой тотальной функции β, вычислимой с этим оракулом, значение $E(\beta)$ тоже вычислимо с этим оракулом равномерно по геделевскому номеру β). Этот факт доказуем в A_2.

Используя эти наблюдения, можно воспроизвести в рамках A_2 трансфинитный процесс построения клиниевских и итерированных клиниевских оракулов, релятивизованных к функционалам E и E_1 (и, возможно, к числовому множеству B). Напомним, что *клиниевским* оракулом, релятивизованным к функционалу G типа 2 и к множеству B, называется минимальный частичный оракул $\mathscr{H}_{G,B}$, вычисляющий G и разрешающий множество B при подходящем кодировании задаваемых оракулу вопросов; точнее, $\mathscr{H}_{G,B}$ есть минимальная частичная функция, удовлетворяющая условиям:

$$\mathscr{H}_{G,B}(2^{y+1}) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \in B, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{a}$$

$$\mathscr{H}_{G,B}(5^{y+1}) = G(\lambda t \{y\}^{\mathscr{H}_{G,B}}(t)), \tag{b}$$

если y — код $\mathscr{H}_{G,B}$-вычислимой тотальной функции. Построить такой оракул можно посредством итерации подходящего монотонного оператора (обозначим его через $\Delta_{G,B}$). Такой оператор порождает трансфинитную последовательность оракулов $\mathscr{H}^\gamma$, которая определяется следующим образом:

1) $\mathscr{H}^0 = \varnothing$,
2) $\mathscr{H}^{\gamma+1} = \Delta_{G,B}(\mathscr{H}^\gamma)$,
3) для предельного ζ полагаем $\mathscr{H}^\zeta = \bigcup\limits_{\gamma<\zeta} \mathscr{H}^\gamma$.

Искомый оракул $\mathscr{H}_{G,B}$ есть результат стабилизации этой последовательности. Аналогичным образом строятся оракулы итерированной клиниевской вычислимости, определение которых напомним в нужный момент. В качестве G будем использовать E и E_1.

Сам по себе упомянутый трансфинитный процесс описывается без затруднений. Сложности возникают в связи с установлением стабилизации описанной последовательности, для чего нужна лемма *Хартогса* [5, гл. 4, § 4]. Ее доказательство (в контексте теории множеств) зависит от схемы подстановки, которая в A_2 отсутствует. Поэтому наше рассмотрение лучше делать в рамках подходящего фрагмента (ZFC^-) системы Цермело — Френкеля. Установим связь между означенным фрагментом и теорией A_2 (в аспекте оракульного моделирования).

2. Рассмотрим формальную систему ZFC^-, язык которой обычный, теоретико-множественный. Она содержит обычные аксиомы: экстенсиональности, регулярности, пары, суммы, бесконечности, схемы аксиом выделения и подстановки. Кроме того, в качестве аксиомы примем следующее утверждение: *всякое множество можно вполне упорядочить.* В контексте ZFC это утверждение эквивалентно аксиоме выбора, но в доказательстве эквивалентности используется аксиома степени, которая отсутствует в ZFC^-. Рассмотрим следующее утверждение, которое представляет собой модификацию утверждения Хартогса из [5, гл 4, § 4] и которое в дальнейшем будем называть леммой Хартогса.

Лемма (ZFC^-). *Пусть M — произвольное множество. Тогда любая формульно заданная, монотонная (по включению) последовательность $\{a_\xi : \xi \in \mathrm{On}\}$, $a_\xi \subseteq M$, стабилизируется на некотором ординальном шаге.*

Доказательство. Предположим, что это не так, т. е. существуют сколь угодно большие $\xi \in \mathrm{On}$ такие, что $a_\xi \setminus \bigcup\limits_{\zeta<\xi} a_\zeta \neq \varnothing$ (на шаге ξ произошло расширение). Выделим последовательность $\{\xi_\tau, \tau \in \mathrm{On}\}$ тех ξ, на которых эта разность непуста. Последовательность этих ξ_τ тоже формульно определима. Выберем для каждого τ из $a_{\xi_\tau} \setminus \bigcup\limits_{\gamma<\tau} a_{\xi_\gamma}$ наименьший элемент (предварительно вполне упорядочив множество M). Обозначим выбранные элементы через y_τ, $\tau \in \mathrm{On}$. Эти элементы для различных τ различны и в совокупности образуют множество в силу аксиомы выделения и формульной определимости последовательности $\{y_\tau, \tau \in \mathrm{On}\}$. (Подразумеваемое здесь вполне упорядочение множества M фигурирует в качестве параметра в формуле, описывающей данную последовательность.) Тем самым мы построили формульно определимое разнозначное отображение ($\tau \to y_\tau$), заданное на всех ординалах, область значений которого есть множество. Применяя схему аксиом подстановки к обратному отображению, получаем, что совокупность всех ординалов является множеством, что неверно. Лемма доказана. □

Естественной моделью для ZFC^- служит совокупность всех наследственно счетных множеств. Проверка всех аксиом ZFC^- на этом универсуме производится тривиально. Более того, в этой модели выполняется утверждение, что всякое множество счетно и, значит, вполне упорядочиваемо по типу ω. Наследственно счетные множества легко представимы в виде объектов типа 1, а именно счетными деревьями с обрывом цепей. (Делается это трансфинитной индукцией по высоте деревьев: каждому такому дереву ставится в соответствие наследственно счетное множество, элементы которого суть такие же множества, сопоставленные его отросткам.) Отношения равенства и принадлежности наследственно счетных множеств, представленных указанным способом, могут быть описаны в языке A_2. Это дает возможность перевода ZFC^--формул в равнозначные по смыслу A_2-формулы.

3. Возвращаемся к оракульной математике. Пусть оракул F регулярный, слабо фундированный и такой, что совокупность $\mathscr{M}_F$ тотальных, F-вычислимых функций образует равномерную модель A_2. (Очевидно при этом, что E_1 будет вычислим.) Этот же оракул задает модель в языке теории множеств, универсум которой состоит из совокупности $\widetilde{\mathscr{M}_F}$ всех *F-множеств*, т. е. наследственно счетных множеств, которые соответствуют *F-вычислимым* деревьям с обрывом цепей. Коды этих деревьев одновременно являются и кодами соответствующих F-множеств.

Легко понять, что отношение равенства и ε-отношение между F-множествами будут полуразрешимы (т. е. F-распознаваемы по их кодам). Соответствующая процедура является модификацией известного способа сравнения высот рекурсивных деревьев с обрывом цепей по их геделевским номерам [6, гл. 16]. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть оракул F регулярный, слабо фундированный. Пусть совокупность тотальных F-вычислимых функций образует модель арифметики второго порядка, которая является равномерной. Тогда совокупность F-множеств образует модель* ZFC^{-}.

Доказательство. Все аксиомы, кроме аксиом выделения и подстановки, выполняются тривиально. Аксиома выделения следует из предположения о равномерности модели теории A_2, даваемой оракулом F. (Достаточно сослаться на вышеотмеченный факт о переводимости ZFC^{-}-формул в A_2-формулы.)

Займемся схемой подстановки. Предположим, что $\forall x\, \exists!\, y\, \varphi(x, y)$. Если возьмем в качестве x и y любые два F-множества, то по их кодам можно узнать (с оракулом F), истинна $\varphi(x, y)$ или нет. Если зафиксируем какое-нибудь F-множество x_0, то тогда множество всех F-кодов всех таких y, для которых верно $\varphi(x_0, y)$, будет F-перечислимым. В силу регулярности оракула можно найти код того единственного y, который соответствует x_0. Такая машина строится эффективно по x_0 и геделевскому номеру φ. Возьмем произвольное множество a. Оно задано как код некоторого дерева. При помощи рекурсивной процедуры можно получить последовательность кодов всех его отростков. Считаем, что x пробегает a, так что можно устроить перебор кодов всех $x \in a$. На очередном шаге перебора для $x \in a$ можно найти нужное F-множество y. Итак, мы получили F-вычислимую функцию, у которой область определения есть F-разрешимое множество, состоящее из кодов всех отростков дерева a. Множество значений этой функции в силу регулярности оракула тоже F-разрешимо; из кодов всех y, принадлежащих этой области значений, можно построить код F-множества, являющегося φ-образом множества a. $\square$

Как уже отмечено, оракул F рассматриваемого вида определяет две модели: одну в языке A_2, а именно $\mathscr{M}_F$, другую — в теории множеств ($\widetilde{\mathscr{M}_F}$). A_2-формула, определяющая функционал E_1, является $\mathscr{M}_F$-абсолютной. Это непосредственно следует из того, что для рассматриваемого F обрыв всех цепей равносилен обрыву всех F-вычислимых цепей. Докажем также следующую теорему.

Теорема 2. *Если некоторая формула* ZFC^{-} *абсолютна относительно $\widetilde{\mathscr{M}_F}$, то ее перевод в язык A_2-формул будет абсолютной формулой относительно модели $\mathscr{M}_F$.*

Доказательство проведем индукцией по числу кванторов. Как отмечено выше, функционал E_1 абсолютен относительно модели $\mathscr{M}_F$. Отсюда следует, что перевод любой атомной ZFC^{-}-формулы на язык A_2 будет абсолютной формулой; если теорема верна для формул φ_1, φ_2, то она, очевидно, верна и для $\varphi_1 \,\&\, \varphi_2$. То же можно сказать и о любой пропозициональной комбинации абсолютных формул.

Пусть $\exists x\, \varphi(x)$ — некоторая ZFC^{-}-формула. Предположим, что она абсолютна на совокупности всех F-множеств в $\widetilde{\mathscr{M}_F}$. Переводом $\exists x\, \varphi(x)$ является формула $\exists \alpha \in \mathscr{M}_F : \chi(\alpha)_{\mathscr{M}_F} \,\&\, \widehat{\varphi}(\alpha)_{\mathscr{M}_F}$. Докажем ее двустороннюю абсолютность. Абсолютность вверх очевидна, достаточно показать абсолютность вниз. Предположим, что формула $\exists \alpha \in \mathscr{M}_F : \chi(\alpha)_{\mathscr{M}_F} \,\&\, \widehat{\varphi}(\alpha)$ верна на совокупности тотальных числовых функций. В силу адекватности перевода формула $\exists x\, \varphi(x)$

верна в универсуме наследственно-счетных множеств. Далее, ввиду предположенной абсолютности этой формулы имеем $\exists x \in \widetilde{\mathscr{M}_F} \& (\varphi(x))_{\widetilde{\mathscr{M}_F}}$. Возьмем это x. Поскольку x есть F-множество, оно представимо посредством некоторой F-вычислимой функции α, для которой верно $\chi(\alpha)$. В силу отмеченной абсолютности E_1 имеет место $\chi(\alpha)_{\mathscr{M}_F}$. При этом для рассматриваемого α с учетом индукционного предположения верна $\widehat{\varphi}(\alpha)_{\mathscr{M}_F}$. Тем самым теорема доказана. $\square$

4. Напомним определение итерированной клиниевской вычислимости, являющееся естественным обобщением клиниевской вычислимости. Пусть ν — однозначная ординальная нумерация длины $|\nu|$. Через $\nu \restriction \tau$ обозначим начальный отрезок ν длины τ. Каждому $\tau \leqslant |\nu|$ ставится в соответствие оракул $\mathscr{H}^{\tau}_{\nu,G}$ (где G — функционал типа 2). Этот оракул определяется почти так же, как и клиниевский, но с одним дополнением: посредством вопросов подходящего вида $\mathscr{H}^{\tau}_{\nu,G}$ разрешает графики оракулов $\mathscr{H}^{\sigma}_{\nu,G}$, $\sigma < \tau$, равномерно по ν-номерам σ. Кроме того, используя прием из [3, 7], можно добиться того, чтобы все эти оракулы были регулярными. Далее, нам понадобится факт, установленный в [3]: *если нумерации ν_1 и ν_2 m-эквивалентны, то для каждого τ оракулы $\mathscr{H}^{\tau}_{\nu_1,G}$ и $\mathscr{H}^{\tau}_{\nu_2,G}$ взаимно вычислимы.* Это можно использовать следующим образом. Зафиксируем произвольное n и ограничимся лишь такими ν, что все ν-номера превосходят n. Тогда для $m \leqslant n$ можно определить оракул $\mathscr{H}^{|\nu|+m}_{\nu,G}$ (используя числа $0, 1, \dots, n$ в качестве вспомогательных номеров). В силу отмеченного факта если продолжим нумерацию ν до некоторой нумерации ν', то оракулы $\mathscr{H}^{|\nu|+m}_{\nu',G}$ будут эквивалентны соответствующим оракулам $\mathscr{H}^{|\nu|+m}_{\nu,G}$. Это замечание позволяет определить (в рамках ZFC^-) естественный класс нумераций, которые будут называться *автономными*. Каждая такая нумерация задается с помощью некоторого *автономного генератора*, т. е. пары $[w, n]$, где $n > 0$, а w — наперед заданная машина (с аргументом 0), вычисляющая ν-номер τ с оракулом $\mathscr{H}^{\tau+n}_{\nu\restriction\tau,G}$ для каждого $\tau < |\nu|$. Такие нумерации можно порождать шаг за шагом в ходе очевидного трансфинитного процесса. Этот процесс обрывается, если на очередном шаге w ничего не вычисляет или вычисленный номер повторяется. Как показано в [8], для любой автономной нумерации ν вычислительная сила $\mathscr{H}^{\tau}_{\nu,G}$ зависит только от τ и не зависит от выбора ν. В этом смысле (а также с учетом простоты самого автономного процесса) такие нумерации естественно признать (в интуитивном смысле) достаточно эффективными.

Слегка модифицируя описанный в п. 1 индуктивный процесс построения клиниевских оракулов, можно получить аналогичный процесс для построения семейства итерированных клиниевских оракулов, навешенных на нумерацию ν. В случае, когда $G = E_1$, этот процесс можно описать посредством ZFC^--формулы (с параметром ν) и, как легко проверить, эта формула будет абсолютной относительно модели $\widetilde{\mathscr{M}_F}$, если оракул F удовлетворяет свойствам, указанным в п. 3. Определение автономности тоже легко описывается посредством абсолютных формул, и в результате получим формулу $\Omega(q, \tau, z)$, выражающую принадлежность z графику оракула $\mathscr{H}^{\tau}_{\nu,E_1}$, где ν — автономная нумерация с генератором q (здесь τ — ординальная переменная, а q, z пробегают множество ω).

В ZFC^- с помощью леммы Хартогса можно показать, что каждый автономный процесс когда-нибудь оборвется. Значит, если оракул F обладает вышеуказанными свойствами, то это утверждение верно в соответствующей модели $\widetilde{\mathscr{M}_F}$.

А в силу абсолютности формулы $\Omega(q,\tau,z)$ обрыв произойдет на некотором F-вычислимом ординале.

Как было сказано в начале статьи, наша задача заключается в том, чтобы показать, что ни для какой автономной нумерации ν (относительно E_1) никакой оракул $\mathscr{H}^{\tau}_{\nu,E_1}$ не дает равномерную модель A_2. Интуитивно ясно, что если бы такая нумерация существовала, то τ должно быть *точкой насыщения* (т. е. $\mathscr{B}^*(\mathscr{H}^{\tau}_{\nu}) = \bigcup\limits_{\sigma<\tau} \mathscr{B}^*(\mathscr{H}^{\sigma}_{\nu})$) [3]. Проверим, что это действительно так. Пусть τ не точка насыщения автономной нумерации ν. Тогда, как показано в [3], оракул $\mathscr{H}^{\tau}_{\nu}$ равносилен клиниевскому оракулу $\mathscr{H}^{\tau}_{B,E_1}$ для подходящего числового множества B.

Рассмотрим $\mathscr{H}_{B,E_1}$-вычислимое дерево (назовем его $\mathscr{D}$), каждой вершине u которого сопоставлена числовая пара $\langle x_u, l_u\rangle$ и выполняются следующие условия:

1) $\mathscr{D}$ — дерево с обрывом цепей (или, что эквивалентно, с обрывом всех $\mathscr{H}_{B,E_1}$-вычислимых цепей);

2) для любого $u \in \mathscr{D}$ множество пар $\langle x_v, l_v\rangle$, где v принадлежит $\mathscr{D}_u$ (отростку, выходящему из вершины u), является графиком функции $f_{\mathscr{D}_u}\colon x_v \to l_v$;

3) все x_u имеют вид 2^{t+1} или 5^{y+1}, причем

a) если $x_u = 2^{t+1}$, то $l_u = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in B,\\ 1, & \text{если } t \notin B,\end{cases}$

b) если $x_u = 5^{y+1}$, то $y \in \mathscr{B}^*(f_{\mathscr{D}})$ и $l_u = E_1(\lambda t\{y\}^{f_{\mathscr{D}}}(t))$.

Очевидно, что это дерево представимо посредством $\mathscr{H}_{B,E_1}$-вычислимого объекта типа 1. С другой стороны, если некоторое дерево $\mathscr{D}$ вышеописанного вида удовлетворяет условиям 1–3, то индукцией по его высоте легко доказывается, что стоящая в его корневой вершине пара $\langle x_{\langle\,\rangle}, l_{\langle\,\rangle}\rangle$ удовлетворяет требованию $l_{\langle\,\rangle} = \mathscr{H}_{B,E_1}(x_{\langle\,\rangle})$. Отсюда следует, что область определения оракула $\mathscr{H}_{B,E_1}$ представима в форме $\exists\alpha \in \mathscr{M}_{\mathscr{H}_{B,E_1}}\, \forall t\, R(x,\bar{\alpha}(t))$, где R — предикат, рекурсивный относительно B. Эту форму можно, в свою очередь, представить в виде релятивизованной к $\mathscr{M}_{\mathscr{H}_{B,E_1}}$ A_2-формулы. Однако ее область истинности заведомо не принадлежит $\mathscr{M}_{\mathscr{H}_{B,E_1}}$.

Обратимся теперь к рассмотрению случая, когда τ — точка насыщения автономной нумерации ν, и допустим, что $\mathscr{H}^{\tau}_{\nu,E_1}$ дает равномерную модель A_2. В силу теоремы 1 $\widetilde{\mathscr{M}}_{\mathscr{H}_{B,E_1}}$ есть модель ZFC$^-$, следовательно, в этой модели имеет место утверждение о том, что процесс построения нумерации ν обрывается на некотором шаге $\hat{\tau} \in \widetilde{\mathscr{M}}_{\mathscr{H}_{B,E_1}}$. Согласно отмеченной выше абсолютности нумерация ν действительно должна оборваться в момент $\hat{\tau}$, а поскольку τ — точка насыщения, то, как показано в [3], имеем $\hat{\tau} < |\nu|$. Значит, построенная нумерация ν должна оборваться раньше, чем она действительно обрывается. Тем самым доказана

Теорема 3. *Никакая автономная нумерация* (*относительно* E_1) *не порождает равномерную модель* A_2.

На самом деле вышеописанная формализация происходила в рамках какого-то фрагмента ZFC$^-$, в котором схемы выделения и подстановки были ограничены формулами с некоторым фиксированным числом кванторов. Невозможно построить равномерную модель для фрагмента A_2, в котором схема свертывания ограничена не более чем n кванторами для некоторого фиксированного n.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гайлит Е. В.* Арифметика второго порядка и пульсирующие иерархии // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 1. С. 33–40.
2. *Гайлит Е. В.* Моделирование пульсирующего процесса // Алгебра и Логика. 2002 (в печати).
3. *Белякин Н. В.* Итерированная клиниевская вычислимость // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 6. С. 27–32.
4. *Ганов В. А., Белякин Н. В.* Общая теория вычислений с оракулами. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989.
5. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976.
6. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
7. *Никифирова Е. Г.* Об одном обобщении итерированной клиниевской вычислимости / Ред. «Сиб. мат. журн.» Новосибирск, Деп. в ВИНИТИ; № 5638-В86.
8. *Белякин Н. В.* Эффективные иерархии // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 4. С. 385–397.

Статья поступила 10 сентября 2002 г.

Гайлит Евгения Валерьевна
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`regina@math.nsc.ru`