Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 519.743

О ПОДГРУППАХ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ НАД ТЕЛОМ КВАТЕРНИОНОВ, СОДЕРЖАЩИХ СИМПЛЕКТИЧЕСКУЮ ГРУППУ

Е. Л. Башкиров

Аннотация: Описываются подгруппы полной линейной группы над телом кватернионов, содержащие симплектическую группу над некоторым подполем этого тела.

Ключевые слова: симплектическая группа, тело кватернионов

1. Введение

Вопросы классификационного характера традиционно занимают важное место в теории линейных групп. Одним из основных методов получения классификационных результатов является описание линейных групп, заключенных между двумя заданными линейными группами. Наиболее полный обзор работ, относящихся к этой теме, который дает хорошее представление о современном ее состоянии, сделан в [1]. В частности, большое значение имеет проблема изучения линейных групп, содержащих подгруппу, которая состоит только из унипотентных элементов. Задачи подобного рода привлекали и продолжают привлекать внимание многих авторов [2, 3]. Настоящая статья посвящена изучению некоторых аспектов следующего вопроса, относящегося к указанной проблеме. Пусть поле D характеристики, отличной от 2, является алгебраическим расширением поля k. *Квадратичной унипотентной k-подгруппой вычета* $r \geq 1$ назовем любую подгруппу полной линейной группы $GL_n(D)$ $(n \geq 2r)$, сопряженную в $GL_n(D)$ с группой, состоящей из всех матриц вида

$$\operatorname{diag}\Bigl(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{r \text{ раз}}, 1, \dots, 1\Bigr), \quad a \in k.$$

Задача описания подгрупп группы $GL_n(D)$, содержащих квадратичную унипотентную k-подгруппу, интересна по ряду причин, в том числе в силу своей связи с построением бесконечного аналога теории квадратичных пар Томпсона. Полученные к настоящему времени частные результаты, идущие в этом направлении, показывают сложность поставленной проблемы и весьма малую вероятность ее полного решения [4, 5]. Поэтому имеет смысл ограничиться вначале рассмотрением линейных групп, содержащих квадратичную унипотентную подгруппу с малым значением вычета. В [6] описаны подгруппы группы $GL_n(D)$ $(n \geq 2)$, содержащие квадратичную унипотентную k-подгруппу вычета 1, называемую просто *корневой k-группой.* Описание подгрупп группы $GL_n(D)$ $(n \geq 4)$, содержащих квадратичную унипотентную k-подгруппу вычета 2 (длинную корневую k-подгруппу), начато автором в [7, 8]. Одной из основных возникающих здесь трудностей является необходимость изучения линейных групп над телом кватернионов. В [9] описаны линейные группы, лежащие между специальными линейными группами степени $n \geq 3$ над различными ассоциативными телами, являющимися алгебрами над некоторым полем. Случай групп степени 2, когда бо́льшая из этих алгебр является телом кватернионов, рассмотрен в [10]. В настоящей работе описываются подгруппы полной линейной группы над телом кватернионов, содержащие симплектическую группу над некоторым подполем этого тела. Основной результат статьи заключается в том, что если такая группа не нормализует симплектическую или специальную линейную группу, то она содержит специальную унитарную группу над некоторым полем. Следовательно, задача описания групп, указанных в названии статьи, сводится к описанию линейных групп, содержащих специальную унитарную группу. Такое описание автором уже получено и частично опубликовано [11, 12].

Введем обозначения, необходимые для формулировки основного утверждения настоящей работы. Эти обозначения сохраняют силу на протяжении всей статьи.

Пусть D — произвольное ассоциативное тело, $n \geq 2$ — целое число, E — правый n-мерный унитарный D-модуль, E^* — сопряженный с E модуль (левый над D). Если L — тело, $L \supseteq D$, то через E_L обозначается правый L-модуль, полученный из E расширением тела скаляров D до L. Если $e_1, e_2, \ldots, e_p \in E_L$ ($p \geq 1$), то через $\langle e_1, \ldots, e_p \rangle_L$ обозначается подмодуль модуля E_L, порожденный элементами $e_1, \ldots, e_p$. *Специальной линейной группой* $SL_n(D) = SL(E)$ *модуля* E называется подгруппа полной линейной группы $GL_n(D) = GL(E)$ этого модуля, порожденная всеми трансвекциями модуля E, т. е. линейными преобразованиями $E \to E : x \to x + t\phi(x)$, где $t \in E \setminus \{0\}, \phi \in E^* \setminus \{0\}$, и $\phi(t) = 0$. Предположим, что D обладает инволюцией σ. Через $S_D^+(\sigma)$ обозначается множество всех σ-симметричных элементов из D. Пусть Φ — невырожденная σ-косоэрмитова форма на модуле E, индекс Витта которой больше нуля (косоэрмитовы формы всюду в этой статье полулинейны по первому аргументу). Через $T_n(D, \Phi) = T_n(D, \Phi, \sigma)$ обозначается нормальная подгруппа унитарной группы $U_n(D, \Phi, \sigma)$ формы Φ, порожденная всеми унитарными трансвекциями, т. е. преобразованиями $\tau_{t,\lambda} : x \to x + t\lambda\Phi(t, x)$, где $t \in E$ — изотропный вектор, $\lambda \in S_D^+(\sigma)$. Пусть теперь n четно, D коммутативно. Через q_0 обозначим кососимметрическую матрицу

$$\operatorname{diag}\Bigl(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{n/2 \text{ раз}}\Bigr).$$

Симплектическая группа $Sp_n(D)$ — это группа, состоящая из всех матриц $y \in GL_n(D)$ таких, что ${}^t y q_0 y = q_0$, где ${}^t y$ — матрица, транспонированная к y. Если D-модуль E снабжен невырожденной знакопеременной формой Ψ, то симплектическую группу этой формы, обозначаемую $Sp(E)$, отождествляем с помощью фиксированного базиса модуля E с группой $Sp_n(D)$. Базис модуля E, снабженного невырожденной знакопеременной формой Ψ, называется *гиперболическим*, если матрица этой формы относительно выбранного базиса равна q_0. Пусть поле D_1 является квадратичным расширением поля D, и пусть σ_1 — инволютивный автоморфизм над D поля D_1. Матрица q_0 является σ_1-косоэрмитовой и, следовательно, определяет унитарную группу $U_n(D_1, q_0, \sigma_1)$. Если D-модуль E снабжен невырожденной знакопеременной формой Ψ, то на модуле E_{D_1} однозначно определяется σ-косоэрмитова форма $\overline{\Psi}_{D_1}$, ограничение которой на E совпадает с Ψ. Введя эти обозначения, можно сформулировать наш основной результат.

Теорема 1.1. *Пусть F — поле характеристики, отличной от 2, D — тело кватернионов над F, K — подполе тела D, $m \geq 2$ — целое число, $n = 2m$. Предположим, что D алгебраично над полем $k = K \cap F$ и что k содержит больше пяти элементов. Тогда если $Sp_n(K) \leq X \leq GL_n(D)$, то либо X содержит нормальную подгруппу, совпадающую с $SL_n(L)$ или с $Sp_n(L)$, где L — подполе тела D, $k \subseteq L$, либо существует подполе K_1 тела D, содержащее k и обладающее инволютивным автоморфизмом σ, такое, что $T_n(K_1, q_0, \sigma) \leq X$.*

Из теоремы 1.1 с учетом упомянутого выше результата о линейных группах над телом кватернионов, содержащих специальную унитарную группу над полем, получаем следующее описание линейных групп над телом кватернионов, содержащих симплектическую группу.

Теорема 1.2. *Пусть F, D, K, k, X, n обозначают то же, что и в теореме* 1.1, *причем D и k удовлетворяют предположениям, сделанным о них в этой теореме. Тогда X содержит нормальную подгруппу G, для которой выполняется одно из следующих утверждений:*

1) *$G = Sp_n(L)$, где L — подполе тела D, $k \subseteq L$;*

2) *$G = SL_n(L)$ или $G = T_n(L, q_0, \sigma)$, где L — подтело тела D, $k \subseteq L$, σ — инволюция тела L;*

3) *$n = 4$, и G изоморфна спинорной группе $\mathrm{Spin}_l(P, f)$, где P — подполе поля F, $k \subseteq P$, $l = 7$ или $l = 8$, f — невырожденная симметрическая билинейная форма от l переменных над полем P, индекс Витта которой равен 2.*

2. Обозначения и предварительные результаты

В этом пункте мы продолжим введение обозначений, используемых в настоящей статье. Будут приведены также результаты, необходимые для доказательства теоремы 1.1.

Пусть D — произвольное ассоциативное тело, $n \geq 2$ — целое число, E — унитарный правый n-мерный D-модуль. 1_n — единичная матрица степени n, $t_{ij}(\alpha)$ $(1 \leq i \neq j \leq n)$ — матрица степени n, у которой по диагонали стоят единицы, позиция (i, j) занята элементом $\alpha \in D$, а остальные элементы равны нулю. Если $Y \subseteq D$, то $t_{ij}(Y) = \{t_{ij}(\alpha) \mid \alpha \in Y\}$. Трансвекция g, соответствующая элементам $t \in E$ и $\phi \in E^*$, обозначается через $g = g(t, \phi)$. Если $\alpha \in D$, то через g_α обозначается трансвекция $g(t, \alpha\phi) = g(t\alpha, \phi)$. Если P — подгруппа аддитивной группы тела D, то $g(P) = \{g_\alpha \mid \alpha \in P\}$. Очевидно, $g(P) \leq SL_n(D)$. Если группа P изоморфна аддитивной группе тела $Q \subseteq D$, то $g(P)$ называется *корневой Q-группой*. Если $X \subseteq GL_n(D)$, то через $T(X)$ обозначается множество всех трансвекций из X, а через $\langle X \rangle$ — подгруппа группы $GL_n(D)$, порожденная множеством X. 1_E — тождественное преобразование модуля E.

Пусть существует поле $k \subseteq D$ такое, что D является k-алгеброй. Предположим, что $\operatorname{char} D \neq 2$. Если для любых $a, b \in D$ положить $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, то k-модуль D вместе с операцией умножения $\circ$ является йордановой k-алгеброй, которая обозначается через $D^{(+)}$. Предположим, что D имеет инволюцию σ.

Если модуль E снабжен невырожденной σ-косоэрмитовой формой Φ, то через $\mathrm{Ist}(E,\Phi)$ обозначается множество всех изотропных векторов из E. Если $t\in\mathrm{Ist}(E,\Phi)$, то $\tau_t=\tau_{t,1}$. $\mathrm{Sfq}(P)$ — множество всех тел кватернионов над полем P. Если $A\in\mathrm{Sfq}(P),\operatorname{char}P\neq 2$, то любой базис $1,u,v,w$ тела A над P такой, что $u^2,v^2\in P, uv=-vu=w$, называется *стандартным базисом.*

Лемма 2.1 [13]. *Пусть k — поле такое, что $\operatorname{char}k\neq 2$ и $k\neq GF(3)$. Если α — элемент из алгебраического замыкания поля k, то подгруппа группы $SL_2(k(\alpha))$, порожденная всеми матрицами*

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\r\alpha&1\end{pmatrix},\quad r\in k,$$

совпадает с $SL_2(k(\alpha))$.

Лемма 2.2 [6, теорема 3.1]. *Пусть k — поле, $\operatorname{char}k\neq 2$, $k\neq GF(3)$, поле K — алгебраическое расширение поля k, $m\geq 2$ — целое число, $n=2m$. Если $Sp_n(k)\leq G\leq GL_n(K)$, то G содержит нормальную подгруппу, совпадающую с одной из групп $Sp_n(L),T_n(L,\Phi),SL_n(L)$, где L — поле, $k\subseteq L\subseteq K,\Phi$ — косоэрмитова форма, индекс Витта которой больше 1.*

Лемма 2.3 [6, лемма 3.6]. *Пусть k — поле, $\operatorname{char}k\neq 2$, $k\neq GF(3)$, поле P — квадратичное расширение поля k, σ — инволютивный автоморфизм поля P над k, n — четное число, $n\geq 4$. Если $Sp_n(k)\leq G\leq T_n(P,q_0,\sigma)$, то G содержит нормальный делитель, совпадающий с одной из групп $Sp_n(k),T_n(P,q_0,\sigma)$.*

Лемма 2.4 [10]. *Пусть k — поле, $\operatorname{char}k\neq 2$, $k\neq GF(3)$, D — ассоциативная k-алгебра с делением, $n\geq 2$, $G\leq GL_n(D)$. Предположим, что D алгебраично над k, и G содержит подгруппу $t_{12}(k)$. Если $C=\{a\in D\mid t_{12}(a)\in G\}$, то C — подалгебра йордановой k-алгебры $D^{(+)}$.*

Установим теперь два простых утверждения, используемых в доказательстве основной теоремы.

Пусть D — произвольное ассоциативное тело, k — некоторое его подтело, $m\geq 2$ — целое число, $n=2m$. Рассмотрим элементы $\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\mu_1,\ldots,\mu_n$ из D, удовлетворяющие следующим включениям:

$$\lambda_{2i}\mu_{2i-1}\in k\quad(1\leq i\leq m),\tag{1}$$

$$\lambda_{2i-1}\mu_{2i}\in k\quad(1\leq i\leq m),\tag{2}$$

$$\lambda_{2i}\mu_{2j-1}+\lambda_{2j}\mu_{2i-1}\in k\quad(1\leq i\neq j\leq m),\tag{3}$$

$$\lambda_{2j-1}\mu_{2i}+\lambda_{2i-1}\mu_{2j}\in k\quad(1\leq i\neq j\leq m),\tag{4}$$

$$\lambda_{2j-1}\mu_{2i-1}-\lambda_{2i}\mu_{2j}\in k\quad(1\leq i,j\leq m).\tag{5}$$

Лемма 2.5. *Пусть элементы $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n\in D$ удовлетворяют включениям* (1)–(5). *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(а) *если $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in k$ и не все эти элементы нулевые, то $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n\in k$;*

(б) *если $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n\in k$ и не все эти элементы нулевые, то $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in k$.*

Доказательство. Докажем (а). Пусть $1\leq i\leq m$. Покажем, что $\mu_{2i-1}\in k$. Если $\lambda_{2i}\neq 0$, то это следует из (1). Предположим, что $\lambda_{2i}=0$. Пусть i_0 таково, что $\lambda_{2i_0}\neq 0$. Включение (3) при $i=i_0$, $j=i$ влечет $\mu_{2i-1}\in k$. Пусть $\lambda_{2i_0-1}\neq 0$. Тогда включение $\mu_{2i-1}\in k$ вытекает из (5) при $j=i_0$. Точно так же проверяется включение $\mu_{2i}\in k$, чем заканчивается доказательство п. (а). П. (б) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Предположим, что тело k коммутативно. Пусть E — n-мерное векторное k-пространство, снабженное невырожденной знакопеременной формой Ψ, $e_1, \dots, e_n$ — гиперболический базис пространства E,*

$$g = g\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\lambda_i, \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i'\right) \in T(SL(E)) \quad (\lambda_i, \mu_i \in D).$$

Предположим, что $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\mu_1, \dots, \mu_n$ удовлетворяют включениям (1)–(5). Тогда если для некоторого i, $1 \le i \le m$, выполняется одно из следующих условий:

(а) $\lambda_{2i-1} = 0$, $\mu_{2i} \neq 0$,
(б) $\lambda_{2i} = 0$, $\mu_{2i-1} \neq 0$,
(в) $\mu_{2i} = 0$, $\lambda_{2i-1} \neq 0$,
(г) $\mu_{2i-1} = 0$, $\lambda_{2i} \neq 0$,

то $g \in SL_n(k) \setminus Sp_n(k)$.

Доказательство. Положим

$$s = \sum_{i=1}^{n} e_i\lambda_i, \quad \psi = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i'.$$

Пусть выполнено условие (а). Так как $g = g\big(s\mu_{2i}, \mu_{2i}^{-1}\psi\big)$, можно считать $\mu_{2i} = 1$. Включения (5) и (4), где i, j меняются местами, показывают, что $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in k$. По лемме 2.5 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in k$. Следовательно, $g \in SL_n(k)$, и, очевидно, $g \notin Sp_n(k)$. Аналогично лемма доказывается при выполнении одного из условий (б), (в), (г). Лемма 2.6 доказана.

3. Доказательство теоремы 1.1

Положим $H = Sp_n(k)$. Очевидно, $H \le X$. Применение леммы Цорна, а также лемм 2.1 и 2.2 показывает, что группу H можно рассматривать как максимальную среди всех групп, содержащих H и содержащихся в X, которые являются группами типа Sp_n над некоторым подполем поля F. Пусть E — n-мерное векторное k-пространство, на котором определена невырожденная знакопеременная форма Ψ. Зафиксируем в E гиперболический базис (относительно Ψ) и не будем отличать линейные преобразования пространства E_D от матриц, определяемых ими в этом базисе. Положим $C = \{\alpha \in D \mid t_{12}(\alpha) \in X\}$. Из максимальности H вытекает максимальность поля k среди всех подполей поля F, содержащихся в C. По лемме 2.4 C — подалгебра йордановой k-алгебры $D^{(+)}$. Поэтому, учитывая максимальность k, легко убедиться (см. [10]) в том, что для C могут представиться следующие четыре возможности:

1) C — поле, $C \not\subseteq F$;

2) существует стандартный базис $1, u_1, v_1, w_1$ тела D над F такой, что $u_1^2, v_1^2 \in k$ и $C = k + kv_1 + kw_1$;

3) существуют стандартный базис $1, u_1, v_1, w_1$ тела D над F и элемент $u_2 \in F \setminus k$ такие, что $u_1^2, v_1^2, u_2^2 \in k$ и $C = k + ku_1u_2 + kv_1 + kw_1$;

4) $C = k$.

В соответствии с этими возможностями дальнейшее доказательство разобьем на несколько пунктов. Через J обозначим инволюцию тела D, для которой $S_D^+(J) = F$.

1. Пусть C — поле, $C \not\subseteq F$. Обозначим через M максимальное подполе тела D, содержащее C. Стандартный базис $1, u_1, v_1, w_1$ тела D над F выберем

так, что $M = F(u_1)$. Поскольку C — поле, то по лемме 2.2 $Sp_n(C) \leq X$. Пусть $g = g(s,\psi) \in T(X)$ $(s \in E_D, \psi \in (E_D)^*)$. Применение леммы 2.1 показывает, что для любого $t \in E$

$$\Psi(t,s)\psi(t) \in C. \tag{6}$$

Положим

$$s = \sum_{i=1}^{n} e_i\lambda_i, \quad \psi = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e'_i \quad (\lambda_i, \mu_i \in D).$$

Если α — произвольный элемент из C, то, полагая в (6) t равным последовательно

$$e_{2i-1}, e_{2i}\ (1 \leq i \leq m), \quad e_{2i-1} + e_{2j-1}\alpha,$$

$$e_{2i} + e_{2j}\alpha\ (1 \leq i \neq j \leq m), \quad e_{2i-1} + e_{2j}\alpha\ (1 \leq i,j \leq m),$$

получаем, что

$$\lambda_{2i}\mu_{2i-1} \in C \quad (1 \leq i \leq m), \tag{7}$$

$$\lambda_{2i-1}\mu_{2i} \in C \quad (1 \leq i \leq m), \tag{8}$$

$$\lambda_{2i}\mu_{2j-1}\alpha + \alpha\lambda_{2j}\mu_{2i-1} \in C \quad (1 \leq i \neq j \leq m), \tag{9}$$

$$\alpha\lambda_{2j-1}\mu_{2i} + \lambda_{2i-1}\mu_{2j}\alpha \in C \quad (1 \leq i \neq j \leq m), \tag{10}$$

$$\alpha\lambda_{2j-1}\mu_{2i-1} - \lambda_{2i}\mu_{2j}\alpha \in C \quad (1 \leq i,j \leq m). \tag{11}$$

Перейдя в случае необходимости от базиса $e_1, \dots, e_n$ к другому гиперболическому базису пространства E, можно считать $\lambda_{2m} = 1$. Согласно (7) $\mu_{2m-1} \in C$. Пусть i_0 — фиксированное число, $1 \leq i_0 \leq m$. Покажем, что $\lambda_{2i_0-1} \in M$. Допустим противное, т. е. $\lambda_{2i_0-1} \notin M$. Тогда (8) показывает, что $\mu_{2i_0} = \lambda_{2i_0-1}^{-1}c_1$ для некоторого $c_1 \in C$. Из (11) при $j = i_0, i = m$ получаем, что для некоторого $c \in M$ будет $\alpha\lambda_{2i_0-1}\mu_{2m-1} - \lambda_{2i_0-1}^{J}c\alpha \in C$ при всех $\alpha \in C$. Положим $\lambda_{2i_0-1} = a + bv_1$, где $a, b \in M$. Так как $b \neq 0$, то $\alpha\mu_{2m-1}^{J} + c^J\alpha^J = 0$ при всех $\alpha \in C$. Полагая $\alpha = 1$, получим $c^J = -\mu_{2m-1}^{J}$ и, значит, $\mu_{2m-1}^{J}(\alpha - \alpha^J) = 0$. Поскольку $C \not\subseteq F$, то найдется $\alpha_0 \in C \setminus F$, откуда $\mu_{2m-1} = 0$. Из (11) тогда вытекает, что $\mu_{2i_0}\alpha \in C$ при всех $\alpha \in C$. В частности, $\mu_{2i_0} \in C$. Если $\mu_{2i_0} \neq 0$, то $\lambda_{2i_0-1} \in C \subseteq M$, что противоречит сделанному предположению. Следовательно, $\mu_{2i_0} = 0$. Полагая в (10) и (11) $j = i_0$, получаем, что $\lambda_{2i_0-1}\mu_p \in C$ при всех $p = 1, 2, \dots, n$. Из (11) при $i = m$ и (9) при $j = m$ вытекает, что $\mu_p \in C$ при всех $p = 1, 2, \dots, n$. Среди элементов μ_p найдется $\mu_{p_0} \neq 0$. Для этого элемента имеем $\lambda_{2i_0-1}\mu_{p_0} \in C$, $\mu_{p_0} \in C$, и, значит, $\lambda_{2i_0-1} \in C \subseteq M$. Таким образом, равенство $\mu_{2i_0} = 0$ приводит к противоречию с предположением $\lambda_{2i_0-1} \notin M$. Аналогично с помощью включений (7)–(11) показывается, что $\lambda_{2i_0} \in M$. Значит, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in M$. По лемме 2.5 тогда $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in M$, откуда $g \in SL_n(M)$. Следовательно, если обозначить через G нормальную подгруппу $\langle T(X)\rangle$ группы X, то в силу произвола в выборе g получим $Sp_n(k) \leq G \leq SL_n(M)$, и утверждение теоремы 1.1 вытекает в этом случае из леммы 2.2.

2. Пусть $1, u_1, v_1, w_1$ — стандартный базис тела D над F такой, что $u_1^2, v_1^2 \in k$, и $C = k + kv_1 + kw_1$. Ясно, что $A = k + ku_1 + kv_1 + kw_1 \in \mathrm{Sfq}(k)$. Положим $P = k(v_1)$. На пространстве E_P введем знакопеременную форму Ψ_0, полученную из Ψ расширением тела скаляров k до P. Пусть J_1 — инволюция тела A такая, что $S_A^+(J_1) = k + kv_1 + kw_1$. Обозначим через $\overline{\Psi}$ J_1-косоэрмитову форму на модуле E_A, ограничение которой на E_P совпадает с Ψ_0. Положим

$G = \langle H, t_{12}(C)\rangle$ и покажем, что $G = T_n(A, \overline{\Psi}, J_1)$. Отсюда будет следовать справедливость теоремы 1.1, ибо

$$T_n(A, \overline{\Psi}, J_1) \geq T_n(k(u_1), \overline{\Psi}, J_1).$$

Положим $\Gamma = Sp_n(P)$. По лемме 2.3 $G = \langle \Gamma, t_{12}(w_1)\rangle$. Каждый вектор из E_A однозначно записывается в виде $x + yw_1$, где $x, y \in E_P$. Инволютивный автоморфизм поля P над k является ограничением на P инволюции J тела D. Поэтому обозначим этот автоморфизм также через J. Так как

$$\overline{\Psi}(x + yw_1, x + yw_1) = (\Psi_0(x, y) - \Psi_0(x, y)^J)w_1,$$

то $x + yw_1 \in \mathrm{Ist}(E_A, \overline{\Psi})$ тогда и только тогда, когда $\Psi_0(x, y) \in k$. Из транзитивности действия группы Γ на множестве $E_P \setminus \{0\}$ следует, что $\tau_{s,\lambda} \in G$ при всех $s \in E_P$ и всех $\lambda \in S_A^+(J_1)$. Пусть теперь $s \in \mathrm{Ist}(E_A, \overline{\Psi})$, $\lambda \in S_A^+(J_1)$. Нужно показать, что $\tau_{s,\lambda} = g \in G$. Положим $s = x + yw_1$, где $x, y \in E_P$. Если $x = 0$, то $g = \tau_{y, v_1\lambda v_1} \in G$ согласно сделанному выше замечанию. Пусть $x \neq 0$. Трансформируя g подходящим элементом из Γ, можно считать $x = e_1$. Пусть $y = e_1b_1 + e_2b_2 + y_1$, где $b_1, b_2 \in P$, $y_1 \in \langle e_3, e_4, \ldots, e_n\rangle_P$. Если $y_1 = 0$ и $b_2 = 0$, то $g = \tau_{e_1, (1+b_1w_1)\lambda(1+b_1w_1)^{J_1}} \in G$. Если $y_1 = 0$, $b_2 \neq 0$, то $g = \tau_{e_1(b_1b_2^{-1} + b_2^{-1}w_1^{-1}) + e_2, \lambda_0}$, где $\lambda_0 \in S_A^+(J_1)$. Так как $b_2 \in k$, то $z = \tau_{e_1, -(b_1b_2^{-1} + b_2^{-1}w_1^{-1})} \in G$ и $zgz^{-1} = \tau_{e_2,\lambda_0} \in G$, откуда $g \in G$. Пусть $y_1 \neq 0$. Трансформировав g подходящим элементом из группы $\mathrm{diag}(1_2, Sp_{n-2}(P)) \leq G$, можно считать, что $s = e_1(1 + b_1w_1) + e_2b_2w_1 + e_3w_1$. Пусть $b_2 \neq 0$. Будем считать, что

$$g = \tau_{e_1(b_1b_2^{-1} + b_2^{-1}w_1^{-1}) + e_2 + e_3b_2^{-1}, \lambda}.$$

Поскольку $b_2 \in k$, то $z_1 = \tau_{e_1, -(b_1b_2^{-1} + b_2^{-1}w_1^{-1})} \in G$. Следовательно, $z_1gz_1^{-1} = \tau_{e_2 + e_3b_2^{-1}, \lambda} \in G$, и можно считать $g = \tau_{e_2 + e_3b_2^{-1}, \lambda}$. Ограничения формы $\overline{\Psi}$ на подпространства $\langle e_1, e_2\rangle_A$, $\langle e_3, e_4\rangle_A$ эквивалентны. Поэтому обозначим эти ограничения одной буквой q. Очевидно,

$$\mathrm{diag}(T_2(A, q, J_1), T_2(A, q, J_1), 1_{n-4}) \leq G.$$

Но J_1 — инволюция первого типа и, значит, $T_2(A, q, J_1) = U_2(A, q, J_1)$ [14, гл. II, § 5]. Поэтому преобразование $d \in GL_n(D)$, для которого $d(e_3) = e_3b_2$, $d(e_4) = e_4b_2^{-J_1}$, $d(e_p) = e_p$ $(1 \leq p \leq n,\ p \neq 3, 4)$, содержится в G и $dgd^{-1} = \tau_{e_2 + e_3, \lambda} \in G$, откуда $g \in G$. Пусть $b_2 = 0$, т. е. $s = e_1(1 + b_1w_1) + e_3w_1$. Тогда преобразование $d_1 \in GL_n(D)$, для которого $d_1(e_1) = e_1(1 + b_1w_1)^{-1}$, $d_1(e_2) = e_2(1 + b_1w_1)^{J_1}$, $d_1(e_3) = e_3w_1^{-1}$, $d_1(e_4) = e_4w_1$, $d_1(e_p) = e_p$ $(5 \leq p \leq n)$, содержится в G. Так как $d_1gd_1^{-1} = \tau_{e_1 + e_3, \lambda} \in G$, то вновь $g \in G$, что и требовалось.

3. Если $C = k + ku_1u_2 + kv_1 + kw_1$, где $1, u_1, v_1, w_1$ — стандартный базис тела D над F такой, что $u_1^2, v_1^2 \in k$, а u_2 — элемент из $F \setminus k$, для которого $u_2^2 \in k$, то $C \supseteq k + kv_1 + kw_1$, и утверждение теоремы 1.1 в этом случае следует из доказанного в п. 2.

4. Пусть $C = k$. Если $T(X) \subseteq GL_n(F)$, то $\langle T(X)\rangle$ — подгруппа группы $GL_n(F)$, содержащая H, и утверждение теоремы следует из леммы 2.2. Пусть $T(X) \not\subseteq GL_n(F)$. Выберем в X трансвекцию $g = g(s, \psi) \notin GL_n(F)$. Положим

$$s = \sum_{i=1}^{n} e_i\lambda_i, \quad \psi = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i' \quad (\lambda_i, \mu_i \in D).$$

Поскольку $C = k$, по лемме 2.1 $\Psi(t,s)\psi(t) \in k$ при всех $t \in E$. Заставив t пробегать множество всех векторов e_{2i-1}, e_{2i} $(1 \le i \le m)$, $e_{2i-1} + e_{2j-1}, e_{2i} + e_{2j}$ $(1 \le i \ne j \le m)$, $e_{2i-1} + e_{2j}$ $(1 \le i, j \le m)$, получим, что $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$ удовлетворяют условиям (1)–(5). Пусть $1 \le i \le m$. Если $\lambda_{2i} \ne 0$, то из включения (1) следует, что для некоторого $r_{2i-1} \in F$

$$\mu_{2i-1} = r_{2i-1}\lambda_{2i}^J. \tag{12}$$

Если $\lambda_{2i} = 0$, то по лемме 2.6 $\mu_{2i-1} = 0$ и равенство (12) также справедливо, ибо в качестве r_{2i-1} можно взять любой элемент поля F. Точно так же включение (2) влечет равенство

$$\mu_{2i} = r_{2i}\lambda_{2i-1}^J, \tag{13}$$

где $r_{2i} \in F$. Подставляя значения μ_{2i-1}, μ_{2i}, даваемые равенствами (12), (13) в включения (3)–(5), приходим к равенствам

$$(r_{2j-1} - r_{2i-1})\big(\lambda_{2i}\lambda_{2j}^J - \lambda_{2j}\lambda_{2i}^J\big) = 0 \quad (1 \le i \ne j \le m), \tag{14}$$

$$(r_{2i} - r_{2j})\big(\lambda_{2j-1}\lambda_{2i-1}^J - \lambda_{2i-1}\lambda_{2j-1}^J\big) = 0 \quad (1 \le i \ne j \le m), \tag{15}$$

$$(r_{2i-1} + r_{2j})\big(\lambda_{2j-1}\lambda_{2i}^J - \lambda_{2i}\lambda_{2j-1}^J\big) = 0 \quad (1 \le i, j \le m). \tag{16}$$

Зафиксируем число i_0, $1 \le i_0 \le m$, и покажем, что $r_{2i_0-1} = -r_{2i_0}$. Если $\lambda_{2i_0-1} = 0$, то равенство $r_{2i_0-1} = -r_{2i_0}$ выполняется, поскольку $\mu_{2i_0} = 0$ и в качестве r_{2i_0} можно взять произвольный элемент из F. По аналогичной причине это равенство выполняется в случае $\lambda_{2i_0} = 0$. Предположим, что $\lambda_{2i_0-1}\lambda_{2i_0} \ne 0$, но $r_{2i_0-1} \ne -r_{2i_0}$. Равенство (16) при $i = i_0$, $j = i_0$ дает $\lambda_{2i_0-1}\lambda_{2i_0}^J \in F$, откуда $\lambda_{2i_0} = \lambda_{2i_0-1}t$, где $t \in F^*$. Пусть $1 \le j \le m$, $i = i_0$. Тогда (16) принимает вид

$$(r_{2i_0-1} + r_{2j})\big(\lambda_{2j-1}\lambda_{2i_0-1}^J t - \lambda_{2i_0-1}\lambda_{2j-1}^J t\big) = 0$$

и, значит,

$$(r_{2i_0-1} + r_{2j})\big(\lambda_{2j-1}\lambda_{2i_0-1}^J - \lambda_{2i_0-1}\lambda_{2j-1}^J\big) = 0.$$

Сложив последнее равенство с равенством (15), где положено $i = i_0$, получаем

$$(r_{2i_0-1} + r_{2i_0})\big(\lambda_{2j-1}\lambda_{2i_0-1}^J - \lambda_{2i_0-1}\lambda_{2j-1}^J\big) = 0 \quad (j \ne i_0),$$

откуда следует $\lambda_{2j-1}\lambda_{2i_0-1}^J \in F$ $(j \ne i_0)$. Из (14) при $j = i_0$ вытекает равенство

$$(r_{2i_0-1} - r_{2i-1})\left(\lambda_{2i}\lambda_{2i_0-1}^J - \lambda_{2i_0-1}\lambda_{2i}^J\right) = 0 \quad (i \ne i_0).$$

Вычитая из этого равенства равенство (16), в котором положено $j = i_0$, получаем

$$(r_{2i_0-1} + r_{2i_0})\big(\lambda_{2i}\lambda_{2i_0-1}^J - \lambda_{2i_0-1}\lambda_{2i}^J\big) = 0 \quad (i \ne i_0),$$

откуда $\lambda_{2i_0-1}\lambda_{2i}^J \in F$ при всех $i = 1, 2, \dots, m$. Так как $\lambda_{2i_0-1} \ne 0$, можно считать $\lambda_{2i_0-1} = 1$ и тем самым $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$. Тогда по лемме 2.5 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in F$, т. е. $g \in SL_n(F)$, вопреки предположению. В силу произвола в выборе i_0 мы установили выполнение равенств

$$r_1 = -r_2, r_3 = -r_4, \dots, r_{2m-1} = -r_{2m}.$$

Подобным образом с помощью соотношений (14)–(16) и предположения $g \notin SL_n(F)$ устанавливается справедливость равенств

$$r_2 = -r_3, r_4 = -r_5, \dots, r_{2m-2} = -r_{2m-1}.$$

Значит, для некоторого $r \in F$

$$r_1 = -r_2 = r_3 = -r_4 = \dots = r_{2m-1} = -r_{2m} = r,$$

т. е.

$$\psi = r \sum_{i=1}^{m} \left(\lambda_{2i}^J e'_{2i-1} - \lambda_{2i-1}^J e'_{2i} \right).$$

Обозначим через $\overline{\Psi}_D$ J-косоэрмитову форму на E_D, ограничение которой на E совпадает с Ψ. Так как $\psi(s) = 0$, то $s \in \mathrm{Ist}(E_D, \overline{\Psi}_D)$ и $g \in T_n(D, \overline{\Psi}_D, J)$, $g = \tau_{s,r}$. Кроме того,

$$r\lambda_{2i}\lambda_{2i}^J \in k, \quad r\lambda_{2i-1}\lambda_{2i-1}^J \in k \quad (1 \le i \le m),$$
$$r\big(\lambda_{2i}\lambda_{2j}^J + \lambda_{2j}\lambda_{2i}^J\big) \in k \quad (1 \le i \ne j \le m),$$
$$r\big(\lambda_{2j-1}\lambda_{2i-1}^J + \lambda_{2i-1}\lambda_{2j-1}^J\big) \in k \quad (1 \le i \ne j \le m),$$
$$r\big(\lambda_{2j-1}\lambda_{2i}^J + \lambda_{2i}\lambda_{2j-1}^J\big) \in k \quad (1 \le i, j \le m).$$

Среди элементов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ найдется $\lambda_p \ne 0$. Так как $g = \tau_{s\lambda_p^{-1}, r\lambda_p\lambda_p^J}$, то, заменив λ_i на $\lambda_i\lambda_p^{-1}$ $(1 \le i \le m)$ и r на $r\lambda_p\lambda_p^J \in k$, можно считать, что $g = \tau_{s,r}$, где

$$s = \sum_{i=1}^{n} e_i\lambda_i \in \mathrm{Ist}(E_D, \overline{\Psi}_D) \quad (\lambda_i \in D), \quad r \in k,$$

и $\lambda_{2i}\lambda_{2i}^J \in k$, $\lambda_{2i-1}\lambda_{2i-1}^J \in k$ $(1 \le i \le m)$, $\lambda_{2i}\lambda_{2j}^J + \lambda_{2j}\lambda_{2i}^J \in k$, $\lambda_{2j-1}\lambda_{2i-1}^J + \lambda_{2i-1}\lambda_{2j-1}^J \in k$ $(1 \le i \ne j \le m)$, $\lambda_{2j-1}\lambda_{2i}^J + \lambda_{2i}\lambda_{2j-1}^J \in k$ $(1 \le i, j \le m)$. Запишем эти включения единообразно в виде

$$\lambda_p\lambda_l^J + \lambda_l\lambda_p^J \in k \quad (1 \le l, p \le n). \tag{17}$$

Обозначим через D_+ F-подпространство всех J-кососимметричных элементов тела D. Зафиксируем стандартный базис $1, u_1, v_1, w_1$ тела D над F и положим $\lambda_p = a_p + b_pu_1 + c_pv_1 + d_pw_1$ $(a_p, b_p, c_p, d_p \in F,\ 1 \le p \le n)$. Среди элементов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ найдется отличный от нуля. Перейдя от базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ к другому гиперболическому базису пространства E, можно считать $\lambda_1 \ne 0$ и, значит, $\lambda_1 = 1$. Полагая в (17) $l = 1$, получим $a_p \in k$ $(1 \le p \le n)$. Положим $\lambda'_p = b_pu_1 + c_pv_1 + d_pw_1$. Тогда

$$s = e_1 + e_2(a_2 + \lambda'_2) + f + \sum_{p=3}^{n} e_p\lambda'_p,$$

где $f = \sum\limits_{p=3}^{n} e_pa_p \in E$. Пусть $f \ne 0$. Заменив базис $\{e_3, e_4, \dots, e_n\}$ подпространства $\langle e_3, e_4, \dots, e_n\rangle_k$ гиперболическим базисом этого подпространства, в котором первым элементом является f, можно считать, что

$$s = e_1 + e_2(a_2 + \lambda_2) + e_3(1 + \lambda_3) + \sum_{p=4}^{n} e_p\lambda_p,$$

где $\lambda_p \in D_+$ $(2 \le p \le n)$. Если $a_2 \ne 0$, то, перейдя к базису $\{e_1 + e_2a_2, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ пространства E, будем считать $a_2 = 0$. Перейдя к базису $\{e_1 + e_3, e_2, -e_3, e_2 - e_4, e_5, \dots, e_n\}$, который также является гиперболическим, можно считать

$$s = e_1 + \sum_{p=2}^{n} e_p\lambda_p,$$

где $\lambda_p \in D_+$ $(2 \le p \le n)$. Если $f = 0$, то, перейдя в случае необходимости к базису $\{e_1 + e_2 a_2, e_2, \dots, e_n\}$, можно добиться того, что $a_2 = 0$. Таким образом, в любом случае можно считать

$$s = e_1 + \sum_{p=2}^{n} e_p \lambda_p,$$

где $\lambda_p \in D_+$ $(2 \le p \le n)$. Могут представиться две возможности:

а) $\lambda_2 \ne 0$;

б) $\lambda_2 = 0$.

Пусть $\lambda_2 \ne 0$. Если элементы $\lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_n$ коммутируют с λ_2, то в силу условия $\lambda_2 \notin F$ все элементы $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ содержатся в одном максимальном подполе K' тела D. Отсюда следует, что $g \in SL_n(K')$ и утверждение теоремы 1.1 в этом случае вытекает из леммы 2.2. Пусть среди $\lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_n$ найдется элемент, не коммутирующий с λ_2. Меняя, если нужно, нумерацию векторов $e_3, e_4, \dots, e_n$, а также знаки перед некоторыми из них, можно считать, что $\lambda_2\lambda_3 \ne \lambda_3\lambda_2$. Поскольку $\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_2 \in k$, то k-подпространство $A_0 = k + k\lambda_2 + k\lambda_3 + k\lambda_2\lambda_3$ тела D замкнуто относительно умножения, заданного в этом теле, и, следовательно, $A_0 \in \mathrm{Sfq}(k)$. Заменив в случае необходимости базис $1, u_1, v_1, w_1$ стандартным базисом тела A_0 над k, можно считать, что $u_1^2, v_1^2 \in k$. Так как $\lambda_2 \in D_+ \setminus \{0\}$, можно считать $\lambda_2 = u_1$. Поскольку $\lambda_2\lambda_3 \ne \lambda_3\lambda_2$, то $c_3 v_1 + d_3 w_1 \ne 0$ и можно за v_1 принять $c_3 v_1 + d_3 w_1$. Таким образом, можно считать, что

$$s = e_1 + e_2 u_1 + e_3(b_3 u_1 + v_1) + \sum_{p=4}^{n} e_p(b_p u_1 + c_p v_1 + d_p w_1),$$

причем $b_3 \in k$. Полагая в (17) $l = 2$, а затем $l = 3$, получаем $b_p, c_p \in k$ $(4 \le p \le n)$. Так как $\lambda_p^2 \in k$, то $d_p^2 \in k$ $(4 \le p \le n)$. Предположим, что $d_4 = d_5 = \dots = d_n = 0$. Тогда $s = x + y u_1 + z v_1$, где

$$x = e_1, \quad y = e_2 + \sum_{p=3}^{n} e_p b_p, \quad z = e_3 + \sum_{p=4}^{n} e_p c_p,$$

и $x, y, z \in E$. Поэтому $\Psi(x, y) = 1$. С другой стороны, поскольку $s \in \mathrm{Ist}(E_D, \overline{\Psi}_D)$, то $\Psi(x, y) = 0$. Полученное противоречие показывает, что для некоторого p_0 $(4 \le p_0 \le n)$ будет $d_{p_0} \ne 0$. Пусть $4 \le p \le n$. Так как $\lambda_p\lambda_{p_0} + \lambda_{p_0}\lambda_p \in k$, то $d_p d_{p_0} \in k$. Предположим, что $d_{p_0} \notin k$. Тогда $d_p = r_p d_{p_0}$ для любого $p = 4, 5, \dots, n$, где $r_p \in k$, и $s = x + y u_1 + z v_1 + t d_{p_0} w_1$, где

$$x = e_1, \quad y = e_2 + \sum_{p=3}^{n} e_p b_p \in E, \quad z = e_3 + \sum_{p=4}^{n} e_p c_p \in E, \quad t = \sum_{p=4}^{n} e_p r_p \in E.$$

Учитывая, что $d_{p_0}^J = d_{p_0}$, а вектор s изотропен, имеем $\Psi(x, y) = 0$. С другой стороны,

$$\Psi(x, y) = \Psi\left(e_1, e_2 + \sum_{p=3}^{n} e_p b_p\right) = 1.$$

Полученное противоречие показывает, что $d_{p_0} \in k$ и, значит, $d_p \in k$ при всех $p = 4, 5, \dots, n$. Следовательно, $s = x + y u_1 + z v_1 + t w_1$, где

$$x = e_1, \quad y = e_2 + \sum_{p=3}^{n} e_p b_p, \quad z = e_3 + \sum_{p=4}^{n} e_p c_p, \quad t = \sum_{p=4}^{n} e_p d_p.$$

Очевидно, $x, y, z, t \in E$. Так как $s \in \mathrm{Ist}(E_D, \overline{\Psi}_D)$, то

$$\Psi(x,y) + \Psi(z,t)v_1^2 = \Psi(x,z) - \Psi(y,t)u_1^2 = \Psi(x,t) - \Psi(y,z) = 0.$$

Значит,

$$\Psi(x,y) = 1, \quad \Psi(x,z) = \Psi(x,t) = \Psi(y,z) = \Psi(y,t) = 0, \quad \Psi(z,t) = -v_1^{-2}.$$

Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k$ таковы, что $x\alpha + y\beta + z\gamma + t\delta = 0$, т. е.

$$e_1\alpha + e_2\beta + e_3(b_3\beta + \gamma) + \sum_{p=4}^{n} e_p(b_p\beta + c_p\gamma + d_p\delta) = 0,$$

откуда $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ и $\dim_k\langle x, y, z, t\rangle_k = 4$. Поскольку группа H действует транзитивно на множестве всех гиперболических базисов пространства E [15, гл. 3, § 5], можно считать $g = \tau_{e_1+e_2u_1+e_3v_1-e_4v_1^{-2}w_1}$. Так как

$$\tau_{e_2+e_4v_1} = g^{-1}\tau^{-1}_{e_2,(1-v_1^2)^{-1}}\tau^{-1}_{e_4,(1-v_1^2)^{-1}}g_{(1-v_1^2)^2}\tau_{e_4,(1-v_1^2)^{-1}}\tau_{e_2,(1-v_1^2)^{-1}}g,$$

то $X \geq \langle H, \tau_{e_2+e_4v_1}\rangle$. Но по лемме 2.3 $\langle H, \tau_{e_2+e_4v_1}\rangle = T_n(k(v_1), \overline{\Psi}, J)$, что и требовалось.

Рассмотрим, наконец, случай $\lambda_2 = 0$, т. е. $s = e_1 + e_3\lambda_3 + \dots + e_n\lambda_n$. Пусть i — инволюция из H такая, что

$$i(e_1) = -e_1, \quad i(e_2) = -e_2, \quad i(e_p) = e_p \quad (3 \leq p \leq n).$$

Непосредственно проверяется, что $(gi)^2 = \tau_{e_1,2}\tau_{e_3\lambda_3+\dots+e_n\lambda_n,2}$ и тем самым

$$\tau_{e_3\lambda_3+\dots+e_n\lambda_n}(k) \leq X.$$

В этом случае теорема вытекает из индуктивного предположения, примененного к группе

$$Sp_{n-2}(k) \cong Sp(\langle e_3, \dots, e_n\rangle_k).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vavilov N. A.* Intermediate subgroups in Chevalley groups // Proc. of the conf. groups of Lie type and their geometries, Italy, June, 1993. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. P. 233–280.
2. *Timmesfeld F. G.* Groups generated by k-transvections // Invent. Math. 1990. V. 100. P. 167–207.
3. *Timmesfeld F. G.* Groups generated by k-root subgroups // Invent. Math. 1991. V. 106. P. 575–666.
4. *Timmesfeld F. G.* Abstract root subgroups and quadratic actions. I, II. Giessen, 1994. (Preprint).
5. *Vavilov N. A.* Towards an infinite analogue of quadratic pairs // Междунар. конф. по алгебре памяти А. И. Ширшова: Тез. по теории групп. Новосибирск, 1991. С. 168.
6. *Башкиров Е. Л.* Линейные группы, содержащие корневую подгруппу // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1238–1225.
7. *Башкиров Е. Л.* О линейных группах, содержащих коммутант ортогональной группы индекса больше 1 // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 5. С. 15–22.
8. *Башкиров Е. Л.* Линейные группы, порожденные двумя длинными корневыми подгруппами // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 2. С. 15–23.
9. *Башкиров Е. Л.* О линейных группах, содержащих специальную линейную группу над некоммутативным телом // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1993. № 3. С. 106–108.

10. *Башкиров Е. Л.* О подгруппах специальной линейной группы степени 2 над телом обобщенных кватернионов // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1994. № 1. С. 34–39.
11. *Башкиров Е. Л.* О подгруппах полной линейной группы над телом кватернионов, содержащих специальную унитарную группу // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 6. С. 1251–1266.
12. *Башкиров Е. Л.* О подгруппах полной линейной группы степени 4 над телом кватернионов, содержащих специальную унитарную группу индекса 2 / Ред. Сиб. мат. журнала. СО РАН. Новосибирск, 2001. 20 С. Деп. в ВИНИТИ 29.08.01, № 1914.
13. *Башкиров Е. Л.* О подгруппах специальной линейной группы степени 2 над бесконечным полем // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 2. С. 19–36.
14. *Дьедонне Ж.* Геометрия классических групп. М.: Мир, 1974.
15. *Артин Э.* Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969.

Статья поступила 17 ноября 1999 г.

Башкиров Евгений Леонидович
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
ул. П. Бровки, 6, Минск 220013, Беларусь
`kafvm@gw.bsuir.unibel.by`