Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 515.142

ОБ ЭЙЛЕРОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ КРАТНЫХ ТОЧЕК САМОПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОГРУЖЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ

П. М. Ахметьев, Й. Малешич, Д. Реповш

Аннотация: Изучаются различные примеры погруженных в коразмерности 1 многообразий на предмет допустимых комбинаций эйлеровых характеристик подмногообразий кратных точек самопересечения. Получен полный ответ для погруженных 5-многообразий в 6-евклидово пространство. Изучены связи с другими конструкциями в дифференциальной топологии и теории особенностей.

Ключевые слова: погружение, эйлерова характеристика, особенности самопересечения

1. Введение

Пусть $f : M^m \to R^{m+k}$ — погружение общего положения. Обозначим через $f(M)_i$ множество точек $x \in R^{m+k}$, для которых существует по меньшей мере i различных точек $x_1, \dots, x_i \in M$ в многообразии-прообразе таких, что $f(x_j) = f(x_k)$ для всех $1 \leq j < k \leq i$. Множество $f(M)_i$ наделено структурой гладкого погруженного подмногообразия $g_i : \Delta_i \to R^{m+k}$, причем, вообще говоря, это погруженное подмногообразие не общего положения, а подмногообразие $g_{i+1}(\Delta_{i+1}) \subset g_i(\Delta_i)$ точек кратности $i+1$ служит сингулярным подмногообразием для $g_i(\Delta_i)$ в том смысле, что последнее многообразие самопересекается вдоль него не в общем положении. Удобно определить $\Delta_1 = M$. Тогда погружение $g_i : \Delta_i \to R^{m+k}$, $\dim(\Delta_i) = m - k(i-1)$, самопересекается вдоль $\widetilde{\Delta}_{i+1} \subset \Delta_i$, $\mathrm{Im}(g_i|\widetilde{\Delta}_{i+1}) = g_{i+1}(\Delta_{i+1})$.

Цель настоящей работы — изучить различные примеры погружений f с различными комбинациями эйлеровых характеристик $\chi(\Delta_i)$ многообразий кратных точек и найти некоторые закономерности для построения различных интересных примеров в рамках элементарных геометрических методов.

2. Вычисление эйлеровых характеристик многообразий кратного самопересечения

Пусть $f : S^1 \to R^2$ — погружение общего положения. Уитни [1] обнаружил, что индекс $\mathrm{Ind}(f)$ погружения f, т. е. целое число вращения касательного вектора при обходе вдоль ориентированной погруженной кривой f в положительном

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02–01–00014 и 02–01–00578), второго и третьего авторов — при поддержке Министерства образования, науки и спорта Республики Словения (исследовательская программа N 0101–509).

направлении, определяет класс регулярной гомотопии этой погруженной кривой. В этой работе была также найдена важная формула, которая восстанавливает этот класс регулярной гомотопии $\mathrm{Ind}(f)$ исходя из структуры множества Δ_2 — нульмерного подмногообразия плоскости, определенного множеством точек двойного самопересечения погруженной кривой.

В. И. Арнольд [2] заметил, что формула Уитни допускает обобщения на случай погружений в старших размерностях. Действительно, для погружений ориентированных многообразий коразмерности 1 одно из возможных обобщений было вскоре найдено Г. Михалкиным и М. Поляком [3]. Это обобщение связано с интегральными формулами, где мера, по которой интегрируют, определена как эйлерова характеристика стратов различной размерности, на которые погруженное подмногообразие $f(M)$ разбивает объемлющее пространство R^{m+1} и также на которые подмногообразие Δ_{i+1} разбивает погруженное подмногообразие Δ_i.

Независимо от проблемы обобщения формулы Уитни на случай старших размерностей проблема интегрирования по эйлеровым характеристикам была изучена в работе О. Я. Виро [4]. Итак, это мотивирует следующую проблему.

Проблема эйлеровой характеристики 2.1. *Пусть $f : M^m \to R^{m+k}$ — погружение общего положения. Найти всевозможные допустимые комбинации чисел $\chi(\Delta_i)$ для эйлеровых характеристик погруженных подмногообразий точек самопересечения кратности i.*

Замечание. Многообразие Δ_i определяется классом регулярной гомотопии исходного погружения неоднозначно, но с точностью до погруженного кобордизма с заданной структурой нормального расслоения. Поэтому более общая проблема состоит в вычислении класса кобордизма этого погружения (в том числе в классе кобордизма с заданной структурой нормального расслоения). Как правило, многообразие Δ_i оказывается при этом неориентированным. Четность эйлеровой характеристики многообразия доставляет простейший инвариант класса кобордизма.

Исключительный случай возникает, когда само многообразие M ориентировано и $k = 0 (\mathrm{mod}\, 2)$. В этом случае элемент из группы кобордизма $\Omega_{m-(i-1)k}$, представленный многообразием Δ_i, может, вообще говоря, иметь бесконечный порядок. Класс кобордизма многообразия Δ_i в этом случае был найден А. Сючем в [5]. Оказалось, что при $\dim(\Delta_i) = 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ будет $\chi(\Delta_i) = 0 (\mathrm{mod}\, 2)$.

Обратная проблема рассмотрена Т. Экхольмом в работе [6] и состоит в следующем. Может ли заданное погружение f быть восстановлено в классе регулярной гомотопии, исходя из класса кобордизма многообразия $[\Delta_2(f)]$ в группе кобордизма погружений с соответствующей структурой нормального расслоения?

Результаты работы [6] могут рассматриваться как обобщение результата Уитни [7], который получил утвердительный ответ на поставленную задачу для случая погружений многообразия в евклидово пространство при $k = m$. Т. Экхольм применил в своих исследованиях теорию инвариантов Васильева.

Конечно, в общем случае ответ на обратную проблему отрицателен. Например, оказывается, что класс регулярной гомотопии погружения $f : S^3 \to R^5$ не может быть восстановлен по классу кобордизма многообразия $\Delta_2(f)$. Более того, оказалось, что существует бесконечно много вложений $\varphi_i : S^3 \to R^5$, никакие два из которых не связаны регулярной гомотопией. Более подробно, классы регулярных гомотопий погруженных сфер по модулю операции связанного суммирования с вложенными сферами образуют циклическую группу порядка 24, в то время как по структуре самопересечения удается распознать лишь элемент в фактор-группе порядка 12. Полное решение задачи распознавания класса регулярной гомотопии погруженной сферы остается важной открытой проблемой.

Проблема 2.1 была исследована с различных точек зрения в различных работах (см. [5, 8–11]). Для $i = 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ проблема вычисления четности $\chi(\Delta_i)$ существенно упрощается. Каноническое i-листное накрытие $\overline{\Delta}_i \to \Delta_i$ определено, причем многообразие $\overline{\Delta}_i$ погружено в M. Следовательно, $\chi(\Delta_i) = \chi(\overline{\Delta}_i)/i$. Учитывая результаты [12], подмногообразие $\overline{\Delta}_i$ определим как класс кобордизма вложенного подмногообразия — нулей сечения общего положения расслоения $(i-1)\nu_f$ (здесь ν_f — нормальное расслоение погружения f), которое представлено прямой суммой $i-1$ изоморфных копий.

Это наблюдение сразу позволяет вычислить $\chi(\overline{\Delta}_i)(\mathrm{mod}\, 2)$, а значит, и $\chi(\Delta_i)(\mathrm{mod}\, 2)$. В работе [12] подмечено, что для $i = 1(\mathrm{mod}\, 2)$ значение $\chi(\Delta_i)$ зависит лишь от класса кобордизма M и не зависит от выбора погружения f.

В случае ориентированного M при $k = 0(\mathrm{mod}\, 2)$ значение $\chi(\Delta_i)$ для каждого $i = 0(\mathrm{mod}\, 2)$ было вычислено в [5]. Новая идея здесь состоит в том, что в этом случае Δ_i представляет элемент из группы $\Omega_{m-(i-1)k}$, и можно доказать, что $\chi(\Delta_i) = 0$ при помощи трансфера даже при четнолистном накрытии.

В частности, оказалось, что при $m \neq 2(\mathrm{mod}\, 4)$ справедливо $\chi(\Delta_i) = 0$ для всех значений i. Заметим, что при $i = 0(\mathrm{mod}\, 2)$ проблема исключительно трудна. К рассмотрению этого случая мы и переходим.

Алгебраический аппарат для решения проблемы 2.1 в самой общей форме представлен в обзорной статье П. Экклза [13]. Мы теперь не предполагаем, что M ориентировано. Наиболее ясная картина имеется для вычисления четности 0-мерного множества точек самопересечения максимальной кратности $m+1$.

В этом случае ответ зависит от значения $m(\mathrm{mod}\, 4)$. Для $m = 0, 2, 3, 6$ и для более общего случая $m = 2^j - 3$, если дополнительно предположить, что в размерности $2^j - 2$ существует многообразие с инвариантом Кервера 1, существует погружение $f : M^m \to R^{m+1}$ с нечетным числом $\Theta(f)$ точек самопересечения максимальной кратности $m+1$ [14]. С другой стороны, при других значениях m $\Theta(f)$ принимает только четные значения.

Случай $m+1 = 2(\mathrm{mod}\, 4)$ наиболее интересен. Элементарное доказательство тривиальности инвариантов Кервера для $m \neq 2^j - 3$ было недавно получено в совместной работе первого автора и П. Экклза [15]. Заметим, что вычисление $\chi(\Delta_i)$ усложняется при возрастании m. Полное решение проблемы 2.1, таким образом, тесно связано с основными открытыми проблемами теории гомотопий.

3. Основные результаты

В этом разделе мы рассмотрим различные примеры погружений $f : M^m \to R^{m+1}$ при $m \leq 5$ и сформулируем основную теорему.

Пример 3.1 [16]. Существует погружение проективной плоскости RP^2 в R^3, для которого $\chi(\Delta_1) = \chi(\Delta_3) = 1$ (см. также [10]).

Пример 3.1 был обобщен в [9] на случай погружений произвольных многообразий четной размерности. Идея доказательства основана на применении теоремы Фубини (общая идея представлена в работе [4]). Само доказательство элементарно и не использует теорию гомотопий.

Теорема 3.2 [9]. *Для произвольного погружения* $f : M^m \to R^{m+1}$, $m =$

$0 (\mathrm{mod}\, 2)$, *справедливо равенство*

$$\sum_i \chi(\Delta_{2i+1}) = 0.$$

Недавно А. Сюч, используя результаты из теории гомотопий, получил полное решение проблемы 2.1 в случае четного m.

Теорема 3.3 [17]. *Если* $f: M^m \to R^{m+1}$, $m \geq 8$ *или* $m = 4$, *— произвольное погружение, то* $\chi(\Delta_{2i+1}) = 0$ *для любого* i. *Если* $m = 6$, *то* $\chi(\Delta_7) = \chi(\Delta_5) = \chi(\Delta_3) = \chi(\Delta_1) = 0$ *или* 1. *Если* $m = 2$, *то* $\chi(\Delta_1) = \chi(\Delta_3) = 0$ *или* 1.

Замечание. В случае $\chi(\Delta_{2i+1}) = 1$ подмногообразие Δ_{2i+1} представлено (с точностью до кобордизма) проективным пространством RP^{m-2i}.

Теперь переходим к рассмотрению случая $m = 1 (\mathrm{mod}\, 2)$.

Пример 3.4. Существует погружение кривой в плоскость с одной точкой самопересечения, т. е. $\chi(\Delta_2) = 1$ и $\dim(\Delta_2) = 0$.

Этот простейший пример показывает, что значение $\chi(\Delta_2)$ не зависит, вообще говоря, от класса кобордизма исходного многообразия M и аналог теоремы 3.3 не справедлив при нечетных m.

Пример 3.5 [14]. Существует погружение $f: M^5 \to R^6$ такое, что $\chi(\Delta_6)$=1.

Конструкция. Выберем погружение $g: S^3 \to R^6$ с единственной точкой трансверсального самопересечения, следуя конструкции Уитни [7]. Погружение g можно оснастить, т. е. существует тривиализация $\nu(g) = 3\varepsilon$ нормального расслоения. Следовательно, существует погружение $f: S^3 \times RP^2 \to R^6$, определенное в локальных координатах оснащения по формуле $f = g \times g'$, где g' — поверхность Боя, описанная в примере 3.1.

Основной результат работы, отвечающий на поставленную в работе [9] проблему, составляет

Теорема 3.6. *Если* $f: M^5 \to R^6$ *— произвольное погружение, то* $\chi(\Delta_2) = \chi(\Delta_6) = 0$ *или* 1, *но* $\chi(\Delta_4) = 0$.

Замечание. (1) В случае $\chi(\Delta_2) = 1$ многообразие Δ_2 кобордантно $RP^2 \times RP^2$.

(2) Если M^5 ориентируемо, то $\chi(\Delta_6) = 0$ (см. [13] или [9, замечание 3]). Следовательно, в этом случае $\chi(\Delta_2) = \chi(\Delta_4) = \chi(\Delta_6) = 0$.

Следствие 3.7. *Для погружения* $RP^2 \times S^3$ *из примера* 3.5 *имеют место равенства* $\chi(\Delta_2) = \chi(\Delta_6) = 1$ *и* $\chi(\Delta_4) = 0$.

При доказательстве теоремы 3.6 мы развиваем новую технику разрешения особенностей многообразий кратных точек самопересечения. Наша техника является прямым обобщением конструкции, использованной М. Фридманом в [11]. П. Экклз сообщил нам, что наш результат можно доказать, используя вычисления в алгебре Дайера — Лашофа, как это было сделано для аналогичных задач в [13]. Наш подход основан на элементарных геометрических рассмотрениях.

Теорема 3.6 обобщает следующую теорему Кошорке [18], которая была переоткрыта и доказана другим способом в [8]. Она обобщает основную теорему из [11] на неориентированный случай.

Теорема 3.8 [18]. *Пусть* $f: M^3 \to R^4$ *— произвольное погружение, причем многообразие* M *не предполагается ориентированным. Тогда* $\chi(\Delta_2) = \chi(\Delta_4) = 0$ *или* 1.

Следующая гипотеза показывает, что проблема 2.1 может оказаться сложной и не сводится к вычислению эйлеровой характеристики нульмерного многообразия точек самопересечения максимальной кратности.

Гипотеза 3.9. *Существует погружение* $M^9 \to R^{10}$ *такое, что* $\chi(\Delta_2) = \chi(\Delta_6) = 1$ *и* $\chi(\Delta_4) = \chi(\Delta_8) = \chi(\Delta_{10}) = 0$.

4. Доказательство основной теоремы

Доказательство теоремы 3.6. Равенство $\chi(\Delta_2) = \chi(\Delta_6)$ легко вытекает из результатов [14], где все утверждения сформулированы в алгебраических терминах (геометрическая формулировка имеется в [15, теорема 1.6]). Подробнее, имеем $\chi(\Delta_6) = \langle e(\nu^2)^2, [\Delta_2]\rangle$, где ν^2 — нормальное расслоение погруженного многообразия $g_2' : \Delta_2 \to R^6$. Пример 3.5 показывает, что существуют погружения с $\chi(\Delta_2) = \chi(\Delta_6) = 1$.

Докажем, что $\chi(\Delta_4(f)) = 0$. Выберем $g_2' : \Delta_2 \to R^6$ и рассмотрим $\Delta_2(g_2')$. Можно естественно определить $\Delta_2(g_2') = M \cup N$, где M определено как 3-листное накрытие над поверхностью $\Delta_4(f)$ и N получено в результате разрешения особенностей погружения g_2 вдоль подмногообразия $\widetilde{\Delta}_3$ посредством деформации $g_2 \to g_2'$, приводящей погружение в общее положение.

Более формально, пусть D_1, D_2 — два листа многообразия Δ_2, которые пересекаются вдоль листа поверхности $l \in g_2'(D_1) \cap g_2'(D_2) \subset \Delta_2(g_2')$. По определению $l \in M$, если $g_2(D_1) \cap g_2(D_2) \subset \Delta_4(f)$. В другом случае лист l лежит на поверхности N. Очевидно, если $l \in N$, то $g_2(D_1) \cap g_2(D_2) \subset \Delta_3(f)$.

Опишем поверхность N следующим образом. Пусть $p : \overline{\Delta}_3 \to \Delta_3(f)$ — каноническое 3-листное накрытие ($I_3 : \overline{\Delta}_3 \subset M$ — каноническое погружение), многообразие $\widetilde{\Delta}_3 \subset \Delta_2$ определено посредством разрешения особенностей тройных точек самопересечения ($\widetilde{\Delta}_3 \subset \Delta_2$). Мы отождествляем $\widetilde{\Delta}_3$ и $\overline{\Delta}_3$ посредством тавтологического диффеоморфизма H. Рассмотрим погружение общего положения $\tilde{g}_3' : \widetilde{\Delta}_3 \to R^6$, которое аппроксимирует $\tilde{g}$.

Каноническое 2-листное накрытие $q : \widehat{\Delta}_3 \to \widetilde{\Delta}_3$ индуцировано из канонического накрытия $\overline{\Delta}_2 \to \Delta_2$. Заметим, что многообразие $\widehat{\Delta}_3$ допускает каноническое погружение $h : \widehat{\Delta}_3 \to \Delta_1$, которое индуцировано каноническим погружением $I_2 : \overline{\Delta}_2 \to \Delta_1$. Более того, погружение h можно определить как композицию $h = I_3 \circ q$. В частности, определен класс когомологий $w_1(\nu') \in H^1(\overline{\Delta}_3)$, где $\nu' \to \overline{\Delta}_3$ — одномерное расслоение, индуцированное из нормального 1-расслоения $\nu \to \Delta_1$ погружением $I_3 : \overline{\Delta}_3 \subset \Delta_1$ (допуская вольность, далее мы обозначим расслоение ν' снова через ν).

Диффеоморфизм $\overline{\Delta}_3 = H(\widetilde{\Delta}_3)$ позволяет рассматривать ν как расслоение над $\widetilde{\Delta}_3$.

Определим $j : N \subset \widetilde{\Delta}_3$ как подмногообразие, представленное гомологическим эйлеровым классом сечения 1-расслоения $\gamma \to \widetilde{\Delta}_3$, где $w_1(\gamma) = w_1(q) + w_1(\nu)$. Дадим эквивалентное описание, используя накрытие q. Рассмотрим $\widehat{\Delta}_3$ как многообразие, погруженное в тотальное пространство расслоения $\nu \to \widetilde{\Delta}_3$, в результате малой деформации общего положения 2-листного накрытия q базы расслоения $\widetilde{\Delta}_3$.

Итак, приведем $q(\widehat{\Delta}_3)$ в общее положение $q \to q'$ и определим $j(N) = \Delta_2(q')$. После проекции на базу расслоения можно рассматривать $j(N) \subset \widetilde{\Delta}_3$. Заметим, что $\dim(N) = 2$, как и требуется в конструкции. Кроме того, определено погружение $j' = g \circ j : N \to \widetilde{\Delta}_3 \to R^6$. Для произвольной малой деформации g'_2 при соответствующем выборе j поверхность N оказывается диффеоморфной поверхности $\Delta_2(g'_2) \setminus M$.

Лемма 4.1. $\chi(N) = 0$.

Доказательство. Вспомним, что поверхность $N \subset \widetilde{\Delta}_3 = H^{-1}(\overline{\Delta}_3)$ определена эйлеровым классом 1-расслоения $\kappa \to \overline{\Delta}_3$, $w_1(\kappa) = w_1(q) + w_1(\nu)$. При этом само многообразие $\overline{\Delta}_3$, рассматриваемое как погруженное подмногообразие в Δ_1, может быть определено как подмногообразие точек самопересечения погруженного подмногообразия $I_2(\overline{\Delta}_2)$ в Δ_1. Из результатов [12] непосредственно вытекает, что погруженное подмногообразие $I_2(\overline{\Delta}_2) \subset \Delta_1$ кобордантно как погруженное подмногообразие вложенному подмногообразию, представленному нулями сечения расслоения $\nu \to \Delta_1$. Следовательно, подмногообразие $N \subset \widetilde{\Delta}_3$ ограничивает, поскольку при регулярном кобордизме многообразия $\overline{\Delta}_2$ оба характеристических класса $w_1(q)$, $w_1(\nu)$ остаются определенными на трехмерном подмногообразии самопересечения. Лемма 4.1 доказана. Теорема 3.6 вытекает из равенства $\chi(\Delta_2(g'_2)) = 0$, это следствие основной теоремы работы [19].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Whitney H.* On regular closed curves in the plane // Comp. Math. 1937. V. 4. P. 276–284.
2. *Arnol'd V. I.* Topological invariants of plane curves and caustics: Dean J. B. Lewis memorial lectures Rutgers univ. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1994. (Univ. Lect. Ser.; 5).
3. *Mikhalkin G., Polyak M.* Whitney formula in higher dimensions // J. Differential Geom. 1996. V. 44. P. 583–594.
4. *Viro O. Y.* Some integral calculus based on Euler characteristic // Topology and Geometry Rohlin Seminar. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer-Verl., 1988. P. 127–138. (Lecture Notes in Math.; V. 1346).
5. *Szücs A.* On the multiple points of immersions in Euclidean spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. P. 1837–1882.
6. *Ekholm T.* Immersions and their selfintersections: Uppsala Dissert. Math. 1998. V. 12.
7. *Whitney H.* The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space // Ann. of Math. (2). 1944. V. 45. P. 220–246.
8. *Akhmet'ev P. M.* An elementary proof of Freedman's theorem on immersions // St. Petersburg Math. J. 1996. V. 7. P. 749–754.
9. *Akhmet'ev P. M., Rimanyi R., Szücs A.* A generalization of Banchoff's triple point theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. P. 913–915.
10. *Banchoff T.* Triple points and singularities of projections of smoothly immersed surfaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. V. 46. P. 402–406.
11. *Freedman M. H.* Quadruple points of 3-manifolds in S^4 // Comment. Math. Helv. 1978. V. 53. P. 385–394.
12. *Herbert R. J.* Multiple point of immersed manifolds // Memoirs Amer. Math. Soc. 1981. V. 34.
13. *Eccles P. J.* Characteristic numbers of immersions and self-intersection manifold: Proc. Conf. Topology with Applications, Szeksard, Hungary // Bolyai Soc. Math. Stud. 1993. V. 4. P. 197–216.
14. *Eccles P. J.* Codimension one immersions and the Kervaire invariant one problem // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1981. V. 90. P. 483–493.
15. *Akhmet'ev P. M., Eccles P. J.* A geometrical proof of Browder's result on the vanishing of the Kervaire invariant: Proc. Conf. Solitons and Geometry (60-th Birthday of S. P. Novikov), Moscow, 1998 // Proc. Steklov Inst. 1999. V. 225. P. 46–51.
16. *Boy W.* Über die Kurvature integral und die Topologie geschlossener Flächen // Math. Ann. 1903. V. 57. P. 151–184.
17. *Szücs A.* On multiple points of codimension one immersions of even dimensional manifolds. Budapest: Lorand Eotvos Univ., 2001. (Preprint).

18. *Koschorke U.* Multiple points of immersions and the Kahn — Priddy theorem // Math. Z. 1979. Bd 169. S. 223–236.
19. *A. Szücs* Double point surfaces of smooth immersions $M^m \to R^{2n-2}$ // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1993. V. 113. P. 601–613.

Статья поступила 20 сентября 2002 г.

Ахметьев Петр Михайлович
ИЗМИРАН, 142190, г. Троицк Московской обл.
pmakhmet@mi.ras.ru

Joze Malešič
University of Ljubljana, Jadranska 19, 1000, Ljubljana, Slovenia
joze.malesic@uni-lj.si

Dušan Repovš (Душан Реповш)
University of Ljubljana, Jadranska 19, 1000, Ljubljana, Slovenia
dusan.repovs@fmf.uni-lj.si