Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 517.9

О ДИССИПАТИВНЫХ ЭФФЕКТАХ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

О. Ю. Динариев

Аннотация: Рассмотрена динамика составной гамильтоновой системы, представляющей собой объединение конечномерной нелинейной системы и бесконечномерной линейной системы с квадратичным гамильтонианом взаимодействия. Показано, что динамика конечномерной подсистемы определяется нелинейным интегродифференциальным уравнением с релаксационным ядром. Доказаны теоремы существования и единственности и найдены априорные оценки для решения. Доказано, что при определенных условиях на вид взаимодействия решение для конечномерной подсистемы сходится к одной из критических точек эффективного гамильтониана.

Ключевые слова: гамильтониан, релаксационное ядро, диссипативные эффекты, интегродифференциальное уравнение

1. Постановка задачи

Рассмотрим гамильтонову систему S, которую можно представить как совокупность двух взаимодействующих подсистем S_1 и S_2. Пусть состояние системы S_1 описывается вектором x, а состояние системы S_2 — вектором ξ. Линейные пространства, которым принадлежат x и ξ, будут описаны позднее. Рассмотрим решение задачи Коши $x = x(t)$, $\xi = \xi(t)$ с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad \xi(0) = \xi_0. \tag{1}$$

Известно, что если сосредоточить внимание на эволюции подсистемы S_1, то при определенных условиях на вид гамильтониана и начальные условия ξ_0 решение $x = x(t)$ при $t \to +\infty$ сходится к одной из критических точек некоторого эффективного потенциала. Этот эффект имеет место только в бесконечномерной гамильтоновой механике, поэтому здесь нет противоречия с известной теоремой о возврате [1], которая доказана при условии конечной размерности фазового пространства. Существование аттракторов для гамильтоновых систем типа упругой струны, взаимодействующей с осцилляторами, подробно исследовалось в ряде работ (см. обзор [2]). В работе [3] доказано существование предельного режима для многомерного нелинейного осциллятора, взаимодействующего с полем. В настоящей работе результаты [3] обобщаются для широкого класса конечномерных гамильтоновых систем, взаимодействующих с полем.

Будем считать, что вектор x принимает значения в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2N}$ ($N \geq 1$). Удобно рассматривать $\mathbb{R}^{2N}$ как действительное подпространство конечномерного гильбертова пространства $G_1 = C^{2N}$ с обычным скалярным произведением:

$$(z, z')_1 = \sum_{i=1}^{2N} z_i^* z_i',$$

где $z = (z_i)$, $z' = (z_i')$, $i = 1, \ldots, 2N$. Здесь и ниже звездочка означает комплексное сопряжение применительно к числам, векторам и линейным операторам. Скалярное произведение позволяет определить обычным образом норму $|\cdot|$ для векторов и линейных операторов в G_1. Для эрмитовых матриц A, B соотношение $A \geq B$ означает неотрицательность оператора $A - B$.

Предположим, что задано еще одно сепарабельное гильбертово пространство G_2 со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_2$ и антилинейной операцией комплексного сопряжения $*$. Пусть вектор ξ принимает значения в подпространстве действительных векторов пространства G_2.

Таким образом, фазовое пространство гамильтоновой системы S задано, как действительное подпространство прямой суммы $G_1 \oplus G_2$. Для полного описания гамильтоновой системы необходимо дополнительно задать симплектическую структуру и гамильтониан.

В отличие от операции комплексного сопряжения будем обозначать символом «$^+$» обычную операцию сопряжения линейных операторов.

Пусть в пространствах G_i $(i = 1, 2)$ заданы линейные непрерывные операторы J_i (называемые симплектическими операторами), которые удовлетворяют следующим условиям: $J_i^+ = -J_i$, $J_i^2 = -Id_{G_i}$, $J_i^* = J_i$.

Пространство G_2 может быть представлено в виде тензорного произведения гильбертовых пространств

$$G_2 = W_1 \otimes W_2, \tag{2}$$

причем пространство W_1 двумерно, и для некоторого ортонормированного базиса e_i $(i = 1, 2)$ в W_1 справедливы соотношения

$$J_2(e_1 \otimes w_2) = -e_2 \otimes w_2, \quad J_2(e_2 \otimes w_2) = e_1 \otimes w_2 \quad (w_2 \in W_2).$$

Удобно определить вспомогательные операторы вложения $j_i : W_2 \hookrightarrow G_2$ $(i = 1, 2)$ и проекции $\pi_i : G_2 \to W_2$ посредством соотношений

$$j_i(w_2) = e_i \otimes w_2, \quad \pi_i(e_i \otimes w_2) = w_2, \quad \pi_i(e_{(3-i)} \otimes w_2) = 0 \quad (i = 1, 2;\ w_2 \in W_2).$$

Будем считать, что гамильтониан системы S представляется в виде

$$H = H_1 + H_2 + H_{\text{int}} + H_{\text{ext}}, \tag{3}$$

где $H_1 = H_1(x)$ — гамильтониан подсистемы S_1, $H_2 = H_2(\xi)$ — гамильтониан подсистемы S_2, $H_{\text{int}} = H_{\text{int}}(x, \xi)$ — гамильтониан взаимодействия подсистем S_1 и S_2, $H_{\text{ext}} = H_{\text{ext}}(t, x)$ — гамильтониан, описывающий воздействие переменных внешних сил на подсистему S_1.

Относительно функции $H_1 = H_1(x)$ будем всегда предполагать, что она принадлежит классу $C^2(\mathbb{R}^{2N})$.

Допустим, что гамильтониан подсистемы S_2 имеет квадратичное выражение $H_2 = 2^{-1}(\xi, E\xi)_2$, где E — линейный самосопряженный действительный положительно определенный оператор в G_2. Кроме того, предположим, что в представлении (2) этот оператор действует следующим образом: $E(w_1 \otimes w_2) = w_1 \otimes h w_2$, $w_i \in W_i$, где h — самосопряженный действительный положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве W_2.

Согласно спектральной теореме фон Неймана существует унитарное отображение пространства W_2 на прямой интеграл гильбертовых пространств [4, 5]

$$\int\limits_{\sigma} L_\lambda \, d\mu(\lambda), \tag{4}$$

где L_λ — семейство гильбертовых пространств, $d\mu(\lambda)$ — мера на спектре σ оператора h. Поэтому достаточно ограничиться случаем, когда W_2 совпадает с интегралом (4). Тогда на каждом пространстве L_λ отображение h действует как оператор умножения на λ. Кроме того, будем предполагать, что мера $d\mu(\lambda)$ непрерывна относительно меры Лебега, и потому существует производная Радона — Никодима $\frac{d\mu(\lambda)}{d\lambda}$. Таким образом, пространство W_2 представляется в виде

$$W_2 = \int\limits_{\sigma} L_\lambda \frac{d\mu(\lambda)}{d\lambda} \, d\lambda. \tag{5}$$

Далее, положим, что гамильтониан взаимодействия задается выражением $H_{\mathrm{int}} = (x, V\xi)_2$, где V — линейное непрерывное действительное отображение из пространства G_2 в пространство G_1. По отображению V можно построить вспомогательные отображения $Vj_i : W_2 \to G_1$, которые в силу (5) представляют собой семейство отображений $V_{i\lambda} : L_\lambda \to G_1$, $\lambda \in \sigma$, $i = 1, 2$.

Гамильтониан внешних сил выберем в виде $H_{\mathrm{ext}} = -(f, x)_1$, где $f = f(t) \in G_1$ — $2n$-мерный действительный вектор, зависящий от времени.

В настоящей работе исследуются только те случаи, когда система S является энергетически устойчивой, т. е. когда в отсутствие внешних сил гамильтониан этой системы ограничен снизу. Рассмотрим гамильтониан (3) при $f = 0$. Он формально преобразуется к выражению

$$H_{\mathrm{tot}} = H_*(x) + 2^{-1}((\xi + E^{-1}V^+x), E(\xi + E^{-1}V^+x))_2,$$
$$H_* = H_1(x) - 2^{-1}(x, \gamma x)_1, \quad \gamma = VEV^+.$$

Пусть выполнены следующие условия, обеспечивающие энергетическую устойчивость системы S: 1) оператор γ определен, 2) функция H_* ограничена снизу. Очевидно, что первое условие означает сходимость интеграла

$$\int\limits_{\sigma} \lambda^{-1} \big(V_{1\lambda}V_{1\lambda}^+ + V_{2\lambda}V_{2\lambda}^+\big) \frac{d\mu(\lambda)}{d\lambda} \, d\lambda < +\infty. \tag{6}$$

Будем использовать обозначения: ∂_t — операция дифференцирования по времени, ∂ — операция дифференцирования по вектору x, D — операция дифференцирования (по Фреше) по вектору ξ. Результат дифференцирования функции, определенной на гильбертовом пространстве, обычным образом отождествляется с элементом этого гильбертова пространства.

Выпишем уравнения Гамильтона для системы S:

$$\partial_t x = J_1 \partial H_{\mathrm{tot}} = J_1(\partial H_1 + V\xi - f), \tag{7}$$

$$\partial_t \xi = J_2 D H_{\mathrm{tot}} = J_2(V^+x + E\xi). \tag{8}$$

Систему (7), (8) нужно решать при начальных условиях (1).

Отметим, что в силу (5) векторы $\alpha_i = \pi_i \xi_0 \in W_2$ могут быть представлены в виде интегралов

$$\int\limits_{\sigma} \alpha_{i\lambda} \frac{d\mu(\lambda)}{d\lambda} d\lambda, \quad \alpha_{i\lambda} \in L_\lambda.$$

Далее, линейное уравнение (8) допускает явное решение относительно $\xi = \xi(t)$ при заданном $x = x(t)$:

$$\xi(t) = \int\limits_{\sigma} \left\{ \int\limits_0^t \exp((t-t_0)\lambda J_2)\big(j_1 V_{1\lambda}^+ + j_2 V_{2\lambda}^+\big)x(t_0)\, dt_0 \right.$$
$$\left. + \exp(t\lambda J_2)(j_1\alpha_{1\lambda} + j_2\alpha_{2\lambda}) \right\} \frac{d\mu(\lambda)}{d\lambda}\, d\lambda. \quad (9)$$

После подстановки выражения (9) в (7) получается интегродифференциальное уравнение относительно функции $x = x(t)$:

$$\partial_t x(t) = J_1(\partial H_1(x(t)) - \int\limits_0^t K(t-t_0)x(t_0)\, dt_0 - f(t) + f_1(t)), \quad (10)$$

где использованы обозначения

$$K(t) = (2i)^{-1} \int\limits_{\sigma} (\rho_\lambda e^{i\lambda t} - (\rho_\lambda e^{i\lambda t})^*) d\lambda, \quad f_1(t) = 2^{-1} \int\limits_{\sigma} (\zeta_\lambda e^{i\lambda t} - (\zeta_\lambda e^{i\lambda t})^*) d\lambda, \quad (11)$$

$$\rho_\lambda = (V_{1\lambda} + iV_{2\lambda})(V_{1\lambda} + iV_{2\lambda})^+ \frac{d\mu(\lambda)}{d\lambda}, \quad \zeta_\lambda = (V_{1\lambda} + iV_{2\lambda})(\alpha_{1\lambda} - i\alpha_{2\lambda}) \frac{d\mu(\lambda)}{d\lambda}.$$

Основная задача настоящей работы — исследование уравнения (10) и в первую очередь определение условий, при которых решения этого уравнения сходятся к критическим точкам функции $H_*(x)$. При известном решении уравнения (10) решение полной задачи достраивается по формуле (9). Таким образом, уравнение (10), полученное в результате редукции полной системы уравнений Гамильтона (7), (8), может рассматриваться независимо как уравнение динамики конечномерной системы с памятью. Отметим, что ранее изучался частный случай эволюции нелинейного осциллятора с релаксацией [3, 6].

Уравнение (10) может быть преобразовано к эквивалентному интегродифференциальному уравнению с другим релаксационным ядром. Для этого доопределим величины ρ_λ, ζ_λ для отрицательных значений $\lambda:\ \rho_{-\lambda} = -\rho_\lambda^*$, $\zeta_{-\lambda} = \zeta_\lambda^*$. Тогда можно переписать выражения (11):

$$K(t) = (2i)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\lambda e^{i\lambda t} d\lambda, \quad f_1(t) = 2^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \zeta_\lambda e^{i\lambda t} d\lambda. \quad (12)$$

Поскольку задача (1), (10) решается при $t \geq 0$, удобно доопределить матричное ядро $K(t)$ нулем при отрицательных временах: $K(t) = 0$, $t < 0$. Легко видеть, что для всех моментов времени оператор $K(t)$ в G_1 является симметричным и действительным.

Сходимость по Лебегу для интегралов (12) следует из непрерывности отображения V. Несложно проверить равенство

$$\gamma = 2^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-1} \rho_\lambda d\lambda. \quad (13)$$

Сходимость по Лебегу интеграла (13) следует из условия (6) и очевидных матричных неравенств

$$0 \le \rho_\lambda \le 2\big(V_{1\lambda}V_{1\lambda}^{+} + V_{2\lambda}V_{2\lambda}^{+}\big)\frac{d\mu(\lambda)}{d\lambda} \quad \text{при } \lambda > 0.$$

В частности, можно определить вспомогательное ядро

$$K_1(t) = 2^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-1}\rho_\lambda e^{i\lambda t} d\lambda, \quad t \ge 0; \quad K_1(t) = 0, \quad t < 0. \tag{14}$$

Интегрирование по частям с учетом равенства $\partial_t K_1(t) = -K(t)$ при $t > 0$ преобразует уравнение (10) к эквивалентной форме

$$\partial_t x(t) = J_1(\partial H_*(x(t)) + \int\limits_0^t K_1(t-t_0)\partial_t x(t_0)\, dt_0 + K_1(t)x_0 - f(t) + f_1(t)). \tag{15}$$

Если функция $g(t)$ является обобщенной функцией (или распределением) умеренного роста, то определено преобразование Фурье этой функции [7], которое будет обозначаться так:

$$g_F(\omega) = \int e^{-i\omega t} g(t)\, dt.$$

Как видно из интегральных выражений (12), (14), ядра $K(t)$, $K_1(t)$ являются непрерывными и ограниченными функциями при $t \ge 0$, поэтому определены их Фурье-образы $K_F(\omega)$, $K_{1F}(\omega)$. Кроме того, непосредственно из (12), (14) следуют соотношения

$$K_F(\lambda)^{+} - K_F(\lambda) = \pi i \rho_\lambda, \quad K_{1F}(\lambda)^{+} + K_{1F}(\lambda) = \pi\lambda^{-1}\rho_\lambda. \tag{16}$$

В уравнениях (10), (15) удобно переобозначить $F(t) = (f(t) - f_1(t))$ и в дальнейшем формулировать те или иные утверждения для функции $F(t)$, а не для функций $f(t)$, $f_1(t)$ по отдельности.

Замечание 1. Для действительной векторной функции $v = v(t)$, принадлежащей пространству $L^2_{G_1}(\mathbb{R})$, справедливы соотношения

$$\iint (v(t_1), K_1(t_1 - t_2)v(t_2))_1\, dt_1 dt_2 = 4^{-1}\int \lambda^{-1}(v_F(\lambda), \rho_\lambda v_F(\lambda))_1 d\lambda \ge 0.$$

2. Теоремы существования и единственности, априорные оценки решений

Хотя уравнение (10) получено в результате редукции полной системы уравнений Гамильтона (7), (8), тем не менее оно несет информацию, позволяющую до некоторой степени восстановить описание полной системы S.

Лемма 1. *Пусть $K = K(t)$ — семейство симметричных действительных операторов в конечномерном гильбертовом пространстве G_1, непрерывно зависящих от параметра t при $t \ge 0$ и обращающихся в нуль при $t < 0$. Пусть сходятся следующие интегралы:*

$$\int\limits_0^{+\infty} t|K(t)|\, dt < +\infty, \tag{17}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K_F(\omega)| d\omega < +\infty, \tag{18}$$

и пусть для действительных значений ω справедливо неравенство

$$i\omega(K_F(\omega) - K_F(\omega)^+) \geq 0. \tag{19}$$

Тогда существуют гильбертово пространство G_2 и непрерывное линейное отображение $V : G_2 \to G_1$, которые связаны с $K = K(t)$ посредством соотношений, описанных в разд. 1 *(см.* (2), (5), (11)). *Кроме того, при этом выполняется условие* (6).

Доказательство. В соответствии с (16) определим матричную функцию ρ_λ по формуле

$$\rho_\lambda = (\pi i)^{-1}(K_F(\lambda)^+ - K_F(\lambda)).$$

При выполнении условий леммы для неотрицательных значений λ матрица ρ_λ является эрмитовой, неотрицательной и непрерывно зависящей от λ. Положим по определению $L_\lambda = G_1$, $\quad W_2 = \int\limits_0^{+\infty} L_\lambda \, d\lambda$. Можно найти (неоднозначно) непрерывную матричную функцию U_λ из уравнения $\rho_\lambda = U_\lambda U_\lambda^+$. После этого операторы $V_{i\lambda}$ вычисляются по формулам

$$V_{1\lambda} = 2^{-1}(U_\lambda + U_\lambda^*), \quad V_{2\lambda} = (2i)^{-1}(U_\lambda - U_\lambda^*).$$

Вследствие условия (17) функция $K_F(\omega)$ является дифференцируемой. Тогда при $\lambda \to 0$ справедлива асимптотика

$$\rho_\lambda = \lambda m_0 + o(\lambda), \tag{20}$$

где m_0 — некоторая симметричная неотрицательная матрица.

Выполнение условия (6) проверяется непосредственно: сходимость интеграла от $\lambda^{-1}\rho_\lambda$ при малых λ следует из асимптотики (20), сходимость при больших λ — из условия (18). Доказательство закончено.

Отметим, что недостаток описанной процедуры восстановления полной гамильтоновой системы состоит в ее неоднозначности.

Замечание 2. При условиях леммы 1 ядро $K_1(t)$ интегрируемо по Лебегу. Это вытекает из соотношений

$$\mathrm{K}_1(t) = \int_0^t K(t_1)\, dt_1, \quad \int_0^{+\infty} |K_1(t)|\, dt \leq \int_0^{+\infty} t|K(t)|\, dt.$$

Рассмотрим проблему существования и единственности локального решения задачи (1), (10). При этом не будут использоваться свойства ядра $K(t)$, связанные с редукцией гамильтоновой системы. В принципе эта проблема решена для уравнений более общего вида с помощью теории Шаудера [8]. Тем не менее ниже приводится независимое доказательство, являющееся простым обобщением метода Пикара — Линделефа [9]. Преимущество этого метода состоит в явном построении временного интервала, на котором существует решение.

Перепишем задачу (1), (10) в виде одного интегрального уравнения

$$x(t) = x_0 + \int_0^t w(t_1)dt_1, \quad w(t) = J_1(\partial H_1(x(t)) - \int_0^t K(t-t_0)x(t_0)dt_0 - F(t)). \tag{21}$$

Теорема 1. *Пусть $K = K(t)$ — интегрируемая по Лебегу действительная матричная функция, $k_0 = \int\limits_0^{+\infty} |K(t)|\,dt < +\infty$. Пусть $F = F(t)$ — интегрируемая по Лебегу ограниченная на интервале $[0, T_0]$ действительная векторная функция, $b_0 = \sup\limits_{0<t<T_0} |F(t)|$. Для произвольного положительного числа a положим $b_1 = \max\limits_{|x-x_0|\le a} |\partial H_1(x)|$, $b = (b_0 + b_1 + (|x_0| + a)k_0)$. Тогда на интервале $[0, T_1]$, где $T_1 = \min(T_0, ab^{-1})$, в классе непрерывных действительных функций существует единственное решение задачи (21).*

Доказательство. Будем строить решение при $0 \le t \le T_1$ методом последовательных приближений:

$$x_0(t) = x_0; \quad x_k(t) = x_0 + \int\limits_0^t w_k(t_1)\,dt_1, w_k(t)$$

$$= J_1(\partial H_1(x_{k-1}(t)) - \int\limits_0^t K(t-t_0)x_{k-1}(t_0)\,dt_0 - F(t)), \quad k > 0.$$

Несложно доказать по индукции, что $|x_k(t) - x_0| \le a$. Далее, обозначим $\partial^2 H_1(x)$ отображение, производное от отображения $\partial H_1(x)$ (т. е. матрицу вторых производных функции $H_1(x)$. Пусть $c_0 = \max\limits_{|x-x_0|\le a} |\partial^2 H_1(x)|$. По индукции доказывается следующее неравенство:

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \le b(c_0 + k_0)^{k-1} t^k (k!)^{-1}.$$

Поэтому последовательность

$$x_k(t) = x_0 + \sum_{m=1}^{k} (x_m - x_{m-1})$$

равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $x = x(t)$. В силу этого и принятых предположений последовательность функций $w_k = w_k(t)$ равномерно сходится к функции

$$J_1\left(\partial H_1(x(t)) - \int\limits_0^t K(t-t_0)x(t_0)\,dt_0 - F(t)\right).$$

Отсюда и из определения последовательности $x_k(t)$ следует, что функция $x = x(t)$ является решением задачи (21).

Для доказательства единственности предположим, что $x_* = x_*(t)$ — некоторое решение задачи (21) на интервале $[0, T_2]$, $0 < T_2 \le T_1$. По индукции доказывается неравенство

$$|x_k(t) - x_*(t)| \le b(c_0 + k_0)^{k-1} t^k (k!)^{-1}.$$

Отсюда вытекает, что $x(t) = x_*(t)$. Доказательство закончено.

Теорема 1 обеспечивает локальное существование и единственность решения задачи (21) в классе непрерывных функций, что означает локальное существование и единственность обобщенного решения задачи (1), (10). Однако если функция $F(t)$ непрерывная, то функция $x(t)$ является непрерывно дифференцируемой. В этом случае $x(t)$ представляет собой классическое решение задачи (1), (10). Если же функция $F(t)$ является непрерывно дифференцируемой, то функция $x(t)$ является дважды непрерывно дифференцируемой.

Лемма 2. *Предположим, что выполнены условия леммы 1 и гамильтониан системы S_1 удовлетворяет оценкам*

$$H_*(x) \geq s_1|x|^\nu + s_0, \tag{22}$$

$$|\partial H_1(x)| \leq p_1|x|^\nu + p_0 \tag{23}$$

для некоторых констант s_i, p_i, ν, причем $s_1 > 0$, $p_i > 0$, $\nu \geq 1$. Пусть, кроме того, $F(t)$ — непрерывная действительная векторная функция на интервале $[0, T]$, $x(t)$ — решение задачи (1), (10) на том же интервале.

Определим функционал

$$\Phi(t) = H_*(x(t)) + \int\limits_0^t dt_1 \int\limits_0^t (\partial_t x(t_1), K_1(t_1 - t_2)\partial x(t_2))_1 \, dt_2.$$

Для этого функционала имеет место оценка сверху

$$\Phi(T) \leq ((p_0 + b_0 + k_0)B + H_*(x_0) - s_0)\exp(s_1^{-1}(p_1 + k_0)B) + s_0, \tag{24}$$

$$k_0 = \int\limits_0^{+\infty} |K(t)| \, dt, \quad b_0 = \max_{0 \leq t \leq T_0} |F(t)|, \quad B = \int\limits_0^T (|F(t)| + |K_1(t)| \, |x_0|) \, dt.$$

Доказательство. Вычисляя скалярное произведение обеих частей уравнения (15) с вектором $J_1\partial_t x(t)$ и интегрируя, получаем соотношение

$$\Phi(t) = H_*(x_0) + \int\limits_0^t ((F(t_0) - K_1(t_0)x_0), \partial_t x(t_0))_1 \, dt_0.$$

Обозначая $\phi_0(t) = |F(t)| + |K_1(t)| \, |x_0|$, приходим к оценке

$$\Phi(t) \leq H_*(x_0) + \int\limits_0^t \phi_0(t_0)|\partial_t x(t_0)| \, dt_0. \tag{25}$$

Величину $|\partial_t x(t)|$ можно оценить с помощью уравнения (10) и неравенства (23):

$$|\partial_t x(t)| \leq p_1|x(t)|^\nu + \int\limits_0^t |K(t - t_0)| \, |x(t_0)| \, dt_0 + p_0 + b_0. \tag{26}$$

Воспользуемся неравенством $|x| \leq |x|^\nu + 1$ и подставим оценку (26) в правую часть неравенства (25). Получаем новую оценку для функционала $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) \leq C_0 + s_0 + s_1 Z(t), \tag{27}$$

где использованы обозначения $C_0 = (p_0 + b_0 + k_0)B + H_*(x_0) - s_0$,

$$Z(t) = s_1^{-1} \int\limits_0^t (p_1\phi_0(t_0) + \phi_1(t_0))|x(t_0)|^\nu \, dt_0, \quad \phi_1(t) = \int\limits_t^T \phi_0(t_0)|K(t_0 - t)| \, dt_0.$$

Отметим неравенство, которое будет полезно в дальнейшем:

$$\int\limits_0^T \phi_1(t) \, dt = \int\limits_0^T \phi_0(t_0)dt_0 \int\limits_0^{t_0} |K(t_0 - t_1)|dt_1 \leq k_0 B. \tag{28}$$

Вводя вспомогательную функцию времени

$$\tau = s_1^{-1} \int\limits_0^t (p_1\phi_0(t_0) + \phi_1(t_0))\, dt_0,$$

используя замечание 1 и оценку (22), получаем из (27) дифференциальное неравенство

$$\frac{dZ}{d\tau} \leq s_1^{-1} C_0 + Z.$$

Отсюда и из известного неравенства Гроноулла [9] выводим оценку

$$Z \leq s_1^{-1} C_0(\exp(\tau) - 1).$$

Подставляя этот результат в (27), полагая $t = T$ и используя (28), приходим к неравенству (24). Доказательство закончено.

Априорная оценка решения, полученная в лемме 2, позволяет доказать глобальную теорему существования и единственности решения.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия леммы* 1, *а также условия* (22), (23). *Пусть* $F = F(t)$ — *непрерывная действительная векторная функция на интервале на полуоси* $t \geq 0$. *Тогда задача* (1), (10) *имеет единственное решение на полуоси* $t \geq 0$.

Доказательство. Применяя теорему 1 к последовательности задач

$$\partial_t x(t) = J_1 \left(\partial H_1(x(t)) - \int\limits_{t_k}^{t} K(t - t_0) x(t_0)\, dt_0 - F_k(t) \right),$$

$$F_k(t) = F_{k-1}(t) + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} K(t - t_0) x(t_0)\, dt_0,$$

можно осуществлять локальное продолжение решения.

Пусть решение построено для интервала $0 \leq t < T$. Из леммы 2 следует, что для некоторой положительной величины A на всем этом интервале справедливо неравенство $|x(t)| \leq A$.

Введем обозначения

$$k_0 = \int\limits_0^{+\infty} |K(t)|\, dt < +\infty, \quad b_0 = A k_0 + \max_{0 \leq t \leq T} |F(t)|,$$

$$b_1 = \max_{|x| \leq A+1} |\partial H_1(x)|, \quad b = b_0 + b_1 + (|x_0| + A + 1) k_0.$$

Из теоремы 1 вытекает, что для всех точек интервала $0 \leq t < T$ можно единственным образом продолжить решение вперед на интервал с длиной $\Delta t = \min(T, b^{-1})$. Отсюда получаем, что решение продолжается на всю полуось $t \geq 0$. Доказательство закончено.

3. Поведение решения при больших временах

Конечной целью настоящего раздела является получение информации о пределе $x(t)$ при $t \to +\infty$. Однако такую информацию можно получить только после оценки интегрального поведения производной $\partial_t x(t)$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и условия* (22), (23). *Допустим, что помимо условия* (19) *выполняется более сильное неравенство*

$$K_{1F}(\omega) + K_{1F}(\omega)^{+} > 0. \tag{29}$$

Пусть также

а) $F = F(t)$ — *непрерывно дифференцируемая функция на полуоси* $t \geq 0$,

б) *сходятся интегралы*

$$\int\limits_{0}^{+\infty} |F(t)|\, dt < +\infty, \tag{30}$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} (\partial_t F(t), \partial_t F(t))_1\, dt < +\infty. \tag{31}$$

Тогда для решения задачи (1), (10) $x = x(t)$ *сходится следующий интеграл:*

$$\int\limits_{0}^{+\infty} (\partial_t x(t), \partial_t x(t))_1\, dt < +\infty. \tag{32}$$

Доказательство. Из леммы 2 и (30) следует ограниченность решения задачи (1), (10) для всех моментов времени:

$$|x(t)| \leq C_1. \tag{33}$$

Используя неравенство (33), непосредственно из уравнения (10) выводим ограниченность производной от решения:

$$|\partial_t x(t)| \leq C_2. \tag{34}$$

Выберем некоторую действительную скалярную функцию $\mu \in C^{+\infty}(\mathbb{R})$, определенную на действительной прямой и удовлетворяющую дополнительным условиям: $\mu(t) = 0$ при $t \leq 0$; $\mu(t) = 1$ при $t \geq 1$.

Для произвольного положительного момента времени T определим действительную векторную функцию $u_T = u_T(t)$ в соответствии со следующими формулами:

$$u_T(t) = \mu(t+1)(x(0) + t\partial_t x(0)),\ t < 0; \quad u_T(t) = x(t),\ 0 \leq t \leq T;$$

$$u_T(t) = \mu(T - t + 1)(x(T) + (t - T)\partial_t x(T)), \quad T < t.$$

Будем обозначать через C_i положительные константы, не зависящие от выбора параметра T.

В соответствии с определениями $u_T = u_T(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, совпадающая с решением задачи (1), (10) $x(t)$ на отрезке $0 \leq t \leq T$. Соответственно производная по времени $v_T(t) = \partial_t u_T(t)$ является непрерывной функцией, совпадающей с $\partial_t x(t)$ на отрезке $0 \leq t \leq T$.

Как следствие принятых определений и соотношений (33), (34) имеем оценки

$$|u_T(t)| \leq C_3, \quad |v_T(t)| \leq C_4. \tag{35}$$

Функция $u_T = u_T(t)$ удовлетворяет уравнению, аналогичному уравнению (10):

$$\partial_t u_T(t) = J_1 \left(\partial H_1(u_T(t)) - \int\limits_{-1}^{t} K(t-t_0) u_T(t_0)\, dt_0 - F_T(t) \right). \tag{36}$$

Уравнение (36) можно интерпретировать как соотношение, определяющее функцию $F_T = F_T(t)$. В силу принятых предположений функция $F_T = F_T(t)$ непрерывна на действительной прямой и непрерывно дифференцируема на интервалах $t < 0$, $0 < t < T$, $T < t$. Значения нормы функции $F_T = F_T(t)$ и нормы ее производной на интервалах $T < t < T+1$ ограничены некоторыми константами, не зависящими от T, вследствие соотношений (35).

В соответствии с (36) на интервале $0 < t < T$ имеем

$$F_T(t) = F(t) - \int\limits_{-1}^{0} K(t-t_0) u_T(t_0)\, dt_0,$$

$$\partial_t F_T(t) = \partial_t F(t) - \int\limits_{-1}^{0} K(t-t_0) v_T(t_0)\, dt_0 + K(t) x_0.$$

Отсюда, а также из условий (17), (35) следуют интегральные ограничения на функцию $F_T = F_T(t)$ и ее производную:

$$\int\limits_{-1}^{T+1} |F_T(t)|\, dt < C_5, \tag{37}$$

$$\int\limits_{-1}^{T+1} (\partial_t F_T(t), \partial_t F_T(t))_1\, dt < C_6. \tag{38}$$

Дифференцирование по времени уравнения (36) дает уравнение для функции $v_T = v_T(t)$:

$$\partial_t v_T(t) - J_1 \partial^2 H_1(u_T(t)) v_T(t) + J_1 \int\limits_{-1}^{t} K(t-t_0) v_T(t_0)\, dt_0 = -J_1 \partial_t F_T(t). \tag{39}$$

Определим векторную функцию $v_* = v_*(t)$ через ее Фурье-образ: $v_{*F}(\omega) = i\,\mathrm{sign}(\omega) v_{TF}(\omega)$. Обозначим

$$P = \int\limits_{-1}^{+\infty} (v_T(t), v_T(t))_1\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (v_*(t), v_*(t))_1\, dt.$$

Умножая скалярно обе части уравнения (39) на векторную функцию $v_* = v_*(t)$ и интегрируя по времени, можно получить неравенство

$$P_1 - P_2 - P_3 \le P_0, \tag{40}$$

где использованы обозначения

$$P_0 = \left| \int\limits_{-1}^{+\infty} (v_*(t), J_1 \partial_t F_T(t))_1\, dt \right|, \quad P_1 = \left| \int\limits_{-1}^{+\infty} (v_*(t), \partial_t v_T(t))_1\, dt \right|,$$

$$P_2 = \left| \int\limits_{-1}^{+\infty} (v_*(t), J_1 \partial^2 H_1(u_T(t)) v_T(t))_1 \, dt \right|,$$

$$P_3 = \left| \int\limits_{-1}^{+\infty} (v_*(t), J_1 \int\limits_{-1}^{t} K(t-t_0) v_T(t_0))_1 \, dt dt_0 \right|.$$

Оценим величины P_0, P_2, P_3. Отметим, что из принятых предположений и соотношений (35) следуют оценки $|\partial^2 H_1(u_T(t))| \leq C_7$, $|K_F(\omega)| \leq C_8$. Используя неравенство Коши — Шварца и неравенство (38), получаем оценки

$$P_0 \leq P^{1/2} C_6^{1/2} \leq \frac{1}{4} P + C_6, \quad P_2 \leq C_7 P, \quad P_3 \leq C_8 P. \tag{41}$$

При переходе к Фурье-образам имеем

$$P_1 = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\omega| (v_{TF}(\omega), v_{TF}(\omega))_1 \, d\omega.$$

Комбинируя этот результат с оценками (40), (41), выводим неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(|\omega| - C_7 - C_8 - \frac{1}{4} \right) (v_{TF}(\omega), v_{TF}(\omega))_1 d\omega \leq 2\pi C_6. \tag{42}$$

Положим $\omega_0 = C_7 + C_8 + \frac{4}{3}$. Тогда из неравенства (42) вытекает оценка

$$\int\limits_{|\omega| \geq \omega_0} (v_{TF}(\omega), v_{TF}(\omega))_1 d\omega - \left(C_7 + C_8 + \frac{1}{4} \right) \int\limits_{|\omega| < \omega_0} (v_{TF}(\omega), v_{TF}(\omega))_1 d\omega \leq 2\pi C_6. \tag{43}$$

Применим лемму 2 к уравнению (36) и учтем выполнение неравенства (37). В качестве следствия получаем неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (v_{TF}(\omega), (K_{1F}(\omega) + K_{1F}(\omega)^+) v_{TF}(\omega))_1 d\omega \leq 4\pi C_9. \tag{44}$$

В соответствии с условием (29) имеет место неравенство

$$(K_{1F}(\omega) + K_{1F}(\omega)^+) \geq 2g(\omega) Id_{G_1},$$

где $g(\omega)$ — некоторая скалярная положительная непрерывная функция. Положим $\delta = \min\limits_{|\omega| \leq \omega_0} g(\omega) > 0$. Тогда из неравенства (44) следует оценка

$$\int\limits_{|\omega| < \omega_0} (v_{TF}(\omega), v_{TF}(\omega))_1 d\omega \leq 2\pi \delta^{-1} C_9. \tag{45}$$

Объединяя неравенства (43), (45), получаем оценку

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (v_{TF}(\omega), v_{TF}(\omega))_1 d\omega \leq 2\pi C_{10}.$$

Отсюда, в частности, приходим к неравенству

$$\int\limits_0^T (\partial_t x(t), \partial_t x(t))_1 \, dt \leq C_{10}.$$

В силу того, что правая часть этого неравенства не зависит от параметра T, интеграл (32) сходится. Доказательство закончено.

Теперь получены все предварительные результаты для описания поведения решения задачи (1), (10) при больших временах. Как будет показано, квадратичная интегрируемость производной от решения (32) является основным условием, обеспечивающим диссипативное поведение гамильтоновой системы S_1.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы* 3. *Предположим, что эффективный гамильтониан $H_* = H_*(x)$ имеет конечное число критических точек. Тогда решение задачи* (1), (10) *сходится к одной из этих критических точек.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют некоторая постоянная $C_0 > 0$ и некоторая бесконечная последовательность моментов времени t_k $(k = 1, 2, \dots)$, для которых выполнены неравенства $t_{k+1} > t_k + 1$, $|\partial H_*(x(t_k))| \geq C_0$.

По лемме 2 решение ограничено при всех временах: $|x(t)| \leq A_0$. Производная от решения также ограничена (см. (34)): $|\partial_t x(t)| \leq A_1$. Положим $\mathrm{C}_1 = \max\limits_{|x| \leq A_0} |\partial^2 H_*(x)|$. Выберем положительную величину $\varepsilon < 1$ достаточно малой, чтобы выполнялось неравенство $C_0 - \varepsilon C_1 A_1 > 2^{-1} C_0$. Тогда на временном интервале $t_k \leq t \leq t_k + \varepsilon$ выполняется неравенство

$$|\partial H_*(x(t))| \geq 2^{-1} C_0 > 0. \tag{46}$$

Приведем уравнение (15) к эквивалентному виду

$$\partial H_*(x(t)) = \kappa_1(t) + \kappa_2(t) + \kappa_3(t) + \kappa_4(t), \tag{47}$$

$$\kappa_1(t) = -J_1 \partial_t x(t), \quad \kappa_2(t) = -\int\limits_0^t K_1(t - t_0) \partial_t x(t_0) \, dt_0,$$

$$\kappa_3(t) = -K_1(t) x_0, \quad \kappa_4(t) = F(t).$$

В правой части уравнения (47) стоит сумма векторных функций, интегрируемых в квадрате.

Действительно, функция $\kappa_1(t)$ интегрируема в квадрате в силу леммы 3. Функция $\kappa_2(t)$ интегрируема в квадрате как свертка векторной функции $\partial_t x(t)$, которая интегрируема в квадрате, и матричной функции $K_1(t)$, которая ограничена и интегрируема (см. замечание 2). Функции $\kappa_3(t)$ и $\kappa_4(t)$ интегрируемы в квадрате, поскольку они интегрируемы и ограничены.

С другой стороны, в левой части уравнения (47) стоит функция, которая заведомо не является интегрируемой в квадрате, так как для нее выполняется неравенство (46) на бесконечной последовательности интервалов длины ε.

Полученное противоречие доказывает, что исходное предположение неверно. Доказательство закончено.

Теорема 3 составляет основной результат настоящей работы.

4. Заключение

Итак, доказано, что при редукции бесконечномерной гамильтоновой системы получается система с памятью, которая в широком классе случаев может быть диссипативной. Обратно, диссипативная система с памятью при определенных условиях может быть вложена в бесконечномерную гамильтонову систему. Ключевым условием, обеспечивающим эти два свойства: диссипативность и вложимость в некоторую гамильтонову систему, является неравенство (29). В теории систем с наследственностью это неравенство возникает как условие совместности модели со вторым началом термодинамики [10].

Уместно сказать несколько слов о взаимосвязи результатов настоящей работы и результатов, полученных для систем типа «осциллятор-струна» [2]. В простейшем случае осциллятора, расположенного в начале координат, лагранжиан системы имеет вид

$$L = (\partial_t x)^2 - V(x) + \int ((\partial_t u)^2 - (\partial_y u)^2) dy + Axu|_{y=0}.$$

Очевидно, что из-за последнего слагаемого в лагранжиане потенциальная энергия всей системы может быть сделана меньше любого наперед заданного числа посредством подстановки $u \to u + \mathrm{const}$. Поэтому не выполняется условие энергетической устойчивости (см. разд. 1). Таким образом, в настоящей работе и в обзоре [2] рассмотрены разные классы гамильтоновых систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
2. *Комеч А. И.* Аттракторы нелинейных гамильтоновых одномерных волновых уравнений // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55, № 1. С. 45–98.
3. *Динариев О. Ю.* Взаимосвязь механики диссипативных конечномерных систем с наследственностью и механики бесконечномерных гамильтоновых систем // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, № 2. С. 245–257.
4. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965.
5. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.
6. *Динариев О. Ю.* О динамике нелинейного многомерного осциллятора с памятью // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 3. С. 591–601.
7. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
8. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
9. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
10. *Дэй У. А.* Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974.

Статья поступила 28 августа 2001 г.

Динариев Олег Юрьевич
Объединенный институт физики Земли РАН им. О. Ю. Шмидта,
ул. Б. Грузинская, 10, Москва 123810
dinariev@mail.ru