Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 517.977

C–КВАЗИМИНИМАЛЬНЫЕ СТЕПЕНИ ПЕРЕЧИСЛИМОСТИ

Б. Я. Солон

Аннотация: Понятие C-квазиминимального множества, где C — произвольное подмножество множества натуральных чисел, введено Сассо и является релятивизацией известного понятия квазиминимального множества, впервые построенного Ю. Т. Медведевым для доказательства существования нетотальных степеней перечислимости. В статье изучаются локальные свойства частично упорядоченного множества степеней перечислимости, содержащих C-квазиминимальные множества. В частности, доказано, что для любых степеней перечислимости $\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}$, если $\mathbf{c} < \mathbf{a}$ и $\mathbf{a}$ — тотальная e-степень, то в частично упорядоченное множество $\mathbf{c}$-квазиминимальных e-степеней, лежащих под $\mathbf{a}$, изоморфно вложим любой не более чем счетный частичный порядок.

Ключевые слова: сводимость по перечислимости, степень перечислимости, квазиминимальная степень перечислимости

Будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в монографии [1]. Напомним те из них, которые используются в данной статье: ω — множество натуральных чисел; A, B, C (с индексами или без них) — подмножества ω, D_u — конечное множество с каноническим индексом u, $\langle x, y\rangle$ — канторовский номер упорядоченной пары (x, y), $\langle x, y, z\rangle$ — канторовский номер упорядоченной тройки (x, y, z). Если z — канторовский номер упорядоченной пары (x, y), то положим $\langle z\rangle_1 = x$ и $\langle z\rangle_2 = y$. Пусть $\delta\alpha$ — область определения, $\rho\alpha$ — множество значений частичной арифметической функции α, $\tau\alpha = \{\langle x, y\rangle : x \in \delta\alpha \wedge y = \alpha(x)\}$ — график α. Через W_n, $n \in \omega$, будем обозначать вычислимо перечислимое (в.п.) множество с индексом n. Множество A называется *однозначным*, если $A = \tau\alpha$ для некоторой функции α. Если A — однозначное множество и $A = \tau\alpha$, то будем использовать обозначение $A(x) = \alpha(x)$. Для сокращения записи вместо $x \in \delta\alpha$ будем писать $!\alpha(x)$. Тот факт, что A не является однозначным множеством, будем записывать символически $\forall\alpha[A \neq \tau\alpha]$. Символы f и g будем использовать только для обозначения тотальных функций ($\delta f = \delta g = \omega$). Если A — конечное множество, то через $|A|$ будем обозначать число элементов A. Если A — бесконечное множество, то будем писать $|A| = \infty$. Через $c_A(x)$ будем обозначать характеристическую функцию множества A, т. е. $c_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $c_A(x) = 0$, если $x \notin A$.

Напомним, что A *e-сводится к* B *посредством* n, если

$$\forall x[x \in A \iff \exists u[\langle x, u\rangle \in W_n \wedge D_u \subseteq B]],$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ИНТАС — РФФИ (грант IR–97–139).

и A *e-сводится к* B ($A \le_e B$), если существует $n \in \omega$, такое, что A e-сводится B посредством n. Через Φ_n будем обозначать *оператор перечисления* (или *e-оператор*), определяемый в.п. множеством W_n, для которого

$$\Phi_n(B) = \{x : \exists u[\langle x, u\rangle \in W_n \wedge D_u \subseteq B]\}.$$

Таким образом, $A \le_e B \iff \exists n[A = \Phi_n(B)]$. Будем писать $A <_e B$, если $A \le_e B \wedge B \not\le_e A$; $A|_e B$, если $A \not\le_e B \wedge B \not\le_e A$; $\alpha \le_e A$, если $\tau\alpha \le_e A$. Обозначим через $d_e(A) = \{B : B \le_e A \wedge A \le_e B\}$ *e-степень* множества A. Частично упорядоченное множество e-степеней образует верхнюю полурешетку $\mathbf{D}_e$ с наименьшим элементом $\mathbf{0}$ — e-степенью, состоящей их всех в.п. множеств. Пусть, как обычно, $A \oplus B = \{2x : x \in A\} \cup \{2x+1 : x \in B\}$. Хорошо известно, что $d_e(A \oplus B)$ является точной верхней границей e-степеней $d_e(A)$ и $d_e(B)$. e-Степень называется *тотальной*, если она содержит график тотальной функции. Очевидно, что e-степень $\mathbf{a}$ тотальна тогда и только тогда, когда она содержит множество A такое, что $\overline{A} \le_e A$.

Пусть W_n^s — часть (конечная) в.п. множества W_n, полученная к концу s-го шага в равномерном перечислении всех в.п. множеств. Обозначим через Φ_n^s e-оператор, определяемый W_n^s, т. е. $\Phi_n^s(B) = \{x : \exists u[\langle x, u\rangle \in W_n^s \wedge D_u \subseteq B]\}$ для любого B. Ясно, что для любого B и любого $s \in \omega$ множество $\Phi_n^s(B)$ конечно.

В $\mathbf{D}_e$ скачок A должен быть таким множеством, которое отвечает на вопрос: для любого данного $n \in \omega$ будет ли $n \in \Phi_n(A)$ или нет? или для любых данных $n, x \in \omega$ будет ли $x \in \Phi_n(A)$ или нет? Другими словами, e-скачок множества A в $\mathbf{D}_e$ — это наименьшее (по e-сводимости) множество, к которому e-сводится характеристическая функция каждого множества, e-сводимого к A. Одно из определений e-скачка множества A приводится в [2]. Пусть $K_A = \{x : x \in \Phi_x(A)\}$. Тогда $\mathbf{J}(A)$ — e-скачок множества A, если

$$\mathbf{J}(A) = \tau c_{K_A} \equiv K_A \oplus \overline{K}_A.$$

Обозначим e-скачок e-степени $\mathbf{a} = d_e(A)$ через $\mathbf{a}' = (d_e(A))' = d_e(\mathbf{J}(A))$.

Первый серьезный вопрос о e-сводимости был решен Ю. Т. Медведевым [3]: существуют нетотальные e-степени. Он построил не вычислимо перечислимое множество A такое, что для любой тотальной функции f если $f \le_e A$, то f — вычислимая функция. Дж. Кейз [4] назвал множества, построенные Ю. Т. Медведевым, *квазиминимальными*, а их e-степени — *квазиминимальными e-степенями*. Отметим, что существуют нетотальные e-степени, не являющиеся квазиминимальными.

Для этого дадим некоторое обобщение понятия квазиминимального множества. Множество A называется *C-квазиминимальным*, если $C <_e A$ и для любой тотальной функции g если $g \le_e A$, то $g \le_e C$. Ясно, что если C — произвольное в.п. множество, то C-квазиминимальное множество A является просто квазиминимальным. Существование C-квазиминимальных множеств для любого C впервые было доказано Л. Сассо [5]. Пусть $\mathbf{c} = d_e(C)$, обозначим через $\mathbf{Q}_C$ множество C-квазиминимальных множеств, через $\mathbf{Q}_\mathbf{c}$ — множество $\mathbf{c}$-квазиминимальных e-степеней, а через $\mathbf{Q}_\mathbf{c}(<\mathbf{a})$ — множество $\mathbf{c}$-квазиминимальных e-степеней, меньших e-степени $\mathbf{a}$.

Следующая теорема может быть получена с помощью релятивизации известного результата МакЭвоя [2], в котором $\mathbf{0}$ заменяется произвольной e-степенью $\mathbf{c}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{c}$ — *произвольная* e-*степень. Тогда для любой тотальной* e-*степени* $\mathbf{b} \geq \mathbf{c}'$ *существует* $\mathbf{c}$-*квазиминимальная* e-*степень* $\mathbf{a}$ *такая, что* $\mathbf{a}' = \mathbf{b}$.

Следствие 1.1. *Для любого* C *существует* C-*квазиминимальное множество* A *такое, что* $A <_e \mathbf{J}(C)$.

Доказательство. Возьмем в теореме 1 в качестве $\mathbf{b}$ e-степень $\mathbf{c}'$, тогда построенная $\mathbf{c}$-квазиминимальная e-степень $\mathbf{a}$ будет удовлетворять равенству $\mathbf{a}' = \mathbf{b} = \mathbf{c}'$, поэтому $\mathbf{a} < \mathbf{c}'$.

Следствие 1.2. *Для любого* $C \subseteq \omega$ *и любой тотальной* e-*степени* $d_e(B) = \mathbf{b} \geq (d_e(C))'$, *где* $B \equiv_e c_B$, *существует счетная возрастающая последовательность* C-*квазиминимальных множеств* $A_0 <_e A_1 <_e \cdots <_e A_n <_e \ldots$ *таких, что* $\mathbf{J}(A_n) \equiv_e B$ *для всех* $n \in \omega$.

Доказательство. Пусть A_0 — C-квазиминимальное множество, существование которого утверждается в теореме 1, т. е. $A_0 \leq_e B$ и $\mathbf{J}(A_0) \equiv_e B$. Возьмем теперь в качестве C множество A_0 для $\mathbf{b} = d_e(\mathbf{J}(A_0)) = \mathbf{a}_0'$. В результате получим A_0-квазиминимальное множество A_1 такое, что $\mathbf{J}(A_1) \equiv_e B$. Так как A_0 — C-квазиминимальное множество, то A_1 — также C-квазиминимальное множество и $C <_e A_0 <_e A_1 <_e B$. Далее повторим те же рассуждения, заменяя C на A_1 для $\mathbf{b} = d_e(\mathbf{J}(A_1)) = \mathbf{a}_1'$, и получим C-квазиминимальное множество A_2 такое, что $A_1 <_e A_2 <_e B$ и $\mathbf{J}(A_2) = B$, и т. д.

Следствие 1.3. *Для любого* $C \subseteq \omega$ *существует счетная возрастающая последовательность* C-*квазиминимальных множеств* $A_0 <_e A_1 <_e \cdots <_e A_n <_e \ldots$ *таких, что* $C <_e A_n <_e \mathbf{J}(C)$ *для всех* $n \in \omega$.

Доказательство. Возьмем в следствии 1.2 $B \equiv_e \mathbf{J}(C)$. Тогда построенная счетная возрастающая последовательность C-квазиминимальных множеств $C <_e A_0 <_e A_1 <_e \cdots <_e A_n <_e \ldots$ обладает требуемыми свойствами:

$$C <_e A_n <_e \mathbf{J}(A_n) \equiv_e B \equiv_e \mathbf{J}(C)$$

для всех $n \in \omega$.

Итак, для любой e-степени $\mathbf{c}$ интервал $(\mathbf{c}, \mathbf{c}')_e \subset \mathbf{D}_e$ содержит строго возрастающую последовательность $\mathbf{c}$-квазиминимальных e-степеней $\mathbf{a}_0 < \mathbf{a}_1 < \cdots < \mathbf{a}_n < \ldots$. Если говорить о $\mathbf{D}_e$ в целом, то такие линейно упорядоченные множества могут быть несчетными. Более точно, имеет место следующая

Теорема 2. *Для любого* $C \subseteq \omega$ *существует несчетная линейно упорядоченная совокупность* C-*квазиминимальных множеств.*

Докажем сначала утверждение, которое будем использовать в дальнейшем.

Лемма 3. *Пусть* $M_0 \leq_e M_1 \leq_e \cdots \leq_e M_s \leq_e \ldots$ — *счетная последовательность* C-*квазиминимальных множеств, тогда существует такое* C-*квазиминимальное множество* A, *что* $M_s <_e A$ *для любого* $s \in \omega$.

Доказательство. Чтобы получить множество A, построим по шагам последовательность множеств $\{A_s\}_{s \in \omega}$, в которой $A_s \subseteq A_{s+1}$ для всех $s \in \omega$. Пусть D и F — переменные для конечных множеств и $\widetilde{M}_s = \{\langle s, x\rangle : x \in M_s\}$, $\widetilde{N}_s = \{\langle n, x\rangle : n > s \wedge n, x \in \omega\}$ для всех $s \in \omega$.

Шаг 0. Полагаем $A_0 = \widetilde{M}_0$.

Шаг s+1. Предположим, что A_s построено на шаге s. Проверим выполнимость условия

$$\exists D\ (D \subseteq \widetilde{N}_s \wedge \Phi_s(A_s \cup D) \text{ неоднозначно}). \qquad (1)$$

Если (1) выполнено, то полагаем $A_{s+1} = A_s \cup \widetilde{M}_{s+1} \cup D^*$, где D^* — конечное множество с наименьшим каноническим индексом, удовлетворяющее (1). Если (1) не выполнено, то имеет место

$$\forall D (D \subseteq \widetilde{N}_s \rightarrow \Phi_s(A_s \cup D) \text{ однозначно}). \qquad (2)$$

Полагаем $A_{s+1} = A_s \cup \widetilde{M}_{s+1}$.

Пусть $A = \bigcup\limits_{s\in\omega} A_s$. Докажем ряд утверждений, из которых будет следовать, что множество A обладает требуемыми свойствами.

1^o. *A_s — C-квазиминимальное множество для всех $s \in \omega$.*

В самом деле, $A_s = \bigcup\limits_{i\le s} \widetilde{M}_i \cup F$, где F — некоторое конечное множество. Так как $\widetilde{M}_i \equiv_e M_i$ и $M_i \le_e M_s$ для всех $i \le s$, то $A_s \equiv_e M_s$ и A_s является C-квазиминимальным вместе с M_s для всех $s \in \omega$.

2^o. *$M_s <_e A$ для всех $s \in \omega$.*

Возьмем произвольный пересчет множества A и выделим из него все элементы вида $\langle s, x\rangle$. Множество $\widetilde{M}^s = \{x : \langle s, x\rangle \in A\}$ отличается от M_s не более чем на конечное множество, которое добавлено к A_i на шагах i, где $i \le s$ в случае, когда условие (1) выполнено. Поэтому $M_s \le_e \widetilde{M}^s \le_e A$. Предположим, что $A_s \le_e M_s$ для некоторого $s \in \omega$. Тогда, например, $M_{s+1} \le_e A \le_e M_s$, что противоречит нашему выбору последовательности $\{M_s\}_{s\in\omega}$.

3^o. *A — C-квазиминимальное множество.*

Пусть $f \le_e A$ для некоторой тотальной функции f, т. е. $\tau f = \Phi_s(A)$ для некоторого $s \in \omega$. Рассмотрим шаг $s + 1$ и покажем, что на этом шаге не выполняется условие (1). Допустим, что (1) выполнено. Тогда $\Phi_s(A_s \cup D)$ неоднозначно для некоторого конечного множества $D \subseteq \widetilde{N}_s$ и D^*, которое выбрано в этом случае, будет подмножеством A. Следовательно, $\Phi_s(A)$ также неоднозначное множество, что противоречит первоначальному предположению. Теперь проверим, что $\Phi_s(A_s \cup \widetilde{N}_s)$ — однозначное множество. Пусть это неверно. Тогда $\Phi_s(D)$ не является однозначным для некоторого конечного $D \subset A_s \cup \widetilde{N}_s$ и условие (1) должно быть удовлетворено, что невозможно по нашему предположению. Следовательно, $\Phi_s(A_s \cup \widetilde{N}_s)$ — однозначное множество. Имеем $\tau f = \Phi_s(A) \subseteq \Phi_s(A_s \cup \widetilde{N}_s)$, и $f : \omega \rightarrow \omega$ — тотальная функция. Поэтому $\tau f = \Phi_s(A_s \cup \widetilde{N}_s)$ и $\tau f \le_e A_s \cup \widetilde{N}_s \le_e A_s$. Используя 1^o, получаем, что $f \le_e C$ и тем самым A — C-квазиминимальное множество, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим всевозможные семейства C-квазиминимальных множеств, линейно упорядоченных отношением $\le_e$. Эти семейства частично упорядочены отношением теоретико-множественного включения $\subseteq$. По лемме Цорна существует максимальное линейно упорядоченное семейство $\mathscr{Q}$ C-квазиминимальных множеств. Предположим, что оно счетно, тогда $\mathscr{Q} = \{Q_s\}_{s\in\omega}$. Используя линейную упорядоченность $\mathscr{Q}$, построим такую последовательность множеств $\{M_s \in \mathscr{Q} : s \in \omega\}$, что $M_0 \le_e M_1 \le_e \cdots \le_e M_s \le_e \ldots$ и для любого Q_i существует такое M_j, что $Q_i <_e M_j$. По лемме 3 в этом случае существует C-квазиминимальное множество A такое, что $M_s <_e A$ для всех $s \in \omega$, что противоречит максимальности совокупности $\mathscr{Q}$.

Оказывается, для любого $C \subseteq \omega$ класс $\mathbf{Q}_C$ содержит не только несчетные цепи, но и несчетные антицепи. Сначала докажем, что любой интервал $(\mathbf{c}, \mathbf{c}')_e \subset \mathbf{D}_e$ содержит последовательность попарно несравнимых **c**-квазиминимальных e-степеней. Будем называть такую последовательность *антицепью.*

Теорема 4. *Для любой e-степени $\mathbf{c}$ и любой тотальной e-степени $\mathbf{b} \geq \mathbf{c}'$ существует счетная антицепь $\mathbf{c}$-квазиминимальных e-степеней $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \dots$ таких, что $\mathbf{a}_i | \mathbf{a}_j$ для всех $i \neq j$ и $\mathbf{a}'_n = \mathbf{b}$ для всех $n \in \omega$.*

Доказательство. Пусть $C \in \mathbf{c}$ и $B \in \mathbf{b}$ такое, что $B \equiv_e c_B$. Будем пользоваться обозначениями из теоремы 1. Построим по шагам счетное множество последовательностей конечных множеств

$$F_{00}, F_{01}, \dots, F_{0j}, \dots, F_{10}, F_{11}, \dots, F_{1j}, \dots, \dots, F_{i0}, F_{i1}, \dots, F_{ij}, \dots, \dots$$

таких, что $F_{i0} \subseteq_p F_{i1} \subseteq_p \cdots \subseteq_p F_{ij} \subseteq_p \dots$ для всех $i \in \omega$. Положим $A_i = C \oplus \bigcup\limits_{j \in \omega} F_{ij}$ и $\mathbf{a}_i = d_e(A_i)$ и докажем, что последовательность $\{\mathbf{a}_i\}_{i \in \omega}$ обладает требуемыми свойствами. Пусть $z_{i,m} = 1 + \max F_{i,m}$, если $F_{i,m} \neq \varnothing$, и $z_{i,m} = 0$, если $F_{i,m} = \varnothing$.

Шаг 0. Полагаем $F_{i0} = \varnothing$ для всех $i \in \omega$.

Шаг $5s+1$. Пусть $s = \langle i, k \rangle$. Проверим выполнимость условия

$$2z_{i,5s} + 1 \in \Phi_k(C). \tag{1}$$

Если (1) выполнено, то полагаем $F_{i,5s+1} = F_{i,5s} \cup \{z_{i,5s} + 1\}$, и если (1) не выполнено, то полагаем $F_{i,5s+1} = F_{i,5s} \cup \{z_{i,5s}\}$. Для всех $j \neq i$ положим $F_{j,5s+1} = F_{j,5s}$.

Шаг $5s+2$. Пусть $s = \langle i, j, k \rangle$, $i \neq j$. Проверим

$$\exists \sigma (F_{j,5s+1} \subset_p \sigma \wedge 2z_{i,5s+1} \in \Phi_k(C \oplus \sigma)), \tag{2}$$

где для конечных множеств F и σ

$$F \subset_p \sigma \iff F = \varnothing \vee (F \subset \sigma \wedge \max F < \min(\sigma \setminus F)).$$

Если (2) выполнено, то полагаем $F_{i,5s+2} = F_{i,5s+1} \cup \{z_{i,5s+1} + 1\}$ и $F_{j,5s+2} = \sigma^*$, где σ^* имеет наименьший канонический индекс среди σ, удовлетворяющих (2). Если (2) не выполнено, то полагаем $F_{i,5s+2} = F_{i,5s+1} \cup \{z_{i,5s+1}\}$ и $F_{j,5s+2} = F_{j,5s+1}$. Для всех $l \in \omega \setminus \{i, j\}$ полагаем $F_{l,5s+2} = F_{l,5s+1}$. Если $i = j$, то полагаем $F_{i,5s+2} = F_{i,5s+1}$ для всех $i \in \omega$.

Шаг $5s+3$. Пусть $s = \langle i, k \rangle$, проверим

$$\exists \sigma (F_{i,5s+2} \subset_p \sigma \wedge \Phi_k(C \oplus \sigma) \text{ неоднозначно}). \tag{3}$$

Если (3) выполнено, то полагаем $F_{i,5s+3} = \sigma^*$, где σ^* имеет наименьший канонический индекс среди σ, удовлетворяющих (3). Если (3) не выполнено, то полагаем $F_{i,5s+3} = F_{i,5s+2}$. Полагаем также $F_{j,5s+3} = F_{j,5s+2}$ для всех $j \neq i$.

Шаг $5s+4$. Пусть $s = \langle i, k \rangle$, проверим

$$\exists \sigma (F_{i,5s+3} \subset_p \sigma \wedge k \in \Phi_k(C \oplus \sigma)). \tag{4}$$

Если (4) выполнено, то полагаем $F_{i,5s+43} = \sigma^*$, где σ^* имеет наименьший канонический индекс среди $\sigma \neq F_{i,5s+3}$, удовлетворяющих (4). Если (4) не выполнено, то полагаем $F_{i,5s+4} = F_{i,5s+3}$. Полагаем также $F_{j,5s+4} = F_{j,5s+3}$ для всех $j \neq i$.

Шаг $5s+5$. Пусть $s = \langle i, k \rangle$, полагаем $F_{i,5s+5} = F_{i,5s+4} \cup \{z_{i,5s+4}\}$, если $k \in B$, и $F_{i,5s+5} = F_{i,5s+4} \cup \{z_{i,5s+4}+1\}$, если $k \notin B$. Полагаем также $F_{j,5s+5} = F_{j,5s+4}$ для всех $j \neq i$.

Описание конструкции закончено. Завершим доказательство теоремы. Шаги $5s+1$, $s \in \omega$, где $s = \langle i, k \rangle$, обеспечивают $A_i \neq \Phi_k(C)$, т. е. $A_i \not\leq_e C$ для всех $i \in \omega$. Шаги $5s+2, s \in \omega$, где $s = \langle i, j, k \rangle$, обеспечивают $A_i \neq \Phi_k(A_j)$, т. е. $A_i | A_j$ для всех $i \neq j$. Шаги $5s+3$, $s \in \omega$, делают множества A_i, $i \in \omega$, C-квазиминимальными. Шаги $5s+4$ и $5s+5$, $s \in \omega$, гарантируют $\mathbf{J}(A_i) \equiv_e B$ для всех $i \in \omega$.

Следствие 4.1. *Для любого $C \subseteq \omega$ существует счетная антицепь C-квазиминимальных множеств $\{A_i\}_{i\in\omega}$ таких, что $C <_e A_i <_e \mathbf{J}(C)$ для всех $i \in \omega$.*

Доказательство. В теореме 4 возьмем $B = \mathbf{J}(C)$. Тогда построенная счетная антицепь C-квазиминимальных множеств обладает требуемым свойством: $A_i <_e \mathbf{J}(A_i) \equiv_e B = \mathbf{J}(C)$ для всех $i \in \omega$.

Итак, для любой e-степени $\mathbf{c}$ интервал $(\mathbf{c}, \mathbf{c}')_e \subset \mathbf{D}_e$ содержит счетную антицепь $\mathbf{c}$-квазиминимальных e-степеней $\{\mathbf{a}_n\}_{n\in\omega}$ таких, что $\mathbf{a}_i | \mathbf{a}_j$ для всех $i \neq j$. Докажем, что в $\mathbf{D}_e$ существуют несчетные антицепи $\mathbf{c}$-квазиминимальных e-степеней для любой $\mathbf{c} \in \mathbf{D}_e$. Более точно, имеет место следующая

Теорема 5. *Для любого множества C существует несчетная антицепь C-квазиминимальных множеств.*

Доказательство. Рассмотрим семейства попарно несравнимых множеств из $\mathbf{Q}_C$. Эти семейства частично упорядочены отношением $\subseteq$. По лемме Цорна существует такое максимальное семейство, обозначим его через $\mathscr{P}$. Предположим, что $\mathscr{P}$ — счетное множество, тогда $\mathscr{P} = \{P_s\}_{s\in\omega}$. Построим множество A так, чтобы $d_e(A) \in \mathbf{Q}_C$ и $A | P_s$ для всех $s \in \omega$.

Построение проведем по шагам, формируя на каждом шаге s множество $A_s = C \oplus B_s$, где C — данное множество, а B_s — конечное множество, построенное на шаге s в ходе конструкции. Требуемым будет множество $A = \bigcup\limits_{s\in\omega} A_s = C \oplus B$, где $B = \bigcup\limits_{s\in\omega} B_s$. В ходе конструкции возникает вспомогательное множество $Z = \bigcup\limits_{s\in\omega} Z_s$, где Z_s — конечная часть Z, построенная к концу шага s. Конструкция организована таким образом, что $B_s \subseteq B_{s+1}$, $Z_s \subseteq Z_{s+1}$ и $B_s \cap Z_s = \varnothing$ для всех $s \in \omega$. Ясно, что в этом случае $B \cap Z = \varnothing$. Обозначим $b_s = 1 + \max(B_s \cup Z_s)$ для всех $s \in \omega$. При описании конструкции будем предполагать, что D — переменная для конечных множеств.

Шаг 0. Полагаем $B_0 = Z_0 = \varnothing$ и $b_0 = 0$.

Шаг $4s+1$. Проверим

$$\exists z (z \in \Phi_s(C) \setminus A_{4s}). \tag{1}$$

Если (1) выполнено, то возможны два случая. Пусть z^* — наименьшее z, удовлетворяющее (1). Если

$$z^* = 2z_1^* + 1, \tag{2}$$

то полагаем $Z_{4s+1} = Z_{4s} \cup \{z_1^*\}$ и $B_{4s+1} = B_{4s}$. В противном случае, когда

$$z^* = 2z_2^*, \tag{3}$$

полагаем $Z_{4s+1} = Z_{4s}$ и $B_{4s+1} = B_{4s}$.

Если условие (1) не выполняется, то $\Phi_s(C) \subseteq A_{4s} = C \oplus B_{4s}$. В этом случае полагаем $Z_{4s+1} = Z_{4s}$ и $B_{4s+1} = B_{4s} \cup \{b_{4s}\}$.

Шаг $4s+2$. Проверим выполнимость условия

$$\exists D(D \cap Z_{4s+1} = \varnothing \wedge \Phi_s(C \oplus D) \text{ неоднозначно}). \tag{4}$$

Если (4) выполнено, то полагаем $Z_{4s+2} = Z_{4s+1}$ и $B_{4s+2} = B_{4s+1} \cup D^*$, где D^* — конечное множество с наименьшим каноническим индексом, удовлетворяющее условию (4). Если (4) не выполнено, то полагаем $Z_{4s+2} = Z_{4s+1}$ и $B_{4s+2} = B_{4s+1}$.

Шаг $4s+3$. Пусть $s = \langle k, l\rangle$, проверим

$$\exists D(D \cap Z_{4s+2} = \varnothing \wedge \Phi_k(C \oplus D) \not\subseteq P_l). \tag{5}$$

Если (5) выполнено, то полагаем $Z_{4s+3} = Z_{4s+2}$ и $B_{4s+3} = B_{4s+2} \cup D^*$, где D^* — конечное множество с наименьшим каноническим индексом, удовлетворяющее условию (5). Если (5) не выполнено, то полагаем $Z_{4s+3} = Z_{4s+2}$ и $B_{4s+3} = B_{4s+2}$.

В первом случае очевидно, что $\Phi_k(A) \neq P_l$. Во втором случае имеем

$$\forall D(D \cap Z_{4s+2} = \varnothing \to \Phi_k(C \oplus D) \subseteq P_l).$$

Следовательно, $\Phi_k(C \oplus \widetilde{N}) \subseteq P_l$, где $\widetilde{N} = \omega \setminus Z_{4s+2}$ является коконечным множеством. Если $\Phi_k(A) = P_l$, то $\Phi_k(A) \subseteq \Phi_k(C \oplus \widetilde{N}) \subseteq P_l$ и поэтому $\Phi_k(C \oplus \widetilde{N}) = P_l$, т. е. $P_l \leq_e C \oplus \widetilde{N} \leq_e C$, что противоречит C-квазиминимальности множества P_l и, в частности, тому, что $P_l \not\leq_e C$.

Шаг $4s+4$. Пусть $s = \langle k, l\rangle$, проверим

$$\Phi_k(P_l) \subseteq C \oplus B_{4s+3}. \tag{6}$$

Если условие (6) выполнено, полагаем $Z_{4s+4} = Z_{4s+3}$ и $B_{4s+4} = B_{4s+3} \cup \{b_{4s+3}\}$. Если (6) не выполнено, пусть $x^* = \min(\Phi_k(P_l) \setminus (C \oplus B_{4s+3}))$. Если $x^* = 2z^*$, полагаем $Z_{4s+4} = Z_{4s+3}$ и $B_{4s+4} = B_{4s+3}$. Если $x^* = 2z^* + 1$, полагаем $Z_{4s+4} = Z_{4s+3} \cup \{z^*\}$ и $B_{4s+4} = B_{4s+3}$.

Докажем, что шаги $4s+1$ и $4s+2$, $s \in \omega$, обеспечивают C-квазиминимальность множества A. Ясно, что $C \leq_e A$. Предположим, что $A \leq_e C$, тогда существует $s \in \omega$ такое, что $A = \Phi_s(C)$. Рассмотрим шаг $4s+1$. Если на этом шаге было выполнено условие (2), то $z^* \in \Phi_s(C)$ и $z_1^* \in Z$. Так как $Z \cap B = \varnothing$, то $z_1^* \notin B$, поэтому $z^* = 2z_1^* + 1 \notin A$. Если было выполнено (3), то $z^* \in \Phi_s(C)$ и $z_2^* \notin C$, тем самым $z^* = 2z_2^* \notin A$. Следовательно, $A \neq \Phi_s(C)$, и поэтому условие (1) не могло быть выполнено на шаге $4s+1$. Это означает, что $\Phi_s(C) \subseteq A_{4s} = C \oplus B_{4s}$. В этом случае $z = 2b_{4s+1} + 1 \in A$, но $z \notin \Phi_s(C)$, так как $\max\{y : 2y+1 \in \Phi_s(C)\} \leq b_{4s}$. Итак, e-сводимость $A \leq_e C$ невозможна, так что $C <_e A$.

Теперь пусть $g : \omega \to \omega$ — тотальная функция такая, что $g \leq_e A$, т. е. $\tau g = \Phi_s(A)$ для некоторого $s \in \omega$. Ясно, что условие (4) не может быть выполнено. Легко проверить, что в этом случае $\Phi_s(C \oplus \overline{Z}_{4s+1})$ является однозначным множеством. Так как $A = C \oplus B \subseteq C \oplus \overline{Z}_{4s+1}$, то $\tau g = \Phi_s(A) = \Phi_s(C \oplus \overline{Z}_{4s+1})$. Учитывая тотальность функции g, получаем $\tau g = \Phi_s(C \oplus \overline{Z}_{4s+1})$. Поскольку $\overline{Z}_{4s+1}$ — вычислимое множество, то $g \leq_e C \oplus \overline{Z}_{4s+1} \leq_e C$, что и требовалось доказать.

Наконец, как уже отмечалось выше, шаги $4s+3$ и $4s+4$, $s \in \omega$, обеспечивают $A|P_s$ для всех $s \in \omega$. Но построенное в ходе конструкции множество A не принадлежит нашей антицепи, что противоречит предположению о максимальности $\mathscr{P}$. Следовательно, $\mathbf{Q}_C$ должно содержать несчетную антицепь.

Ясно, что любой ограниченный сверху сегмент в $\mathbf{D}_e$ содержит не более чем счетное множество e-степеней. Однако, как показывает следующая теорема, частично упорядоченное множество $\mathbf{c}$-квазиминимальных e-степеней (для любой e-степени $\mathbf{c}$), лежащих ниже тотальной e-степени $\mathbf{a} > \mathbf{c}$, имеет достаточно «богатую» структуру.

Теорема 6. *Если $\mathbf{c} < \mathbf{a}$ и $\mathbf{a}$ — тотальная e-степень, то в $\mathbf{Q}_{\mathbf{c}}(< \mathbf{a})$ изоморфно вложимо любое не более чем счетное частично упорядоченное множество.*

Доказательство. Пусть e-степени $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ удовлетворяют условию теоремы, т. е. $\mathbf{c} < \mathbf{a}$ и $\mathbf{a}$ — тотальная e-степень. Пусть $C \in \mathbf{c}$ и $A \in \mathbf{a}$ такое, что $\overline{A} \leq_e A$. Пусть $C = \Psi(A)$ для некоторого e-оператора Ψ. Положим $C^s = \Psi^s(A)$.

Определим для любых $z, k, l \in \omega$ и любого вычислимого множества $R \subseteq \omega$ функции

$$\lambda s.f_{k,l}(z, R, s) = \max\{y : y \geq z \wedge \forall y'[z \leq y' < y \to [y' \in A \iff \langle k, l, y'\rangle \in \Phi_l^s(C^s \oplus R)]]\}$$

и

$$\lambda s.F_{k,l}(z, R, s) = \max\{f_{k,l}(z, R, s') : s' \leq s\}.$$

Очевидно, что $\lambda s.f_{k,l}(z, R, s)$ и $\lambda s.F_{k,l}(z, R, s)$ являются тотальными функциями, вычислимыми относительно множества A, а так как $\overline{A} \leq_e A$, то $f \leq_e A$ и $F \leq_e A$. Поскольку функция $\lambda s.F_{k,l}(z, R, s)$ монотонно неубывающая, существует (конечный или бесконечный) предел $\lim_s F_{k,l}(z, R, s) = F_{k,l}(z, R)$.

Докажем несколько лемм, из которых будет следовать теорема.

Лемма 6.1. *Для любых $k, l, z \in \omega$ и любого вычислимого множества $R \subseteq \omega$ будет $F_{k,l}(z, R) < \infty$.*

Доказательство леммы 6.1. Так как $A \not\leq_e C$, существует такое $y_0 \geq z$, для которого

$$\neg[y_0 \in A \iff \langle k, l, y_0\rangle \in \Phi_l(C \oplus R)].$$

Можно подобрать $s_0 \in \omega$ столь большим, что для всех $s \geq s_0$ будем иметь

$$\langle k, l, y_0\rangle \in \Phi_l^s(C^s \oplus R) \iff \langle k, l, y_0\rangle \in \Phi_l(C \oplus R),$$

но тогда $f_{k,l}(z, R, s) \leq y_0 + 1$ для всех $s \geq s_0$ и, следовательно, $F_{k,l}(z, R, s) \leq \max\{F_{k,l}(z, R, s_0), y_0 + 1\}$, что и доказывает лемму.

Введем обозначения, которые будут использоваться в доказательстве теоремы. Для любых $M \subseteq \omega$ и $k \in \omega$ положим

$$M^k = \{x : x \in M \wedge \exists l, y[\langle k, l, y\rangle = x]\}, \quad \widetilde{M}^k = \{x : x \in M \wedge \forall l, y[\langle k, l, y\rangle \neq x]\}.$$

Лемма 6.2. *Существует множество $B \leq_e A$ такое, что $C \oplus B$ является C-квазиминимальным и $B^k \not\leq_e C \oplus \widetilde{B}^k$ для всех $k \in \omega$.*

Доказательство леммы 6.2. Множество B построим с помощью конструкции, вычислимой в A. В ходе конструкции около чисел из ω будем ставить на каждом шаге конечное множество знаков «+», при этом множество B будет состоять из чисел, получивших «+» на каком-либо шаге конструкции. Через B_+ обозначим множество чисел, имеющих «+» на данном шаге конструкции.

Конструкция организована таким образом, что $|B_+| < \infty$, B_+ от шага к шагу возрастает по включению и $\lim_s B_+ = B$.

Для каждой пары чисел (k, l) в конструкции будут участвовать две подвижные $\langle k, l\rangle$-метки: *нижняя* $b(k, l)$ и *верхняя* $h(k, l)$. Обе $\langle k, l\rangle$-метки могут передвигаться только по своей *траектории* $T_{\langle k,l\rangle} = \{\langle k, l, y\rangle : y \in \omega\}$. Числа, которым соотнесены нижняя и верхняя $\langle k, l\rangle$-метки в данный момент конструкции, обозначим через $\langle k, l, b(k, l)\rangle$ и $\langle k, l, h(k, l)\rangle$ соответственно. Метки в ходе конструкции могут только подниматься по своей траектории $T_{\langle k,l\rangle}$, т. е. текущие значения $b(k, l)$ и $h(k, l)$ не убывают, причем $b(k, l) \leq h(k, l)$ на всех шагах конструкции. (Заметим, что метки и числа, которым они соотнесены на своих траекториях, обозначаются одинаково. Смысл этих обозначений всегда будет ясен из контекста.) Число $\langle k, l, y\rangle$ назовем *свободным*, если в данный момент конструкции $\langle k, l, y'\rangle \notin B_+$ для всех $y' \geq y$. Обозначим $\widetilde{T}_{\langle k,l\rangle} = \{\langle k', l', y\rangle : k' \neq k \wedge \langle k, l\rangle < \langle k', l'\rangle\}$ и $\widetilde{T}^*_{\langle k,l\rangle} = \{\langle k', l', y\rangle : \langle k, l\rangle < \langle k', l'\rangle\}$. Ясно, что $\widetilde{T}_{\langle k,l\rangle} \subseteq \widetilde{T}^*_{\langle k,l\rangle}$ для всех $k, l \in \omega$. Перейдем к описанию конструкции для построения множества B. Пусть в начале конструкции $B_+ = \varnothing$ и $b(k, l) = h(k, l) = 0$ для всех $k, l \in \omega$.

Шаг $2s$. Этот шаг разобьем на два этапа, на каждом из которых выполним последовательно подшаги t для $t = 0, 1, \ldots, s$. Подшаги на первом этапе назовем *p-подшагами*, а на втором этапе — *n-подшагами.* p-Подшаги при $s = 0$ не выполняются.

p-Подшаг t. Пусть $t = \langle k, l\rangle$, проверим выполнимость условия

$$F_{k,l}\big(b(k, l), \widetilde{B}^k_+ \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}, s\big) > F_{k,l}\big(b(k, l), \widetilde{B}^k_+ \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}, s - 1\big). \qquad (p.t)$$

Если условие (p.t) выполнено, то для всех k', l' таких, что $\langle k', l'\rangle > \langle k, l\rangle$, устанавливаем обе $\langle k', l'\rangle$-метки у наименьшего из свободных чисел своих траекторий $T_{\langle k',l'\rangle}$, лежащего не ниже $h(k', l')$; метку $h(k, l)$ устанавливаем у числа $\langle k, l, F_{k,l}(b(k, l), \widetilde{B}^k_+ \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}, s)\rangle$. Если (p.t) не выполнено, то переходим к следующему шагу.

После завершения p-подшага s переходим ко второму этапу и выполняем последовательно n-подшаги t для $t = 0, 1, \ldots, s$.

n-Подшаг t. Пусть $t = \langle k, l\rangle$, последовательно выполним следующие действия.

$(n.t.1)$ Для всех чисел $y \in A$ таких, что $b(k, l) \leq y \leq h(k, l)$ и $\langle k, l, y\rangle \notin B_+$, ставим знак «$+$» у числа $\langle k, l, y\rangle$ (будем говорить при этом, что число y *поставило* «$+$» у числа $\langle k, l, y\rangle$).

$(n.t.2)$ Для всех y таких, что $b(k, l) \leq y \leq h(k, l)$, проверим справедливость условия

$$\langle k, l, y\rangle \in \Phi^s_l\big(C^s \oplus (\widetilde{B}^k_+ \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle})\big) \setminus \Phi^s_l\big(C^s \oplus \widetilde{B}^k_+\big).$$

Для тех y, которые удовлетворяют этому условию, находим наименьшее число $\langle\langle k, l, y\rangle, u\rangle \in W^s_l$ такое, что $D_u \subseteq C^s \oplus \big(\widetilde{B}^k_+ \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}\big)$, ставим знак «$+$» у всех чисел из множества $\{x : 2x+1 \in D_u\}$, не имевших этого знака (будем говорить при этом, что число y $\langle k, l\rangle$-*индуцирует* знак «$+$» у соответствующих чисел). Далее, для всех k', l' таких, что $\langle k', l'\rangle > \langle k, l\rangle$, устанавливаем обе $\langle k', l'\rangle$-метки у наименьших свободных чисел своих траекторий $T_{\langle k',l'\rangle}$, лежащих не ниже $h(k', l')$.

Шаг $2s + 1$. Пусть $s = \langle k, l\rangle$, проверим выполнимость условия

$$\Phi^s_l\big(C^s \oplus \big(B_+ \cup T^*_{\langle k,s\rangle}\big)\big) \text{ неоднозначно.} \qquad (q.s)$$

Если $(q.s)$ выполнено, то пусть конечное множество D^* имеет наименьший канонический индекс среди D таких, что $D \subseteq C^s \oplus \big(B_+ \cup T^*_{\langle k,s\rangle}\big)$ и $\Phi^s_l(D)$ неоднозначно. Поставим знак «+» у всех чисел из множества $\{x : 2x+1 \in D^*\}$, не имевших этого знака (при этом будем говорить, что происходит l-*навешивание* знака «+» на соответствующее число x). Далее, для всех k', l' таких, что $\langle k,l\rangle < \langle k',l'\rangle$, устанавливаем обе $\langle k',l'\rangle$-метки у наименьших свободных чисел из своих траекторий $T_{\langle k',l'\rangle}$, лежащих не ниже $h(k',l')$.

Если условие $(q.s)$ не выполнено, то переходим к следующему шагу. Описание конструкции закончено.

Пусть $n = \langle k,l\rangle$. Докажем ряд утверждений, из которых будет следовать лемма 2.

1^o. Каждая из $\langle k,l\rangle$-меток сдвигается только конечное число раз.

2^o. На траектории $T_{\langle k,l\rangle}$ появится только конечное число знаков «+».

3^o. Происходит только конечное число $\langle k,l\rangle$-индукций.

4^o. Происходит не более конечного числа l-навешиваний знака «+».

5^o. $B^k \neq \Phi_l(C \oplus \widetilde{B}^k)$.

6^o. $\tau g = \Phi_l(C \oplus B) \to g \leq_e C$ для любой тотальной функции $g : \omega \to \omega$.

Доказательства проведем индукцией, предполагая, что для всех $n' < n$ данные утверждения верны. Заметим, что для $n = 0$ все утверждения выполнены по определению. (Будем предполагать, что $W_0 = \varnothing$.)

1^o. Пусть $s_o \geq n$ таково, что начиная с шага $2s_0$ при всех $n' < n$ не происходит сдвигов n'-меток, n'-индукций, n'-навешиваний и на траекториях $T_{n'}$ не появляются новые знаки «+». Пусть B_0 — множество чисел, имеющих «+» к началу шага $2s_0$, тогда для всех $s \geq s_0$ имеем

$$\widetilde{B}^k_+ \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle} = \widetilde{B}^k_0 \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}, \tag{1.1}$$

$$\widetilde{B}^k_+ \cup \widetilde{T}^*_{\langle k,l\rangle} = \widetilde{B}^k_0 \cup \widetilde{T}^*_{\langle k,l\rangle}. \tag{1.2}$$

При этом $b(k,l) = b_0(k,l)$, где $\langle k,l,b_0(k,l)\rangle$ — число, которому соотнесена нижняя метка $b(k,l)$ на шаге s_0. В этом случае на p-подшаге $\langle k,l\rangle$ любого шага $2s$ для $s \geq s_0$ будет

$$F_{k,l}(b(k,l), \widetilde{B}^k_+ \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}, t) = F_{k,l}\big(b_0(k,l), \widetilde{B}^k_0 \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}, t\big)$$

при всех $t \in \omega$ и, следовательно, на шагах $2s$, $s \geq s_0$, верхняя метка $h(k,l)$ может подниматься только при возрастании функции $F_{k,l}(b_0(k,l), \widetilde{B}^k_0 \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}, s)$. В силу леммы 6.1 это может произойти только конечное число раз, после чего метка $h(k,l)$ навсегда остановится у числа $\langle k,l,h_0(k,l)\rangle$, где $h_0(k,l) = F_{k,l}(b_0(k,l), \widetilde{B}^k_0 \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle})$, что доказывает утверждение 1^o.

2^o. Пусть $Y = \{y : b_0(k,l) \leq y \leq h_0(k,l)\}$. Так как на шагах $2s$, $s \geq s_0$, знак «+» может появиться на траектории $T_{\langle k,l\rangle}$ только в ситуации, когда некоторое число y ставит «+» около числа, лежащего выше $h(k,l)$, то из 1^o следует 2^o. На шагах $2s+1$, $s \geq s_0$, в силу индуктивного предположения о том, что n'-навешиваний для всех $n' < n$ больше не происходит, и замечания, что $\widetilde{T}_{\langle k,l\rangle} \subseteq \widetilde{T}^*_{\langle k,l\rangle}$, не появятся знаки «+» около чисел, лежащих выше $h(k,l)$. Утверждение 2^o доказано.

3^o. Заметим, что если число y вызывает $\langle k,l\rangle$-индукцию на некотором шаге $2s$, то после ее выполнения на всех шагах $2s'$, $s' > s$, будем иметь $\langle k,l,y\rangle \in \Phi^{s'}_l\big(C^s \oplus \widetilde{B}^k_+\big)$, поэтому число y уже не сможет вызвать $\langle k,l\rangle$-индукцию. Так как на шагах $2s$, $s \geq s_0$, $\langle k, l\rangle$-индукцию могут вызвать только числа из множества Y, причем каждое из них не более одного раза, то утверждение 3^o выполнено.

4^o. Заметим, что l-навешивание знака «$+$» может произойти на данном шаге $2s+1$, где $s = \langle k, l\rangle$, может не произойти на этом шаге, но произойти на каком-либо следующем или не произойти никогда. Ясно, что в последнем случае утверждение 4^o выполнено.

Предположим, что l-навешивание знака «$+$» произошло на шаге $2s_1+1$, $s_1 \geq s_0$, $s_1 = \langle k_1, l\rangle$, около чисел из множества $\{x : 2x+1 \in D^*\}$, где конечное множество D^* выбрано на шаге $2s_1+1$ при выполнении условия $(q.s_1)$. В результате на всех последующих шагах $2s+1$, $s \geq s_1$, будем иметь $D^* \subseteq B_+$. В случае выполнения условия $(q.s)$ для $s = \langle k, l\rangle$ при $k \geq k_1$ получаем, что $\Phi_l^s\big(C^s \oplus (B_+ \cup \widetilde{T}^*_{\langle k,l\rangle}\big)$ неоднозначно, причем $D^* \subseteq C^{s_1} \oplus B_+ \subseteq C^s \oplus \big(B_+ \cup \widetilde{T}^*_{\langle k,l\rangle}\big)$. В этом случае l-навешивание происходит около чисел из множества $\{x : 2x+1 \in D\}$, где множество D, которое было выбрано на шаге $2s+1$, имеет канонический индекс, не превосходящий канонического индекса множества D^*.

Итак, происходит только конечное число l-навешиваний знака «$+$» для всех $l \in \omega$, и утверждение 4^o доказано.

5^o. Пусть $2s_1$, $s_1 \geq s_0$, — номер такого шага, что на нем и на всех последующих шагах не происходит сдвигов верхних меток $h(k,l)$, $\langle k, l\rangle$-индукций и l-навешиваний, и такой, что для всех $y \in Y$

$$\langle k, l, y\rangle \in \Phi_l\big(C \oplus \big(\widetilde{B}^k_0 \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}\big)\big) \iff \langle k, l, y\rangle \in \Phi_l^{s_1}\big(C^{s_1} \oplus \big(\widetilde{B}^k_0 \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}\big)\big). \tag{5.1}$$

Пусть B_1 — множество чисел, получивших знак «$+$» к началу шага $2s_1$. Благодаря действию $(n.t.1)$, которое выполняется на n-подшагах t шагов $2s$, для всех $y \in Y$ имеем

$$\langle k, l, y\rangle \in B^k \iff y \in A. \tag{5.2}$$

Так как на шаге $2s_1$ не происходит $\langle k, l\rangle$-индукций и l-навешиваний, то, учитывая (1.1), для всех $y \in Y$ имеем

$$\langle k, l, y\rangle \in \Phi_l^{s_1}\big(C^{s_1} \oplus \big(\widetilde{B}^k_0 \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}\big)\big) \to \langle k, l, y\rangle \in \Phi_l^{s_1}\big(C^{s_1} \oplus \widetilde{B}^k_1\big).$$

Но $C^{s_1} \oplus \widetilde{B}^k_1 \subseteq C \oplus \widetilde{B}^k$, поэтому для всех $y \in Y$ получаем

$$\langle k, l, y\rangle \in \Phi_l^{s_1}\big(C^{s_1} \oplus \big(\widetilde{B}^k_0 \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}\big)\big) \to \langle k, l, y\rangle \in \Phi_l\big(C \oplus \widetilde{B}^k_1\big). \tag{5.3}$$

С другой стороны, из $\widetilde{B}^k \subseteq \widetilde{B}^k_0 \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}$ вытекает, что для всех $y \in Y$

$$\langle k, l, y\rangle \in \Phi_l(C \oplus \widetilde{B}^k) \to \langle k, l, y\rangle \in \Phi_l\big(C \oplus \big(\widetilde{B}^k_0 \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}\big)\big),$$

откуда, учитывая (5.1), выводим, что для всех $y \in Y$

$$\langle k, l, y\rangle \in \Phi_l(C \oplus \widetilde{B}^k) \to \langle k, l, y\rangle \in \Phi_l^{s_1}\big(C^{s_1} \oplus \big(\widetilde{B}^k_0 \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}\big)\big),$$

что вместе с (5.3) доказывает справедливость эквивалентности

$$\langle k, l, y\rangle \in \Phi_l(C \oplus \widetilde{B}^k) \iff \langle k, l, y\rangle \in \Phi_l^{s_1}\big(C^{s_1} \oplus \big(\widetilde{B}^k_0 \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}\big)\big) \tag{5.4}$$

для всех $y \in Y$.

Чтобы доказать 5^o, покажем, что существует $y \in Y$ такое, что

$$\neg[\langle k, l, y\rangle \in B^k \iff \langle k, l, y\rangle \in \Phi_l(C \oplus \widetilde{B}^k)].$$

Действительно, в противном случае, учитывая (5.2) и (5.4), получаем, что

$$\forall y\ \big[y \in Y \to \big[y \in A \iff \langle k,l,y\rangle \in \Phi_l^{s_1}\big(C^{s_1} \oplus \big(\widetilde{B}_0^k \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}\big)\big)\big]\big],$$

откуда следует, что

$$F_{k,l}\big(b_0(k,l), \widetilde{B}_0^k \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}, s_1\big) f_{k,l}\big(b_0(k,l), \widetilde{B}_0^k \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}, s_1\big) \\ \geq h_0(k,l) + 1 > F_{k,l}\big(b_0(k,l), \widetilde{B}_0^k \cup \widetilde{T}_{\langle k,l\rangle}\big),$$

что невозможно. Утверждение 5^o доказано.

6^o. Пусть $\tau g = \Phi_{l_0}(C \oplus B)$. Докажем, что для всех $s \geq s_0 = \langle k_0, l_0\rangle$, $s = \langle k, l_0\rangle$, $k \geq k_0$

$$\Phi_{l_0}^s\big(C \oplus \big(B_0 \cup \widetilde{T}^*_{\langle k,l_0\rangle}\big)\big) \text{ однозначно},$$

где B_0 — множество чисел, имеющих знак «+» на шаге $2s_0+1$, и s_0 такое же, как и при доказательстве п. 5^o. Предположим, что это неверно, т. е. для некоторого $s_1 = \langle k_1, l_0\rangle$

$$\Phi_{l_0}^{s_1}\big(C \oplus (B_0 \cup \widetilde{T}^*_{\langle k_1,l_0\rangle}\big)\big) \text{ неоднозначно}.$$

Тогда существует конечное множество $D \subseteq C \oplus \big(B_0 \cup \widetilde{T}^*_{\langle k_1,l_0\rangle}\big)$ такое, что $\Phi_{l_0}^{s_1}(D)$ неоднозначно. Выберем $s \geq s_1$, $s = \langle k, l_0\rangle$ так, чтобы

$$D \subseteq C^s \oplus \big(B_0 \cup \widetilde{T}^*_{\langle k,l_0\rangle}\big) \subseteq C^s \oplus \big(B_+ \cup \widetilde{T}^*_{\langle k,l_0\rangle}\big).$$

В этом случае на шаге $2s+1$ выполняется условие $(q.s)$ и происходит $\langle k, l_0\rangle$-навешивание знака «+», что невозможно в силу выбора шага $2s_0+1$. Итак, для всех $s = \langle k, l\rangle$ множество $\Phi_{l_0}^s\big(C \oplus \big(B_0 \cup \widetilde{T}^*_{\langle k,l_0\rangle}\big)\big)$ однозначно. Заметим, что в этом случае множество $\Phi_{l_0}\big(C \oplus \big(B_0 \cup \widetilde{T}^*_{\langle k_0,l_0\rangle}\big)\big)$ также однозначно.

Таким образом, из включения $C \oplus B \subseteq C \oplus \big(B_0 \cup \widetilde{T}^*_{\langle k_0,l_0\rangle}\big)$ мы получаем, что

$$\tau g = \Phi_{l_0}(C \oplus B) \subseteq \Phi_{l_0}\big(C \oplus \big(B_0 \cup \widetilde{T}^*_{\langle k_0,l_0\rangle}\big)\big),$$

откуда следует, что $\tau g = \Phi_{l_0}\big(C \oplus \big(B_0 \cup \widetilde{T}^*_{\langle k_0,l_0\rangle}\big)\big)$, т. е. $g \leq_e C \oplus (B_0 \cup \widetilde{T}^*_{\langle k_0,l_0\rangle})$, а так как $B_0 \cup \widetilde{T}^*_{\langle k_0,l_0\rangle}$ — вычислимое множество, то $g \leq_e C$, что и требовалось доказать.

Итак, доказано, что вышеприведенные шесть утверждений 1^o–6^o выполнены для всех $n = \langle k, l\rangle$, и это завершает доказательство леммы 6.2.

Лемма 6.3. *Для всех в.п. множеств W e-степень $d_e(C \oplus \bigcup_{k\in W} B^k)$ является $\mathbf{c}$-квазиминимальной, где $\mathbf{c} = d_e(C)$, и $d_e(C \oplus \bigcup_{k\in W} B^k) \leq \mathbf{a}$.*

Доказательство леммы 6.3. Пусть $f \leq_e C \oplus \bigcup_{k\in W} B^k$. Так как для всех $k \in \omega$

$$\forall x[x \in B^k \iff x \in B \wedge \exists l, y[\langle k,l,y\rangle = x]],$$

то $B^k \leq_e B$ для всех $k \in \omega$ и, следовательно, $\bigcup_{k\in W} B^k \leq_e B$. Поэтому $f \leq_e C \oplus B$, а так как по лемме 6.2 множество $C \oplus B$ является C-квазиминимальным, то $f \leq_e C$.

Все условия, проверяемые в ходе конструкции, и выполняемые действия вычислимы относительно множества A. Так как по условию $\overline{A} \leq_e A$, они вычислимы относительно произвольного перечисления A. Поэтому $C \oplus B \leq_e A$ (точнее $C \oplus B <_e A$ в силу нетотальности $d_e(C \oplus B)$) и $C \oplus \bigcup_{k\in W} B^k \leq_e A$. Лемма полностью доказана.

Лемма 6.4. *Отображение* $\epsilon(W) = d_e(C \oplus \bigcup_{k\in W} B^k)$ *является изоморфным вложением решетки в.п. множеств* $\Re$ *в* $\mathbf{Q_c}(\leq \mathbf{a})$.

Доказательство леммы 6.4. Из леммы 6.3 следует, что если W — в.п. множество, то $\epsilon(W) \in \mathbf{Q_c}(\leq \mathbf{a})$. Проверим, что для любых в.п. множеств V и W верно

$$V \subseteq W \iff \Big(C \oplus \bigcup_{k\in V} B^k\Big) \leq_e \Big(C \oplus \bigcup_{k\in W} B^k\Big).$$

Пусть $V \subseteq W$, тогда

$$C \oplus \bigcup_{k\in V} B^k = \Big(C \oplus \bigcup_{k\in W} B^k\Big) \cap (\omega \oplus \{\langle k, y\rangle : k \in V \wedge y \in \omega\}) \leq_e \Big(C \oplus \bigcup_{k\in W} B^k\Big).$$

Пусть теперь

$$\Big(C \oplus \bigcup_{k\in V} B^k\Big) \leq_e \Big(C \oplus \bigcup_{k\in W} B^k\Big).$$

Допустим, что $V \not\subseteq W$ и $m \in V \setminus W$, тогда $\{m\} \subseteq V$ и $W \subseteq \omega \setminus \{m\}$, откуда

$$B^m \leq_e \Big(C \oplus \bigcup_{k\in\{m\}} B^k\Big) \leq_e \Big(C \oplus \bigcup_{k\in V} B^k\Big) \leq_e \Big(C \oplus \bigcup_{k\in W} B^k\Big)$$
$$\leq_e \Big(C \oplus \bigcup_{k\in\omega\setminus\{m\}} B^k\Big) = C \oplus \widetilde{B}^m,$$

что противоречит лемме 6.2. Итак, $V \subseteq W$, и лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. В статье [6] показано существование в $\Re$ такого частично упорядоченного подмножества, в которое изоморфно вкладывается любое не более чем счетное частично упорядоченное множество. В лемме 6.4 показано, что $\Re$ изоморфно вложима в $\mathbf{Q_c}(\leq \mathbf{a})$. Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1967.
2. *McEvoy K.* Jumps of quasi-minimal enumeration degrees // J. Symbolic Logic. 1985. V. 50. P. 839–848.
3. *Медведев Ю. Т.* Степени трудности массовых проблем // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. С. 501–504.
4. *Case J.* Enumeration reducibility and partial degrees // Ann. Math. Logic. 1971. V. 4. P. 419–439.
5. *Sasso L. P.* A survey of partial degrees // J. Symbolic Logic. 1975. V. 40. P. 130–140.
6. *Goetze B. G* The structure of the lattice of recursive sets // Z. Math. Logik Grundlag Math. 1976. V. 22, N 2. P. 187–191.

Статья поступила 1 марта 2001 г., окончательный вариант — 25 мая 2002 г.

Солон Борис Яковлевич
Ивановский гос. химико-технологический университет,
кафедра высшей математики,
пр. Ф. Энгельса, 7, Иваново 153460
`solon@icti.ivanovo.su`