Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2003. Том 44, № 1

УДК 517.51

ОЦЕНКИ АППРОКСИМАТИВНЫХ ЧИСЕЛ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ. I

Е. Н. Ломакина

Аннотация: Получены асимптотические оценки аппроксимативных чисел интегрального оператора Харди с переменными пределами интегрирования.

Ключевые слова: оператор Харди с переменными пределами интегрирования, аппроксимативные числа, счетная функция последовательности аппроксимативных чисел

Пусть X и Y — банаховы пространства, $B : X \to Y$ — линейный ограниченный оператор. Последовательность *аппроксимативных чисел* (*a-чисел*) оператора B определена по формуле

$$a_m(B) = \inf_{P:X\to Y,\, \mathrm{rank}\, P<m} \|B - P\|, \quad m = 1, 2, \dots,$$

выражающей расстояние между оператором B и подпространством конечномерных операторов. В особом случае, когда X и Y — гильбертовы пространства, аппроксимативные числа совпадают с *сингулярными числами* (*s-числами*) в силу теоремы Аллахвердиева [1, теорема 2.1, с. 48] и являются поперечниками Колмогорова образа единичного шара пространства X при преобразовании B [2]. Очевидно, что

$$\|B\| = a_1(B) \geq a_2(B) \geq \dots \geq 0,$$

причем если Y сепарабельно, то $a_m(B) \to 0$ при $m \to \infty$ тогда и только тогда, когда B компактен. Если $\lim\limits_{m\to\infty} a_m(B) = \alpha > 0$, то α обычно называют *мерой некомпактности* оператора B.

Исследование аппроксимативных чисел проводилось в монографиях [3–7] и др. Основы теории s-чисел представлены в классической монографии [1]. Исторически изучению s- и a-чисел интегральных операторов предшествовали известные результаты Г. Вейля об асимптотической зависимости поведения s-чисел и собственных значений линейных операторов.

В дальнейшем оценкам s-чисел интегральных операторов было посвящено значительное количество работ многих авторов. Отметим основополагающую обзорную статью [8] (см. также подробную библиографию к [4]). Эта тематика продолжает интенсивно развиваться; укажем, например, недавнюю работу [9]. Исследование a-чисел интегральных операторов до последнего времени

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00239) и Министерства образования РФ (грант Е00–1.0–215).

оставалось менее детальным, в особенности это касается конкретных классов операторов. В работе [10] начали изучаться a-числа оператора Харди

$$Kf(x) = v(x) \int\limits_0^x u(y)f(y)\,dy$$

и были получены неявные асимптотические оценки их поведения. Кроме самостоятельного интереса, это изучение объясняется тесной связью получаемых результатов со спектральными задачами для полярных дифференциальных опертороов [11] и операторов вложения [7]. В дальнейшем эти результаты обобщались в работах Д. Э. Эдмундса и В. Д. Степанова [12] для операторов с полиномиальным ядром и Е. Н. Ломакиной и В. Д. Степанова [13, 14] на случай пространств Лоренца и банаховых функциональных пространств с условием Е. И. Бережного. В работе [15] получены асимптотические формулы типа Вейля и оценки норм Шаттена — Неймана для s-чисел оператора Римана — Лиувилля. Методы работы [15], основанные на теории квадратичных форм, не переносятся на негильбертов случай. Далее, Д. Э. Эдмундс, В. Д. Эванс и Д. Ж. Харрис [16] предложили альтернативный метод приближения весовых функций оператора $K : L^p \to L^p$ ступенчатыми функциями для получения явных асимптотических оценок a-чисел и оценок норм Шаттена — Неймана. Эти результаты обобщены на случай $K : L^p \to L^q$, $1 < p, q < \infty$, в работах [17, 18]. Наиболее полное исследование задачи об асимптотике a-чисел оператора $K : L^p \to L^q$ содержится в работе [19], где получены двухсторонние асимптотические оценки для всех значений $1 < p, q < \infty$, кроме случая $1 < p < 2 < q < \infty$, где оценки сверху и снизу расходятся. Двусторонние оценки норм Шаттена — Неймана интегрального оператора Вольтерра при некоторых ограничениях на ядро найдены В. Д. Степановым [20].

Пусть $1 < p < \infty$. Обозначим через $L^p(\mathbb{R}^+)$ пространство Лебега всех измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} = \left(\int\limits_0^\infty |f(x)|^p\,dx \right)^{1/p}.$$

В настоящей работе изучается поведение a-чисел интегрального оператора $H : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^q(\mathbb{R}^+)$ с переменными пределами интегрирования вида

$$Hf(x) = v(x) \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} u(y)f(y)\,dy, \tag{1}$$

где $u(y) \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$, $v(x) \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$ и $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — возрастающие дифференцируемые функции такие, что $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(x) < \psi(x)$ для $x \in (0, \infty)$ и $\varphi(\infty) = \psi(\infty) = \infty$. Для функций, обратных φ и ψ, мы используем символы φ^{-1} и ψ^{-1}.

Операторы вида (1), кроме самостоятельного значения, интересны еще и тем, что характеризуют некоторые теоремы вложения Соболева [21] и имеют приложения к изучению операторов Шредингера на полуоси.

Работа состоит из двух частей. В первой части устанавливаются асимптотические оценки сверху для a-чисел оператора (1), которые в гильбертовом случае при $p = q = 2$, т. е. для s-чисел, являются двусторонними. Во второй части рассматриваются оценки норм типа Шаттена — Неймана.

Остановимся на краткой характеристике основных результатов и методов работы. Мы находим асимптотические оценки поведения аппроксимативных чисел компактного оператора (1), обобщающие результаты [16–19]. В случае $H : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, при незначительных ограничениях на весовые функции u и v имеет место оценка сверху

$$\limsup_{n\to\infty} na_n(H) \ll \int\limits_0^\infty |v(x)|(|u(\varphi(x))|(\varphi'(x))^{1/p'} + |u(\psi(x))|(\psi'(x))^{1/p'})\,dx.$$

В гильбертовом случае, когда $H : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+)$, получена эквивалентность

$$\limsup_{n\to\infty} na_n(H) \approx \int\limits_0^\infty |v(x)|[|u(\varphi(x))|\sqrt{\varphi'(x)} + |u(\psi(x))|\sqrt{\psi'(x)}]\,dx.$$

Для $H : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^q(\mathbb{R}^+)$ если $1 < q < p < \infty$ или $1 < p < q \leq 2$, или $2 \leq p < q < \infty$, при $\lambda = \min\{1, 1/r\}$, где $1/r = 1/p' + 1/q$, доказана оценка сверху

$$\limsup_{n\to\infty} n^\lambda a_n(H) \ll \biggl(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\biggl[\int\limits_{\Delta_k} |v(x)|^r|u(\varphi(x))|^r(\varphi'(x))^{r/p'}\biggr]^{1/r}$$
$$+ \sum_{k\in\mathbb{Z}}\biggl[\int\limits_{\Delta_k} |v(x)|^r|u(\psi(x))|^r(\psi'(x))^{r/p'}\biggr]^{1/r}\biggr),$$

где $\mathbb{R}^+ = \bigcup\limits_k \Delta_k$ — разбиение полуоси на специально подобранные непересекающиеся интервалы, зависящие от граничных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ (см. (10)). В случае параметров $1 < p < 2 < q < \infty$ с $\lambda = 1/2 + \min\{1/p', 1/q\}$ оценка сверху отличается от предыдущей.

Напомним, что *счетная функция* последовательности $\{a_n(H)\}$ задается в виде

$$n(t, a(H)) = \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} : a_k(H) > t\}, \quad t > 0.$$

Хорошо известно [16], что

$$\lim_{n\to\infty} na_n(H) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon n(t, a(H))$$

и

$$\liminf_{n\to\infty} na_n(H) = \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon n(t, a(H)), \quad \limsup_{n\to\infty} na_n(H) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon n(t, a(H)).$$

Для доказательства указанных результатов сначала мы получаем оценки для a-чисел операторов с одним переменным пределом интегрирования

$$Sf(x) = v(x) \int\limits_0^{\psi(x)} u(y)f(y)\,dy \tag{2}$$

и

$$Tf(x) = v(x) \int\limits_{\varphi(x)}^{\infty} u(y) f(y)\, dy, \tag{3}$$

которые следуют из работ [16, 19] после замены переменных.

Затем в соответствии с разбиением $\mathbb{R}^+ = \bigcup\limits_k \Delta_k$ мы представляем оператор H в виде суммы двух операторов $H = \Phi + \Psi$, имеющих блочно-диагональную структуру. На каждом участке разбиения $\Delta_k = [\zeta_k, \zeta_{k+1})$ выполняется равенство

$$Hf(x) = v(x) \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(\zeta_k)} u(y) f(y)\, dy + v(x) \int\limits_{\psi(\zeta_k)}^{\psi(x)} u(y) f(y)\, dy,$$

которое позволяет в дальнейшем использовать результаты, аналогичные полученным для операторов (2) и (3) с одним переменным пределом.

Без потери общности всюду в статье неопределенности вида $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞ полагаются равными нулю. Неравенство $A \ll B$ означает $A \le CB$, где константа C зависит только от p, q; соотношение $A \approx B$ понимается как $A \ll B \ll A$; $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ — множество всех целых и натуральных чисел соответственно, $\|K\|_{X \to Y}$ обозначает норму линейного оператора $K : X \to Y$, а символ $\square$ — окончание доказательства.

Асимптотические оценки

Нам понадобятся критерии об ограниченности и компактности операторов S и T с одним переменным пределом интегрирования, которые содержатся в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$.

(a1) *Оператор* S *ограничен из* $L^p(\mathbb{R}^+)$ *в* $L^q(\mathbb{R}^+)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{A}_1 = \sup_{t>0} A_\psi(t) = \sup_{t>0} \left(\int\limits_0^{\psi(t)} |u(y)|^{p'}\, dy \right)^{1/p'} \left(\int\limits_t^{\infty} |v(x)|^q\, dx \right)^{1/q} < \infty,$$

причем $\|S\|_{L^p(\mathbb{R}^+) \to L^q(\mathbb{R}^+)} \approx \mathcal{A}_1$. *Более того, оператор* $S : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^q(\mathbb{R}^+)$ *компактен в том и только в том случае, если*

$$\mathcal{A}_1 < \infty, \quad \lim_{t \to 0} A_\psi(t) = \lim_{t \to \infty} A_\psi(t) = 0.$$

(a2) *Оператор* T *ограничен из* $L^p(\mathbb{R}^+)$ *в* $L^q(\mathbb{R}^+)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{A}_2 = \sup_{t>0} A_\varphi(t) = \sup_{t>0} \left(\int\limits_{\varphi(t)}^{\infty} |u(y)|^{p'}\, dy \right)^{1/p'} \left(\int\limits_0^{t} |v(x)|^q\, dx \right)^{1/q} < \infty,$$

причем $\|T\|_{L^p(\mathbb{R}^+) \to L^q(\mathbb{R}^+)} \approx \mathcal{A}_2$. *Более того, оператор* $T : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^q(\mathbb{R}^+)$ *компактен в том и только в том случае, если*

$$\mathcal{A}_2 < \infty, \quad \lim_{t \to 0} A_\varphi(t) = \lim_{t \to \infty} A_\varphi(t) = 0.$$

Пусть $1 < q < p < \infty$, $1/s = 1/q - 1/p$.

(b1) *Если оператор S ограничен из $L^p(\mathbb{R}^+)$ в $L^q(\mathbb{R}^+)$, то*

$$\mathcal{B}_1 = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^{\psi(x)} |u|^{p'} \right)^{s/p'} \left(\int_x^\infty |v|^q \right)^{\frac{s}{q}-1} |v(x)|^q \, dx \right)^{1/s} < \infty.$$

Кроме того, $\|S\|_{L^p(\mathbb{R}^+)\to L^q(\mathbb{R}^+)} \approx \mathcal{B}_1$ и $S : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^q(\mathbb{R}^+)$ компактен, если $\mathcal{B}_1 < \infty$.

(b2) *Если оператор T ограничен из $L^p(\mathbb{R}^+)$ в $L^q(\mathbb{R}^+)$, то*

$$\mathcal{B}_2 = \left(\int_0^\infty \left(\int_{\varphi(x)}^\infty |u|^{p'} \right)^{s/p'} \left(\int_0^x |v|^q \right)^{\frac{s}{q}-1} |v(x)|^q \, dx \right)^{1/s} < \infty.$$

Кроме того, $\|T\|_{L^p(\mathbb{R}^+)\to L^q(\mathbb{R}^+)} \approx \mathcal{B}_2$ и $T : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^q(\mathbb{R}^+)$ компактен, если $\mathcal{B}_2 < \infty$.

Доказательство теоремы можно получить заменой переменных из известных результатов об ограниченности и компактности оператора Харди (см., например, [22 § 1.3]). □

Нам также потребуются очевидные аналоги теоремы 1 для конечного интервала.

Пусть $0 < a < b < \infty$, $\Delta = [a, b] \subset \mathbb{R}^+$, $J = [\psi(a), \psi(b)] \subset \mathbb{R}^+$. Рассмотрим оператор $S_{u,v;\Delta} : L^p(J) \to L^q(\Delta)$ вида

$$S_{u,v;\Delta} f(x) = v(x) \left\{ \int_{\psi(a)}^{\psi(x)} f(y) u(y)\, dy - \frac{\int_a^b \left(\int_{\psi(a)}^{\psi(t)} fu \right) |v(t)|^q \, dt}{\int_a^b |v(t)|^q \, dt} \right\}, \quad x \in \Delta.$$

Положим

$$\gamma_{pq} = \sup_{\|f\|_{L^p_{[0,1]}} \le 1} \left(\int_0^1 \left| \int_0^1 \left(\int_t^x f(\tau)\, d\tau \right) dt \right|^q dx \right)^{1/q}. \tag{4}$$

Хорошо известно, что $\gamma_{22} = 1/\pi$.

В следующем утверждении мы находим норму оператора $S_{u,v;\Delta}$, когда весовые функции постоянны, а верхняя граница интегрирования — линейная функция.

Лемма 1. *Пусть $1 < p, q < \infty$, $1/r = 1 - 1/p + 1/q$, весовые функции $u = u_0$ и $v = v_0$ постоянны, $\psi(x) = c_1 x + c_2$. Тогда*

$$\|S_{u_0,v_0;\Delta}\|^r_{L^p(J)\to L^q(\Delta)} = \gamma^r_{pq} |u_0|^r |v_0|^r |b-a| (\psi'(x))^{r/p'},$$

где γ_{pq} определяется формулой (4).

Доказательство. Имеем

$$S_{u_0,v_0;\Delta} f(x) = \frac{u_0 \cdot v_0}{|\Delta|} \int_\Delta \left(\int_{\psi(t)}^{\psi(x)} f(y)\, dy \right) dt,$$

$$\|S_{u_0,v_0;\Delta}\| = \frac{|u_0|\cdot|v_0|}{|\Delta|}\sup_{f\neq 0}\frac{\left(\int\limits_\Delta\left|\int\limits_\Delta\left(\int\limits_{\psi(t)}^{\psi(x)} f(y)\,dy\right)dt\right|^q dx\right)^{1/q}}{\left(\int\limits_J |f(y)|^p\,dy\right)^{1/p}}.$$

Заменой переменных

$$x = a + (b-a)x', \quad t = a + (b-a)t', \quad y = (c_1 a + c_2) + (c_1(b-a)\tau)$$

получаем

$$\|S_{u_0,v_0;\Delta}\| = |u_0|\cdot|v_0|\cdot c_1^{1/p'}\cdot|\Delta|^{1/r}\cdot\sup_{f\neq 0}\frac{\left(\int\limits_0^1\left|\int\limits_0^1\left(\int\limits_{t'}^{x'}\tilde f(\tau)\,d\tau\right)dt'\right|^p dx'\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^1|\tilde f(\tau)|^p\,d\tau\right)^{1/p}},$$

где $\tilde f(\tau) = \left(f((c_1a+c_2)+c_1(b-a)\tau)c_1^{1/p}\right)$, и результат следует из определения (4). □

Пусть последовательность $\{\xi_n\}$ задана формулой

$$U(\psi(\xi_n)) = \int\limits_0^{\psi(\xi_n)}|u(t)|^{p'}\,dt = 2^n, \quad n\in\mathbb{Z},\ n\le N_\psi\le\infty. \tag{5}$$

Заметим, что если $\|u\|_{L^{p'}} = \infty$, то $\{\psi(\xi_n)\}$ существует для всех $n\in\mathbb{Z}$, т. е. $N_\psi = \infty$. Определим

$$\tilde\sigma_n = \|u\|_{L^{p'}_{(\psi(\xi_n),\psi(\xi_{n+1}))}}\|v\|_{L^q_{(\xi_n,\xi_{n+1})}}$$

и

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde\sigma_n^r\right)^{1/r} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}2^{nr/p'}\left(\int\limits_{\xi_n}^{\xi_{n+1}}|v(x)|^q\,dx\right)^{r/q}\right)^{1/r}$$

$$= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\|u\|^r_{L^{p'}_{(\psi(\xi_n),\psi(\xi_{n+1}))}}\|v\|^r_{L^q_{(\xi_n,\xi_{n+1})}}\right)^{1/r}. \tag{6}$$

Аналогично для интегрального оператора $T : L^p(\mathbb{R}^+)\to L^q(\mathbb{R}^+)$ зададим последовательность $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ равенством

$$U(\varphi(\tau_n)) = \int\limits_{\varphi(\tau_n)}^\infty|u(y)|^{p'}\,dy = 2^{-n} \tag{7}$$

и положим

$$\tilde\varkappa_n = \|u\|_{L^{p'}_{(\varphi(\tau_n),\varphi(\tau_{n+1}))}}\|v\|_{L^q_{(\tau_n,\tau_{n+1})}},$$

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde\varkappa_n^r\right)^{1/r} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\|u\|^r_{L^{p'}_{(\varphi(\tau_n),\varphi(\tau_{n+1}))}}\|v\|^r_{L^q_{(\tau_n,\tau_{n+1})}}\right)^{1/r}. \tag{8}$$

Пусть $1/r = 1/p' + 1/q$, определим параметр

$$\lambda = \begin{cases} 1, & 1<q<p<\infty,\\ 1/r, & 1<p\le q\le 2, 2\le p\le q<\infty,\\ 1/2+\min\{1/p',1/q\}, & 1<p\le 2\le q<\infty.\end{cases} \tag{9}$$

В следующей теореме мы даем асимптотические оценки для операторов S и T.

Теорема 2. *Предположим, что весовые функции*

$$u \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+), \quad v \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$$

таковы, что операторы $S : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^q(\mathbb{R}^+)$ *и* $T : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^q(\mathbb{R}^+)$, *определенные формулами* (2), (3), *компактны.*

1.1. *Пусть* $\lambda = \min\{1, 1/r\}$, $\Delta = (a,b) \subset \mathbb{R}^+$, $J = (\psi(a), \psi(b))$, $u \in L^{p'}(J)$, $v \in L^q(\Delta)$. *Тогда*

$$c(p,q)\bigg(\int\limits_\Delta |u(\psi(x))|^r |v(x)|^r (\psi'(x))^{r/p'}\, dx\bigg)^{1/r} \le \liminf_{n\to\infty} n^\lambda a_n(S)$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} n^\lambda a_n(S) \le c(p,q)\bigg(\int\limits_\Delta |u(\psi(x))|^r |v(x)|^r (\psi'(x))^{r/p'}\, dx\bigg)^{1/r}.$$

1.2. *Пусть* $\lambda = \min\{1, 1/r\}$, $\Delta = (a,b) \subset \mathbb{R}^+$, $I = (\varphi(a), \varphi(b))$, $u \in L^{p'}(I)$, $v \in L^q(\Delta)$. *Тогда*

$$c(p,q)\bigg(\int\limits_\Delta |u(\varphi(x))|^r |v(x)|^r (\varphi'(x))^{r/p'}\, dx\bigg)^{1/r} \le \liminf_{n\to\infty} n^\lambda a_n(T)$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} n^\lambda a_n(T) \le c(p,q)\bigg(\int\limits_\Delta |u(\varphi(x))|^r |v(x)|^r (\varphi'(x))^{r/p'}\, dx\bigg)^{1/r}.$$

2. *Пусть* $S, T : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+)$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \tilde\sigma_n < \infty$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \tilde\varkappa_n < \infty$. *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} N a_N(S) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty |u(\psi(x))||v(x)|\sqrt{\psi'(x)}\, dx,$$

$$\lim_{N\to\infty} N a_N(T) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty |u(\varphi(x))||v(x)|\sqrt{\varphi'(x)}\, dx.$$

3. *Пусть* $1 < q < p < \infty$ *или* $1 < p \le q \le 2$, *или* $2 \le p \le q < \infty$ *с* $\lambda = \min\{1, 1/r\}$ *и* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \tilde\sigma_n^r < \infty$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \tilde\varkappa_n^r < \infty$. *Тогда*

$$c(p,q)\left(\int\limits_0^\infty |u(\psi(x))|^r |v(x)|^r (\psi'(x))^{r/p'}\, dx\right)^{1/r} \le \liminf_{n\to\infty} n^\lambda a_n(S)$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} n^\lambda a_n(S) \le c(p,q)\left(\int\limits_0^\infty |u(\psi(x))|^r |v(x)|^r (\psi'(x))^{r/p'}\, dx\right)^{1/r}$$

и

$$c(p,q)\left(\int\limits_0^\infty |u(\varphi(x))|^r |v(x)|^r (\varphi'(x))^{r/p'}\, dx\right)^{1/r} \le \liminf_{n\to\infty} n^\lambda a_n(T)$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} n^\lambda a_n(T) \le c(p,q)\left(\int\limits_0^\infty |u(\varphi(x))|^r |v(x)|^r (\varphi'(x))^{r/p'}\, dx\right)^{1/r}.$$

4. *Пусть* $1 < q \le p < \infty$ *или* $1 < p \le q \le 2$, *или* $2 \le p \le q < \infty$ *с* $\lambda = \min\{1, 1/r\}$. *Тогда*

$$\sup_n n^\lambda a_n(S) \le c(p,q)\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\sigma}_n^r\Big)^{1/r}, \quad \sup_n n^\lambda a_n(T) \le c(p,q)\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\varkappa}_n^r\Big)^{1/r}.$$

5. *Пусть* $1 < p < 2 < q < \infty$, $\lambda = 1/2 + \min\{1/p', 1/q\}$,

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\sigma}_n^{1/\lambda}\Big)^\lambda < \infty, \quad \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\varkappa}_n^{1/\lambda}\Big)^\lambda < \infty.$$

Тогда

$$\sup_n n^\lambda a_n(S) \le c(p,q)\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\sigma}_n^{1/\lambda}\Big)^\lambda, \quad \sup_n n^\lambda a_n(T) \le c(p,q)\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\varkappa}_n^{1/\lambda}\Big)^\lambda,$$

$$c(p,q)\left(\int\limits_0^\infty |u(\psi(x))|^r |v(x)|^r (\psi'(x))^{r/p'}\,dx\right)^{1/r} \le \liminf_{n\to\infty} n^\lambda a_n(S)$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} n^\lambda a_n(S) \le c(p,q) \inf_\Delta \left\{ \left(\sum_{n=1}^N \|u\|^{1/\lambda}_{L^{p'}_{(J_k)}} \|v\|^{1/\lambda}_{L^q_{(\Delta_k)}} \right)^\lambda \right\}$$

и

$$c(p,q)\left(\int\limits_0^\infty |u(\varphi(x))|^r |v(x)|^r (\varphi'(x))^{r/p'}\,dx\right)^{1/r} \le \liminf_{n\to\infty} n^\lambda a_n(T)$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} n^\lambda a_n(T) \le c(p,q) \inf_\Delta \left\{ \left(\sum_{n=1}^N \|u\|^{1/\lambda}_{L^{p'}_{(I_k)}} \|v\|^{1/\lambda}_{L^q_{(\Delta_k)}} \right)^\lambda \right\},$$

где inf *берется по всем счетным разбиениям интервала* $\Delta = \{\Delta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Доказательство. Заменой переменой $y = \psi(x)$ получаем

$$Sf(x) = v(x) \int\limits_0^{\psi(x)} u(y) f(y)\,dy = v(x) \int\limits_0^x u(\psi(t)) f(\psi(t)) \psi'(t)\,dt.$$

Отсюда следует, что оператор

$$S = K \circ \Psi$$

является суперпозицией метрического изоморфизма

$$\Psi : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^p(\mathbb{R}^+), \quad \Psi : f(t) \to f(\psi(t))[\psi'(t)]^{1/p}$$

и оператора $K : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^q(\mathbb{R}^+)$,

$$Kg(x) = v(x) \int\limits_0^x u_{\psi(x)}(t) g(t)\,dt,$$

где $u_{\psi(x)}(t) = u(\psi(t))[\psi'(t)]^{1/p'}$. В силу известных свойств a-чисел $[4, 6]$ имеем

$$a_n(S) \le \|\Psi\| a_n(K),$$

а также
$$a_n(K) \le \|\Psi^{-1}\| a_n(S).$$
Поскольку $\|\Psi\|_{L^p\to L^p} = \|\Psi^{-1}\|_{L^p\to L^p} = 1$, то $a_n(S) = a_n(K)$. Поэтому, используя результаты [19, теорема 6.20; 16; 17, теорема 1; 18], получаем требуемые оценки.

Асимптотические оценки для оператора T выводятся аналогично заменой $y = \varphi(x)$. $\square$

Для дальнейших исследований мы строим специальное разбиение $(0,\infty) = \bigcup\limits_k \Delta_k$, где $\Delta = [\zeta_k, \zeta_{k+1})$ и $\delta_k = [\eta_k, \eta_{k+1})$ определяются для $k \in \mathbb{Z}$ следующим образом:
$$\begin{gathered} \zeta_0 = 1, \quad \eta_0 = \varphi(1), \quad \eta_1 = \psi(1), \\ \zeta_{k+1} = (\varphi^{-1}\circ\psi)^k(1), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \eta_k = \psi(\varphi^{-1}\circ\psi)^{k-1}(1), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{10}$$
Пусть $x \in \Delta_k = [\zeta_k, \zeta_{k+1})$, тогда
$$Hf(x) = \Phi_k f(x) + \Psi_k f(x),$$
где
$$\Phi_k f(x) = v(x) \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(\zeta_k)} u(y) f(y)\,dy, \quad \Psi_k f(x) = v(x) \int\limits_{\psi(\zeta_k)}^{\psi(x)} u(y) f(y)\,dy.$$

Будем говорить, что оператор $B : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^q(\mathbb{R}^+)$ имеет *блочно-диагональное разложение*, если существуют два семейства дизъюнктных интервалов $\{\delta_k\}$ и $\{\Delta_k\}$ такие, что $(0,\infty) = \bigcup\limits_k \delta_k$, $(0,\infty) = \bigcup\limits_k \Delta_k$ и
$$Bf(x) = \sum_k \chi_{\Delta_k}\left(B(f\chi_{\delta_k})\right)(x).$$

Пусть
$$P_k f(y) = \chi_{\delta_k}(y) f(y), \quad Q_k f(x) = \chi_{\Delta_k}(x) f(x).$$
Очевидно,
$$\|P_k\|_{L^p\to L^p} = 1, \quad \|Q_k\|_{L^q\to L^q} = 1.$$
Положим
$$B_k = Q_k B P_k$$
и обозначим через $\widetilde{B}_k$ сужение B_k на $L^p(\delta_k)$, т. е. $B_k f = \widetilde{B}_k f$ для всех $f \in L^p(\delta_k)$. Легко видеть, что
$$a(B_k) = a(\widetilde{B}_k).$$
Отметим также, что при $1 < p \le q < \infty$
$$\|B\|_{L^p\to L^q} = \sup_k \|B_k\|_{L^p\to L^q} = \sup_k \|\widetilde{B}_k\|_{L^p(\delta_k)\to L^q(\Delta_k)}.$$

Итак,
$$H = \Phi + \Psi = \sum_k \Phi_k + \sum_k \Psi_k = \sum_k Q_k H P_k + \sum_k Q_k H P_{k+1}, \tag{11}$$
где Φ и Ψ имеют блочно-диагональное разложение.

Обозначим через $n(\varepsilon, a(B)) = n(\varepsilon, B)$ счетную функцию последовательности $\{a_k(B)\}$.

Лемма 2. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$, $B : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^q(\mathbb{R}^+)$ *— компактный оператор, имеющий блочно-диагональное разложение* $B = \sum\limits_k B_k$. *Тогда для всех* $\varepsilon > 0$

$$n(\varepsilon, B) \le \sum_k n(\varepsilon, B_k). \tag{12}$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $n_k = n(\varepsilon, B_k)$. Тогда

$$a_{n_k+1}(B_k) \le \varepsilon$$

и для произвольного $\lambda > 1$ существует оператор $S_k : L^p \to L^q$ такой, что $\mathrm{rank} S_k \le n_k$ и $\varepsilon\lambda \ge \|B_k - S_k\|$. Имеем

$$\varepsilon\lambda \ge \sup_{f\ne 0} \frac{\|B_k f - S_k f\|_q}{\|f\|_p} = \sup_{f\ne 0} \frac{\|Q_k B_k P_k f - S_k f\|_q}{\|f\|_p}.$$

Поскольку

$$\|Q_k B_k P_k f - S_k f\|_q^q = \|Q_k B_k P_k f - Q_k S_k f\|_q^q + \|(I - Q_k) S_k f\|_q^q,$$

то

$$\varepsilon\lambda \ge \sup_{f\ne 0} \frac{\|Q_k B_k P_k f - Q_k S_k f\|_q}{\|f\|_p} \ge \sup_{f\ne 0 : P_k f = f} \frac{\|Q_k B_k P_k f - Q_k S_k P_k f\|_q}{\|f\|_p}$$
$$= \sup_{f\ne 0} \frac{\|Q_k (B_k - S_k) P_k f\|_q}{\|f\|_p} = \|Q_k (B_k - S_k) P_k\|.$$

Если обозначить

$$S = \sum_k Q_k S_k P_k,$$

то $\mathrm{rank}\, S \le \sum\limits_k n_k$ и

$$a_{\sum n_k + 1}(B) \le \lambda\varepsilon.$$

Так как $\lambda > 1$ было выбрано произвольно, получаем

$$a_{\sum n_k + 1}(B) \le \varepsilon,$$

которое означает, что $n(\varepsilon, B) \le \sum\limits_k n_k$. $\square$

Для того чтобы получить оценки аппроксимативных чисел оператора H с переменными пределами интегрирования, нам необходимо еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Пусть для последовательностей* $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $a_k \ge 0$, $b_k \ge 0$, *при любом* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство* $\sum\limits_1^n a_k \le \sum\limits_1^n b_k$. *Тогда*

$$\liminf_{n\to\infty} n a_n \le \limsup_{n\to\infty} n b_n. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_1^n a_k$ сходится. Тогда по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такое, что при $n > n_0$ и любых $p > 0$ выполнено $\sum\limits_{k=n}^{p+n} a_k < \varepsilon$. Поэтому

$$\varepsilon > \sum_{k=n}^{p+n} a_k = \sum_{k=n}^{p+n} a_k \cdot k \cdot \frac{1}{k} \ge (\inf_{m\ge n} a_m \cdot m) \sum_{k=n}^{p+n} \frac{1}{k} \quad \text{для любых } p > 0$$

и из расходимости ряда $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k}$ следует, что $\inf\limits_{m\geq n} a_m m = 0$ для всех $n > n_0$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\inf na_n = 0$, и соотношение (13) выполнено. Пусть теперь ряд $\sum\limits_{1}^{n} a_k$ расходится.

Случай 1. Существует $\{a_{k_s}\}$ такая, что $a_{k_s} \leq b_{k_s}$ для любых $s \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\liminf_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n} ka_k \leq \lim_{n\to\infty}\inf_{s:k_s\geq n} k_s a_{k_s}$$
$$\leq \lim_{n\to\infty}\sup_{s:k_s\geq n} k_s b_{k_s} \leq \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n} kb_k = \limsup_{n\to\infty} nb_n.$$

Случай 2. Начиная с некоторого номера n_0 всегда $a_n > b_n$, $n > n_0$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty}(a_k - b_k)$ сходится. Предположим противное: существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что $\sum\limits_{k=n_0+1}^{n_0+p}(a_k - b_k) > \sum\limits_{k=1}^{n_0} b_k$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n_0+p} a_k = \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p}(a_k - b_k) + \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} b_k > \sum_{k=1}^{n_0+p} b_k,$$

что противоречит условию леммы.

Обозначим $c_k = a_k - b_k$, $k \geq n_0 + 1$. Из первого случая следует, что

$$\liminf_{n\to\infty} nc_n = 0.$$

Зафиксируем $n > n_0$. Тогда для любых $m \geq n$ равенство $a_m = b_m + c_m$ влечет

$$ma_m = mb_m + mc_m \leq \sup_{k\geq n} kb_k + mc_m.$$

Следовательно,

$$\inf_{m\geq n}(ma_m) \leq \inf_{m\geq n}(\sup_{k\geq n} kb_k + mc_m) = \sup_{k\geq n}(kb_k) + \inf_{m\geq n}(mc_m).$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$, получаем требуемую оценку. $\square$

Пусть последовательности $\{\xi_{k,n}\} \in \Delta_k$ и $\{\tau_{k,n}\} \in \Delta_k$ заданы по аналогии с формулами (5) и (7) следующими формулами:

$$\int\limits_{\psi(\zeta_k)}^{\psi(\xi_{k,n})} |u(t)|^{p'}\,dt = 2^n, \int\limits_{\varphi(\tau_{k,n})}^{\varphi(\zeta_{k+1})} |u(t)|^{p'}\,dt = 2^{-n}.$$

Положим

$$\sigma_{k,n} = \left(\int\limits_{\psi(\zeta_k)}^{\psi(\xi_{k,n})} |u(t)|^{p'} dt\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{\xi_{k,n}}^{\xi_{k,n+1}} |v(x)|^q dx\right)^{1/q},$$

$$\varkappa_{k,n} = \left(\int\limits_{\varphi(\tau_{k,n})}^{\varphi(\zeta_{k+1})} |u(t)|^{p'}\,dt\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{\tau_{k,n}}^{\tau_{k,n+1}} |v(x)|^q dx\right)^{1/q}.$$

Теорема 3. 1. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Предположим, что оператор* $H : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^p(\mathbb{R}^+)$ *вида* (1) *компактен и*

$$\sum_k \sum_n \sigma_{k,n} < \infty, \quad \sum_k \sum_n \varkappa_{k,n} < \infty.$$

Тогда выполнена оценка сверху

$$\limsup_{n\to\infty} n a_n(H) \ll \int\limits_0^\infty |v(x)|(|u(\varphi(x))|(\varphi'(x))^{1/p'} + |u(\psi(x))|(\psi'(x))^{1/p'})\, dx,$$

а при $p = 2$ *имеет место эквивалентность*

$$\limsup_{n\to\infty} n a_n(H) \approx \int\limits_0^\infty |v(x)|[|u(\varphi(x))|\sqrt{\varphi'(x)} + |u(\psi(x))|\sqrt{\psi'(x)}]\, dx.$$

2. *Пусть* $1 < q < p < \infty$ *или* $1 < p < q \le 2$, *или* $2 \le p < q < \infty$, $1/r = 1/p' + 1/q$ *и* $\lambda = \min\{1, 1/r\}$. *Пусть оператор* $H : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^q(\mathbb{R}^+)$ *компактен и*

$$\sum_k \sum_n \sigma_{k,n}^\lambda < \infty, \quad \sum_k \sum_n \varkappa_{k,n}^\lambda < \infty.$$

Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} n^\lambda a_n(H) \ll \Bigg\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Bigg[\int\limits_{\Delta_k} |v(x)|^r |u(\varphi(x))|^r (\varphi'(x))^{r/p'} \Bigg]^{1/r} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Bigg[\int\limits_{\Delta_k} |v(x)|^r |u(\psi(x))|^r (\psi'(x))^{r/p'} \Bigg]^{1/r} \Bigg\}.$$

3. *Пусть* $1 < p < 2 < q < \infty$, $\lambda = 1/2 + \min\{1/p', 1/q\}$, *оператор* $H : L^p(\mathbb{R}^+) \to L^q(\mathbb{R}^+)$ *компактен и*

$$\sum_k \sum_n \sigma_{k,n}^\lambda < \infty, \quad \sum_k \sum_n \varkappa_{k,n}^\lambda < \infty.$$

Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} n^\lambda a_n(H) \ll \Bigg\{ \sum_k \Bigg[\inf_{\beta_k} \Bigg(\sum_{m=1}^N \|u\|^{1/\lambda}_{L^{p'}_{(\delta_{k,m})}} \|v\|^{1/\lambda}_{L^q_{(\Delta_{k,m})}} \Bigg)^\lambda \Bigg] + \sum_k \Bigg[\inf_{\beta_k} \Bigg(\sum_{m=1}^N \|u\|^{1/\lambda}_{L^{p'}_{(\delta_{k+1,m})}} \|v\|^{1/\lambda}_{L^q_{(\Delta_{k,m})}} \Bigg)^\lambda \Bigg] \Bigg\},$$

где $\inf$ *берется по всем конечным дизъюнктным разбиениям*

$$\beta_k = \{\Delta_{k,1}, \Delta_{k,2}, \dots \Delta_{k,N}\}$$

интервала Δ_k.

Доказательство. Используя лемму 2 о счетных функциях и теорему 2, получаем

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} na_n(H) &= \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon n(\varepsilon, a(H)) \le \sum_k \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon n(\varepsilon, a(H_k))\\ &\le \sum_k \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon n(\varepsilon, a(\Phi_k)) + \sum_k \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon n(\varepsilon, a(\Psi_k))\\ &= \sum_k \limsup_{n\to\infty} na_n(\Phi_k) + \sum_k \limsup_{n\to\infty} na_n(\Psi_k)\\ &\le \gamma_{pp} \sum_k \int\limits_{\Delta_k} |v(x)||u(\varphi(x))|(\varphi'(x))^{1/p'}\,dx + \gamma_{pp} \sum_k \int\limits_{\Delta_k} |v(x)||u(\psi(x))|(\psi'(x))^{1/p'}\,dx\\ &= \gamma_{pp} \int\limits_0^\infty |v(x)|(|u(\varphi(x))|(\varphi'(x))^{1/p'} + |u(\psi(x))|(\psi'(x))^{1/p'})\,dx.\end{aligned}$$

При $p = 2$, применяя теорему 5.1 из [1, с. 74] с операторами (11)

$$\Phi = \sum_k P_k H Q_k, \quad \Psi = \sum_k P_k H Q_{k+1},$$

выводим, что

$$\sum_{m=1}^n a_m(\Phi) \le \sum_{m=1}^n a_m(H), \quad \sum_{m=1}^n a_m(\Psi) \le \sum_{m=1}^n a_m(H).$$

В силу леммы 3

$$\liminf_{n\to\infty} na_n(\Phi) \le \limsup_{n\to\infty} na_n(H), \quad \liminf_{n\to\infty} na_n(\Psi) \le \limsup_{n\to\infty} na_n(H).$$

Далее,

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} na_n(\Phi) &= \sum_k \liminf_{n\to\infty} na_n(\Phi_k)\\ &\ge \frac{1}{\pi} \sum_k \int\limits_{\Delta_k} |v(x)||u(\varphi(x))|\sqrt{\varphi'(x)}\,dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty |v(x)||u(\varphi(x))|\sqrt{\varphi'(x)}\,dx.\end{aligned}$$

Таким же образом для второго оператора получаем

$$\liminf_{n\to\infty} na_n(\Psi) \ge \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty |v(x)||u(\psi(x))|\sqrt{\psi'(x)}\,dx.$$

В результате, складывая установленные выше две оценки, имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty |v(x)|[|u(\varphi(x))|\sqrt{\varphi'(x)} + |u(\psi(x))|\sqrt{\psi'(x)}]\,dx &\le \limsup_{n\to\infty} na_n(H)\\ &\le \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty |v(x)|[|u(\varphi(x))|\sqrt{\varphi'(x)} + |u(\psi(x))|\sqrt{\psi'(x)}]\,dx.\end{aligned}$$

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы. Используя лемму 2 о счетных функциях и пп. 1.1, 1.2 теоремы 2 , получаем

$$\limsup_{n\to\infty} n^{\lambda} a_n(H) = \sum_k \limsup_{n\to\infty} n^{\lambda} a_n(\Phi_k) + \sum_k \limsup_{n\to\infty} n^{\lambda} a_n(\Psi_k)$$
$$\ll \sum_k \Bigg(\int\limits_{\Delta_k} |v(x)|^r |u(\varphi(x))|^r (\varphi'(x))^{r/p'}\, dx\Bigg)^{1/r}$$
$$+ \sum_k \Bigg(\int\limits_{\Delta_k} |v(x)|^r |u(\psi(x))|^r (\psi'(x))^{r/p'}\, dx\Bigg)^{1/r}.$$

Если $1 < p \le q \le 2$ или $2 \le p \le q < \infty$, то $\frac{1}{r} = \frac{p'+q}{p'q} < 1$ и $\lambda = \min\{1, 1/r\} = 1/r$. Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/r} a_n(H) \ll \sum_k \Bigg(\int\limits_{\Delta_k} |v(x)|^r |u(\varphi(x))|^r (\varphi'(x))^{r/p'}\, dx\Bigg)^{1/r}$$
$$+ \Bigg(\sum_k \int\limits_{\Delta_k} |v(x)|^r |u(\psi(x))|^r (\psi'(x))^{r/p'}\, dx\Bigg)^{1/r}.$$

Для $1 < q < p < \infty$ имеем $\frac{1}{r} > 1$, $\lambda = \min\{1, 1/r\} = 1$. Применяя неравенство Йенсена, приходим к оценке сверху

$$\limsup_{n\to\infty} n a_n(H) \ll \Bigg(\int\limits_0^\infty |v(x)|^r (|u(\varphi(x))|^r (\varphi'(x))^{r/p'} + |u(\psi(x))|^r (\psi'(x))^{r/p'})\, dx\Bigg)^{1/r}.$$

Доказательство последней части теоремы можно получить из работы [19] путем замены переменных. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
2. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. Berlin: Springer-Verl., 1985.
3. *Пич А.* Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.
4. *Pietsch A.* Eigenvalues and s-numbers. Leipzig: Geest Portig, 1987.
5. *König H.* Eigenvalue distribution of compact operators. Boston; Oxford: Birkhäuser, 1986.
6. *Edmunds D. E., Evans W. D.* Spectral theory and differential operators. Oxford: Oxford Univ. Press, 1987.
7. *Мынбаев К. Т., Отылбаев М. О.* Весовые функциональные пространства и спектры дифференциальных операторов. М.: Наука, 1988.
8. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Оценки сингулярных чисел интегральных операторов // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, № 1. С. 17–84.
9. *Aleksandrov A. B., Janson S., Peller V. V., Rochberg R.* An interesting class of operators with unusual Schatten — von Neumann behavior. Uppsala, 2001. 89 p. (Preprint / Univ. of Uppsala).
10. *Edmunds D. E., Evans W. D., Harris D. J.* Approximation numbers of certain Volterra integral operators // J. London Math. Soc. 1988. V. 38, N 2. P. 471–489.
11. *Апышев О. Д., Отылбаев М. О.* О спектре одного класса дифференциальных операторов и некоторые теоремы вложения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1979. Т. 43, № 4. С. 3–26.
12. *Edmunds D. E., Stepanov V. D.* The measure of non-compactness and approximation numbers of certain Volterra integral operators // Math. Ann. 1994. V. 289. P. 41–66.

13. *Lomakina E. Stepanov V.* On the compactness and approximation numbers of Hardy type integral operators in Lorentz spaces // J. London Math. Soc. 1996. V. 53. P. 369–382.
14. *Ломакина Е. Н., Степанов В. Д.* Об операторах типа Харди в банаховых функциональных пространствах на полуоси // Докл. РАН. 1998. Т. 359, № 1. С. 21–23.
15. *Newman J., Solomyak M.* Two-sided estimates on singular values for a class of integral operators on the semiaxis // Integral Equations Operator Theory. 1994. V. 20. P. 335–349.
16. *Edmunds D. E., Evans W. D., Harris D. J.* Two-sided estimates of the approximation numbers of certain Volterra integral operators // Studia Math. 1997. V. 124. P. 59–80.
17. *Ломакина Е. Н., Степанов В. Д.* Об асимптотическом поведении аппроксимативных чисел и оценках норм Шаттена — фон Неймана для интегрального оператора Харди // Докл. РАН. 1999. Т. 367, № 5. С. 594–596.
18. *Lomakina E., Stepanov V.* On asymptotic behaviour of the approximation numbers end estimates of Schatten — von Neumann norms of Hardy-type integral operators // Function Spaces and Applications. New Delhi, India: Narosa Publ. House, 2000. P. 153–200.
19. *Lifshits M. A., Linde W.* Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to Brownian motion. Jena, 1999. 110 p. (Fridrich-Schiller univ.; N 27).
20. *Stepanov V. D.* On the lower bounds for Schatten — von Neumann norms of certain Volterra integral operators // J. London Math. Soc. 2000. V. 61. P. 905–922.
21. *Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Об интегральных операторах с переменными пределами интегрирования // Тр. МИ РАН. 2001. Т. 232. С. 298–317.
22. *Мазья В. Г.* Пространства С.Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.

Статья поступила 13 февраля 2002 г.

Ломакина Елена Николаевна
Вычислительный центр ДВО РАН, ул. Тихоокеанская, 153, Хабаровск 680042
lomakina@as.khb.ru