Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2002. Том 43, № 5

УДК 512.572

О ГРУППЕ РЕДУЦИРОВАННЫХ ТОЖДЕСТВ ОТНОСИТЕЛЬНО СВОБОДНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Е. И. Тимошенко

Аннотация: Доказано, что группы редуцированных тождеств свободной разрешимой группы и свободной метабелевой группы заданного класса нильпотентности тривиальны, когда эти группы конечно порождены.

Ключевые слова: алгебраическая геометрия над группой, группа редуцированных тождеств

Основные понятия, касающиеся G-тождеств, используемые в этой статье, можно найти в [1], где Г. Баумслаг, А. Мясников и В. Н. Ремесленников изложили основы алгебраической геометрии над фиксированной группой G. Напомним некоторые из них.

Определение 1. Пусть G — некоторая группа. Группу H будем называть G-*группой*, если зафиксировано вложение

$$\phi : G \to H.$$

Через $F(X)$ обозначим свободную группу с базисом $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n \geq 1$.

Определение 2. Группу $G[X] = G * F(X)$, являющуюся свободным произведением групп G и $F(X)$, назовем *свободной* G-*группой*.

Определение 3. Пусть $v(g_1, \dots, g_m, x_1, \dots, x_n)$ — элемент свободной G-группы $G[X]$ и H — некоторая G-группа. Данный элемент назовем G-*тождеством* для H, если для любого набора элементов $h_1, \dots, h_n$ из H значение $v(g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n)$ равно 1.

Обозначим через V множество всех бескоэффициентных тождеств, истинных на группе G, а через $V(G)$ — соответствующую ему вербальную подгруппу из $G[X]$. Будем называть ее *подгруппой чистых тождеств*.

Наряду с V рассмотрим множество V_c всех G-тождеств, истинных на группе G. Обозначим через $V_c(G)$ вербальную подгруппу из $G[X]$, соответствующую множеству V_c.

Заметим, что если группа H порождена как G-группа n элементами, то вербальные подгруппы группы H, соответствующие множеству V_c и множеству $V_{n,c}$ всех G-тождеств от n переменных, совпадают.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00567), научной программы Министерства образования России «Фундаментальные исследования высшей школы. Университеты России» и Министерства образования России (грант Е00–1.0–12).

Определение 4. Фактор-группу

$$V_{n,\mathrm{red}}(G) = V_c(G)/V(G)$$

называют *группой редуцированных G-тождеств ранга n*.

Не вдаваясь в детали, поясним, почему группа редуцированных G-тождеств играет столь важную роль в алгебраической геометрии над группами. За подробностями можно обратиться к статьям [1, 2].

Пусть H — некоторая G-группа и n — натуральное число. В n-мерном аффинном пространстве $H^n = \{(h_1, \ldots, h_n) \mid h_i \in H\}$ определим алгебраические множества как множества всех решений некоторых систем уравнений над группой G. При этом элементы из $G[X]$ играют роль полиномов от n неизвестных с коэффициентами из группы G. На множестве алгебраических множеств определим морфизмы. Далее, с каждым алгебраическим множеством связана G-группа, называемая его координатной группой. Категории алгебраических множеств и координатных групп эквивалентны. Пусть $\mathbf{M}$ — некоторое многообразие групп, G — группа из $\mathbf{M}$ и $F_{\mathbf{M}}(X)$ — свободная группа многообразия $\mathbf{M}$ с базой $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Обозначим

$$G_{\mathbf{M}}[X] = G \underset{\mathbf{M}}{*} F_{\mathbf{M}}(X),$$

где $\underset{\mathbf{M}}{*}$ — вербальное произведение в многообразии $\mathbf{M}$. Назовем эту группу G-свободной ранга n для многообразия $\mathbf{M}$. Оказывается, что координатная группа Γ_{G^n} алгебраического множества G^n изоморфна фактор-группе группы $G_{\mathbf{M}}[X]$ по нормальной подгруппе, изоморфной $V_{n,\mathrm{red}}(G)$. Поэтому особенно интересен тот случай, когда группа редуцированных G-тождеств тривиальна. Мы докажем, что $V_{n,\mathrm{red}}(G) = 1$, если G — свободная разрешимая группа или свободная метабелева группа ступени нильпотентности c.

Определение 5. Говорят, что G-группа H *аппроксимируется* G-группой $\overline{H}$, если для каждого $1 \neq h \in H$ существует G-гомоморфизм ϕ из H на $\overline{H}$ такой, что $\phi(h) \neq 1$.

Пусть $\mathbf{M}$ — многообразие, порожденное группой G. В [2] доказано, что $V_{n,\mathrm{red}}(G) = 1$ тогда и только тогда, когда группа $G_{\mathbf{M}}[X]$ G-аппроксимируется группой G. Более сильным, чем аппроксимация, является условие G-дискриминации.

Определение 6. G-группа H *G-дискриминируется* G-группой $\overline{H}$, если для любого конечного набора $\{h_1, \ldots, h_n\}$ неединичных элементов группы H существует G-гомоморфизм ϕ группы H в группу $\overline{H}$ такой, что $\phi(h_j) \neq 1$ при всех $j = 1, \ldots, n$.

При доказательстве теоремы 1 нам потребуется

Лемма. *Пусть R — кольцо без делителей нуля; T — свободный R-модуль; n, m — произвольные натуральные числа, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$; $\tau_{i,0}$ — произвольные фиксированные элементы из T; $r_{i,j}$ — произвольные фиксированные элементы из R такие, что для любого i вектор $(r_{i,1}, \ldots, r_{i,m})$ ненулевой; T_j — произвольные бесконечные подмножества из T. Тогда найдутся $\tau_j \in T_j$ такие, что при всех i выполняются неравенства*

$$r_{i,1}\tau_1 + \cdots + r_{i,m}\tau_m \neq \tau_{i,0}. \qquad (2)$$

Доказательство проведем индукцией по m.

При $m = 1$ элементы $r_{1,1}, \dots, r_{n,1}$ ненулевые по условию. Так как τ_1 может принимать любые значения из бесконечного множества T_1 и кольцо R не содержит делителей нуля, решение τ_1 системы неравенств (2) существует в T_1.

Рассмотрим матрицу $(r_{i,j})$. Предположим, что при $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m-1$ система неравенств (2) разрешима, причем $\tau_j \in T_j$.

Пусть теперь $1 \le j \le m$. Предположим, что из матрицы $(r_{i,j})_{n\times m}$ можно вычеркнуть столбец так, что полученная матрица по-прежнему не имеет нулевых строк. Тогда по индукционному предположению система (2) имеет решение $\tau_j \in T_j$.

Рассмотрим теперь тот случай, когда вычеркивание любого столбца из матрицы $(r_{i,j})_{n\times m}$ приводит к образованию нулевой строки. Меняя местами неравенства и неизвестные τ_j, придем к системе неравенств с матрицей вида

$$\begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix},$$

где диагональные элементы верхней матрицы по условию не равны нулю. Существуют бесконечные подмножества $T'_j \subseteq T_j$ такие, что для всех $\tau_j \in T'_j$ первые m неравенств новой системы выполнены. Рассмотрим систему из $n-m$ оставшихся неравенств, заменяя область изменения τ_j на T'_j. Продолжая этот процесс, получим решение системы неравенств (2). Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $1 \ne \mathbf{M}$ — некоторое собственное подмногообразие групп, $\mathbf{A}$ — многообразие всех абелевых групп, $\overline{G} = F_r(\mathbf{M})$, $\overline{H} = F_{r+m}(\mathbf{M})$, $G = F_r(\mathbf{AM})$, $H = F_{r+m}(\mathbf{AM})$ — свободные группы рангов r и $r+m$ из многообразий $\mathbf{M}$ и $\mathbf{AM}$ соответственно. Предположим, что кольцо $\mathbf{Z}\overline{H}$ не содержит делителей нуля. Тогда если группа $\overline{H}$ $\overline{G}$-дискриминируется группой $\overline{G}$, то группа H G-дискриминируется группой G.*

Доказательство. Обозначим через $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_m$ базис группы H, и пусть элементы $x_1, \dots, x_r$ составляют базис группы G.

Образ элемента $h \in H$ при естественном гомоморфизме группы H на группу $\overline{H}$ обозначим через $\bar{h}$. Так как $\mathbf{M}$ — собственное подмногообразие, ядро этого гомоморфизма A_H — свободная абелева подгруппа из H. Аналогично ядро естественного гомоморфизма $G \to \overline{G}$ — свободная абелева группа A_G.

Пусть T — свободный левый $\mathbf{Z}\overline{H}$-модуль с базой $t_1, \dots, t_r, s_1, \dots, s_m$, а L — свободный $\mathbf{Z}\overline{G}$-модуль с базой $t_1, \dots, t_r$.

Рассмотрим множество матриц M вида

$$\begin{pmatrix} \bar{h} & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\bar{h} \in \overline{H}$, $\tau \in T$. Множество M является мультипликативной группой. Существует вложение группы H в группу M. Образом элемента x_i является матрица $\begin{pmatrix} \bar{x}_i & t_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а образом элемента y_j — матрица $\begin{pmatrix} \bar{y}_j & s_j \\ o & 1 \end{pmatrix}$. Это вложение называется *вложением Магнуса.*

Пусть в (3)

$$\tau = \alpha_1 t_1 + \cdots + \alpha_r t_r + \beta_1 s_1 + \cdots + \beta_m s_m, \tag{4}$$

где $\alpha_i, \beta_j \in \mathbf{Z}\overline{H}$.

Известно [3], что матрица (3) лежит в H тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1(\bar{x}_1 - 1) + \cdots + \alpha_r(\bar{x}_r - 1) + \beta_1(\bar{y}_1 - 1) + \cdots + \beta_m(\bar{y}_m - 1) = \bar{h} - 1. \tag{5}$$

Пара элементов $(\bar{g}, \tau)$, $\bar{g} \in \overline{G}$, $\tau \in L$, называется *согласованной*, если матрица $\begin{pmatrix} \bar{g} & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ лежит в группе G.

Заметим, что для любого $\bar{g} \in \overline{G}$ существует бесконечно много $\tau \in L$ таких, что пара $(\bar{g}, \tau)$ согласована.

Действительно, при вложении Магнуса элементы из бесконечной подгруппы A_G переходят в матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & \tau_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\tau_0 \in L$. Поэтому наряду с согласованной парой $(\bar{g}, \tau)$ такими же являются и все пары $(\bar{g}, \tau + \tau_0)$.

Пусть h — элемент из H и $\begin{pmatrix} \bar{h} & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — его образ при вложении Магнуса, причем τ имеет вид (4). Согласно (5) элемент h не равен 1 тогда и только тогда, когда $\tau \neq 0$.

Пусть $\rho : H \to G$ — ретракция, при которой элементы $y_1, \ldots, y_m$ переходят соответственно в элементы $g_1, \ldots, g_m \in G$, причем образом g_j при вложении Магнуса является матрица $\begin{pmatrix} \bar{g}_j & \tau_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Элемент $\rho(h)$ отображается при вложении Магнуса в матрицу $\begin{pmatrix} \overline{\rho(h)} & \tau' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, при этом элемент $\tau' \in L$ получается из элемента τ заменой s_j на τ_j, а $\bar{y}_j$ на $\bar{g}_j$.

Учитывая это, достаточно доказать, что для любого $p \geq 1$ и любых элементов $a_1, \ldots, a_p \in T$ существуют согласованные пары $(\bar{g}_j, \tau_j)$ такие, что после подстановки $\bar{g}_j$ вместо $\bar{y}_j$ и τ_j вместо s_j в элементы $a_1, \ldots, a_p$ они останутся ненулевыми.

Пусть

$$a_q = \alpha_{q,1} t_1 + \cdots + \alpha_{q,r} t_r + \beta_{q,1} s_1 + \cdots + \beta_{q,m} s_m,$$

где $1 \leq q \leq p$, $\alpha_{q,u}, \beta_{q,v} \in T$.

Группа $\overline{H}$ $\overline{G}$-дискриминируется группой $\overline{G}$. Поэтому существует ретракция

$$\bar{\rho} : \overline{H} \to \overline{G}$$

такая, что образы $\bar{\rho}(\alpha_{q,u})$, $\bar{\rho}(\beta_{q,v})$ всех ненулевых элементов останутся ненулевыми.

Пусть $\bar{\rho}(\bar{y}_j) = \bar{g}_j$. Для каждого $\bar{g}_j$ существует бесконечно много согласованных с ним $\tau_j \in L$. Обозначим это множество через L_j, а элемент

$$\bar{\rho}(\alpha_{q,1}) t_1 + \cdots + \bar{\rho}(\alpha_{q,r}) t_r$$

— через $\tau_{q,0}$ и применим лемму. Система неравенств

$$\bar{\rho}(\beta_{q,1}) s_1 + \cdots + \bar{\rho}(\beta_{q,m}) s_m + \tau_{q,0} \neq 0 \tag{6}$$

имеет решение $s_j \in L_j$, если строки $(\bar{\rho}(\beta_{q,1}), \ldots, \bar{\rho}(\beta_{q,m}))$ ненулевые при $1 \leq q \leq p$. Но если некоторая из этих строк является нулевой, то соответствующее $\tau_{q,0}$

ненулевое и поэтому в любом случае система неравенств (6) разрешима, причем $s_j \in L_j$. Теорема доказана.

Заметим, что существует метабелево многообразие $\mathbf{M}$, для которого свободная группа G_{r+m} ранга $r+m$ не является G_r-аппроксимируемой при любом $r \geq 2$ и $m \geq 1$.

В качестве $\mathbf{M}$ рассмотрим многообразие, определенное тождеством $(x^2y^2)^2 = 1$. Как отмечено в [4, с. 43], при любом $r \geq 1$ имеет место строгое включение $\operatorname{var} F_r(\mathbf{M}) \subset \operatorname{var} F_{r+1}(\mathbf{M})$.

Пусть $r \geq 2$ — любое число и $G = F_r(\mathbf{M})$. Рассмотрим какое-либо тождество $g(z_1, \dots, z_p)$ группы G, которое не является тождеством на группе $F_{r+n}(\mathbf{M})$. Обозначим через $x_1, \dots, x_{r+n}$ базис группы $F_{r+n}(\mathbf{M})$.

Найдутся элементы $h_1(x_1, \dots, x_{r+n}), \dots, h_p(x_1, \dots, x_{r+m})$ такие, что

$$g(h_1(x_1, \dots, x_{r+n}), \dots, h_p(x_1, \dots, x_{r+n})) \neq 1.$$

Обозначим этот элемент из группы $F_{r+n}(\mathbf{M})$ через $f(x_1, \dots, x_{r+n})$. Пусть

$$\phi = \{x_i \to x_i, x_{r+j} \to v_j(x_1, \dots, x_r) \mid i = 1, \dots, r;\ j = 1, \dots, n\}$$

— некоторая ретракция. Тогда

$$\phi(f) = g(\phi(h_1), \dots, \phi(h_p)) = g\big(h'_1, \dots, h'_p\big),$$

где $h'_1, \dots, h'_p$ — некоторые элементы из группы G. Но $g(z_1, \dots, z_p)$ — тождество на G. Значит, $\phi(f) = 1$ для любой ретракции ϕ.

Легко понять, что свободная абелева группа $F_{r+n}(\mathbf{A})$ $F_r(\mathbf{A})$-дискриминируется группой $F_r(\mathbf{A})$. Хорошо известно, что многообразие всех разрешимых групп порождается группами ранга два. Поэтому из теоремы 1 получаем

Следствие. *Если G — свободная разрешимая группа конечного ранга, то $V_{n,\mathrm{red}}(G) = 1$ при любом $n \geq 1$.*

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{N}_c$ — многообразие всех нильпотентных групп ступени нильпотентности $\leq c$, $S_{n,c}$ — свободная группа ранга n в многообразии $\mathbf{A}^2 \cap \mathbf{N}_c$. Тогда при $n \geq 1$, $c \geq 1$ группа редуцированных тождеств $V_{r,\mathrm{red}}(S_{n,c})$ тривиальна при любом $r \geq 1$.*

Доказательство. При $n = 1$ теорема справедлива.

Пусть $n \geq 2$. Известно, что группа $S_{2,c}$ порождает все многообразие $\mathbf{A}^2 \cap \mathbf{N}_c$ [4, с. 145]. Поэтому тривиальность группы редуцированных тождеств равносильна тому, что группа $S_{n+r,c}$ $S_{n,c}$-аппроксимируется группой $S_{n,c}$. Если мы докажем, что для любого $m \geq 2$ группа $S_{m+1,c}$ $S_{m,c}$-аппроксимируется группой $S_{m,c}$, то теорема будет доказана.

Приступим к доказательству аппроксимации индукцией по c.

Если $c = 1$, то группа $S_{n,c}$ абелева и теорема справедлива.

Пусть g — неединичный элемент из свободной группы ранга $n+1$ многообразия $\mathbf{A}^2 \cap \mathbf{N}_c$.

Если g не лежит в $\gamma_c(S_{n+1,c+1})$, то существование ретракции

$$\rho : S_{n+1,c+1} \to S_{n,c+1},$$

при которой $\rho(g) \neq 1$, следует из индукционного предположения.

Допустим, что $g \in \gamma_c(S_{n+1,c+1})$. На базисе $x_1, \dots, x_{n+1}$ введем порядок $x_1 > x_2 > \dots > x_n > x_{n+1}$. Известно, что группа $\gamma_c(S_{n+1,c+1})$ порождается базисными коммутаторами вида

$$(\dots(x_i, x_j; l_j), x_{j-1}; l_{j-1}), \dots, x_1; l_1),$$

где $(x_i, x_j; l) = (x_i, \underbrace{x_j, \dots, x_j}_{l})$, $i < j$, $l_1 + \dots + l_j = c - 1$.

Поэтому все базисные коммутаторы веса c, не лежащие в $S_{n,c+1}$, имеют вид

$$d = (\dots(x_i, x_{n+1}; l_{n+1}), x_n; l_n) \dots, x_1; l_1). \tag{7}$$

Подставим в этот коммутатор x_n^p вместо x_n. Получим степень базисного коммутатора

$$\bar{d} = (\dots(x_i, x_n; l_{n+1} + l_n) \dots, x_1; l_1)^{p^{l_{n+1}}}.$$

Так как неединичный элемент g из $\gamma_c(S_{n+1,c+1})$ является произведением базисных коммутаторов вида (7) и базисных коммутаторов, не содержащих элемента x_{n+1}, т. е.

$$g = \prod_j d_j(x_1, \dots, x_{n+1}) \cdot \prod_i d_i(x_1, \dots, x_n),$$

подстановка x_n^p вместо x_{n+1} дает элемент

$$g(x_1, \dots, x_n, x_n^p) = \prod_j \bar{d}_j \cdot \prod_i d_i. \qquad (8).$$

Если p выбрано достаточно большим, то (8) не равно 1. Теорема доказана.

Заметим, что следствие нельзя усилить, исключив из него условие, что G — свободная группа из многообразия $\mathbf{A}^2$.

Предложение. *Существует конечно порожденная метабелева группа G, порождающая многообразие метабелевых групп $\mathbf{A}^2$, такая, что $V_{n,\mathrm{red}}(G) \neq 1$ при $n \geq 2$.*

Доказательство. Заметим вначале, что если группа G принадлежит многообразию $\mathbf{M}$, то

$$V_{n,\mathrm{red}}(G) \cong V_c(G_{\mathbf{M}}[X])/V(G_{\mathbf{M}}[X]), \tag{9}$$

где $V_c(G_{\mathbf{M}}[X])$ — вербальная подгруппа, соответствующая всем G-тождествам группы G, а V — всем чистым тождествам группы G.

Так как $G \in \mathbf{M}$, имеет место включение

$$V_{\mathbf{M}}(G[X]) \leq V(G) \leq V_c(G),$$

где $V_{\mathbf{M}}(G[X])$ — вербальная подгруппа, соответствующая многообразию $\mathbf{M}$.

Легко заметить, что

$$G_{\mathbf{M}}[X] \cong G[X]/V_{\mathbf{M}}(G[X]).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} V_c(G_{\mathbf{M}}[X])/V(G_{\mathbf{M}}[X]) &\cong V_c(G[X]/V_{\mathbf{M}}(G[X]))/V(G[X]/V_{\mathbf{M}}(G[X])) \\ &\cong V_c(G[X])/V(G[X]) \cong V_c(G)/V(G) = V_{n,\mathrm{red}}(G). \end{aligned}$$

В качестве G рассмотрим дискретное сплетение двух бесконечных циклических групп $G = (a) \wr (b)$. Известно, что $\mathrm{var}(G) = \mathbf{A}^2$. Рассмотрим группу

$$G_{\mathbf{A}^2}[X] = G \underset{\mathbf{A}^2}{*} F_{\mathbf{A}^2}(X),$$

где $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Пусть $g = (a, (x_1, x_2))$ — элемент из $G_{\mathbf{A}^2}[X]$, где $(u, v) = u^{-1}v^{-1}uv$.

Элемент g отличен от 1. Действительно, рассмотрим гомоморфизм ϕ группы G на бесконечную циклическую группу (a), ядром которого является подгруппа $(b)^G$, а именно

$$\phi : a^{\alpha_m b^m + \dots + \alpha_l b^l} \to a^{\alpha_m + \dots + \alpha_l},$$

где $\alpha_j \in \mathbf{Z}$. Продолжим этот гомоморфизм до гомоморфизма

$$G_{\mathbf{A}^2}[X] \to (a) \underset{\mathbf{A}^2}{*} F_{\mathbf{A}^2}(X).$$

Ясно, что $(a) \underset{\mathbf{A}^2}{*} F_{\mathbf{A}^2}(X)$ — свободная метабелева группа с базисом $a, x_1, \dots, x_n$. Значит, $g \neq 1$.

С другой стороны, $(a, (x_1, x_2))$ является G-тождеством для группы G. Так как по (9) $V_{n,\mathrm{red}} \cong V_c(G_{\mathbf{A}^2}([X])$, предложение доказано.

Автор благодарен профессору В. Р. Ремесленникову, привлекшему внимание к данным вопросам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baumslag G., Miasnikov A., Remeslennikov V.* Algebraic geometry over groups // J. Algebra. 1999. V. 219. P. 16–79.
2. *Амаглобели М. Г., Ремесленников В. Н.* G-тождества и G-многообразия // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 4. С. 249–272.
3. *Ремесленников В. Н., Соколов В. Г.* Некоторые свойства вложения Магнуса // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 5. С. 566–578.
4. *Нейман Х.* Многообразия групп. М.: Мир, 1969.

Статья поступила 26 февраля 2002 г.

Тимошенко Евгений Иосифович
Новосибирский гос. архитектурно-строительный университет,
ул. Ленинградская, 113, Новосибирск 630008
etim@ngasu.nsk.su