Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2002. Том 43, № 5

УДК 517.535.4

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ ДЕЛЬТА–СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

К. Г. Малютин, Н. Садык

Аннотация: Получены точные оценки снизу верхних пределов отношений неванлинновских характеристик дельта-субгармонической в верхней полуплоскости функции.

Ключевые слова: истинно субгармоническая функция, полная мера, формула Карлемана, характеристика Неванлинны

1. Метод изучения асимптотических свойств целых и мероморфных функций, основанный на использовании коэффициентов Фурье $\ln|f(re^{i\theta})|$ как функции от θ, начал использоваться в 60-е гг. Л. Рубелом и Б. Тейлором [1]. В частности, этим методом Д. Майлз и Д. Шиа [2] решили некоторые экстремальные задачи в заданных классах мероморфных функций. Аналогичные утверждения мы доказываем для функций, определенных в верхней полуплоскости комплексного переменного. При этом мы рассматриваем классы дельта-субгармонических функций. Своеобразие полуплоскости проявляется уже в том, что рассматриваются две характеристические функции $N(r,v)$ и $N_1(r,v)$.

Обозначим через $\mathbb{C}_+=\{z:\operatorname{Im} z>0\}$ верхнюю полуплоскость, $G_+=G\cap\mathbb{C}_+$, $C(a,r)=\{z:|z-a|<r\}$, $D_+(r_1,r_2)=\overline{C_+(0,r_2)\setminus C_+(0,r_1)}$ $(r_1<r_2)$. Ниже через A, B, … будем обозначать положительные константы, которые могут изменяться.

Функция v называется *истинно субгармонической* в $\mathbb{C}_+$, если v — субгармоническая функция в $\mathbb{C}_+$ и $\varlimsup\limits_{z\to t, z\in\mathbb{C}_+} v(z)\le 0$ для любого вещественного числа t. Класс таких функций обозначим через JS, класс истинно δ-субгармонических функций — через $J\delta=JS-JS$. Функция $v\in J\delta$ характеризуется своей полной мерой $\lambda=\lambda_v$ [3], которая определяется ее риссовой мерой и предельными значениями на вещественной оси. Положим $\lambda_k(r)=\lambda_k(\overline{C_+(0,r)})$, где $d\lambda_k(\zeta)=\frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}\tau^{k-1}\,d\lambda(\zeta)$ $\quad(\zeta=\tau e^{i\varphi}$, функция $\frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}$ при $\varphi=0,\pi$ определяется по непрерывности). Будем использовать формулу Карлемана в следующей записи:

$$\frac{1}{r^k}\int\limits_0^\pi v(re^{i\varphi})\sin k\varphi\,d\varphi=\int\limits_{r_0}^r\frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt+\frac{1}{r_0^k}\int\limits_0^\pi v(r_0e^{i\varphi})\sin k\varphi\,d\varphi, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Исследовательского фонда Стамбульского университета.

$k = 1, 2, \dots, r_0 < r$. Пусть $V(r) := r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0$. Для функции $v \in J\delta$ введем следующие характеристики:

$$m(r,v) := \frac{1}{r}\int\limits_0^\pi v_+(re^{i\varphi})\sin\varphi\,d\varphi, \quad N_1(r,v) := \int\limits_{r_0}^r \frac{\lambda_-(t)}{t^2}\,dt,$$

$$N(r,v) := \int\limits_{r_0}^r \frac{\lambda_-(t)}{t^3}\,dt(\rho > 1), \quad N(r,v) := \int\limits_{r/2}^r \frac{\lambda_-(t)}{t^3}\,dt \quad (\rho \le 1),$$

$$T(r,v) := m(r,v) + N(r,v) + m(r_0,-v) \quad (\rho > 1),$$

$$T(r,v) := m(r,v) + N(r,v) + m\left(\frac{r}{2},-v\right) \quad (\rho \le 1).$$

Определение. Функция $v \in J\delta$ называется *функцией нормального типа относительно уточненного порядка* $\rho(r)$, если существует $A > 0$, зависящее от v, такое, что $T(r,v) \le AV(r)/r$ для всех $r > r_0$.

Класс таких функций обозначим через $J\delta(\rho(r))$.

Коэффициенты Фурье функции $v \in J\delta$ определяются обычным образом:

$$c_k(r,v) := \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi v(re^{i\theta})\sin k\theta\,d\theta, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Формулу (1) можно записать в виде

$$c_k(r,v) = \alpha_k r^k + \frac{2r^k}{\pi}\int\limits_{r_0}^r \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

где $\alpha_k = r_0^{-k} c_k(r_0,v)$. Отсюда интегрированием по частям получаем

$$c_k(r,v) = \alpha_k r^k + \frac{r^k}{\pi k r_0^{2k}} \iint\limits_{C_+(0,r_0)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im}\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta)$$
$$+ \frac{r^k}{\pi k}\iint\limits_{D_+(r_0,r)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im}\zeta}\,d\lambda(\zeta) - \frac{1}{r^k \pi k}\iint\limits_{C_+(0,r)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im}\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta). \tag{3}$$

Пусть $m_2(r,v)$ — L^2-норма функции v по полуокружности $\{re^{i\theta} : 0 \le \theta \le \pi\}$. В работе доказаны две теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $v \in J\delta(\rho(r))$, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0$. *Тогда*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{N_1(r,v) + N_1(r,-v)}{m_2(r,v)} \ge \frac{|\sin\pi\rho|}{\rho(\rho+1)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin 2\pi\rho}{2\pi\rho}}} \tag{4}$$

и это неравенство точное, т. е. для некоторой функции $v \in J\delta(\rho(r))$ *в* (4) *имеет место равенство.*

Теорема 2. *Пусть* $v \in J\delta(\rho(r))$, $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho>1$. *Тогда*

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{rN(r,v)+rN(r,-v)}{m_2(r,v)}\geq\frac{|\sin\pi\rho|}{|\rho-1|(\rho+1)}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sin 2\pi\rho}{2\pi\rho}}} \tag{5}$$

и это неравенство точное, т. е. для некоторой функции $v\in J\delta(\rho(r))$ *в* (5) *имеет место равенство.*

2. Докажем вначале некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть функция* v *принадлежит* $J\delta(\rho(r))$, λ — *ее полная мера. Если* $\lim\limits_{r\to\infty}|\lambda|(r)/(rV(r))=0$, *то* ρ — *целое число.*

Доказательство. Если выполнены условия леммы, то $\lim\limits_{r\to\infty} rN(r,v)/V(r) = 0$. Поэтому порядок функции $T(r,v)$ определяется слагаемым $m(r,v)$. Для его оценки воспользуемся представлением функции v [3]:

$$v(z)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\overline{C_+(0,r_0)}}K_0(z,\zeta)\,d\lambda(\zeta)+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C\overline{C_+(0,r_0)}}K_p(z,\zeta)\,d\lambda(\zeta)+\sum_{k=1}^{p}d_k\operatorname{Im}z^k, \tag{6}$$

где $p=[\rho]$, d_k — константы ($k=1,\dots,p$),

$$K_p(z,\zeta)=\frac{1}{\operatorname{Im}\zeta}\operatorname{Re}\left[\ln\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}+\sum_{k=1}^{p}\frac{z^k}{k}\left(\frac{1}{\zeta^k}-\frac{1}{\bar\zeta^k}\right)\right]$$

(при $p=0$ сумма считается равной нулю).

Заметим [3], что первый интеграл $I_1(z)$ в правой части (6) ограничен сверху. Для оценки второго интеграла $I_2(z)$ представим его в виде суммы:

$$I_2(z)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D_+(r_0,2r)}K_p(z,\zeta)\,d\lambda(\zeta)+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C\overline{C_+(0,2r)}}K_p(z,\zeta)\,d\lambda(\zeta)=I_{21}(z)+I_{22}(z),$$

где $z=re^{i\theta}$. Воспользовавшись разложением в ряд Фурье:

$$\ln\left|\frac{z-\bar\zeta}{z-\zeta}\right|=\begin{cases}2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{r^n}{n\tau^n}\sin n\theta\sin n\varphi, & r<\tau,\\ 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\tau^n}{nr^n}\sin n\theta\sin n\varphi, & \tau<r,\end{cases}$$

и элементарным неравенством

$$\left|\frac{z^k}{k\operatorname{Im}\zeta}\left(\frac{1}{\zeta^k}-\frac{1}{\bar\zeta^k}\right)\right|\leq\frac{2r^k}{\tau^{k+1}},$$

получаем

$$\int\limits_0^{\pi}(I_{21}(re^{i\theta})\sin\theta\,d\theta\leq\frac12\int\limits_{r_0}^{2r}\frac{d|\lambda|(\tau)}{\tau}+4\sum_{k=1}^{p}r^k\int\limits_{r_0}^{2r}\frac{d|\lambda|(\tau)}{\tau^{k+1}}=o(V(r))\quad(r\to\infty).$$

Аналогично неравенство $|K_p(z,\zeta)|\leq 4r^{p+1}/\tau^{p+2}$, $\tau\geq 2r$ [3], влечет оценку

$$|I_{22}(re^{i\theta})|\leq\frac{2}{\pi}\int\limits_{2r}^{\infty}\frac{r^{p+1}}{\tau^{p+2}}\,d|\lambda|(\tau)=o(V(r))\quad(r\to\infty).$$

Таким образом, порядок функции v определяется степенью гармонического полинома в правой части (6). Так как $p\leq\rho$, то $p=\rho$.

Лемма 2. *Если $v \in J\delta(\gamma(r))$, то для всех $k > \rho$*

$$c_k(r,v) = -\frac{2r^k}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt. \tag{7}$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из формулы (2), если заметить, что при $k > \rho$ $\lim\limits_{r\to\infty} V(r)/r^k = 0$ и что если $v \in J\delta(\rho(r))$, то [4] $|c_k(r,v)| \le AV(r)$ $(k = 1, 2, \dots)$.

Из (7) интегрированием по частям для $k > \rho$ получаем

$$c_k(r,v) = -\frac{1}{\pi k r^k}\iint\limits_{C_+(0,r)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im}\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta) - \frac{r^k}{\pi k}\iint\limits_{|\zeta|\ge r} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im}\zeta}\frac{d\lambda(\zeta)}{\tau^k}. \tag{8}$$

3. Докажем теоремы 1 и 2. Приступим к доказательству теоремы 1. Пусть ρ — нецелое число. В случае целого ρ теорема очевидна. Определим меру $\tilde\lambda$ равенством $\tilde\lambda = |\lambda|$. Используя (8), приходим к неравенству

$$|c_k(r,v)| \le \frac{1}{\pi r^k}\int\limits_0^r t^{k-1}\,d\tilde\lambda(t) + \frac{r^k}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{d\tilde\lambda(t)}{t^{k+1}} \quad (k > \rho).$$

Интегрированием по частям выводим оценку

$$|c_k(r,v)| \le \frac{(k+1)r^k}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{\tilde\lambda(t)}{t^{k+2}}\,dt - \frac{k-1}{r^k\pi}\int\limits_0^r t^{k-2}\tilde\lambda(t)\,dt. \tag{9}$$

Положим $N_1(r) = \int\limits_{r_0}^r \frac{\tilde\lambda(t)}{t^2}\,dt$. Функции $N_1(r)$ и $\tilde\lambda(r)$ имеют один и тот же порядок роста. Следовательно, по лемме 1 порядок $N_1(r)$ равен ρ. Из (9) при $k > \rho$ получим

$$\begin{aligned}|c_k(r,v)| &\le \frac{(k+1)r^k}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{dN_1(t)}{t^k} - \frac{k-1}{r^k\pi}\int\limits_0^r t^k\,dN_1(t)\\ &= \frac{k}{\pi}\left\{(k-1)\int\limits_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{N_1(t)}{t}\,dt + (k+1)\int\limits_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{N_1(t)}{t}\,dt\right\} - \frac{2k}{\pi}N_1(r).\end{aligned} \tag{10}$$

При $[\rho] \ne 0$ и $1 \le k \le [\rho]$ из (3) вытекает неравенство

$$|c_k(r,v)| \le r^k\left(|\alpha_k| + \frac{2}{\pi r_0^{2k}}\int\limits_0^{r_0} t^{k-1}\,d\tilde\lambda(t)\right) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{r_0}^r \left[\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right]\frac{d\tilde\lambda(t)}{t}.$$

Отсюда двукратным интегрированием по частям для всех k, $1 \le k \le [\rho]$, получается неравенство

$$|c_k(r,v)| \le r^k\gamma_k + \frac{2k}{\pi}N_1(r) + \frac{k}{\pi}\left\{(k-1)\int\limits_{r_0}^r \left[\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k\right]\frac{N_1(t)}{t}\,dt\right.$$

$$+\,2\int\limits_{r_0}^{r}\left(\frac{r}{t}\right)^{k}\frac{N_1(t)}{t}\,dt\Bigg\}\qquad\left(\gamma=|\alpha_k|+\frac{2}{\pi r_0^{2k}}\int\limits_{0}^{r_0}t^{k-1}\,d\tilde{\lambda}(t)+\frac{\tilde{\lambda}(r_0)}{\pi r_0^{k+1}}\right).\tag{11}$$

Пусть $\varepsilon>0$ — фиксированное число. Применяя лемму о пиках Пойя для функций $N_1(r)$, $r^{\rho-\varepsilon}$, $r^{\rho+\varepsilon}$, найдем последовательность $\{r_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\infty$, такую, что

$$N_1(t)\le\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\rho-\varepsilon}N_1(r_n),\ 0<t\le r_n,\quad N_1(t)\le\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\rho+\varepsilon}N_1(r_n),\ r_n\le t.\tag{12}$$

Используя неравенства (10)–(12), получаем

$$|c_k(r_n,v)|\le r_n^k\gamma_k+\frac{2k}{\pi}N_1(r_n)\left\{\frac{k^2+\rho-\varepsilon}{(\rho-\varepsilon)^2-k^2}+1\right\}\quad(1\le k\le[\rho]),$$

$$|c_k(r_n,v)|\le\frac{2k}{\pi}N_1(r_n)\left\{\frac{k^2+\rho-\varepsilon k}{(k-\varepsilon)^2-\rho^2}-1\right\}\quad(k>[\rho]).$$

Из неравенства (12) вытекает, в частности, что $r_n^{[\rho]}=o(N_1(r_n))$ при $n\to\infty$. Из произвольности ε следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{|c_k(r_n,v)|}{N_1(r_n)}\le\frac{2k}{\pi}\frac{\rho^2+\rho}{|k^2-\rho^2|},\quad k=1,2,\dots.$$

Учитывая равенство Парсеваля, приходим к неравенству

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{m_2(r,v)}{N_1(r)}\le\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2k^2}{\pi^2}\frac{(\rho^2+\rho)^2}{|k^2-\rho^2|^2}\right\}^{\frac12}=\left\{\frac{\rho^2(\rho+1)^2}{\sin^2\pi\rho}\left(1-\frac{\sin2\pi\rho}{2\pi\rho}\right)\right\}^{1/2}.\tag{13}$$

Так как $N_1(r)=N_1(r,v)+N_1(r,-v)$, из (13) получаем (4).

Пример. Пусть v — субгармоническая в полуплоскости функция с риссовой мерой, равной нулю, и граничной мерой $d\nu(t)=t^\rho\,dt$, $t>1$, $\rho>0$ — нецелое число и $\alpha=0$, $k=1,2,\dots,q=[\rho]$. Такую функцию можно построить, используя представление (6). Для нее оценка (4) точна. Если ρ — натуральное число, то эта оценка достигается для функции $v(z)=\operatorname{Im}z^\rho$.

Теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2 напоминает доказательство теоремы 1. Пусть $\rho>1$ — нецелое число. В случае целого ρ неравенство очевидно. Определим меру $\tilde{\lambda}$ равенством $\tilde{\lambda}=|\lambda|$. В силу (9), как и при доказательстве (10), получаем при $k>\rho$

$$|c_k(r,v)|\le\frac{k^2-1}{\pi}\left\{\int\limits_0^r\left(\frac{t}{r}\right)^kN(t)\,dt+\int\limits_r^\infty\left(\frac{r}{t}\right)^kN(t)\,dt\right\}-\frac{2k}{\pi}rN(r),\tag{14}$$

где

$$N(r)=\int\limits_{r_0}^{r}\frac{\tilde{\lambda}(t)}{t^3}\,dt,\quad\tilde{\lambda}=|\lambda_v|.$$

По лемме 1 функция $rN(r)$ имеет порядок ρ.

При $1 \le k \le [\rho]$ из (3) имеем

$$|c_k(r,v)| \le r^k \tilde{\gamma}_k + \frac{2k}{\pi} r N(r) + \frac{k^2-1}{\pi} \left\{ \int\limits_{r_0}^{r} \left[\left(\frac{r}{t}\right)^k - \left(\frac{t}{r}\right)^k \right] N(t)\,dt \right\}. \qquad (15)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — фиксированное число. Применяя лемму о пиках Пойя и неравенства (14), (15), найдем последовательность $\{r_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$, такую, что

$$|c_k(r_n,v)| \le r_n^k \gamma_k + \frac{2k}{\pi} r_n N(r_n) \left\{ \frac{k^2-1}{(\rho-\varepsilon)^2 - k^2} + 1 \right\},$$

если $1 \le k \le [\rho]$, и

$$|c_k(r_n,v)| \le \frac{2}{\pi} r_n N(r_n) \left\{ \frac{(k^2-1)(k-\varepsilon)}{(k-\varepsilon)^2 - \rho^2} - k \right\},$$

если $k > [\rho]$. Отсюда находим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|c_k(r_n,v)|}{r_n N(r_n)} \le \frac{2k}{\pi} \frac{\rho^2-1}{|k^2-\rho^2|}, \quad k = 1,2,\dots.$$

Используя равенство Парсеваля, приходим к неравенству

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m_2(r,v)}{rN(r)} \le \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2k^2}{\pi^2} \frac{(\rho^2-1)^2}{|k^2-\rho^2|^2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Суммируя ряд с помощью вычетов, получаем утверждение теоремы 2. Точность оценки достигается для функции, приведенной выше в примере.

4. Приведем следствие, относящееся к аналогу проблемы Неванлинны для полуплоскости. Для δ-субгармонической в $\mathbb{C}_+$ функции v при $\rho > 1$ обозначим

$$\varkappa(v) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r,v) + N(r,-v)}{T(r,v)}.$$

Если v — истинно субгармоническая функция, то $\delta(v) = 1 - \varkappa(v)$, где

$$\delta(v) = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m(r,-v)}{T(r,v)}.$$

Учитывая формулу Карлемана (1) при $k = 1$, имеем

$$\begin{aligned} m_2(r,v) \ge m_1(r,v) &\ge r[m(r,v) + m(r,-v)] \\ &= 2rT(r,v) - r(N(r,v) + N(r,-v) + m(r_0,v) + m(r_0,-v)). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\varkappa(v)}{2-\varkappa(v)} &= \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r,v) + N(r,-v) + m(r_0,v) + m(r_0,-v)}{2T(r,v) - N(r,v) - N(r,-v) - m(r_0,v) - m(r_0,-v)} \\ &\ge \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{rN(r,v) + rN(r,-v)}{m_2(r,v)}. \end{aligned}$$

Используя (5) и неравенство

$$\sqrt{1 - \frac{\sin 2\pi\rho}{2\pi\rho}} \le 1 + \frac{1}{4\pi\rho},$$

находим

$$\varkappa(v) \geq \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{8\pi\rho} + \frac{|\sin\pi\rho|}{2(\rho^2-1)}} \frac{|\sin\pi\rho|}{\rho^2 - 1}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8\pi\rho} + \frac{|\sin\pi\rho|}{2(\rho^2-1)} \leq \frac{2\pi^2 + 4\pi + 1}{8\pi},$$

получаем неравенство

$$\varkappa(v) \leq \frac{8\pi}{2\pi^2 + 4\pi + 1} \frac{|\sin\pi\rho|}{\rho^2 - 1}, \quad \rho > 1.$$

В заключение отметим неравенство $(2\pi^2 + 4\pi + 1)/8\pi < 1.4$, из которого следует оценка

$$\varkappa(v) \geq 0.7 \frac{|\sin\pi\rho|}{\rho^2 - 1}, \quad \rho > 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rubel L. A., Taylor B. A.* A Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bull. Soc. Math. France. 1968. V. 96. P. 53–96.
2. *Miles J. B., Shea D. P.* An extremal problem in value distribution theory // Quart. J. Math. Oxford. 1973. V. 24. P. 377–383.
3. *Гришин А. Ф.* Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций // Математическая физика, анализ, геометрия. 1994. Т. 1, № 2. С. 193–215.
4. *Малютин К. Г.* Ряды Фурье и дельта-субгармонические функции конечного гамма-типа в полуплоскости // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 6. С. 51–70.

Статья поступила 23 июля 2001 г., окончательный вариант — 10 января 2002 г.

Малютин Константин Геннадьевич
Кубанский гос. университет, математический факультет,
ул. Ставропольская, 149, Краснодар 350040
kgm_01@mail.ru

Nazim Sadik (Садык Назим)
Istanbul Universitesi, Fen fakultesi, Matematik Bolumi, Vesneciler: Istanbul 34459, Turkey
sadnaz@istanbul.edu.tr