Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2002. Том 43, № 5

УДК 517.982.22

ОБ ОКОЛОСТАНДАРТНОСТИ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. Э. Лянце, Т. С. Кудрик

Аннотация: Понятия околостандартности и тени служат обобщениями соответственно сходимости и предела. Есть много полезных версий этих понятий (см., например, [1]). Здесь собраны некоторые дополнительные аспекты и свойства тени и околостандартности. Обсуждаются следующие вопросы: тень вектора и оператора, слабая, сильная и равномерная околостандартности, использование нормы Гильберта — Шмидта, свойства отображения $A \mapsto {}^\circ A$, околостандартность проекторов и подпространств, условия околостандартности графика. Использована IST (внутренняя теория множеств) — версия нестандартного анализа Э. Нельсона.

Ключевые слова: околостандартный анализ, инфинитезимальный, тень

Понятия околостандартности и тени служат обобщениями соответственно сходимости и предела. Есть много полезных версий этих понятий (см., например, [1]). Здесь собраны некоторые дополнительные аспекты и свойства тени и околостандартности. Обсуждаются следующие вопросы: тень вектора и оператора, слабая, сильная и равномерная околостандартности, использование нормы Гильберта — Шмидта, свойства отображения $A \mapsto {}^\circ A$, околостандартность проекторов и подпространств, условия околостандартности графика. Использована IST (внутренняя теория множеств) — версия нестандартного анализа Э. Нельсона (см. [2] или [1, 3–5]).

0. Обозначения. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда «$a \approx b$» $\equiv$ «$b - a$ инфинитезимально», «$a \gg 0$» $\equiv$ «$a > 0$ и $a \not\approx 0$», «$a \approx \infty$» $\equiv$ «$a^{-1} \approx 0$», «$a \ll \infty$» $\equiv$ «$a \not\approx +\infty$». Положим ${}^{\mathbb{F}}\mathbb{R} := \{x \in \mathbb{R} : |x| \ll \infty\}$. Для $x \in {}^{\mathbb{F}}\mathbb{R}$ *тень* (или *стандартная часть*) ${}^\circ x$ элемента x — это такое вещественное число, что $x \approx {}^\circ x$. Мы будем использовать аналогичное обозначение для элементов из $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ с $n \in \mathbb{N}$, $n \ll \infty$.

Для подмножества E стандартного множества обозначим через ${}^{\mathrm{st}}E$ (${}^{\mathrm{nst}}E$) совокупность стандартных (околостандартных) элементов E. Пусть (X, d) — стандартное метрическое пространство. Тень ${}^\circ E$ множества $E \subseteq X$ однозначно определяется следующими условиями:

$$ {}^\circ E \text{ — стандартное подмножество } X, \text{ т. е. } {}^\circ E \in {}^{\mathrm{st}}(2^X); \tag{0.1} $$

$$ (\forall x \in {}^{\mathrm{st}}X)\ (x \in {}^\circ E \Longleftrightarrow \exists\, x_1 \in E\ d(x, x_1) \approx 0). \tag{0.2} $$

0.1. Замечание. (i) Тень ${}^\circ E$ внутреннего множества E замкнута;

(ii) $E \subseteq F$ влечет ${}^\circ E \subseteq {}^\circ F$;

(iii) пусть E — линейное подпространство стандартного нормированного пространства; тогда ${}^\circ E$ также линейно.

Работа второго из авторов частично поддержана Университетом Авейро, Португалия.

1. Тень вектора. Пусть H — стандартное гильбертово пространство над $\mathbb{C}$. Положим

$$ {}^{F}H := \{x \in H : \|x\| \ll \infty\}. \tag{1.1}$$

Из теоремы Рисса вытекает, что каждый элемент $x \in {}^{F}H$ обладает *тенью* ${}^{\circ}x$, которая единственным образом определяется соотношением

$$ {}^{\circ}x \in {}^{\mathrm{st}}H \quad \text{и} \quad \forall y \in {}^{\mathrm{st}}H \ ({}^{\circ}x|y) = {}^{\circ}(x|y). \tag{1.2}$$

(Внешнее) отображение $x \mapsto {}^{\circ}x$ является гомоморфизмом ${}^{F}H \to {}^{\mathrm{st}}H$. Вектор $x \in H$ называют *околостандартным* (и используют обозначение $x \in {}^{\mathrm{nst}}H$), если

$$ x \in {}^{F}H \quad \text{и} \quad \|x - {}^{\circ}x\| \approx 0. \tag{1.3}$$

В противном случае x называют *отдаленным.*

1.1. Предложение. *Пусть $x \in {}^{F}H$. Тогда $x \in {}^{\mathrm{nst}}H$ тогда и только тогда, когда*

$$ \|{}^{\circ}x\| = {}^{\circ}\|x\|. \tag{1.4}$$

Вектор $x \in H$ отдален в том и только в том случае, если

$$ \|x\| \approx \infty \quad \text{или} \quad \|{}^{\circ}x\| < {}^{\circ}\|x\|. \tag{1.5}$$

Доказательство. Пусть $x \in {}^{F}H$. Тогда согласно (1.2) $(x|{}^{\circ}x) \approx \|{}^{\circ}x\|^2$. Поэтому

$$ \|x - {}^{\circ}x\|^2 \approx \|x\|^2 - \|{}^{\circ}x\|^2, \tag{1.6}$$

что доказывает (1.4) и (1.5).

1.2. Замечание. Частный случай предложения 1.1 содержится в следующем стандартном утверждении: пусть $x_n \to x$ слабо, тогда $x_n \to x$ сильно в том и только в том случае, если $\|x_n\| \to \|x\|$. Из (1.4) и (1.5) получаем неравенство $\|{}^{\circ}x\| \le {}^{\circ}\|x\|$, которое означает, что норма $\|\cdot\|$ полунепрерывна снизу относительно слабой топологии на H.

2. Тень оператора. Рассмотрим стандартные гильбертовы пространства H и G. Для скалярных произведений и норм в них будем использовать одинаковые обозначения $(\cdot|\cdot)$ и $\|\cdot\|$. Положим

$$ {}^{F}\mathscr{B}(H;G) := \{A \in \mathscr{B}(H;G) : \|A\| \ll \infty\}. \tag{2.1}$$

Для $A \in {}^{F}\mathscr{B}(H;G)$ тень ${}^{\circ}A$ однозначно определяется соотношением

$$ {}^{\circ}A \in {}^{\mathrm{st}}\mathscr{B}(H;G) \quad \text{и} \quad \forall x \in {}^{\mathrm{st}}H \, \forall y \in {}^{\mathrm{st}}G \ ({}^{\circ}Ax|y) = {}^{\circ}(Ax|y). \tag{2.2}$$

Оператор $A \in {}^{F}\mathscr{B}(H;G)$ называют *сильно околостандартным*, если

$$ A \in {}^{F}\mathscr{B}(H;G) \quad \text{и} \quad \forall x \in {}^{\mathrm{st}}H \ \|Ax - {}^{\circ}Ax\| \approx 0. \tag{2.3}$$

Если

$$ A \in {}^{F}\mathscr{B}(H;G) \quad \text{и} \quad \|A - {}^{\circ}A\| \approx 0, \tag{2.4}$$

то A называют *равномерно околостандартным.*

2.1. Предложение. *Пусть* $A \in {}^F\mathscr{B}(H;G)$, $x \in {}^{\mathrm{nst}}H$. *Тогда*

$$^\circ(Ax) = {}^\circ A {}^\circ x. \tag{2.5}$$

Доказательство. Согласно (1.2) и (2.2) имеем

$$\forall y \in {}^{\mathrm{st}}H \quad ({}^\circ(Ax)|y) \approx (Ax|y) \approx (A{}^\circ x|y) \approx ({}^\circ A{}^\circ x|y),$$

что доказывает (2.5).

2.1′. Пусть A равномерно околостандартен и $x \in {}^F H$. Тогда (2.5) справедливо.

Доказательство. Пусть $y \in {}^{\mathrm{st}}H$. Тогда

$$({}^\circ(Ax)|y) \approx (Ax|y) \approx ({}^\circ Ax|y) = (x|{}^\circ A^* y) \approx ({}^\circ x|{}^\circ A^* y) = ({}^\circ A{}^\circ x|y).$$

2.2. Замечание. Предложение 2.1 означает, что (стандартное) отображение $(x, A) \mapsto Ax$ непрерывно относительно сильной топологии в H и слабой в $\mathscr{B}(H;G)$.

2.3. Предложение. *Оператор* $A \in {}^F\mathscr{B}(H;G)$ *сильно околостандартен в том и только в том случае, если*

$$\forall x \in {}^{\mathrm{st}}H \quad \|{}^\circ Ax\| = {}^\circ\|Ax\|. \tag{2.6}$$

Доказательство. Формула (1.6) и предложение 2.1 приводят к соотношению

$$\forall x \in {}^{\mathrm{st}}H \quad \|Ax - {}^\circ Ax\| \approx \|Ax\|^2 - \|{}^\circ Ax\|^2, \tag{2.7}$$

которое обеспечивает очевидность нашего утверждения.

2.4. Замечание. Частный случай предложения 2.3 содержится в следующем утверждении. Пусть $A_n, A \in \mathscr{B}(H;G)$ и $A_n \to A$ слабо. Тогда $A_n \to A$ сильно в том и только в том случае, если $\forall x \in H$ $\|A_n x\| \to \|Ax\|$.

2.5. Следствие (из предложения (2.7)). *Пусть* $A \in {}^F\mathscr{B}(H;G)$. *Тогда*

$$\|{}^\circ A\| \leq {}^\circ\|A\|. \tag{2.8}$$

В самом деле, $\forall x \in {}^{\mathrm{st}}H$ $\|{}^\circ Ax\| \leq {}^\circ\|Ax\| \leq {}^\circ\|A\| \cdot \|x\|$. Следовательно, (2.8) выполнено ввиду принципа переноса.

Соотношение (2.8) означает, что $\|\cdot\|_{\mathscr{B}(H;G)}$ полунепрерывна сверху в слабой топологии на $\mathscr{B}(H;G)$.

2.6. Замечание. Если $A \in \mathscr{B}(H;G)$ равномерно околостандартен, то согласно (2.4)

$$\|{}^\circ A\| = {}^\circ\|A\| \tag{2.9}$$

(т. е. $\|\cdot\|_{\mathscr{B}(H;G)}$ непрерывна в равномерной топологии на $\mathscr{B}(H;G)$). Однако неравенства (2.9) недостаточно для равномерной околостандартности A. Пусть, например, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — стандартный ортонормированный базис в H. Возьмем $n \approx \infty$ и для любого $x \in H$ положим

$$Px = \sum_{k\leq n} (x|e_k)e_k.$$

Тогда ${}^\circ P = \mathbb{I}_H$, $\|{}^\circ P\| = 1 = {}^\circ\|P\|$, но $\|P - {}^\circ P\| = 1 \not\approx 0$, так что P лишь сильно околостандартен.

2.7. Замечание. Для сильно околостандартного оператора A неравенство (2.8) может оказаться строгим. Пусть, например, $Qx = (x|e_n)e_n$ (n и e_n — как в 2.6). Тогда Q сильно околостандартен и $\|{}^\circ Q\| = 0 < 1 = {}^\circ\|Q\|$.

Как обычно, для $A, B \in \mathscr{B}(H)$ мы пишем $A \leq B$ вместо $\forall x \in H$ $(Ax|x) \leq (Bx|x)$. Использование символа «$\leq$» дает достаточное условие сильной околостандартности.

2.8. Предложение. *Пусть $A \in {}^F\mathscr{B}(H)$. Если $A \leq {}^\circ A$ или ${}^\circ A \leq A$, то A сильно околостандартен.*

Доказательство. Предположим, что $A \leq {}^\circ A$. Используем неравенство

$$\forall B \geq 0 \quad \forall x \in H \quad \|Bx\|^2 \leq \|B\|(Bx|x), \tag{2.10}$$

вытекающее из неравенства Буняковского для $(Bx|y)$. Полагая $B = {}^\circ A - A$, получим

$$\|{}^\circ Ax - Ax\|^2 \leq (\|{}^\circ A\| + \|A\|)(({}^\circ A - A)x|x) \approx 0$$

для $x \in {}^{\mathrm{nst}}H$. В случае ${}^\circ A \leq A$ заметим, что $-A \leq -{}^\circ A \leq {}^\circ(-A)$.

Следующее классическое утверждение вытекает из 2.8.

2.9. Следствие. *Пусть $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность операторов $A_n \in \mathscr{B}(H)$ такая, что $A_1 \leq A_2 \leq \cdots$ и $\sup\limits_n \|A_n\| < \infty$. Тогда (A_n) сильно сходится.*

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что (A_n) — стандартная последовательность. Тогда

$$\gamma := \sup_n \|A_n\| \ll \infty \quad \text{и} \quad \forall n \in {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}\ A_n \in {}^{\mathrm{st}}\mathscr{B}(H). \tag{2.11}$$

Фиксируем $k \in \mathbb{N} \setminus {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$. Для $n \in {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$ имеем $A_n = {}^\circ A_n \leq {}^\circ A_k$. Согласно принципу переноса $\forall n \in \mathbb{N}\ A_n \leq {}^\circ A_k$, т. е. $\forall x \in H\ (A_n x|x) \leq ({}^\circ A_k x|x)$ и для $x \in {}^{\mathrm{st}}H$ $({}^\circ A_n x|x) \leq ({}^\circ A_k x|x)$. Отсюда для $k \in \mathbb{N}\setminus{}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$ тень ${}^\circ A_k$ не зависит от k. Обозначим ее через A. Пусть $n \in \mathbb{N} \setminus {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$. Поскольку $A_n \leq A = {}^\circ A_n$, последовательность A_n сильно околостандартна, т. е. $\forall x \in {}^{\mathrm{st}}H\ \|Ax - A_n x\| \approx 0$, или $A = \lim A_n$ в сильном смысле.

3. Норма Гильберта — Шмидта. Эта норма определяется для $A \in \mathscr{B}(H;G)$ равенством

$$\|A\|_2 := \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|^2\Big)^{1/2}, \tag{3.1}$$

где $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольный ортонормированный базис в H. Отметим, что подпространство

$$\mathscr{B}_2(H;G) := \{A \in \mathscr{B}(H;G) : \|A\|_2 < \infty\} \tag{3.2}$$

может быть рассмотрено как (стандартное) гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\forall A, B \in \mathscr{B}(H;G) \quad (A|B)_2 := \operatorname{trace} B^*A := \sum_{n\in\mathbb{N}} (Ae_n|Be_n). \tag{3.3}$$

Пусть $A \in {}^F\mathscr{B}_2(H;G)$ (т. е. $\|A\|_2 \ll \infty$). Тогда A имеет тень относительно $(\cdot|\cdot)_2$, которую временно обозначим через $'A$. Таким образом,

$$'A \in {}^{\mathrm{st}}\mathscr{B}_2(H;G) \quad \text{и} \quad \forall B \in {}^{\mathrm{st}}\mathscr{B}_2(H;G) \quad ('A|B)_2 = {}^\circ(A|B)_2. \tag{3.4}$$

Поскольку $\|A\|_2 \ll \infty$, то $\|A\| \ll \infty$. Поэтому если $A \in {}^F\mathscr{B}_2(H;G)$, то A также имеет тень ${}^\circ A$, определенную посредством (2.2).

3.1. Предложение. *Пусть* $A \in {}^F\mathscr{B}_2(H;G)$. *Тогда* $'A = {}^\circ A$.

Доказательство. Пусть $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — стандартный ортонормальный базис в H. Фиксируем $p, q \in {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$ и положим $Bx := (x|e_q)e_p$ для $x \in H$. Ясно, что $B \in {}^{\mathrm{st}}\mathscr{B}_2(H)$. (Для простоты мы считаем $G = H$.) Тогда $('A|B)_2 = {}^\circ(A|B)_2$. Однако $(A|B)_2 = (Ae_q|e_p) \approx ({}^\circ Ae_p|e_q)$. Таким образом, для $p, q \in {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$ имеем $('Ae_q|e_p) = ({}^\circ Ae_q|e_p)$. Так как стандартный оператор однозначно определяется элементами его матрицы со стандартными элементами, то $'A = {}^\circ A$.

3.2. Следствие. *Пусть* $A \in {}^F\mathscr{B}_2(H;G)$. *Тогда* ${}^\circ A \in \mathscr{B}_2(H;G)$ *и*

$$\|A - {}^\circ A\|_2^2 \approx \|A\|_2^2 - \|{}^\circ A\|_2^2. \tag{3.5}$$

Кроме того,

$$\|A - {}^\circ A\|_2 \approx 0 \Longleftrightarrow \|{}^\circ A\|_2 = {}^\circ\|A\|_2. \tag{3.6}$$

Доказательство непосредственно вытекает из предложения 1.1 и формулы (1.6).

3.3. Предложение. *Если* $A \in {}^F\mathscr{B}_2(H;G)$ *и* $\|A - {}^\circ A\|_2 \approx 0$, *то* A *равномерно околостандартен. Обратно, пусть* $A \in \mathscr{B}(H;G)$ *сильно околостандартен. Предположим, что* $\|A\|_2 \ll \infty$ *и для некоторого стандартного ортонормального базиса* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *в* H

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N} \quad \sum_{k>n} \|Ae_k\|^2 \approx 0. \tag{3.7}$$

Тогда $\|A - {}^\circ A\|_2 \approx 0$.

Доказательство. Первая часть следует из того, что $\|A\| \le \|A\|_2$. Для обоснования второй используем неравенство

$$\|A - {}^\circ A\|_2^2 \le \sum_{k\le n} \|(A - {}^\circ A)e_k\|^2 + 2\sum_{k>n} \|Ae_k\|^2 + 2\sum_{k>n} \|{}^\circ Ae_k\|^2.$$

Если k стандартно, то $\|(A - {}^\circ A)e_k\| \approx 0$ по определению сильной околостандартности оператора. Значит, по лемме Робинсона первая сумма инфинитезимальна для некоторого $n \in \mathbb{N} \setminus {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$. Однако для такого n вторая сумма инфинитезимальна ввиду (3.7), а третья инфинитезимальна как остаток сходящегося стандартного ряда.

4. Отображение $A \mapsto {}^\circ A$**.** Начнем со следующего очевидного утверждения.

4.1. Предложение (i). *Пусть* $A, B \in {}^F\mathscr{B}(H;G)$, $a, b \in {}^F\mathbb{C}$. *Тогда*

$${}^\circ(aA + bB) = {}^\circ a{}^\circ A + {}^\circ b{}^\circ B.$$

Если A, B *сильно (равномерно) околостандартны, то* $aA + bB$ *таков же.*

(ii) *Если* $A \in {}^F\mathscr{B}(H;G)$, *то* ${}^\circ(A^*) = ({}^\circ A)^*$. *Однако* A^* *необязательно сильно околостандартен, если таков* A.

(iii) *Если* $A, B \in {}^F\mathscr{B}(H)$ *и* B *сильно околостандартен, то* ${}^\circ(AB) = {}^\circ A{}^\circ B$. *Если* A *и* B *сильно околостандартны, то таковым будет* AB.

Докажем, например, первую часть (iii). Пусть $x, y \in {}^{\mathrm{st}}H$. Тогда

$$({}^\circ(AB)x|y) \approx (ABx|y) \approx (A{}^\circ Bx|y) \approx ({}^\circ A{}^\circ Bx|y).$$

Таким образом, $({}^\circ(AB)x|y) = ({}^\circ A{}^\circ Bx|y)$.

4.2. Следствие. *Пусть* $A \in \mathscr{B}(H;G)$ — *биекция* $H \to G$. *Если* A *и* A^{-1} *одновременно околостандартны, то* ${}^\circ A$ — *биекция* $H \to G$ *и* $({}^\circ A)^{-1} = {}^\circ(A^{-1})$.

4.3. Предложение. *Пусть* A — *биекция* $H \to G$. *Если* A *равномерно околостандартен и* $\|A^{-1}\| \ll \infty$, *то* A^{-1} *также равномерно околостандартен (и* ${}^\circ(A^{-1}) = ({}^\circ A)^{-1}$*).*

Доказательство. Положим $V := A - {}^\circ A$. Тогда поскольку $\mathbb{I} - A^{-1}V = A^{-1}({}^\circ A)$, то $({}^\circ A)^{-1}A = (\mathbb{I} - A^{-1}V)^{-1}$ и

$$({}^\circ A)^{-1} = (\mathbb{I} - A^{-1}V)^{-1}A^{-1} = \sum_{n\geq 0}(A^{-1}V)^n A^{-1}.$$

Поэтому

$$\|({}^\circ A)^{-1} - A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|^2\|V\|. \tag{4.1}$$

4.4. Предложение. *Пусть* $A \in \mathscr{B}(H;G)$ *сильно околостандартен. Тогда* $({}^\circ A)({}^\circ X) \subseteq {}^\circ(AX)$ *для любого подпространства* $X \subset H$.

Доказательство. Пусть $x \in {}^{\mathrm{st}\,\circ}X$, $x \approx x_1$ для некоторого $x_1 \in X$. Тогда $({}^\circ A)x \approx Ax \approx Ax_1 \in AX$. Это означает, что $({}^\circ A)x \in {}^\circ(AX)$. Согласно принципу переноса $({}^\circ A)({}^\circ X) \subseteq {}^\circ(AX)$.

4.5. Следствие. *Пусть* $A \in \mathscr{B}(H)$ *сильно околостандартен. Тогда для любого инвариантного подпространства* X *в* A *тень* ${}^\circ X$ *является инвариантным подпространством в* ${}^\circ A$.

Доказательство. Если $AX \subseteq X$, то согласно замечанию 0.1(ii) ${}^\circ(AX) \subseteq {}^\circ X$. Поэтому $({}^\circ A)({}^\circ X) \subseteq {}^\circ X$.

4.6. Предложение. *Пусть* $A \in \mathscr{B}(H;G)$ — *биекция* $H \to G$. *Предположим, что* A *и* A^{-1} *оба сильно околостандартны. Тогда* $({}^\circ A)({}^\circ X) = {}^\circ(AX)$ *для любого подпространства* $X \subseteq H$.

Доказательство. Пусть $y \in {}^{\mathrm{st}\,\circ}(AX)$. Обозначим через y_1 такой вектор, что $y_1 \in AX$ и $y \approx y_1$. Положим $x_1 := A^{-1}y_1$. Имеем $x_1 \in X$ и $x_1 \approx A^{-1}y \approx {}^\circ(A^{-1})y$. Согласно следствию 4.2 ${}^\circ(A^{-1}) = ({}^\circ A)^{-1}$. По принципу переноса ${}^\circ(AX) \subseteq ({}^\circ A)({}^\circ X)$. Противоположное включение доказано в 4.4.

Для $X = \ker A$ справедливо следующее утверждение.

4.7. Предложение. *Пусть* $A \in {}^F\mathscr{B}(H;G)$. *Тогда*

$${}^\circ \ker A \subseteq \ker {}^\circ A. \tag{4.2}$$

Доказательство. Пусть $x \in {}^{\mathrm{st}\,\circ}\ker A$. В силу (0.2) $x \approx x_1$ для некоторого $x_1 \in \ker A$. Отсюда $({}^\circ Ax|y) \approx (Ax_1|y) = 0$ для любого $y \in {}^{\mathrm{st}}H$. Тогда ${}^\circ Ax = 0$ и по принципу переноса (4.2) выполнено.

5. Проекторы и подпространства. Напомним следующее стандартное утверждение. Пусть последовательность $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ортопроекторов $P_n \in \mathscr{B}(H)$ слабо сходится к Q. Если Q — ортопроектор, то $P_n \to Q$ сильно. Укажем некоторое обобщение этого результата.

5.1. Предложение. *Ортопроектор P, тень которого $Q := {}^\circ P$ является ортопроектором, сильно околостандартен. Тень сильно околостандартного ортопроектора является ортопроектором.*

Доказательство. Поскольку $\|P\| = 1 \ll \infty$, тень Q существует. В силу (2.2) $\forall x \in {}^{\mathrm{st}}H$ $(Px|x) \approx (Qx|x)$. По предположению $Q = Q^* = Q^2$. Поэтому $\|Qx\| = (Qx|x)^{1/2} = {}^\circ\|Px\|$. Согласно предложению 2.3 P сильно околостандартен. Если $P^2 = P$ и $P = P^*$, то по предложению 4.1(ii), (iii) имеем $({}^\circ P)^2 = {}^\circ P$ и ${}^\circ P = ({}^\circ P)^*$.

5.2. Предостережение. Тень ортопроектора может не оказаться проектором. Например, пусть (e_k) — стандартный ортонормальный базис в H. Положим $f = \alpha e_1 + \beta e_n$, где $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ и $n \in \mathbb{N} \backslash {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$. Пусть $Fx = (x|f)f$. Тогда F — ортопроектор. Для $n \approx \infty$ будет ${}^\circ e_n = 0$. Таким образом, $({}^\circ F)x = |\alpha|^2(x|e_1)e_1$. Если $|\alpha| \neq 1$, то F не проектор.

Для проекторов укажем следующее уточнение предложения 4.7.

5.3 Предложение. *Пусть $J \in \mathscr{B}(H)$ — сильно околостандартный проектор. Тогда ${}^\circ J$ — проектор и*

$$ {}^\circ \ker J = \ker {}^\circ J, \quad {}^\circ \operatorname{im} J = \operatorname{im} {}^\circ J. \tag{5.1} $$

Доказательство. Предложение 4.1(iii) влечет равенство $({}^\circ J)^2 = {}^\circ J$, т. е. ${}^\circ J$ — проектор. Пусть $x \in {}^{\mathrm{st}} \ker {}^\circ J$. Тогда $Jx \approx {}^\circ Jx = 0$. Полагая $x_1 := x - Jx$, находим $x_1 \approx x$ и $Jx_1 = 0$. В силу (0.2) $x \in {}^\circ \ker J$ и по принципу переноса $\ker {}^\circ J \subseteq {}^\circ \ker J$. Предложение 4.7 теперь влечет первое равенство в (5.1). Так как $\mathbb{I} - J$ — сильно околостандартный проектор и $\operatorname{im} J = \ker(\mathbb{I} - J)$, $\operatorname{im} {}^\circ J = \ker(\mathbb{I} - {}^\circ J)$, второе равенство также выполнено.

5.4. Замечание (полностью стандартное). Пусть J, K — проекторы такие, что

$$ \ker J = \ker K. \tag{5.2} $$

Положим

$$ U := \mathbb{I} - J + K, \quad V = \mathbb{I} - K + J. \tag{5.3} $$

Отображения U и V взаимно обратны:

$$ UV = VU = \mathbb{I}, \tag{5.4} $$

и проекторы J, K *подобны*:

$$ K = UJV, \quad J = VKU. \tag{5.5} $$

Доказательство. Из (5.2) получаем

$$ JK = J, \quad KJ = K, \tag{5.6} $$

что позволяет легко проверить (5.4) и (5.5).

5.5. Следствие. *Пусть для проекторов $J, K \in \mathscr{B}(H)$ выполнено (5.2). Если J и K сильно (равномерно) околостандартны, то их подобные U, V также сильно (равномерно) околостандартны и*

$$ {}^\circ K = {}^\circ U {}^\circ J {}^\circ V, \quad {}^\circ J = {}^\circ V {}^\circ K {}^\circ U \tag{5.7} $$

с ${}^\circ V = ({}^\circ U)^{-1}$.

5.6. Определение. Подпространство $G \subset H$ называют s-*околостандартным* (u-*околостандартным*), если ортопроектор $P : H \to G$ сильно (равномерно) околостандартен.

5.7. Следствие (из 5.5). *Пусть $J \in \mathscr{B}(H)$ — сильно (равномерно) околостандартный проектор такой, что $G := \ker J$ s-околостандартен (u-околостандартен). Тогда*

$$J = VPV^{-1}, \tag{5.8}$$

где P — ортопроектор $H \to G$ и биекции V, V^{-1} сильно (равномерно) околостандартны. В частности, ${}^\circ J = {}^\circ V {}^\circ P ({}^\circ V)^{-1}$.

Опишем u-околостандартные подпространства.

5.8. Определение. Последовательности (e_n), (e'_n) векторов в H называют n-*эквивалентными*, если существует $U \in \mathscr{B}(H)$ такой, что $\forall n \; e'_n = Ue_n$ и

$$\|U - \mathbb{I}\| \approx 0. \tag{5.9}$$

Если U к тому же унитарный оператор, то (e_n), (e'_n) называют *унитарно* n-*эквивалентными*.

Отметим, что из (5.9) вытекает, что U является биекцией $H \to H$ такой, что $U^{-1} \in \mathscr{B}(H)$ и $\|U^{-1} - \mathbb{I}\| \approx 0$. Тем самым n-эквивалентность — это настоящая эквивалентность. То же можно сказать об унитарной n-эквивалентности.

5.9. Предложение. *Подпространство $G \subseteq H$ u-околостандартно в том и только в том случае, если оно обладает ортонормальным базисом, унитарно n-эквивалентным некоторой стандартной ортонормальной последовательности.*

Для доказательства нам будет нужно следующее утверждение.

5.10. Лемма. *Пусть P — равномерно околостандартный ортопроектор. Тогда существует унитарный оператор $U \in \mathscr{B}(H)$, для которого выполнено (5.9) и*

$${}^\circ P = UPU^*. \tag{5.10}$$

Очевидно, из (5.9) и (5.10) вытекает, что ортопроектор P равномерно околостандартен: $\|P - {}^\circ P\| \approx 0$.

Доказательство. Используем конструкцию Като [6]. Для ортопроекторов $P, Q \in \mathscr{B}(H)$ положим

$$U' := QP + (\mathbb{I} - Q)(\mathbb{I} - P), \quad R := (P - Q)^2. \tag{5.11}$$

Если $\|R\| < 1$, то можно определить

$$U := U'(\mathbb{I} - R)^{-1/2}, \tag{5.12}$$

где

$$(\mathbb{I} - R)^{-1/2} := \sum_{n \geq 0} \binom{-1/2}{n} R^n.$$

Непосредственными вычислениями можно проверить, что R коммутирует с P, Q, U' и $UU^* = U^*U = \mathbb{I}$. Взяв $Q := {}^\circ P$, с учетом того, что $\|P - {}^\circ P\| \approx 0$, получаем $U' \approx {}^\circ P^2 + (\mathbb{I} - {}^\circ P)^2 = \mathbb{I}$, $R \approx 0$, $U \approx \mathbb{I}$, где «$\approx$» понимается в смысле $\|\cdot\|_{\mathscr{B}(H)}$. Это доказывает (5.9) и (5.10).

5.11. Следствие. *Пусть $P \in \mathscr{B}(H)$ — равномерно околостандартный ортопроектор. Тогда существуют стандартная ортонормальная последовательность (e_n) в H и унитарный оператор $U \in \mathscr{B}(H)$, для которых выполнено (5.9), такие, что*

$$\forall x \in H \quad Px = \sum_n (x|e'_n)e'_n, \quad \text{где } e'_n = Ue_n. \tag{5.13}$$

Доказательство. Достаточно в качестве (e_n) взять стандартный базис в $({}^\circ P)H$. Выполнимость (5.9) немедленно следует из 5.6 и 5.10.

Рассмотрим ортопроекторы конечного ранга. Если $\operatorname{rank} P = n \in \mathbb{N}$, то ортопроектор P можно представить так:

$$\forall x \in H \quad Px = \sum_{k \le n} (x|e_k)e_k \tag{5.14}$$

с попарно ортогональными единичными векторами e_k. Очевидно, если $n \ll \infty$, то

$$\forall x \in H \quad {}^\circ Px = \sum_{k \le n} (x|{}^\circ e_k){}^\circ e_k. \tag{5.15}$$

В частности,

$$\operatorname{rank} {}^\circ P \le \operatorname{rank} P. \tag{5.16}$$

5.12. Предложение. *Пусть G — s-околостандартное подпространство в H такое, что $\dim G \ll \infty$. Тогда*

$$\dim {}^\circ G \le \dim G. \tag{5.17}$$

Доказательство. Обозначим через P ортопроектор $H \to G$. Тогда P сильно околостандартен и $\operatorname{rank} P = \dim G$. В силу (5.16) $\operatorname{rank} {}^\circ P \le \dim G$. Но ввиду (5.1) $\operatorname{rank} {}^\circ P = \dim \operatorname{im} {}^\circ P = \dim {}^\circ \operatorname{im} P = \dim {}^\circ G$.

5.13. Предложение. *Пусть G — s-околостандартное подпространство в H. Тогда ${}^\circ(G^\perp) = ({}^\circ G)^\perp$.*

Доказательство. Обозначая через P ортопроектор $H \to G$, согласно предложению 5.3 имеем

$$\begin{aligned} {}^\circ(G^\perp) = {}^\circ \ker P = \ker {}^\circ P = \operatorname{im}(\mathbb{I} - {}^\circ P) = [\ker(\mathbb{I} - {}^\circ P)]^\perp \\ = (\operatorname{im} {}^\circ P)^\perp = ({}^\circ \operatorname{im} P)^\perp = ({}^\circ G)^\perp, \end{aligned}$$

поскольку тень сильно околостандартного ортопроектора является ортопроектором.

5.14. Следствие. *Пусть G — s-околостандартное подпространство в H такое, что $\operatorname{codim} G \ll \infty$. Тогда*

$$\operatorname{codim} {}^\circ G \le \operatorname{codim} G. \tag{5.17′}$$

Доказательство. Имеем $\operatorname{codim} G = \dim G^\perp \ge \dim {}^\circ(G^\perp) = \dim({}^\circ G)^\perp = \operatorname{codim} {}^\circ G$.

5.15. Предложение. *Пусть P — сильно околостандартный ортопроектор такой, что*

$$\operatorname{rank}{}^\circ P = \operatorname{rank} P < \infty. \tag{5.18}$$

Тогда P равномерно околостандартен.

Доказательство. Из (5.18) вытекает, что $n := \operatorname{rank} P \ll \infty$. По предложению 5.3 ${}^\circ P$ — (орто)проектор. Поэтому

$$\forall k \le n \quad {}^\circ e_j = {}^\circ P {}^\circ e_j = \sum_{k \le n} ({}^\circ e_j | {}^\circ e_k) {}^\circ e_k.$$

Ввиду (5.18) элементы ${}^\circ e_k$ линейно независимы, так что $({}^\circ e_j|{}^\circ e_k) = \delta_{jk}$ (символ Кронекера). В частности, $\forall k \le n$ $\|{}^\circ e_k\| = 1 = \|e_k\|$. По предложению 1.1 $\forall k \le n$ $\|e_k - {}^\circ e_k\| \approx 0$. В силу (5.14) и (5.15)

$$\|P - {}^\circ P\| \le 2 \sum_{k \le n} \|e_k - {}^\circ e_k\|. \tag{5.19}$$

5.16. Пример (подпространство, не являющееся s-околостандартным). Пусть $G := f^\perp$, где $f := \alpha e_1 + \beta e_n$ такие, как в п. 5.2. Там мы показали, что тень ${}^\circ P$ ортопроектора $P : H \to G$ не будет проектором. Поэтому в силу предложения 5.3 P не является сильно околостандартным. Отсюда G не s-околостандартен.

Покажем, что ${}^\circ G = e_1^\perp$. В самом деле, пусть $x \in {}^{\mathrm{st}}\,{}^\circ G$. Тогда $x \approx x_1$ для некоторого $x_1 \in G$. Поскольку $(x|e_n) \approx 0$, имеем

$$(x|e_1) \approx \frac{1}{\alpha}(x_1|\alpha e_1 + \beta e_n) = 0.$$

Отсюда $x \perp e_1$. Обратно, пусть $x \in {}^{\mathrm{st}}H$ и $(x|e_1) = 0$. Положим $x_1 := x - (x|f)f$. Тогда $(x_1|f) = 0$, т. е. $x_1 \in G$. Кроме того, $x - x_1 = (x|\alpha e_1 + \beta e_n) = \overline{\beta}(x|e_n) \approx 0$, так что $x \in {}^\circ G$. Отметим, что *углом* между G и ${}^\circ G$ будет $\arccos \alpha$ (в частности, если α около 0, то этот угол около $\pi/2$).

5.17. Предложение. *Пусть ортопроектор P задан равенством*

$$Px := \sum_{k \le n} (x|e_k) e_k,$$

где $n = \operatorname{rank} P \ll \infty$. Если $\forall k \le n$ $\|{}^\circ e_k\| < 1 \Rightarrow {}^\circ e_k = 0$, то P сильно околостандартен.

Доказательство. Пусть $\|{}^\circ e_k\| = 1$ для $k \le n'$ и ${}^\circ e_k = 0$ для $n' < k \le n$. Тогда $\forall k \le n'$ $\|e_k - {}^\circ e_k\| \approx 0$. Так как $\forall k \le n$ $\forall x \in {}^{\mathrm{st}}H$ $(x|e_k - {}^\circ e_k) \approx 0$, имеем

$$\forall x \in {}^{\mathrm{st}}H \quad Px - {}^\circ Px \approx \sum_{k \le n'} (x|{}^\circ e_k)(e_k - {}^\circ e_k) \approx 0.$$

5.18. Следствие. *Пусть подпространство $G \subset H$ имеет ортонормальный базис $(e_k)_{k \le n}$, $n \ll \infty$, такой, что $\forall k \le n$ $\|{}^\circ e_k\| < 1 \Rightarrow {}^\circ e_k = 0$. Тогда G s-околостандартен.*

5.19. Пример (ядро функционала). Пусть $G := \{x \in H : \ell(x) = 0\}$, где $\ell \in H^*$. Можно считать, что $\|\ell\| = 1$.

(i) Если $\|{}^\circ\ell\| = 1$, то G u-околостандартен.

(ii) Если $0 < \|{}^\circ\ell\| < 1$, то G не будет s-околостандартным.

(iii) Если ${}^\circ\ell = 0$, то $G = H$.

Доказательство. Имеем $\ell(x) = (x|e)$, где e — единичные векторы. Тогда $G = \ker P$, где $Px := (x|e)e$ (P — одномерный ортопроектор). Кроме того, ${}^\circ\ell(x) = (x|{}^\circ e)$, $\|{}^\circ\ell\| = \|{}^\circ e\|$, ${}^\circ Px = (x|{}^\circ e){}^\circ e$.

(i) Из $\|{}^\circ\ell\| = 1$ вытекает, что $\|{}^\circ e\| = \|e\|$, поэтому $\|e - {}^\circ e\| \approx 0$ и $\|Px - {}^\circ Px\| \leq 2\|x\| \cdot \|e - {}^\circ e\| \approx 0$. Отсюда P равномерно околостандартен.

(ii) Из соотношения $0 < \|{}^\circ\ell\| < 1$ следует, что $\|e - {}^\circ e\| \gg 0$. Поэтому

$$\|P{}^\circ e - {}^\circ P{}^\circ e\| = \|({}^\circ e|e)e - \|{}^\circ e\|^2 {}^\circ e\| \approx \|{}^\circ e\|^2 \|e - {}^\circ e\| \gg 0.$$

Отсюда P не сильно околостандартен.

(iii) Из ${}^\circ\ell = 0$ вытекает, что ${}^\circ e = 0$ и ${}^\circ P = 0$. Так как ${}^\circ P$ — ортопроектор, по предложению 5.1 P сильно околостандартен. Поэтому по предложению 5.3 ${}^\circ G = {}^\circ \ker P = \ker {}^\circ P = H$.

Рассмотрим теперь бесконечномерные (или гиперконечномерные) подпространства.

5.20. Предложение. *Пусть подпространство $G \subseteq H$ имеет ортонормальный базис (e_n) такой, что*

$$\forall n \in {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N} \quad \|{}^\circ e_n\| = 1, \tag{5.20}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N} \quad \forall x \in {}^{\mathrm{st}}H \quad \sum_{k \geq n} |(x|e_k)|^2 \approx 0. \tag{5.21}$$

Тогда G s-околостандартен и последовательность

$$(\overset{\circ}{e}_n)_{n\in\mathbb{N}} := \mathrm{st.ext.}({}^\circ e_n)_{n\in{}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}} \tag{5.22}$$

является ортонормальным базисом в ${}^\circ G$. Иными словами, пусть P — ортопроектор, заданный соотношением $\forall x \in H\ Px = \sum_n (x|e_n)e_n$, где (e_n) удовлетворяет условиям (5.20), (5.21). Тогда P сильно околостандартен и его тень дается соотношением

$$\forall x \in H \quad {}^\circ Px = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x|\overset{\circ}{e}_n)\overset{\circ}{e}_n, \tag{5.23}$$

где $(\overset{\circ}{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ определено в (5.22).

Доказательство. Согласно предложению 1.1 из условия (5.20) вытекает, что $\forall n \in {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}\ \|e_n - \overset{\circ}{e}_n\| = \|e_n - {}^\circ e_n\| \approx 0$. Поэтому $\forall n, k \in {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}\ (\overset{\circ}{e}_n|\overset{\circ}{e}_k) \approx (e_n|e_k)$. По принципу переноса стандартная последовательность $(\overset{\circ}{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ортонормальна. Пусть P — ортопроектор $H \to G$ и $x, y \in {}^{\mathrm{st}}H$. Тогда

$$({}^\circ Px|y) \approx (Px|y) = \sum_{k\leq n} (x|e_k)(e_k|y) + \sum_{k>n} (x|e_k)(e_k|y).$$

Отсюда для $n \in {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$ имеем

$$({}^\circ Px|y) \approx \sum_{k\leq n} (x|\overset{\circ}{e}_k)(\overset{\circ}{e}_k|y) + \sum_{k>n} (x|e_k)(e_k|y).$$

По лемме Робинсона это выполнено также для некоторого $n \in \mathbb{N} \setminus {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$. Но для такого n по условию (5.21) второе слагаемое инфинитезимально. Тем самым существует $n \in \mathbb{N} \setminus {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$ такое, что

$$({}^{\circ}Px|y) \approx \sum_{k \leq n} (x|\overset{\circ}{e}_k)(\overset{\circ}{e}_k|y).$$

В силу неравенства Бесселя стандартный ряд

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (x|\overset{\circ}{e}_n)(\overset{\circ}{e}_n|y)$$

сходится. Так как $({}^{\circ}Px|y)$ также стандартно, приходим к (5.23). В частности, ${}^{\circ}P$ — ортопроектор и по предложению 5.1 P сильно околостандартен. Из (5.23) вытекает также, что $(\overset{\circ}{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — ортонормальный базис в $\operatorname{im}{}^{\circ}P = {}^{\circ}\operatorname{im} P = {}^{\circ}G$.

Дадим достаточные условия сильной околостандартности.

5.21. Предложение. *Пусть $J \in {}^{F}\mathscr{B}(H)$ — проектор такой, что $J{}^{\circ}J = J$. Тогда J сильно околостандартен.*

Доказательство. Поскольку $\|J\| \geq 1$, имеем $\forall x \in H$ $\|Jx\| \leq \|{}^{\circ}Jx\|$, поэтому ${}^{\circ}\|Jx\| \leq \|{}^{\circ}Jx\|$. Ввиду (2.7) имеем также ${}^{\circ}\|Jx\|^2 - \|{}^{\circ}Jx\|^2 \geq 0$ для $x \in {}^{\mathrm{st}}H$. Таким образом, $\forall x \in {}^{\mathrm{st}}H$ $\|{}^{\circ}Jx\| = {}^{\circ}\|Jx\|$, и в силу предложения 2.3 J сильно околостандартен.

5.22. Следствие. *Пусть $J \in {}^{F}\mathscr{B}(H)$ — проектор такой, что $({}^{\circ}J)J = J$. Тогда J^* сильно околостандартен.*

Доказательство. Сопряженный J^* также является проектором, и по утверждению 4.1(ii) $J^*({}^{\circ}J)^* = J^*$, $({}^{\circ}J)^* = {}^{\circ}(J^*)$.

5.23. Следствие (полностью стандартное). *Пусть $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность проекторов $J_n \in \mathscr{B}(H)$ такая, что $\sup\limits_n \|J_n\| < \infty$ и $\forall k \leq n$ $J_k J_n = J_n J_k = J_k$. Тогда (J_n) сильно сходится.*

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что (J_n) стандартна. Поэтому $\forall n \in {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$ $J_n \in {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$. Фиксируем некоторое $k \in \mathbb{N} \setminus {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$. Для $n \in {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$ имеем $J_n J_k = J_n$, откуда $J_n = J_n{}^{\circ}(J_k)$. По принципу переноса это выполнено для всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда по утверждению 4.1(ii) $\forall k, n \in \mathbb{N} \setminus {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$ ${}^{\circ}J_n = {}^{\circ}J_n{}^{\circ}J_k$. Мы видим, что ${}^{\circ}J_n$ для $n \in \mathbb{N} \setminus {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$ не зависит от n. Обозначим его через J. Поскольку $J_n = J_n{}^{\circ}J_n$, согласно примеру 5.19 J_n сильно околостандартен, т. е.

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N} \; \forall x \in {}^{\mathrm{st}}H \; \|J_n x - Jx\| \approx 0.$$

Это означает, что $J = \lim\limits_{n \to \infty} J_n$ в сильном смысле.

Пусть $\Gamma \in \mathscr{B}(H; G)$, где G — вспомогательное гильбертово пространство, таков, что

$$\Gamma\Gamma^* = \mathbb{I}_G. \tag{5.24}$$

Тогда произведение

$$P := \Gamma^*\Gamma \tag{5.25}$$

является ортопроектором в H. Можно считать, что

$$\Gamma H = G. \tag{5.26}$$

Тогда

$$PH = \Gamma^* G. \tag{5.27}$$

Очевидно,

$$\forall x \in H \quad \|Px\| = \|\Gamma x\|, \tag{5.28}$$

$$\ker P = \ker \Gamma, \quad \ker \Gamma^* = \{0\}. \tag{5.29}$$

5.24. Предложение. *Если* Γ — *сильно* (*равномерно*) *околостандартен, то* P *такой же.*

Доказательство. По предложению 4.1 $({}^\circ\Gamma)^* = {}^\circ(\Gamma^*)$ и

$${}^\circ P = {}^\circ(\Gamma^*){}^\circ\Gamma. \tag{5.30}$$

Из (5.24) вытекает, что ${}^\circ\Gamma({}^\circ\Gamma)^* = \mathbb{I}_G$. Поэтому ${}^\circ P$ — ортопроектор. По предложению 5.1 P сильно околостандартен. Утверждение относительно равномерной околостандартности очевидно.

6. Околостандартность графиков. Для распространения предыдущих рассмотрений на случай не всюду определенных операторов используем их графики. Рассмотрим стандартные метрические пространства (X, d_X), (Y, d_Y) и отображение $f : X \to Y$. *График* f — это подмножество $\{(x, y) \in X \times Y : x \in \operatorname{dom} f,\ y = f(x)\}$ в $Z = X \times Y$, имеющее тень относительно, например, метрики $d(z_1, z_2) = \{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2\}^{1/2}$. Такое отображение f называют *графически околостандартным*, если тень его графика является графиком некоторого отображения. В этом случае тень f будет (единственным) отображением ${}^\circ f$, определенным соотношением

$$\operatorname{graph}({}^\circ f) = {}^\circ\operatorname{graph} f. \tag{6.1}$$

6.1. Предостережение. Стандартное отображение может не обладать околостандартным графиком (см. ниже 6.4).

Положим

$$\operatorname{dom}_{\mathrm{nst}} f := \{x \in {}^{\mathrm{nst}}\operatorname{dom} f : f(x) \in {}^{\mathrm{nst}}Y\}. \tag{6.2}$$

Следующее $\langle\mathrm{nst}\rangle$-условие необходимо и достаточно для того, чтобы f было графически околостандартным (см., например, [1]):

$$\forall x_1, x_2 \in \operatorname{dom}_{\mathrm{nst}} f \quad d_X(x_1, x_2) \approx 0 \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) \approx 0. \tag{6.3}$$

Пусть H — стандартное гильбертово пространство и L — оператор в H (т. е. линейное отображение $H \to H$). Для L $\langle\mathrm{nst}\rangle$-условие можно упростить следующим образом:

$$\forall x \in \operatorname{dom}_{\mathrm{nst}} L \quad \|x\| \approx 0 \Rightarrow \|Lx\| \approx 0. \tag{6.4}$$

Обозначим через $\|\cdot\|_L$ норму графика L, т. е.

$$\forall x \in \operatorname{dom} L \quad \|x\|_L := \{\|x\|^2 + \|Lx\|^2\}^{1/2}. \tag{6.5}$$

6.2. Замечание. Внешнее множество $\operatorname{dom}_{\mathrm{nst}}$ — это совокупность $\|\cdot\|_L$-околостандартных $x \in \operatorname{dom} L$. $\langle\mathrm{nst}\rangle$-Условие для L эквивалентно такому:

$$\forall x \in \operatorname{dom}_{\mathrm{nst}} L \quad \|x\| \approx 0 \Rightarrow \|x\|_L \approx 0. \tag{6.4$'$}$$

6.3. Пример (проектор $J \in \mathscr{B}(H)$, не графически околостандартный). Пусть $\varphi \in {}^{\mathrm{st}}H$, $\psi \in H$, $\|\psi\| \approx \infty$, $(\varphi|\psi) = 1$. Положим $\forall x \in H$ $Jx = (x|\psi)\varphi$. Тогда $J^2 = J$. Для $x := \varphi\|\psi\|^{-2}$ имеем $Jx = \varphi \in {}^{\mathrm{st}}H \subset {}^{\mathrm{nst}}H$. Тогда $\|x\| \approx 0$, но $\|Jx\| \gg 0$.

Для графически околостандартного оператора $L : H \to H$ его тень ${}^\circ L$ однозначно определяется соотношением

$$ {}^\circ L \quad \text{стандартное отображение } H \to H, \tag{6.6}$$

$$ x \in {}^{\mathrm{st}}\mathrm{dom}{}^\circ L \Longleftrightarrow \exists\, x_1 \in \mathrm{dom}_{\mathrm{nst}} L \;\; {}^\circ x_1 = x, \tag{6.7}$$

$$ x \in \mathrm{dom}_{\mathrm{nst}} L \Rightarrow {}^\circ x \in \mathrm{dom}\,{}^\circ L, \quad {}^\circ L {}^\circ x = {}^\circ (Lx). \tag{6.8}$$

6.4. Замечание. Стандартный оператор имеет околостандартный график в том и только в том случае, если он обладает замыканием. Для стандартного оператора L с замыканием имеем $L \subseteq {}^\circ L = \overline{L}$, где $\overline{L}$ — замыкание L.

Доказательство. Заметим, что для стандартного L $\langle\mathrm{nst}\rangle$-условие — это в точности наличие замыкания. Так как тень стандартного множества совпадает с его замыканием, замыкание $\overline{L}$ стандартного L — это ${}^\circ L$.

6.5. Замечание. Если L стандартен и замкнут, то

$$ \forall x \in \mathrm{dom}_{\mathrm{nst}} L \quad {}^\circ x \in \mathrm{dom}\, L, \tag{6.9}$$

что вытекает из замечания 6.4 и (6.8).

6.6. Замечание. Тень графически околостандартного оператора является стандартным замкнутым оператором.

6.7. Замечание. Пусть A — ограничение графически околостандартного оператора L. Тогда A графически околостандартный и ${}^\circ A \subseteq {}^\circ L$. Кроме того, если A — ограничение L на подпространство $V \subseteq \mathrm{dom}\, L$ (т. е. $A = L|_V$), то $\mathrm{dom}\,{}^\circ A \subset {}^\circ V$.

Доказательство. Очевидно, A удовлетворяет $\langle\mathrm{nst}\rangle$-условию, так что будет графически околостандартным. Рассмотрим $x \in {}^{\mathrm{st}}\,\mathrm{dom}\,{}^\circ A$. Пусть $x_1 \in \mathrm{dom}_{\mathrm{nst}} A$ и $x \approx x_1$ (см. (6.7)). Тогда $x_1 \in \mathrm{dom}_{\mathrm{nst}} L$, $x \in \mathrm{dom}\,{}^\circ L$ и $({}^\circ L)x = {}^\circ(Lx_1) = {}^\circ(Ax_1) = {}^\circ Ax$ (см. (6.8)). Так как взятое x принадлежит $\mathrm{dom}\, A = V$, имеем $x \in {}^\circ V$, и по принципу переноса $\mathrm{dom}\,{}^\circ A \subseteq {}^\circ V$.

6.8. Предложение. *Пусть L — стандартный замкнутый оператор $H \to H$, V — подпространство в H и $A = L|_V$. Тогда A графически околостандартный, ${}^\circ A \subseteq L$ и $\mathrm{dom}\,{}^\circ A$ является тенью ${}^\circ V$ в смысле $\|\cdot\|_L$.*

Доказательство. Ввиду замечания 6.6 достаточно доказать, что ${}^\circ V \subseteq \mathrm{dom}\,{}^\circ A$. Пусть $x \in {}^{\mathrm{st}}\,{}^\circ V$, т. е. $x \approx x_1$ для некоторого $x_1 \in V$. Так как $\|x - x_1\| \approx 0$ и $\|Ax_1 - Lx\| = \|Lx_1 - Lx\| \approx 0$, имеем $x \in \mathrm{dom}_{\mathrm{nst}} A$. Поэтому $x \in \mathrm{dom}\,{}^\circ A$, и в силу принципа переноса приходим к требуемому.

Следующее утверждение можно сравнить с предложением 4.4.

6.9. Предложение. *Пусть $L \in \mathscr{B}(H)$ сильно околостандартен и (как и выше) $A = L|_V$. Тогда A графически околостандартный и*

$$ \mathrm{dom}\,{}^\circ A = {}^\circ V. \tag{6.10}$$

Доказательство. Поскольку $\|L\| \ll \infty$ и $A \subset L$, то A графически околостандартный. Ввиду замечания 6.5 $\mathrm{dom}\,{}^\circ A \subseteq {}^\circ V$. Пусть $x \in {}^{\mathrm{st}}\,{}^\circ V$. Тогда $x \approx v$ для некоторого $v \in V = \mathrm{dom}\, A$. Имеем $Av = Lv \approx Lx \approx ({}^\circ L)x$. Поэтому $x \in \mathrm{dom}\,{}^\circ A$, и по принципу переноса ${}^\circ V \subseteq \mathrm{dom}\,{}^\circ A$.

Дадим обобщение предложения 4.1(iii).

6.10. Предложение. *Пусть A — графически околостандартный оператор $H \to H$ и $B \in \mathscr{B}(H)$ сильно околостандартен. Тогда AB графически околостандартный и*

$$^\circ(AB) \subseteq {}^\circ A {}^\circ B. \tag{6.11}$$

Доказательство. Пусть $x \approx 0$, $x \in \operatorname{dom} AB$ и $ABx \in {}^{\mathrm{nst}}H$. Так как $\|B\| \ll \infty$, имеем $Bx \approx 0$. Поскольку A графически околостандартный, то $ABx \approx 0$. Тем самым для AB выполнено $\langle \mathrm{nst} \rangle$-условие, т. е. AB графически околостандартный. Пусть $x \in {}^{\mathrm{st}} \operatorname{dom} {}^{\circ(AB)}$. Тогда $x \approx x_1$ для некоторого $x_1 \in \operatorname{dom}_{\mathrm{nst}} AB$ и $^\circ(AB)x \approx ABx_1$. Так как $Bx_1 \approx Bx \approx {}^\circ Bx$ и A графически околостандартный, получаем ${}^\circ Bx \in \operatorname{dom} {}^\circ A$ и $ABx_1 \approx {}^\circ A {}^\circ Bx$. Поэтому $^\circ(AB)x = {}^\circ A {}^\circ Bx$, и в силу принципа переноса (6.11) выполнено.

7. Условия графической околостандартности. Обозначим через $\mathscr{C}(H)$ множество плотно определенных замкнутых операторов $H \to H$, где H — стандартное гильбертово пространство.

7.1. Предложение. *Пусть $A \in \mathscr{C}(H)$ и*

(i) $\ker A = \{0\}$, $B := A^{-1} \in \mathscr{B}(H)$*;*

(ii) *B равномерно околостандартен и* $\ker {}^\circ B = \{0\}$.

Тогда

(iii) *A графически околостандартный и* $\ker {}^\circ A = \{0\}$*;*

(iv) $({}^\circ A)^{-1} = {}^\circ(A^{-1})$.

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{dom} A$, $x \approx 0$ и $Ax \in {}^{\mathrm{nst}}(H)$. Положим $y = Ax$. Тогда $x = By$ и ввиду равномерной околостандартности B будет $x \approx x_1$, где $x_1 := {}^\circ By$. Таким образом, ${}^\circ B {}^\circ y \approx x$, откуда ${}^\circ B {}^\circ y \approx 0$ и ввиду (ii) ${}^\circ y = 0$. Мы видим, что $Ax = 0$, т. е. A удовлетворяет $\langle \mathrm{nst} \rangle$-условию, так что A графически околостандартный.

Пусть теперь $x \in {}^{\mathrm{st}} \operatorname{dom} {}^\circ A$. Тогда $x \approx x_1$ для некоторого $x_1 \in \operatorname{dom}_{\mathrm{nst}} A$. Имеем $y_1 := Ax_1 \in {}^{\mathrm{nst}}(H)$, $y := {}^\circ y_1 = {}^\circ(Ax_1) = {}^\circ Ax$. Кроме того, $x_1 = By_1 \approx {}^\circ By_1$, откуда $x = {}^\circ By = {}^\circ B {}^\circ Ax$. По принципу переноса $\forall x \in \operatorname{dom} {}^\circ A$ ${}^\circ B {}^\circ Ax = x$. В силу того, что $\ker {}^\circ B = \{0\}$, если $y \in H$ и ${}^\circ By \in \operatorname{dom} {}^\circ A$, то ${}^\circ A {}^\circ By = y$.

Обозначим через $\rho(A)$ резольвенту и через $\sigma(A)$ — спектр $A \in \mathscr{C}(H)$. Пусть $z_0, z \in \rho(A) \cap {}^F\mathbb{C}$ такие точки, что существует гладкий путь Γ из z_0 в z такой, что $\operatorname{dist}(\Gamma, \sigma(A)) \gg 0$.

7.2. Предложение. *Пусть $(A - z_0)^{-1}$ равномерно околостандартен и* $\ker {}^\circ[(A - z_0)^{-1}] = \{0\}$ *(в частности, ввиду предложения* 7.1 *A графически околостандартен). Тогда $(A - z_0)^{-1}$ будет равномерно околостандартным,* $\ker {}^\circ[(A - z_0)^{-1}] = \{0\}$, ${}^\circ z \in \rho({}^\circ A)$ *и*

$${}^\circ[(A - z)^{-1}] = ({}^\circ A - {}^\circ z)^{-1}. \tag{7.1}$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать утверждение для $z \in \mathbb{C}$ такого, что $\operatorname{dist}(z_0, z) \ll \operatorname{dist}(z_0, \sigma(A))$. (В общем случае мы используем цепочку $(z_0, z_1, \dots, z_n)$ такую, что $n \ll \infty$, $z_n = z$ и $\forall k < n$ $\operatorname{dist}(z_k, z_{k+1}) \ll \operatorname{dist}(z_k, \sigma(A))$.) Пусть z обладает указанным свойством. Обозначим

$$B_0 := (A - z_0)^{-1}, \quad B := (A - z)^{-1}, \quad h := z - z_0.$$

Так как $\|B_0\| = [\mathrm{dist}(z_0, \sigma(A))]^{-1}$, имеем $\|hB_0\| \ll 1$. Таким образом, имеет место разложение

$$B = B_0 \sum_{n\geq 0} (hB_0)^n.$$

Положим

$$B_1 := {}^\circ B_0 \sum_{n\geq 0} ({}^\circ h {}^\circ B_0)^n.$$

Тогда $B_1 \in {}^{\mathrm{st}}\mathscr{B}(H)$. Для любого $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|B - B_1\| \leq \sum_{0\leq n\leq N} [B_0(hB_0)^n - {}^\circ B_0({}^\circ h {}^\circ B_0)^n] + \sum_{n>N} [|h|^n \|B_0\|^{n+1} + \|{}^\circ h|^n \|{}^\circ B_0\|^{n+1}].$$

Для $N \in {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$ первая сумма инфинитезимальна. Поэтому по лемме Робинсона она должна быть таковой для некоторого $N \in \mathbb{N} \setminus {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$. Но для такого N вторая сумма инфинитезимальна, потому что $\|hB_0\| \ll 1$. Таким образом, B равномерно околостандартен, и ${}^\circ B = B_1$. Теперь

$$({}^\circ A - z){}^\circ B = [({}^\circ A - {}^\circ z_0) + ({}^\circ z_0 - {}^\circ z)]{}^\circ B_0 \sum_{n\geq 0} ({}^\circ h {}^\circ B_0)^n$$
$$= \sum_{n\geq 0} - \sum_{n\geq 1} {}^\circ B_0({}^\circ h {}^\circ B_0)^n = \mathbb{I}_H.$$

Сформулируем условие графической околостандартности, использующее «почти сопряженность».

7.3. Предложение. *Пусть A — линейный оператор $H \to H$. Предположим, что существует линейный оператор $B : H \to H$ такой, что*

$$\forall x \in \mathrm{dom}\, A \,\forall y \in \mathrm{dom}\, B \quad (Ax|y) = (x|By), \tag{7.2}$$

$$\mathrm{Cl}^{\,S} \mathrm{dom}\, B = H, \tag{7.3}$$

$$\forall y \in {}^{\mathrm{st}}\, \mathrm{dom} B \quad By \in {}^F H. \tag{7.4}$$

Тогда A графически околостандартен. (*В* (7.3) ${}^S E$ *означает стандартизацию множества E.*)

Доказательство. Рассмотрим $x \in \mathrm{dom}\, A$ такой, что $x \approx 0$ и $Ax \in {}^{\mathrm{nst}}(H)$. Пусть $y \in {}^{\mathrm{st}}\, \mathrm{dom} B$. Тогда

$$|(Ax|y)| = |(x|By)| \leq \|x\|\, \|By\|.$$

Отсюда ввиду 7.4 будет $(Ax|y) \approx 0$. Поэтому $({}^\circ(Ax)|y) = 0$, и по принципу переноса $\forall y \in {}^S \mathrm{dom}\, B$ $({}^\circ(Ax)|y) = 0$. Из (7.3) вытекает, что ${}^\circ(Ax) = 0$, т. е. A удовлетворяет $\langle \mathrm{nst} \rangle$-условию.

7.4. Замечание. Предположим, что для оператора B в предложении 7.3 существует стандартный линейный оператор B_0 такой, что

$${}^S \mathrm{dom}\, B = \mathrm{dom}\, B_0 \tag{7.5}$$

и

$$\forall x \in {}^{\mathrm{st}}\, \mathrm{dom}\, B \quad \|Bx - B_0 x\| \approx 0. \tag{7.6}$$

Тогда тень A является замкнутым ограничением $(B_0)^*$:

$$^\circ A \subseteq (B_0)^*. \tag{7.7}$$

Доказательство. Как известно, $^\circ A$ существует и замкнут. Пусть $x \in {}^{\mathrm{st}}\,\mathrm{dom}\,{}^\circ A$. Тогда $x \approx x_1$ для некоторого $x_1 \in \mathrm{dom}_{\mathrm{nst}} A$ и $(^\circ A)x = {}^\circ(Ax_1)$. Отсюда для $y \in {}^{\mathrm{st}}\,\mathrm{dom}\,B$ имеем

$$((^\circ Ax|y) \approx (Ax_1|y) = (x_1|By) \approx (x|By) \approx (x|B_0 y),$$

т. е. $((^\circ A)x|y) = (x|B_0 y)$. По принципу переноса это равенство выполнено для любых $x \in \mathrm{dom}\,{}^\circ A$ и $y \in \mathrm{dom}\,B_0$, что доказывает (7.7).

Опишем ситуацию, в которой предложение 7.3 и замечание 7.4 могут быть применены. Пусть Ω — стандартное открытое множество в $\mathbb{R}^N$, где $N \in {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$. Обозначим через H стандартное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$. Рассмотрим оператор A, заданный соотношениями

$$\mathrm{dom}\,A = C_0^{(\infty)}(\Omega), \tag{7.8}$$

$$\forall x \in C_0^{(\infty)}(\Omega) \quad Ax(t) = \sum_{|\alpha| \le n} a_\alpha(t)\partial^\alpha x(t). \tag{7.9}$$

Здесь

$$t = (t_0, \dots, t_n) \in \Omega, \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \cdots \alpha_n, \quad a_\alpha \in C_0^{(\infty)}(\Omega).$$

Определим оператор $B : H \to H$, полагая

$$\mathrm{dom}\,B = C_0^{(\infty)}(\Omega), \tag{7.10}$$

$$\forall y \in C_0^{(\infty)}(\Omega) \quad By(t) = \sum_{|\alpha| \le n} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(\overline{a_\alpha(t)}y(t)). \tag{7.11}$$

7.5. Предложение. *Пусть*

$$\forall t \in \Omega\, \forall \alpha, \beta\, |\alpha| \le n \quad |\partial^\beta a_\alpha(t)| \ll \infty. \tag{7.12}$$

Тогда дифференциальный оператор (7.8), (7.9) *графически околостандартен.*

Доказательство. Ввиду (7.10) $\mathrm{dom}\,B$ стандартно и ${}^S\,\mathrm{dom}\,B = \mathrm{dom}\,B = C_0^{(\infty)}(\Omega)$, так что (7.3) выполнено. Соотношения (7.9), (7.11) и интегрирование по частям приводят к (7.2). Пусть $y \in {}^{\mathrm{st}}C_0^{(\infty)}(\Omega)$. Тогда $\forall \alpha\; |\alpha| \ll \infty \Rightarrow \|\partial^\alpha y\| \ll \infty$. Отсюда (7.12) влечет (7.4). Мы видим, что условия предложения 7.3 выполнены.

Зададим более сильное, чем (7.12), условие, а именно

$$\forall t \in \Omega\, \forall \alpha, \beta \quad |\alpha| \le n,\, |\beta| \le n+1 \Rightarrow |\partial^\beta a_\alpha(t)| \ll \infty. \tag{7.13}$$

Используя формулу Лейбница для производных произведения, приведем (7.11) к виду

$$\forall y \in C_0^{(\infty)}(\Omega) \quad By(t) = \sum_{|\alpha| \le n} b_\alpha(t)\partial^\alpha y(t). \tag{7.14}$$

Из (7.13) и теоремы о непрерывности тени выводим, что существуют ${}^\circ b_\alpha$, являющиеся стандартными элементами $C_0^{(n)}(\Omega)$, для которых $\|b_\alpha - {}^\circ b_\alpha\|_\infty \approx 0$ ($\|\cdot\|_\infty$ — равномерная норма). Зададим оператор B_0 такой, что

$$\operatorname{dom} B_0 = C_0^{(n)}(\Omega), \tag{7.15}$$

$$\forall y \in C_0^{(n)}(\Omega) \quad B_0 y(t) = \sum_{|\alpha| \le n} b_\alpha(t) \partial^\alpha y(t). \tag{7.16}$$

Очевидно, что B_0 стандартен. Так как (7.6) выполнено, ввиду замечания 7.4 получаем следующее утверждение.

7.6. Предложение. *Пусть выполнено условие* (7.6). *Тогда оператор A* (*см.* (7.8), (7.9)) *является замкнутым ограничением оператора B_0^** (*см.* (7.15), (7.16)).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lyantse W., Kudryk T.* Introduction to nonstandard analysis. Lviv: VNTL Publishers, 1997. (Mathematical Studies, Monograph Series, V. 3).
2. *Nelson E.* Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83, N 6. P. 1165—1198.
3. *Diener F., Reeb G.* Analyse nonstandard. Paris: Sci. Arts, 1989.
4. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990.
5. *Lutz R., Goze M.* Nonstandard Analysis: a practical guide with applications. Berlin a. o.: Springer-Verl., 1981. (Lect. Notes in Math.; N 881).
6. *Kato T.* Perturbation theory for linear oparators. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1966.

Статья поступила 26 сентября 2000 г.

Лянце Владислав Элиевич, Кудрик Тарас Степанович
Львовский национальный университет, математический факультет
ул. Университетская, 1, Львов 79001, Украина
wlanc@litech.lviv.ua, kudryk@mail.lviv.ua