Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2002. Том 43, № 5

УДК 517.518.244

УСТОЙЧИВОСТЬ В C–НОРМЕ И W^1_∞–НОРМЕ КЛАССОВ ЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

М. В. Коробков

Аннотация: В рамках предложенной А. П. Копыловым концепции ω-устойчивости изучаются устойчивые классы липшицевых функций одной вещественной переменной. Получена исчерпывающая (нетривиальная) классификация таких классов и установлено, что для них справедливы оценки устойчивости в W^1_∞-норме.

Ключевые слова: устойчивость, классы липшицевых функций одной переменной

Введение

На эвристическом уровне устойчивость класса отображений $\mathfrak{G}$ означает, что из локальной близости отображения f к отображениям из $\mathfrak{G}$ следует глобальная близость f к ним. Проиллюстрируем на следующем простейшем примере, какого рода объекты изучаются в данной работе. Пусть G — компактное подмножество $\mathbb{R}$. Рассмотрим класс выпуклых отображений $\mathfrak{G} = \{g : \Delta \to \mathbb{R} \mid g$ выпукло и $g' \in G$ почти всюду$\}$, задаваемых на всевозможных интервалах $\Delta \subset \mathbb{R}$. Если внутренность $\operatorname{int} G$ непуста, то введенный класс $\mathfrak{G}$ будет в некотором смысле неустойчивым. В самом деле, при $\operatorname{int} G \neq \varnothing$ найдется невыпуклая всюду дифференцируемая функция $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ такая, что $f'(x) \in G$ для любого $x \in (0,1)$. В силу определения производной локально (в малых окрестностях каждой точки $x \in (0,1)$) функцию f можно приблизить с любой точностью отображениями из класса $\mathfrak{G}$. Но глобально, на всем интервале $(0,1)$, функция f отделена в C-норме от отображений класса $\mathfrak{G}$ положительной константой. С другой стороны, если компактное множество G вполне несвязно (т. е. G нигде не плотно), то описанный класс $\mathfrak{G}$ выпуклых отображений уже оказывается устойчивым в том смысле, что всякое отображение f, которое в малых окрестностях точек из области определения $\operatorname{dom} f$ аппроксимируется с высокой точностью отображениями из $\mathfrak{G}$, будет и на всем интервале $\operatorname{dom} f$ мало отличаться в C-норме от некоторого отображения из $\mathfrak{G}$.

Точные определения устойчивости (см. § 1) мы заимствуем из концепции ω-устойчивости [1], формализм которой хорошо согласуется с высказанными интуитивными соображениями. В настоящей статье проведена исчерпывающая классификация ω-устойчивых классов липшицевых отображений интервалов вещественной прямой $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Оказывается, что

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–06322), INTAS (код проекта 97–10170) и гранта РАН для молодых ученых (грант № 8).

всякий ω-устойчивый класс $\mathfrak{G}$ порождается некоторым компактом $G \subset \mathbb{R}^m$ и частичным предпорядком π на G по следующему правилу: $\mathfrak{G}$ состоит из всех липшицевых отображений $g : \Delta \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ таких, что $g'(x) \in G$ п. в. и производная g' возрастает относительно π (теорема 1). При этом предпорядок π должен удовлетворять введенному нами ниже (см. определение 1) условию расщепляемости. Это, в свою очередь, накладывает некоторые ограничения и на геометрические свойства компакта G (см. предложение 1). Отметим, что в приведенном выше примере класса выпуклых функций роль π играет обычный порядок на $\mathbb{R}$.

С помощью найденного полного описания ω-устойчивых классов отображений в $\mathbb{R}^m$ интервалов из $\mathbb{R}$ здесь доказано, что для всех таких классов оценки устойчивости имеют место не только в C-, но и в W^1_∞-норме (теорема 2). Получение такого рода оценок представляет собой важную задачу в теории устойчивости, упомянем здесь ставшие уже классическими результаты Ю. Г. Решетняка [2] по устойчивости в W^1_p-норме классов конформных и изометрических преобразований. Ранее в теории ω-устойчивости оценки устойчивости в W^1_p-нормах были известны только для некоторых специальных классов отображений, таких, например, как уже называвшиеся классы изометрических отображений, некоторые другие классы аффинных отображений, классы решений эллиптической системы с постоянными коэффициентами (см. [1–4]).

Часть результатов настоящей статьи была анонсирована в [5]. О других результатах теории ω-устойчивости, см., например, [4, 6, 7].

Статья разбита на четыре параграфа. В § 1 мы напоминаем базовые определения концепции ω-устойчивости, в § 2 формулируем основные результаты и обсуждаем содержащиеся в них условия, в § 3 приводим некоторые характерные примеры, а в § 4 доказываем теоремы из § 2.

§ 1. Определения и обозначения

Пусть n и m — произвольные натуральные числа (в данной статье нас интересует случай $n = 1$). Класс $\mathfrak{G} = \{g : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\}$ отображений в $\mathbb{R}^m$ областей (открытых связных множеств) Δ пространства $\mathbb{R}^n$ называется *нормальным*, если он удовлетворяет следующим *условиям нормальности*, введенным А. П. Копыловым [1].

K^*_1. Класс $\mathfrak{G}$ состоит из локально C-липшицевых отображений с фиксированной константой липшицевости $C = C_{\mathfrak{G}} \geq 0$.

K^*_2. Если отображение $g : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ принадлежит классу $\mathfrak{G}$, $\rho > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, то отображение $g_0 : \Delta_0 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, определяемое формулой

$$\Delta_0 \ni x \xrightarrow{g_0} \rho^{-1} g(\rho x + a) + b,$$

где $\Delta_0 = \{\rho^{-1}(y - a) \mid y \in \Delta\}$, также принадлежит $\mathfrak{G}$.

K^*_3. Класс $\mathfrak{G}$ замкнут относительно локально равномерной сходимости.

K^*_4. Если $g : \Delta \to \mathbb{R}^m \in \mathfrak{G}$ и $\Delta_1 \subset \Delta$ — подобласть Δ, то $g|_{\Delta_1} \in \mathfrak{G}$, где $g|_{\Delta_1}$ есть сужение отображения g на Δ_1.

K^*_5. Если отображение $g : \Delta \to \mathbb{R}^m$ таково, что для произвольной точки $x \in \Delta$ найдется окрестность $U(x) \subset \Delta$ такая, что $g|_{U(x)} \in \mathfrak{G}$, то $g \in \mathfrak{G}$.

Последние два условия означают, что класс $\mathfrak{G}$ порожден некоторым пучком отображений на $\mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{R}^m$.

Нормальный класс $\mathfrak{G}$ называется *ω-устойчивым* [1] (см. также [8]), если существует функция $\sigma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ такая, что

1) $\sigma(\varepsilon) \to \sigma(0) = 0$ при $\varepsilon \to 0$;

2) для каждого отображения $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ области $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ с $\Omega(f, \mathfrak{G}) < \infty$ справедливо неравенство $\omega(f, \mathfrak{G}) \le \sigma(\Omega(f, \mathfrak{G}))$.

Здесь $\omega(f, \mathfrak{G}) = \sup\limits_{B \subset \Delta} \omega_B(f, \mathfrak{G})$, $\Omega(f, \mathfrak{G}) = \sup\limits_{x \in \Delta} \Omega(x, f, \mathfrak{G})$, причем $B = B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\}$ — это n-мерный шар, содержащийся в области Δ, и

$$\omega_B(f, \mathfrak{G}) = \inf_{g : B \to \mathbb{R}^m,\ g \in \mathfrak{G}} \{r^{-1} \sup_{y \in B} |f(y) - g(y)|\}, \quad \Omega(x, f, \mathfrak{G}) = \varlimsup_{r \to 0} \omega_{B(x,r)}(f, \mathfrak{G}).$$

Функционалы $\omega(\cdot, \mathfrak{G})$ и $\Omega(\cdot, \mathfrak{G})$ называются функционалами *глобальной* и соответственно *локальной близости* к классу $\mathfrak{G}$. Функционал $\omega(\cdot, \mathfrak{G})$ глобальной близости измеряет близость отображения f к отображениям класса $\mathfrak{G}$ на всех шарах, лежащих в области Δ, а функционал $\Omega(f, \mathfrak{G})$ локальной близости — только в бесконечно малых шарах. Отметим, что равенство $\omega(f, \mathfrak{G}) = 0$ равносильно включению $f \in \mathfrak{G}$ (см. [1]).

Понятие ω-устойчивости означает, по существу, что отображение $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ можно аппроксимировать с большой точностью отображениями из $\mathfrak{G}$ на любом шаре из Δ, если f аппроксимируется с достаточной точностью отображениями из $\mathfrak{G}$ в бесконечно малых шарах из Δ.

Для множества U всюду в дальнейшем $\operatorname{cl} U$ означает замыкание U, $\operatorname{co} U$ — выпуклую оболочку U. Пространство $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ будем отождествлять с пространством $\mathbb{R}^{n \times m}$.

§ 2. Устойчивость в C-норме и W^1_∞-норме

При формулировке основных теорем (см. ниже теоремы 1 и 2) центральное место занимает следующее понятие.

Определение 1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^m$ — непустое компактное множество, все компоненты связности которого выпуклы. Частичный предпорядок π на множестве G мы будем называть *расщепляемым*, когда для любой пары точек $a, b \in G$ выполнены следующие утверждения. Если a, b лежат в одной компоненте связности[1] множества G, то $a \le_\pi b$ и $b \le_\pi a$. Если же a, b лежат в разных компонентах связности G, то существуют конечное разбиение $G = \bigcup\limits_{i=1}^{k} G_i$ и частичный порядок θ на множестве компактов $\{G_1, \dots, G_k\}$ такие, что

1) $G_i \cap \operatorname{cl} \operatorname{co} G_j = \varnothing$ при $i \ne j$;

2) если $c \in G_i$, $d \in G_j$ и $c \le_\pi d$, то $G_i \le_\theta G_j$;

3) $a \in G_{i_1}$, $b \in G_{i_2}$, $i_1 \ne i_2$, причем G_{i_1} и G_{i_2} сравнимы относительно порядка θ в том и только том случае, когда a и b сравнимы относительно π.

Теорема 1. *Класс $\mathfrak{G}$ отображений в $\mathbb{R}^m$ интервалов из $\mathbb{R}$ является ω-устойчивым в том и только том случае, когда существует компакт $G \subset \mathbb{R}^m$ с выпуклыми компонентами связности и расщепляемый предпорядок π на G такие, что*

$$\mathfrak{G} = \{g \in \operatorname{Lip} \mid g'(x) \in G \text{ для п. в. } x \in \operatorname{dom} g \text{ и } g' \ \pi\text{-возрастает}\}. \tag{1}$$

[1] Под связностью или обычной связностью мы понимаем связность в смысле понятий общей топологии.

Здесь Lip — *множество всех локально липшицевых отображений* $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ *всевозможных интервалов* $\Delta \subset \mathbb{R}$.

Класс отображений, определяемый правой частью равенства (1), будем обозначать далее символом $\mathfrak{Z}_\pi(G)$.

Замечание 1. Производная g' называется π-возрастающей, если существует множество полной меры $E \subset \operatorname{dom} g$, $|\operatorname{dom} g \setminus E| = 0$, такое, что $g'(x) \in G$ для всех $x \in E$ и $g'(x) \leq_\pi g'(y)$ для любой пары $x, y \in E$, $x < y$. Оказывается, для всякого отображения $g \in \mathrm{Lip}$, производная g' которого π-возрастает в указанном смысле, в качестве описанного множества E можно взять $\operatorname{dom} g'$. Это следует из выпуклости компонент связности множества G и доказанной ниже леммы 6.

Функционалы глобальной и локальной близости по определению дают оценки устойчивости в C-норме. Однако в рассматриваемом нами случае отображений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^m$ оказывается, что для каждого ω-устойчивого класса отображений $\mathfrak{G}$ из локальной близости отображений f к отображениям класса $\mathfrak{G}$ в C-норме следует глобальная близость f к отображениям из $\mathfrak{G}$ в W^1_∞-норме.

Теорема 2. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^m$ — непустой компакт с выпуклыми компонентами связности, на котором задан расщепляемый предпорядок π. Тогда для класса $\mathfrak{Z}_\pi(G)$ имеют место оценки устойчивости в W^1_∞-норме, т. е. существует функция $\gamma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ такая, что*

1) $\gamma(\varepsilon) \to \gamma(0) = 0$ *при* $\varepsilon \to 0$;

2) *для каждого отображения $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ интервала $\Delta \subset \mathbb{R}$ с $\Omega(f, \mathfrak{Z}_\pi(G)) < \infty$ найдется отображение $g \in \mathfrak{Z}_\pi(G)$, для которого выполнены неравенства*

$$\|f - g\|_{C(\Delta)} \leq \gamma(\Omega(f, \mathfrak{A}(G))) \operatorname{diam} \Delta/2,$$
$$\|f' - g'\|_{L_\infty(\Delta)} \big(= \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Delta} |f'(x) - g'(x)|\big) \leq \gamma(\Omega(f, \mathfrak{Z}_\pi(G))). \tag{2}$$

Замечание 2. В связи с теоремой 2 напомним, что согласно лемме 3 из [1] всякое отображение $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$, удовлетворяющее ограничению $\Omega(f, \mathfrak{Z}_\pi(G)) < \infty$, является локально липшицевым с константой $\sup\limits_{a \in G} |a| + 2\Omega(f, \mathfrak{Z}_\pi(G))$ и, следовательно, f дифференцируемо почти всюду в Δ.

Следствие 1. *Для всякого ω-устойчивого класса $\mathfrak{G}$ отображений в $\mathbb{R}^m$ интервалов из $\mathbb{R}$ имеют место оценки устойчивости в W^1_∞-норме.*

Для классов отображений из $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, подобное утверждение, конечно, неверно. При указанных размерностях оценки устойчивости в W^1_p-нормах справедливы только для некоторых специальных ω-устойчивых классов отображений (см. введение).

Расщепляемый предпорядок π обычным способом индуцирует частичный порядок на множестве классов эквивалентности по отношению

$$a \sim b \iff a \leq_\pi b \text{ и } b \leq_\pi a. \tag{3}$$

Из определения 1 нетрудно видеть, что в случае расщепляемого предпорядка π

$$a \leq_\pi b \text{ и } b \leq_\pi a \Leftrightarrow a, b \text{ лежат в одной компоненте связности } G. \tag{4}$$

Поэтому расщепляемому предпорядку π на G соответствует частичный порядок на множестве компонент связности G. Этот порядок мы будем обозначать тем же самым символом π.

Из определения 1 следует также, что при $m > 1$ не на каждом компакте G с выпуклыми компонентами связности существует хотя бы один расщепляемый предпорядок π. Именно, имеет место

Предложение 1. *Пусть на непустом компакте $G \subset \mathbb{R}^m$ имеется расщепляемый предпорядок π. Тогда G можно представить в виде*

$$G = \bigcap_{\alpha \in A} \bigcup_{i=1}^{k_\alpha} G_i^\alpha, \tag{5}$$

$$G_i^\alpha \cap G \cap G_j^\alpha = \varnothing, \quad \alpha \in A,\ i \neq j,\ i, j \in \{1, \dots, k_\alpha\}, \tag{6}$$

где G_i^α — выпуклые компактные множества.

Обратно, если G можно представить в виде (5)–(6) с выпуклыми компактами G_i^α, то тривиальный предпорядок π_t, определяемый по формуле

$$a \leq_{\pi_t} b \ \Leftrightarrow\ a, b \text{ лежат в одной компоненте связности } G, \tag{7}$$

является расщепляемым.

Замечание 3. Условие существования для G представления (5)–(6) с выпуклыми компактами G_i^α было введено в [5, 6] под названием *условие* (Υ). Напомним, что для выполнения условия (Υ) необходимо (но при $m > 1$ недостаточно), чтобы компоненты связности компактного множества G были выпуклыми (см. [6, замечание 4]).

Доказательство предложения 1. Доказательство второй части предложения сводится к тривиальной проверке выполнения условий из определения 1, поэтому мы его опускаем. Докажем первую часть. Наиболее короткий путь — воспользоваться следующим понятием, введенным в [5, 9]. Согласно этим работам множество $U \subset \mathbb{R}^m$ будем называть *слабо связным*, если его нельзя представить в виде объединения $U = \bigcup_{t \in T} U_t$ семейства множеств U_t таких, что $U_t \neq U$, $U_t \cap \operatorname{cl}(U \setminus U_t) = \varnothing$ для каждого $t \in T$ и $U_t \cap \operatorname{cl}\operatorname{co} U_s = \varnothing$, если $t, s \in T$ и $t \neq s$. Пусть теперь на компакте $G \subset \mathbb{R}^m$ задан расщепляемый предпорядок π. Как несложно проверить, из определения слабой связности и условий в определении 1 вытекает, что если точки a, b лежат в разных компонентах связности множества G, то они лежат и в разных компонентах слабой связности G. С другой стороны, всякое связное множество слабо связно [5, 9], поэтому всякая компонента связности G лежит в некоторой компоненте слабой связности G. Суммируя последние высказывания, получаем, что компоненты слабой связности G совпадают с компонентами обычной связности, а значит, ввиду начального предположения из определения 1 компоненты слабой связности компакта G выпуклы. Но последнее по теореме 5 из [6] равносильно выполнению условия (Υ). Предложение 1 доказано. $\square$

§ 3. Некоторые примеры

Отметим, что теорема 1 включает в себя как частный случай утверждения, касающиеся устойчивости упомянутого вначале статьи класса выпуклых отображений. Чтобы увидеть это, нужно просто убедиться, что указанный класс выпуклых отображений порождается обычным порядком $\leq$ на $\mathbb{R}$, а этот порядок, рассмотренный на компактном множестве $G \subset \mathbb{R}$, будет расщепляемым в смысле определения 1 тогда и только тогда, когда множество G вполне несвязно.

Проиллюстрируем возможности найденных результатов на примере еще одного класса отображений с особенно простым строением. Пусть G — компакт в пространстве $\mathbb{R}^m$, и рассмотрим тривиальный предпорядок π_t на G, задаваемый формулой (7). В этом случае для обозначения класса отображений $\mathfrak{Z}_{\pi_t}(G)$, порожденного тривиальным предпорядком π_t, условимся в дальнейшем опускать индекс π_t. Тогда имеет место равенство

$$\mathfrak{Z}(G) = \{g \in \mathrm{Lip} \mid \exists \text{ компонента связности } K \text{ множества } G \\ g'(x) \in K \text{ для п. в. } x \in \operatorname{dom} g\}. \quad (8)$$

Устойчивость этого класса изучалась в [5, 6]. Из теоремы 1 и предложения 1 получаем, что класс $\mathfrak{Z}(G)$ ω-устойчив тогда и только тогда, когда G удовлетворяет условию (Υ). Данное утверждение совпадает с доказанным ранее результатом из [6].

С другой стороны, если $\mathfrak{G}$ — произвольный ω-устойчивый класс отображений, то по теореме 1 существуют компакт G и расщепляемый предпорядок π на G, для которых справедливо равенство (1). Рассмотрим вновь тривиальный предпорядок π_t на указанном компакте G. Из предложения 1 непосредственно вытекает, что предпорядок π_t также расщепляемый, а значит, класс $\mathfrak{Z}(G)$ также ω-устойчив. В силу определения 1 и (7) для любой пары $a, b \in G$ истинна импликация

$$a \leq_{\pi_t} b \;\Rightarrow\; a \leq_\pi b,$$

поэтому всякое π_t-возрастающее отображение будет и π-возрастающим. Это ввиду соответствующих определений влечет справедливость включения

$$\mathfrak{Z}(G) \subset \mathfrak{Z}_\pi(G) = \mathfrak{G}.$$

Таким образом, ω-устойчивые классы вида $\mathfrak{Z}(G)$ являются минимальными по включению среди всех ω-устойчивых классов с данным множеством дифференциалов G. Это также доказано в [6].

Из сказанного ранее следует, что для расщепляемости предпорядка π на компактном множестве $G \subset \mathbb{R}^m$ необходимо, чтобы

(i) имела место эквивалентность (4),

(ii) компакт G удовлетворял условию (Υ),

(iii) предпорядок π был непрерывным (см. ниже лемму 5).

Однако одновременного выполнения этих трех условий еще недостаточно для расщепляемости π, как показывает следующий простой контрпример. Пусть $m = 1$ и $G = \{0\} \cup \{\frac{1}{l} \mid l \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, что G — компактное множество, все компоненты связности которого одноточечны. Определим теперь частичный порядок π на G следующим образом. Положим $a \leq_\pi b \Leftrightarrow (a, b) \in P$, где

$$P = \{(a, a) \mid a \in G\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{3l+5}, \frac{1}{3l}\right), \left(\frac{1}{3l}, \frac{1}{3l+4}\right), \left(\frac{1}{3l+5}, \frac{1}{3l+4}\right) \mid l \in \mathbb{N} \right\}.$$

Очевидно, для заданного таким образом порядка π выполнены упомянутые условия (i)–(iii). Но π не является расщепляемым. Проверка этого факта вполне элементарна и не вызовет затруднения у читателя.

§ 4. Доказательство основных результатов

1. Установим сначала необходимость в теореме 1. Доказательство основано на нескольких леммах, при этом ключевую роль будут играть леммы 2 и 3.

Пусть $\mathfrak{G}$ — нормальный класс отображений в $\mathbb{R}^m$ интервалов из $\mathbb{R}$. Мы будем оговаривать особо в формулировках приводимых ниже утверждений, когда класс $\mathfrak{G}$ предполагается к тому же ω-устойчивым. Определим множество

$D\mathfrak{G} = \{a \in \mathbb{R}^m \mid$ линейное отображение $g : \mathbb{R} \ni x \mapsto xa$ принадлежит $\mathfrak{G}\}$. Известно [6], что множество $D\mathfrak{G}$ является компактным и совпадает с множеством значений производных $g'(x)$ всевозможных отображений $g \in \mathfrak{G}$. Положим

$$G = D\mathfrak{G}. \tag{9}$$

Замечание 4. По теореме 6 статьи [6] если класс $\mathfrak{G}$ ω-устойчив, то компакт G удовлетворяет условию (Υ). В частности, все компоненты связности G выпуклы (см. замечание 3).

Определим теперь отношение π на G:

$$a \le_\pi b \ \Leftrightarrow \ \exists g : \Delta \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m \in \mathfrak{G} \ \exists y, z \in \Delta \ y < z \quad g'(y) = a \text{ и } g'(z) = b. \tag{10}$$

Ниже мы покажем, что отношение π в случае ω-устойчивого класса $\mathfrak{G}$ в самом деле является искомым расщепляемым предпорядком, для которого справедливо равенство (1) из теоремы 1.

Нам понадобится семейство предпорядков π_ε на G, $\varepsilon > 0$, определяемых по следующему правилу. Полагаем $a \le_{\pi_\varepsilon} b$ в том и только том случае, когда для любой пары чисел $y < z$ найдется отображение $g^{\varepsilon ab}_{yz} : [y, z] \to \mathbb{R}^m$ такое, что

1) $\Omega\big(g^{\varepsilon ab}_{yz}, \mathfrak{G}\big) \le \varepsilon$ (здесь и далее через $\Omega\big(g^{\varepsilon ab}_{yz}, \mathfrak{G}\big)$ мы обозначаем значение функционала локальной близости, взятого от сужения функции $g^{\varepsilon ab}_{yz}$ на открытый интервал (y, z));

2) $\big(g^{\varepsilon ab}_{yz}\big)'(y) = a$, $\big(g^{\varepsilon ab}_{yz}\big)'(z) = b$ (имеются в виду односторонние производные);

3) $g^{\varepsilon ab}_{yz}(y) = 0$ (это условие носит технический характер).

В силу инвариантности класса $\mathfrak{G}$ относительно преобразований, описанных в условии нормальности K_2^*, имеем

$$a \le_\pi b \ \Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \quad a \le_{\pi_\epsilon} b.$$

Далее будет показано (см. следствие 3), что для ω-устойчивых классов $\mathfrak{G}$ истинна и обратная импликация.

Чтобы работать с введенным отношением π_ε, нам многократно придется применять следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ — отображение интервала $\Delta \subset \mathbb{R}$. Предположим, что $\Delta = E_1 \cup E_2$, причем $\Omega(x, f, \mathfrak{G}) \le \varepsilon$ при $x \in E_1$, а в точках из E_2 функция f дифференцируема и $\operatorname{dist}(f'(x), G) \le \varepsilon$, $x \in E_2$. Тогда $\Omega(f, \mathfrak{G}) \le \varepsilon$.*

Лемма 1 немедленно вытекает из определения функционала $\Omega(\cdot, \mathfrak{G})$ и приводимого ниже неравенства [8] для точек x дифференцируемости функции f:

$$\Omega(x, f, \mathfrak{G}) \le \operatorname{dist}(f'(x), D\mathfrak{G}). \tag{11}$$

Нужные нам свойства отношения π_ε содержатся в следующей лемме, которая в принятых обозначениях справедлива и без предположения об устойчивости класса $\mathfrak{G}$.

Лемма 2. *Для произвольного $\varepsilon > 0$ отношение $\le_{\pi_\varepsilon}$ является предпорядком на множестве G. Отношение эквивалентности, порожденное этим предпорядком по правилу*

$$a \sim_\varepsilon b \Leftrightarrow a \le_{\pi_\varepsilon} b \ \text{ и } \ b \le_{\pi_\varepsilon} a, \tag{12}$$

разбивает компакт G на конечное число классов эквивалентности $\widetilde{G}^\varepsilon_i$, $i{=}1, \dots, k_\varepsilon$, которые являются компактными множествами, причем

$$\widetilde{G}^\varepsilon_i \cap \operatorname{co}\widetilde{G}^\varepsilon_j (= \widetilde{G}^\varepsilon_i \cap \operatorname{cl}\operatorname{co}\widetilde{G}^\varepsilon_j) = \varnothing, \qquad i \ne j. \tag{13}$$

Доказательство леммы 2. Рефлексивность $a \le_{\pi_\varepsilon} a$ при $a \in G$ очевидна из определения π_ε и (9). Проверим транзитивность. Пусть $a \le_{\pi_\varepsilon} b$ и $b \le_{\pi_\varepsilon} c$. Для произвольной пары чисел $y < z$ в качестве искомой функции $g^{\varepsilon ac}_{yz}$ возьмем

$$g^{\varepsilon ac}_{yz}(x) = \begin{cases} g^{\varepsilon ab}_{yw}(x), & x \in [y, w]; \\ g^{\varepsilon ab}_{yw}(w) + g^{\varepsilon bc}_{wz}(x), & x \in (w, z], \end{cases} \tag{14}$$

где $w = \frac{y+z}{2}$. Проверим, что новое отображение $g^{\varepsilon ac}_{yz}$ действительно удовлетворяет условиям 1–3 из определения отношения π_ε. Условия 2–3 выполняются автоматически за счет справедливости этих условий для вспомогательных функций, участвующих в определении (14). Условие 1 следует из леммы 1, если в качестве множеств E_1 и E_2 из формулировки леммы 1 взять множества $(y, w) \cup (w, z)$ и $\{w\}$ соответственно. Таким образом, $\Omega\big(g^{\varepsilon ac}_{yz}, \mathfrak{G}\big) \le \varepsilon$, значит, $a \le_{\pi_\varepsilon} c$ и проверка транзитивности отношения π_ε завершена. Следовательно, π_ε является предпорядком на G.

Чтобы установить следующее утверждение леммы 2, заметим, что если $a, b \in G$ и $|a - b| \le \varepsilon$, то $a \sim_\varepsilon b$. В указанном случае в качестве требуемой функции $g^{\varepsilon ab}_{yz}$ можно, например, взять отображение

$$g^{\varepsilon ab}_{yz}(x) = \begin{cases} (x - y)a, & x \in [y, w]; \\ (w - y)a + (x - w)b, & x \in (w, z], \end{cases} \tag{15}$$

где $w = \frac{y+z}{2}$. В проверке, очевидно, нуждается только условие 1. Неравенство $\Omega\big(w, g^{\varepsilon ab}_{yz}, \mathfrak{G}\big) \le \varepsilon$ следует из определения величины $\Omega(\cdot, \cdot, \mathfrak{G})$ и выбора пары a, b. Дальше надо применить лемму 1 с $E_1 = \{w\}$ и $E_2 = (y, w) \cup (w, z)$. Функция $g^{\varepsilon ba}_{yz}$ получается из формулы (15), если в ней поменять местами b и a. По определению (12) имеем нужное $a \sim_\varepsilon b$. Из доказанного свойства отношения $\sim_\varepsilon$ получаем, что число классов эквивалентности по отношению $\sim_\varepsilon$ конечно для любого $\varepsilon > 0$ и все они являются компактными множествами. Обозначим эти классы эквивалентности через $\widetilde{G}^\varepsilon_i$, $i = 1, \dots, k_\varepsilon$.

Наиболее важное значение для дальнейшего имеет равенство (13). Докажем его. Пусть $b \in G \cap \mathrm{co}\widetilde{G}^\varepsilon_j$. Это означает, что существуют $a_\nu \in \widetilde{G}^\varepsilon_j$ и числа $p_\nu \ge 0$, $\nu = 1, \dots, k$, $\sum\limits_{\nu=1}^{k} p_\nu = 1$, такие, что $\sum\limits_{\nu=1}^{k} p_\nu a_\nu = b \in G$. Установим эквивалентность $a_1 \sim_\varepsilon b$. В самом деле, нетрудно показать, что для всякой пары чисел $y < z$ существует система интервалов $\big(z^\nu_\mu, y^\nu_\mu\big)$, $\nu = 1, \dots, k$, $\mu \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $y = z^1_1 < y^1_1 < z^2_1 < y^2_1 < \dots < z^k_1 < y^k_1 < z^1_2 < y^1_2 < z^2_2 < y^2_2 < z^3_2 < \dots$, $\lim\limits_{\mu\to\infty} z^\nu_\mu = \lim\limits_{\mu\to\infty} y^\nu_\mu = w < z$;

2) для $A_\nu = \bigcup\limits_{\mu\in\mathbb{N}} \big[z^\nu_\mu, y^\nu_\mu\big]$ имеет место равенство $\rho^l_{A_\nu}(w) = p_\nu$.

Здесь символом $\rho^l_V(x)$ обозначается левая плотность (измеримого) множества $V \subset \mathbb{R}$ в точке x, т. е. величина

$$\lim_{r\to+0} \frac{|V \cap (x - r, x)|}{r}.$$

Из эквивалентностей $a_1 \sim_\varepsilon a_2 \sim_\varepsilon \dots \sim_\varepsilon a_k$ вытекает существование функций $g^{\varepsilon a_\nu a_{\nu+1}}_{y^\nu_\mu z^{\nu+1}_\mu}$, $\nu < k$, и $g^{\varepsilon a_k a_1}_{y^k_\mu z^1_{\mu+1}}$.

Положим

$$h(x)=\begin{cases} a_\nu, & x\in A_\nu;\\ (g^{\varepsilon a_\nu a_{\nu+1}}_{y^\nu_\mu z^{\nu+1}_\mu})'(x), & x\in(y^\nu_\mu,z^{\nu+1}_\mu),\ \nu<k;\\ (g^{\varepsilon a_k a_1}_{y^k_\mu z^1_{\mu+1}})'(x), & x\in(y^k_\mu,z^1_{\mu+1});\\ b, & x\in[w,z], \end{cases} \tag{16}$$

$$g(x)=\int\limits_y^x h(\tau)\,d\tau,\qquad A=\bigcup_{\nu=1}^k A_\nu.$$

Проверим, что g действительно удовлетворяет условиям 1–3 определения предпорядка π_ε для пары элементов $a_1,b\in G$ с параметрами y,z, т. е. что $g=g^{\varepsilon a_1 b}_{yz}$ (тем самым будет доказано неравенство $a_1\le_{\pi_\varepsilon} b$). Условия 2 и 3 устанавливаются легко. Остается проверить условие 1. Для этого нужно вновь применить лемму 1, взяв $E_2=A\cup[w,z)$ и $E_1=(y,z)\setminus E_2$. Исследуем корректность применения леммы 1 к данной ситуации. Здесь внимания заслуживает только доказательство включения $g'(w)\in G$, прочее же тривиальным образом следует из свойств вспомогательных функций, использованных в построении (16). Так как $h|_{[w,z]}(x)\equiv b$, производная справа функции g в точке w равна b. Ввиду того, что множества A_ν не пересекаются, имеем

$$\rho^l_A(w)=\sum_{\nu=1}^k\rho^l_{A_\nu}(w)=\sum_{\nu=1}^k p_\nu=1,\quad \rho^l_{[y,z]\setminus A}(w)=1-\rho^l_A(w)=0.$$

При $r\to+0$ получаем

$$\frac{g(w)-g(w-r)}{r}=\frac{\int\limits_{A_1\cap[w-r,w]}h(\tau)\,d\tau+\dots+\int\limits_{A_k\cap[w-r,w]}h(\tau)\,d\tau}{r}$$
$$+\frac{\int\limits_{[w-r,w]\setminus A}h(\tau)\,d\tau}{r}=\frac{|A_1\cap[w-r,w]|a_1+\dots+|A_k\cap[w-r,w]|a_k}{r}$$
$$+\frac{|[w-r,w]\setminus A|\gamma(r)}{r}\to\sum_{\nu=1}^k p_\nu a_\nu=b$$

($\gamma(r)$ — некоторый вектор из $\mathbb{R}^m$, причем $|\gamma(r)|\le C_{\mathfrak{G}}+2\varepsilon$ в силу леммы 3 из [1] и свойств вспомогательных функций из построения (16)), откуда левая производная функции g в точке w существует и равна b. Итак, $g'(w)=b\in G$, что ввиду леммы 1 и сказанного ранее влечет неравенство $\Omega(g,\mathfrak{G})\le\varepsilon$. Таким образом, построенная функция g действительно удовлетворяют условиям 1–3 определения предпорядка π_ε, можно записать это в виде $g=g^{\varepsilon a_1 b}_{yz}$. Ввиду произвольности выбора параметров y,z неравенство $a_1\le_{\pi_\varepsilon} b$ доказано. Точно так же доказывается и обратное неравенство $b\le_{\pi_\varepsilon} a_1$. Но тогда b лежит в том же классе эквивалентности, что и a_1, т. е. $b\in\widetilde{G}^\varepsilon_j$. Тем самым установлено включение $G\cap\operatorname{co}\widetilde{G}^\varepsilon_j\subset\widetilde{G}^\varepsilon_j$. Отсюда сразу получаем требуемое равенство (13): $\widetilde{G}^\varepsilon_i\cap\operatorname{co}\widetilde{G}^\varepsilon_j=\widetilde{G}^\varepsilon_i\cap G\cap\operatorname{co}\widetilde{G}^\varepsilon_j\subset\widetilde{G}^\varepsilon_i\cap\widetilde{G}^\varepsilon_j=\varnothing$. $\square$

Следствие 2. *Если a,b лежат в одной компоненте связности G, то (в принятых обозначениях) $a\sim_\varepsilon b$ для любого $\varepsilon>0$.*

Следствие 2 вытекает из конечности числа классов эквивалентности и их попарной отделенности, утверждаемых в лемме 2.

Лемма 3. *Пусть (во введенных выше обозначениях) $a, b \in G$ и $a \leq_{\pi_\varepsilon} b$ для любого $\varepsilon > 0$. Обозначим через $G(a)$, $G(b)$ компоненты связности G, содержащие точки a, b соответственно. Тогда если класс $\mathfrak{G}$ является ω-устойчивым, то имеет место включение*

$$\{g : (y,z) \to \mathbb{R}^m \in \mathrm{Lip} \mid \exists x_0 \in [y,z]\ g'(x) \in G(a) \text{ для п. в. } x \in (y, x_0),$$
$$g'(x) \in G(b) \text{ для п. в. } x \in (x_0, z)\} \subset \mathfrak{G}. \quad (17)$$

Доказательство леммы 3. Действительно, пусть отображение $g{:}(y,z) \to \mathbb{R}^m$ принадлежит классу отображений, стоящему слева в (17). Докажем, что $g \in \mathfrak{G}$. По следствию 2 статьи [6] верно включение $\mathfrak{Z}(G) \subset \mathfrak{G}$ (класс $\mathfrak{Z}(G)$ определен формулой (8)). Поэтому

$$g|_{(y,x_0)} \in \mathfrak{G} \quad \text{и} \quad g|_{(x_0,z)} \in \mathfrak{G}. \tag{18}$$

Если x_0 совпадает с одним из концов интервала y или x, то доказательство окончено. Обратимся к случаю $x_0 \in (y,z)$. Возьмем последовательности точек $y_\nu \to x_0 - 0$, $z_\nu \to x_0 + 0$, в которых существуют производные $g'(y_\nu) = a_\nu \in G(a)$, $g'(z_\nu) = b_\nu \in G(b)$. Определим новое семейство отображений

$$g_\nu(x) = \begin{cases} g(x), & x \in (y, y_\nu); \\ g(y_\nu) + g^{\varepsilon_\nu a_\nu b_\nu}_{y_\nu z_\nu}(x), & x \in [y_\nu, z_\nu]; \\ g(y_\nu) + g^{\varepsilon_\nu a_\nu b_\nu}_{y_\nu z_\nu}(z_\nu) - g(z_\nu) + g(x), & x \in (z_\nu, z), \end{cases}$$

где $\varepsilon_\nu = \frac{1}{\nu}$. Вспомогательные функции из определения отображений g_ν существуют в силу условий леммы 3 и следствия 2. Проверим, что

$$\Omega(g_\nu, \mathfrak{G}) \leq \frac{1}{\nu}. \tag{19}$$

Последнее опять следует из леммы 1 с $E_1 = (y, y_\nu) \cup (y_\nu, z_\nu) \cup (z_\nu, z)$, $E_2 = \{y_\nu, z_\nu\}$. Справедливость предположений леммы 1 вытекает из (18) и свойств вспомогательных функций $g^{\varepsilon_\nu a_\nu b_\nu}_{y_\nu z_\nu}$, использованных при построении g_ν.

Так как класс $\mathfrak{G}$ по предположениям доказываемой леммы ω-устойчив, неравенство (19) дает нам сходимость

$$\omega(g_\nu, \mathfrak{G}) \to 0 \qquad \text{при } \nu \to 0. \tag{20}$$

Согласно лемме 3 из [1] неравенство (19) также влечет липшицевость отображений g_ν с равномерно ограниченной константой. Отсюда нетрудно вывести, что последовательность g_ν равномерно сходится к функции g. Последнее вместе с (20), определением функционала $\omega(\cdot, \mathfrak{G})$ и свойством нормальности K_3^* позволяет заключить, что $g \in \mathfrak{G}$, что нам и требовалось. Лемма 3 доказана. $\square$

Следствие 3. *Если класс $\mathfrak{G}$ является ω-устойчивым, то для любой пары $a, b \in G$ справедливы следующие утверждения:*

$$a \leq_\pi b \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0 \quad a \leq_{\pi_\varepsilon} b, \tag{21}$$

$$a \sim b \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0 \quad a \sim_\varepsilon b \ \Leftrightarrow\ a, b \text{ лежат в одной компоненте связности } G. \tag{22}$$

Напоминаем, что в данном разделе символом π обозначено отношение, определенное формулой (10). Символом $\sim$ мы обозначаем отношение, заданное формулой (3).

За исключением правой равносильности в (22), следствие 3 легко выводится из следствия 2, леммы 3 и соответствующих определений. Истинность же правой части (22) прямо вытекает из [6, лемма 5] и определения (12).

Следующая лемма говорит нам, что потраченные усилия не пропали даром: мы значительно приблизились к цели доказательства.

Лемма 4. *Если класс $\mathfrak{G}$ является ω-устойчивым, то отношение π, заданное формулой* (10),*— расщепляемый предпорядок.*

Доказательство леммы 4. Проверим выполнение всех требований из определения 1. Согласно замечанию 4 все компоненты связности компакта G выпуклы. Из (21) и рефлексивности и транзитивности отношений π_ε вытекает, что π является частичным предпорядком на G.

Пусть a, b лежат в одной компоненте связности множества G. Тогда из следствия 3 получаем, что $a \leq_\pi b$ и $b \leq_\pi a$.

Пусть теперь a, b лежат в разных компонентах связности множества G. Для $\varepsilon > 0$ обозначим через θ_ε частичный порядок, индуцированный предпорядком π_ε на множестве классов эквивалентности $\widetilde{G}_i^\varepsilon$ по отношению (12). Из (21) и (22) следует, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ конечное семейство множеств $\left\{\widetilde{G}_1^\varepsilon, \dots, \widetilde{G}_{k_\varepsilon}^\varepsilon\right\}$ с только что заданным на нем порядком θ_ε удовлетворяют условиям 2–3 определения 1 для пары a, b. Лемма 2 гарантирует выполнение условия 1 определения 1. Итак, проверка соответствия предпорядка π определению 1 завершена. Лемма 4 доказана. $\square$

Далее нам понадобятся два утверждения о свойствах расщепляемых предпорядков π, первое из которых (лемма 5) устанавливает непрерывность π, а другое (лемма 6) является своеобразным аналогом теоремы Вейерштрасса о существовании предела у монотонной последовательности.

Лемма 5. *Предположим, что π — расщепляемый предпорядок на компакте $G \subset \mathbb{R}^m$. Пусть имеются две сходящиеся последовательности $G \ni a_\nu \to a$, $G \ni b_\nu \to b$ такие, что $a_\nu \leq_\pi b_\nu$. Тогда $a \leq_\pi b$.*

Лемма 5 очевидным образом следует из определения 1.

Лемма 6. *Предположим, что π — расщепляемый предпорядок на компакте $G \subset \mathbb{R}^m$. Пусть $a_\nu \in G$ — последовательность, неубывающая (невозрастающая) относительно предпорядка π, т. е. $a_\nu \leq_\pi a_{\nu+1}$ ($a_{\nu+1} \leq_\pi a_\nu$), $\nu \in \mathbb{N}$. Тогда найдется компонента связности K множества G такая, что*

$$\lim_{\nu\to\infty} \operatorname{dist}(a_\nu, K) = 0.$$

Доказательство леммы 6. Предположим противное. Тогда можно выделить две подпоследовательности $a_{\nu'_\mu} \to a$, $a_{\nu''_\mu} \to b$ такие, что a и b лежат в разных компонентах связности G. В силу монотонности исходной последовательности a_ν и леммы 5 заключаем, что $a \leq_\pi b$ и $b \leq_\pi a$. Последнее противоречит (4). Лемма 6 доказана. $\square$

Доказательство необходимости в теореме 1. Итак, пусть класс $\mathfrak{G}$ ω-устойчив, а компакт G и отношение π заданы формулами (9) и (10) соответственно. По лемме 4 π есть расщепляемый предпорядок. В силу определения класса $\mathfrak{Z}_\pi(G)$ и (10) (см. также комментарий к определению множества $D\mathfrak{G}$ перед формулой (9)) имеем включение $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{Z}_\pi(G)$. Чтобы получить искомое равенство (1), осталось доказать обратное включение $\mathfrak{Z}_\pi(G) \subset \mathfrak{G}$. В самом деле, пусть $f : \Delta \to \mathbb{R}^m \in \mathfrak{Z}_\pi(G)$. Покажем, что

$$\Omega(f, \mathfrak{G}) = 0. \tag{23}$$

Для этого достаточно проверить, что

$$\Omega(x, f, \mathfrak{G}) = 0 \tag{24}$$

при любом $x \in \Delta$. Фиксируем точку $x \in \Delta$. По определению класса $\mathfrak{Z}_\pi(G)$ производная f' π-возрастающая. По лемме 6 найдутся две компоненты связности L, R множества G такие, что $L \leq_\pi R$ и

$$\lim_{r\to 0} \operatorname*{ess\,sup}_{y\in(x-r,x)} \operatorname{dist}(f'(y), L) = \lim_{r\to 0} \operatorname*{ess\,sup}_{y\in(x,x+r)} \operatorname{dist}(f'(y), R) = 0. \tag{25}$$

В точках y дифференцируемости отображения f определим функцию h по следующему правилу. Если $y < x$, то полагаем $h(y) = a \in L$, где a — точка минимума: $|f'(y) - a| = \min_{b\in L} |f'(y) - b|$. Аналогично если $y > x$, то полагаем $h(y) = a \in R$, $|f'(y) - a| = \min_{b\in R} |f'(y) - b|$. Так как компоненты L и R являются выпуклыми компактами (см. замечание 4), то $h(y)$ определяется однозначно и получившаяся функция $h : \operatorname{dom} f' \to \mathbb{R}^m$ измерима. Положим

$$g(y) = f(x) + \int_x^y h(\tau)\,d\tau, \quad y \in \Delta.$$

По построению и по лемме 3 справедливо включение $g \in \mathfrak{G}$. Имеем оценку

$$r^{-1} \sup_{y\in(x-r,x+r)} |f(y) - g(y)| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{y\in(x-r,x+r)} |f'(y) - h(y)|.$$

Вследствие (25) правая часть последнего неравенства стремится к 0 при $r \to 0$. Отсюда по определению $\omega_B(\cdot, \mathfrak{G})$ получаем сходимость $\omega_{B(x,r)}(f, \mathfrak{G}) \to 0$ при $r \to 0$, что равносильно (24). Ввиду произвольности x верно (23). Тогда ω-устойчивость класса $\mathfrak{G}$ влечет нужное нам включение $f \in \mathfrak{G}$. Доказательство необходимости в теореме 1 завершено. $\square$

2. Теперь докажем теорему 2. Тем самым будет закончено доказательство теоремы 1, так как теорема 2, очевидно, включает в себя достаточность в теореме 1. Доказательство теоремы 2 распадается на ряд лемм, при этом основную нагрузку будет нести лемма 7.

Нам понадобится следующее понятие.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{G}_i$, $i = 1, \dots, k$, — конечное множество нормальных классов отображений, и пусть имеется частичный порядок θ на этом множестве. Тогда положим

$$[\mathfrak{G}_i]_\theta = \{g : (u,v) \to \mathbb{R}^m \in \mathrm{Lip} \mid \exists x_1 = u < x_2 < \dots < x_{l+1} = v,\ l \leq k,$$
$$g|_{(x_j,x_{j+1})} \in \mathfrak{G}_{i_j} \text{ и } \mathfrak{G}_{i_j} \leq_\theta \mathfrak{G}_{i_{j+1}}\}.$$

Замечание 5. Здесь и далее мы допускаем, что параметры u, v, ограничивающие область определения рассматриваемых функций, могут принимать значения $-\infty$ и $+\infty$.

В случае, когда порядок θ тривиален, определенный выше класс отображений устроен особенно просто:

$$\big(\mathfrak{G}_i \leq_\theta \mathfrak{G}_j \Leftrightarrow i = j\big) \ \Rightarrow\ [\mathfrak{G}_i]_\theta = \bigcup_{i=1}^k \mathfrak{G}_i. \tag{26}$$

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{G}_i$, $i = 1, \dots, k$, — конечное семейство попарно не пересекающихся нормальных классов отображений. Предположим, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всякого отображения $h : \Delta \to \mathbb{R}^m$ и интервала $B \subset \Delta$ истинна импликация*

$$\Omega(h|_B, \mathfrak{G}_i) \le \varepsilon_0 \ \& \ \omega_B(h, \mathfrak{G}_j) \le \varepsilon_0 \Rightarrow i = j. \tag{27}$$

Пусть, далее, задан частичный порядок θ на множестве $\{\mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_k\}$. Обозначим $\mathfrak{G} = [\mathfrak{G}_i]_\theta$. Тогда существует функция $\gamma_1 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ такая, что

1) $\gamma_1(\varepsilon) \to \gamma_1(0) = 0$ при $\varepsilon \to 0$;

2) для любого отображения $f : (u, v) \to \mathbb{R}^m$ с $\Omega(f, \mathfrak{G}) < \varepsilon$ найдутся точки $x_1 = u < x_2 < \dots < x_{l+1} = v$, $l \le k$, которым можно сопоставить классы $\mathfrak{G}_{i_j}$, удовлетворяющие неравенствам

$$\Omega(f|_{(x_j, x_{j+1})}, \mathfrak{G}_{i_j}) \le \gamma_1(\varepsilon), \ j = 1, \dots, l, \quad \text{и} \quad \mathfrak{G}_{i_j} \le_\theta \mathfrak{G}_{i_{j+1}}, \ j = 1, \dots, l-1.$$

Доказательство леммы 7. Мы рассмотрим только случай $k = 2$, так как справедливость леммы 7 для остальных значений k можно получить методом математической индукции.

Если порядок θ тривиален (т. е. $\mathfrak{G}_i \le_\theta \mathfrak{G}_j \Leftrightarrow i = j$), то $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2$ (см. (26)), и доказываемое утверждение следует из лемм 3, 4 работы [6].

Пусть теперь $\mathfrak{G}_1 \le_\theta \mathfrak{G}_2$ (случай, когда $\mathfrak{G}_2 \le_\theta \mathfrak{G}_1$, разбирается совершенно аналогично). Тогда

$$\mathfrak{G} = \{g : (u, v) \to \mathbb{R}^m \in \mathrm{Lip} \mid \exists w \in [u, v] \ g|_{(u,w)} \in \mathfrak{G}_1 \text{ и } g|_{(w,v)} \in \mathfrak{G}_2\}. \tag{28}$$

Из нормальности классов отображений $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ и условия $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = \varnothing$ следует нормальность класса $\mathfrak{G}$.

Пусть функция $f : \Delta \to \mathbb{R}^m$ такова, что $\Omega(f, \mathfrak{G}) < \varepsilon < \infty$. Положим

$$E_1 = \{x \in \Delta \mid \Omega(x, f, \mathfrak{G}_1) \le 4\varepsilon\}, \quad E_2 = \{x \in \Delta \mid \Omega(x, f, \mathfrak{G}_1) \le 4\varepsilon\}.$$

Обозначим

$$U = \{x \in \Delta \mid \exists \rho > 0 \ \exists w \in [x - \rho, x + \rho] \ (x - \rho, w) \subset E_1 \text{ и } (w, x + \rho) \subset E_2\}.$$

Далее нашей целью будет доказательство равенств

$$E_1 \cap E_2 = \varnothing, \tag{29}$$

$$U = \Delta \tag{30}$$

при достаточно малых ε. Из этих равенств ввиду сделанных обозначений следует утверждение леммы 7.

По лемме 1 статьи [6] найдется постоянная ε_1 такая, что если

$$\Omega(f, \mathfrak{G}) < \varepsilon < \varepsilon_1, \tag{31}$$

то имеет место оценка

$$\sup_{x \in \mathrm{dom}\, f'} \mathrm{dist}(f'(x), D\mathfrak{G}) < \frac{\varepsilon_0}{4} - 10\varepsilon, \tag{32}$$

где ε_0 — параметр из (27), а множество $D\mathfrak{G} \subset \mathbb{R}^m$ определено в начале § 4. Отметим, что по построению

$$D\mathfrak{G} = D\mathfrak{G}_1 \cup D\mathfrak{G}_2, \tag{33}$$

причем в силу (27) верно неравенство $\operatorname{dist}(D\mathfrak{G}_1, D\mathfrak{G}_2) > \varepsilon_0$. Далее будем предполагать, что неравенства (31) (а значит, и (32)) выполнены.

Установим ряд свойств введенных выше множеств E_1, E_2 и U.

(a) Докажем соотношение (29). Пусть, напротив, $x \in E_1 \cap E_2$, т. е.

$$\Omega(x, f, \mathfrak{G}_1) \le 4\varepsilon, \quad \Omega(x, f, \mathfrak{G}_2) \le 4\varepsilon.$$

Отсюда по определению существует радиус $r > 0$ такой, что $\omega_{B(x,r)}(f, \mathfrak{G}_1) \le 5\varepsilon$, $\omega_{B(x,r)}(f, \mathfrak{G}_2) \le 5\varepsilon$. Вновь по определению получаем, что существует отображение $g_1 : B(x,r) \to \mathbb{R}^m$, $g_1 \in \mathfrak{G}_1$, такое, что $\sup\limits_{y\in B(x,r)} r^{-1}|f(y) - g(y)| \le 5\varepsilon$. Но тогда по неравенству треугольника $\omega_{B(x,r)}(g_1, \mathfrak{G}_2) \le 5\varepsilon + 5\varepsilon = 10\varepsilon$. Согласно неравенству (32)

$$10\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{4}, \tag{34}$$

откуда $\omega_{B(x,r)}(g_1, \mathfrak{G}_2) < \varepsilon_0$. Но это противоречит (27) (если учесть, что $\Omega(g_1, \mathfrak{G}_1) = 0$ вследствие включения $g_1 \in \mathfrak{G}_1$). Равенство (29) доказано.

Положим $r(x) = \sup\{r_0 \mid \text{ для любого } r \in (0, r_0]\ B(x,r) \subset \Delta \text{ и } \omega_{B(x,r)} \le \varepsilon\}$. Из левого неравенства в (31) вытекает, что $r(x) > 0$ для любой точки $x \in \Delta$.

(b) Для каждого $x \in \Delta$ истинна импликация

$$\Bigl(\exists r_0 \in (0, r(x))\ \omega_{B(x,r_0)}(f, \mathfrak{G}_i) \le \frac{\varepsilon_0}{4} - \varepsilon\Bigr) \Rightarrow x \in E_i. \tag{35}$$

Докажем это свойство. Не умаляя общности, будем считать, что $i = 1$, для $i = 2$ рассуждения совершенно аналогичны. В силу условий на точку x в левой части (35) и по определению функционала $\omega_B(\cdot, \mathfrak{G}_1)$ существует отображение $g_1 : B(x, r_0) \to \mathbb{R}^m$, $g_1 \in \mathfrak{G}_1$, удовлетворяющее неравенству

$$\sup_{y\in B(x,r_0)} r_0^{-1}|f(y) - g_1(y)| \le \frac{\varepsilon_0}{4} - \varepsilon.$$

С другой стороны, так как $r_0 < r(x)$, найдется отображение $g : B(x, r_0) \to \mathbb{R}^m$, $g \in \mathfrak{G}$, такое, что

$$\sup_{y\in B(x,r_0)} r_0^{-1}|f(y) - g(y)| \le \varepsilon. \tag{36}$$

По определению класса $\mathfrak{G}$ (см. (28)) существует $w \in [x - r_0, x + r_0]$ такое, что $g|_{(x-r_0,w)} \in \mathfrak{G}_1$ и $g|_{(w,x+r_0)} \in \mathfrak{G}_2$ (если w совпадает с правым или левым концом интервала $[x - r_0, x + r_0]$, то $g \in \mathfrak{G}_1$ или $g \in \mathfrak{G}_2$ соответственно). Покажем, что на самом деле

$$w > x + \frac{r_0}{2}. \tag{37}$$

Обозначим $\delta = \frac{x+r_0-w}{2}$. Пусть $\delta > 0$ (если $\delta = 0$, то доказывать нечего). Тогда шар $B(w + \delta, \delta)$ совпадает с интервалом $(w, x + r_0)$, следовательно, $g|_{B(w+\delta,\delta)} \in \mathfrak{G}_2$. Вновь обращаясь к определению функционала $\omega_B(\cdot, \mathfrak{G})$, из выписанных ранее неравенств имеем оценку

$$\omega_{B(w+\delta,\delta)}(g_1, \mathfrak{G}_2) \le \frac{r_0}{\delta}\left(\frac{\varepsilon_0}{4} - \varepsilon\right) + \frac{r_0}{\delta}\varepsilon = \frac{r_0\varepsilon_0}{4\delta}.$$

Вместе с (27) это дает нам неравенство $\frac{r_0\varepsilon_0}{4\delta} > \varepsilon_0$, т. е. $r_0 > 4\delta$, что равносильно требуемому (37). Так как по выбору числа w выполнено включение $g|_{(x_0-r_0,w)} \in \mathfrak{G}_1$, полученная оценка (37) влечет включение $g|_{(x-\frac{r_0}{2},x+\frac{r_0}{2})} \in \mathfrak{G}_1$. Отсюда и из неравенства (36) легко выводится, что

$$\omega_{B(x,\frac{r_0}{2})}(f, \mathfrak{G}_1) \le 2\varepsilon. \tag{38}$$

Таким образом, мы доказали, что если выполнены условия в левой части импликации (35), то справедливо (38). Из (38) и (34) следует неравенство

$$\omega_{B(x,\frac{r_0}{2})}(f,\mathfrak{G}_1) \le \frac{\varepsilon_0}{4} - \varepsilon,$$

поэтому мы можем проделать все рассуждения еще раз, беря вместо r_0 новый радиус $\frac{r_0}{2}$. Повторяя этот процесс многократно, получим, что для любого натурального числа l справедливо неравенство $\omega_{B(x,\frac{r_0}{2^l})}(f,\mathfrak{G}_1) \le 2\varepsilon$. Отсюда для произвольного положительного $r \le \frac{r_0}{2}$ легко выводится оценка $\omega_{B(x,r)}(f,\mathfrak{G}_1) \le 4\varepsilon$. Следовательно, $\Omega(x,f,\mathfrak{G}_1) \le 4\varepsilon$, что равносильно правой части доказываемой импликации (35).

(c) Если функция f дифференцируема в точке $x \in \Delta$, то $x \in E_1 \cup E_2$.

Свойство (c) вытекает из только что доказанного свойства (b) и формул (32), (33), (11).

Теперь сделаем несколько наблюдений над множеством U.

(d) Множество U открыто, причем для любого интервала $(y,z) \subset U$ существует точка $w \in [y,z]$ такая, что $(y,w) \subset E_1$ и $(w,z) \subset E_2$.

Свойство (d) очевидным образом следует из определения множества U и доказанного ранее равенства (29).

(e) Пусть $[y,z] \subset \Delta$, $y < z$, $(y,z) \subset U$. Тогда если $y \in E_2$, то $[y,z] \subset E_2$, а если $z \in E_1$, то $[y,z] \subset E_1$.

Из соображений симметрии достаточно рассмотреть только случай $y \in E_2$. По свойству (d) существует точка $w \in [y,z]$ такая, что $(y,w) \subset E_1$ и $(w,z) \subset E_2$. Таким образом, доказательство нужного нам включения $(y,z) \subset E_2$ сводится к доказательству равенства $w = y$. Предположим, что это неверно, т. е. $w > y$. Так как $y \in E_2$, по определению $\Omega(y,f,\mathfrak{G}_2) \le 4\varepsilon$. Поэтому существует радиус $r_1 > 0$ такой, что для всех $r \in (0,r_1]$ выполнено неравенство $\omega_{B(y,r)}(f,\mathfrak{G}_2) \le 5\varepsilon$. Обозначим $r_2 = \frac{\min(w-y,r_1)}{2}$. Подставляя в предыдущее неравенство $r = 2r_2$ и принимая во внимание включение $B(y+r_2,r_2) \subset (y,y+2r_2)$, получаем, что

$$\omega_{B(y+r_2,r_2)}(f,\mathfrak{G}_2) \le 2 \cdot 5\varepsilon = 10\varepsilon. \tag{39}$$

С другой стороны, по выбору радиуса r_2 справедливо также включение $B(y + r_2,r_2) \subset (y,w) \subset E_1$, что эквивалентно неравенству $\Omega(f|_{B(y+r_2,r_2)},\mathfrak{G}_1) \le 4\varepsilon$. Но последнее вместе с неравенствами (39) и (34) вступает в противоречие с утверждением (27). Полученное противоречие завершает доказательство включения $(y,z) \subset E_2$. Отметим, что данное включение эквивалентно неравенству

$$\Omega(f|_{(y,z)},\mathfrak{G}_2) \le 4\varepsilon. \tag{40}$$

Для окончания доказательства свойства (e) осталось только проверить, что $z \in E_2$. Это устанавливается из уже имеющегося неравенства (40) применением импликаций (27), (35). Рассуждения здесь мало отличаются от использованных при доказательстве (35), поэтому мы их опускаем.

В дальнейшем нам понадобится следующее семейство множеств. Для натурального l положим $A_l = \{x \in \Delta \mid r(x) \ge \frac{1}{l}\}$.

(f) Все A_l являются замкнутыми множествами относительно интервала Δ, причем верна формула

$$\Delta = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} A_l.$$

Это свойство прямо следует из определений множеств A_l, числа $r(x)$ и отмеченного выше неравенства $r(x) > 0$.

(g) Множества E_1 и E_2 являются открытыми относительно A_l для каждого $l \in \mathbb{N}$.

Свойство (g) почти немедленно вытекает из соответствующих определений, неравенства (34) и импликации (35).

Теперь все готово для проведения последнего и ключевого (в идейном плане) шага — доказательства равенства (30). Именно это ввиду сделанных ранее замечаний и уже установленного равенства (29) требуется для окончания доказательства леммы 7.

Рассмотрим множество $D = \Delta \backslash U$. Предположим, что равенство (30) неверно, тогда $D \neq \varnothing$. Так как множество U открыто, множество D замкнуто в Δ. Отсюда ввиду свойства (f) и теоремы Бэра о множествах первой категории найдутся точка $x_0 \in D$, число $\rho_0 > 0$ и индекс l_0 такие, что

$$(x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0) \cap D \subset A_{l_0}. \tag{41}$$

(h) Пусть $y \in (x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0)$. Тогда если $y \in E_2$, то $(y, x_0 + \rho_0) \subset E_2$, а если $y \in E_1$, то $(x_0 - \rho_0, y) \subset E_1$.

Докажем это свойство. Ясно, что достаточно рассмотреть случай $y \in E_2$, для $y \in E_1$ выкладки симметричны. Обозначим $z_1 = \sup\{w \in [y, x_0 + \rho_0) \mid [y, w] \subset E_2\}$. Справедливость (h) эквивалентна равенству $z_1 = x_0 + \rho_0$. Пусть это неверно, тогда $z_1 < x_0 + \rho_0$. Если $z_1 > y$, то по определению множества U и вследствие выбора z_1 выполнено включение $(y, z_1) \subset U$, откуда применением свойства (e) получаем $z_1 \in E_2$. Последнее соотношение автоматически выполняется и в случае $z_1 = y$. Итак, $z_1 \in E_2$. Привлекая свойство (d) и учитывая выбор числа z_1, мы видим, что $z_1 \notin U$, т. е. $z_1 \in D$. В силу (g) и (41) все точки из D в некоторой окрестности z_1 принадлежат E_2. Но тогда еще одним применением свойства (e) нетрудно проверить, что все точки из указанной окрестности z_1 должны лежать в E_2. Это противоречит выбору z_1. Свойство (h) доказано.

По лемме 3 из [1] неравенство (31) влечет липшицевость функции f. Отсюда по теореме Степанова — Радемахера вытекает дифференцируемость функции f п. в. Это означает по свойству (c), что множество $E_1 \cup E_2$ всюду плотно в Δ, в частности, $E_1 \cup E_2$ всюду плотно в $(x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0)$. Тогда установленное свойство (h) и определение множества U позволяют заключить, что $(x_0 - \rho_0, x_0 + \rho_0) \subset U$. Последнее противоречит предположению $x_0 \in D$. Таким образом, равенство (30) доказано. Ввиду сделанных ранее замечаний (см. комментарий к формулам (29)–(30)) лемма 7 полностью доказана. $\square$

Лемма 8. *Класс отображений из теоремы* 2 *является нормальным.*

Доказательство леммы 8. В доказательстве, очевидно, нуждается только выполнение условия K_3^*, т. е. замкнутость класса $\mathfrak{Z}_\pi(G)$ относительно равномерной сходимости. Пусть $f_\nu : \Delta \to \mathbb{R}^m \in \mathfrak{Z}_\pi(G)$, $f_\nu \rightrightarrows f$. Требуется показать, что $f'(x) \in G$ п. в. и производная f' π-возрастающая. В силу определения класса $\mathfrak{Z}_\pi(G)$ и равномерной сходимости все функции f_ν и f липшицевы с единой константой и, следовательно, дифференцируемы почти всюду. Применяя диагональный метод Кантора, можно считать, что $f'_\nu(x) \to h(x) \in G$ на некотором счетном множестве E, которое всюду плотно в Δ. Вследствие π-возрастания производных f'_ν и леммы 5 предельная функция $h : E \to \mathbb{R}^m$ будет также π-возрастающей. По лемме 6 для каждой точки $x \in \Delta$ существует компонента связности $K(x)$ множества G такая, что

$$\lim_{E \ni y \to x-0} \operatorname{dist}(h(y), K(x)) = 0.$$

Из выпуклости компонент связности множества G, равномерной сходимости $f_\nu \rightrightarrows f$ и равномерной ограниченности f'_ν вытекает, что если $\mathrm{dist}(f'_\nu(y), K) \le \varepsilon$ для п. в. $y \in \Delta_1 \subset \Delta$, где K — компонента связности G, то $\mathrm{dist}(f'(y), K) \le \varepsilon$ п. в. в Δ_1 (см., например, [3]). Используя это обстоятельство и сходимость f'_ν к h, можно показать, что

$$\lim_{r\to+0} \operatorname*{ess\,sup}_{y\in(x-r,x)} (\mathrm{dist}(f'(y), K(x)) = 0$$

для $x \in \Delta$. Отсюда $f'(x) \in K(x)$ в точках $x \in \mathrm{dom}\, f'$. По построению функция $K(x)$ является возрастающей относительно частичного порядка, индуцированного предпорядком π на множестве компонент связности. Поэтому производная f' тоже π-возрастающая, что и требовалось доказать. □

Лемма 9. *Пусть на компакте $G \subset \mathbb{R}^m$ с выпуклыми компонентами связности задан расщепляемый предпорядок π, и пусть имеются разбиение $G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$ компакта G и частичный порядок θ на множестве компактов $\{G_1, \dots, G_k\}$, удовлетворяющие условиям 1–2 из определения 1. Тогда существует функция $\gamma_2 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ такая, что*

1) *$\gamma_2(\varepsilon) \to \gamma_2(0) = 0$ при $\varepsilon \to 0$;*

2) *для любого отображения $f : (u, v) \to \mathbb{R}^m$ с $\Omega(f, \mathfrak{Z}_\pi(G)) \le \varepsilon$ найдутся точки $x_1 = u < x_2 < \dots < x_{l+1} = v$, $l \le k$, которым можно сопоставить компакты G_{i_j}, удовлетворяющие неравенствам*

$$G_{i_j} \le_\theta G_{i_{j+1}}, \qquad j = 1, \dots, l-1,$$

$$\sup_{x\in(x_j,x_{j+1})\cap \mathrm{dom}\, f'} \mathrm{dist}(f'(x), G_{i_j}) \le \gamma_2(\varepsilon), \qquad j = 1, \dots, l,$$

причем $x_j \notin \mathrm{dom}\, f'$.

Доказательство леммы 9. Положим $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{Z}_\pi(G_i)$. Из леммы 8 вытекает, что классы $\mathfrak{G}_i$ нормальные. Рассмотрим далее классы отображений $\mathfrak{Z}(\mathrm{co}G_i)$, определяемые формулой (8). Ясно, что $\mathfrak{G}_i \subset \mathfrak{Z}(\mathrm{co}G_i)$. В силу условия 1 определения 1 верно равенство $\mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{Z}(\mathrm{co}G_j) = \varnothing$ при $i \ne j$, а по теореме 1 из [6] классы отображений $\mathfrak{Z}(\mathrm{co}G_i)$ ω-устойчивы. Тогда из леммы 4 работы [6] получаем, что для классов отображений $\mathfrak{G}_i$ выполнены предположения леммы 7 настоящей статьи (см. импликацию (27)). Теперь утверждение леммы 9 вытекает из леммы 7 настоящей статьи и леммы 1 работы [6]. □

Лемма 10. *Пусть на компакте $G \subset \mathbb{R}^m$ с выпуклыми компонентами связности задан расщепляемый предпорядок π. Тогда существует последовательность $\left(\{G_1^\alpha, \dots, G_{k_\alpha}^\alpha\}\right)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ конечных семейств компактных множеств G_i^α и частичные порядки θ_α на каждом из этих семейств $\{G_1^\alpha, \dots, G_{k_\alpha}^\alpha\}$, для которых справедливы следующие утверждения. При любом фиксированном α выполняется равенство $G = \bigcup_{i=1}^{k_\alpha} G_i^\alpha$, причем выполнены условия 1–2 определения 1, и для каждого $G_j^{\alpha+1}$ найдется множество $G_{i_j}^\alpha$ такое, что $G_j^{\alpha+1} \subset G_{i_j}^\alpha$. Кроме того, для любой пары элементов $a, b \in G$, лежащих в разных компонентах связности множества G, выполнено условие 3 определения 1 при $\alpha \ge \alpha(a, b)$.*

Лемма 10 выводится из определения 1 с помощью стандартных рассуждений, используемых при работе с компактными множествами. Доказательство этой леммы мы опускаем.

Лемма 11. *Пусть на компакте $G \subset \mathbb{R}^m$ с выпуклыми компонентами связности задан расщепляемый предпорядок π и $\left(\left\{G_1^\alpha, \dots, G_{k_\alpha}^\alpha\right\}\right)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ — последовательность конечных семейств множеств, описанная в лемме 10. Для $a \in G$ обозначим через $G^\alpha(a)$ множество G_i^α, содержащее a, а через $G(a)$ — компоненту связности множества G, содержащую a. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для каждого $a \in G$ существует номер $\alpha(\varepsilon, a)$ такой, что $G^\alpha(a)$ лежит в ε-оболочке компоненты $G(a)$ при $\alpha \geq \alpha(\varepsilon, a)$.*

Лемма 11 прямо следует из того известного факта, что всякая убывающая последовательность вложенных друг в друга компактных множеств имеет предел в метрике Хаусдорфа.

Лемма 12. *Пусть на компакте $G \subset \mathbb{R}^m$ с выпуклыми компонентами связности задан расщепляемый предпорядок π, и пусть $F \subset G$ — компактное множество, все элементы которого попарно сравнимы относительно π. Пусть, далее, $\left(\left\{G_1^\alpha, \dots, G_{k_\alpha}^\alpha\right\}\right)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ — последовательность конечных семейств множеств, описанная в лемме 10. Тогда существует функция $\gamma_3 : \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ такая, что*

1) *$\gamma_3(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to \infty$;*

2) *каждому множеству G_i^α с $G_i^\alpha \cap F \neq \varnothing$ можно сопоставить компоненту связности K_i^α множества G такую, что $K_i^\alpha \cap F \neq \varnothing$, G_i^α лежит в $\gamma_3(\alpha)$-оболочке компоненты K_i^α и, помимо этого, если справедливо неравенство $G_i^\alpha \leq_{\theta_\alpha} G_j^\alpha$, $G_i^\alpha \cap F \neq \varnothing \neq G_j^\alpha \cap F$, то $K_i^\alpha \leq_\pi K_j^\alpha$.*

Отметим, что условиями леммы 12 не исключается возможность, когда $K_i^\alpha = K_j^\alpha$ при $i \neq j$.

Лемма 12 следует из лемм 10, 11 и предположения о попарной сравнимости элементов множества F.

Лемма 13. *Пусть на компакте $G \subset \mathbb{R}^m$ с выпуклыми компонентами связности задан расщепляемый предпорядок π, и пусть имеется последовательность функций $f_\nu : \Delta \to \mathbb{R}^m$ такая, что $\Omega(f_\nu, \mathfrak{Z}_\pi(G)) \to 0$ при $\nu \to \infty$. Предположим, что существует последовательность пар точек $y_\nu, z_\nu \in \operatorname{dom} f'_\nu$ таких, что $f'(y_\nu) \to a$ и $f'(z_\nu) \to b$. Тогда $a, b \in G$ и a, b сравнимы относительно π.*

Лемма 13 прямо следует из леммы 9 и определения 1.

Доказательство теоремы 2. Ясно, что достаточно доказать утверждение, относящееся к близости производных (к неравенству (2)). Предположим, что это утверждение неверно. Тогда найдутся число $\varepsilon_1 > 0$ и последовательность отображений $f_\nu : (u_\nu, v_\nu) \to \mathbb{R}^m$ такие, что

$$\Omega(f_\nu, \mathfrak{Z}_\pi(G)) \to 0 \quad \text{при } \nu \to \infty, \tag{42}$$

$$\forall g : (u_\nu, v_\nu) \to \mathbb{R}^m \in \mathfrak{Z}_\pi(G) \quad \operatorname*{ess\,sup}_{x\in(u_\nu, v_\nu)} |f'_\nu(x) - g'(x)| \geq \varepsilon_1. \tag{43}$$

По лемме 3 из [1] (см. замечание 2 настоящей статьи) множества $\operatorname{Im} f'_\nu$ равномерно ограничены, поэтому, выбрав соответствующую подпоследовательность, можно предполагать далее, что

$$\operatorname{cl} \operatorname{Im} f'_\nu \to F \tag{44}$$

в метрике Хаусдорфа. Из леммы 13 вытекает, что $F \subset G$ и все элементы компактного множества F попарно сравнимы относительно предпорядка π. Значит, выполнены предположения леммы 12. Пусть натуральное число α_0 таково, что

$$\gamma_3(\alpha_0) \leq \varepsilon_1/3, \tag{45}$$

где γ_3 — функция из леммы 12. Применим лемму 9 к соответствующему разбиению $G = \bigcup\limits_{i=1}^{k_{\alpha_0}} G_i^{\alpha_0}$. Тогда существует номер ν_0 такой, что

$$\gamma_2(\Omega(f_\nu, \mathfrak{Z}_\pi(G))) \leq \varepsilon_1/3, \qquad \nu \geq \nu_0, \tag{46}$$

где γ_2 — функция из леммы 9 (при этом нужно учесть сходимость (42)). Принимая во внимание сходимости (42) и (44), возьмем номер $\nu_1 \geq \nu_0$ такой, что множества $G_{i_j}^{\alpha_0}$, возникающие при применении леммы 9 к отображению f_{ν_1}, удовлетворяют условию $G_{i_j}^{\alpha_0} \cap F \neq \varnothing$. Тогда, объединяя утверждение лемм 9 и 12 и оценки (45)–(46), получаем, что для отображения $f_{\nu_1} : (u_{\nu_1}, v_{\nu_1}) \to \mathbb{R}^m$ найдутся точки $x_1 = u_{\nu_1} < x_2 < \dots < x_{l+1} = v_{\nu_1}$, $l \leq k_{\alpha_0}$, которым можно сопоставить компоненты связности $K_{i_j}^{\alpha_0}$ множества G, $j = 1, \dots, l$, удовлетворяющие неравенствам

$$K_{i_j}^{\alpha_0} \leq_\pi K_{i_{j+1}}^{\alpha_0}, \quad j = 1, \dots, l-1, \tag{47}$$

$$\sup_{x \in (x_j, x_{j+1}) \cap \operatorname{dom} f'_{\nu_1}} \operatorname{dist}(f'_{\nu_1}(x), K_{i_j}^{\alpha_0}) \leq \gamma_2(\Omega(f_{\nu_1}, \mathfrak{Z}_\pi(G))) + \gamma_3(\alpha_0) < \varepsilon_1, \ j = 1, \dots, l. \tag{48}$$

Определим функцию $h : \operatorname{dom} f'_{\nu_1} \to \mathbb{R}^m$ следующим образом. Для $x \in (x_j, x_{j+1}) \cap \operatorname{dom} f'_{\nu_1}$ положим $h(x) = a \in K_{i_j}^{\alpha_0}$, где $|f'_{\nu_1}(x) - a| = \operatorname{dist}\big(f'_{\nu_1}(x), K_{i_j}^{\alpha_0}\big)$. Корректность и однозначность определения h вытекает из выпуклости компонент связности множества G. Легко видеть, что функция h измерима, поэтому можно определить отображение $g : (u_{\nu_1}, v_{\nu_1}) \to \mathbb{R}^m$ по правилу

$$g(x) = \int\limits_w^x h(\tau)\, d\tau,$$

где $w \in (u_{\nu_1}, v_{\nu_1})$. Из способа задания функции g и из неравенств (47) получаем, что $g'(x) = h(x) \in G$ п. в. и производная g' есть π-возрастающая функция. Поэтому $g \in \mathfrak{Z}_\pi(G)$. Неравенства (48) и способ определения функции g позволяют заключить, что

$$\|f'_{\nu_1} - g'\|_{L_\infty(u_{\nu_1}, v_{\nu_1})} < \varepsilon_1.$$

Последнее противоречит начальному предположению (43). Теорема 2 полностью доказана. $\square$

Принимая во внимание соображения, высказанные в начале п. 2 § 4, делаем вывод, что теорема 1 также полностью доказана.

Автор признателен профессору А. П. Копылову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копылов А. П.* Об устойчивости изометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 2. С. 132–144.
2. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. 2-е изд.. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1996.
3. *Егоров А. А.* Об устойчивости классов липшицевых решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 538–553.
4. *Егоров А. А., Коробков М. В.* К устойчивости классов аффинных отображений // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 6. С. 1259–1277.
5. *Коробков М. В.* Об одном обобщении понятия связности и его применении в дифференциальном исчислении и в теории устойчивости классов отображений // Докл. РАН. 1998. Т. 363, № 5. С. 590–593.

6. *Коробков М. В.* Об устойчивости классов липшицевых отображений, порожденных компактными множествами пространства линейных отображений // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 4. С. 792–810.
7. *Егоров А. А., Коробков М. В.* Устойчивость классов липшицевых отображений, теорема Дарбу и квазивыпуклые множества // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1046–1059.
8. *Егоров А. А.* Об устойчивости классов аффинных отображений // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1081–1095.
9. *Коробков М. В.* Об одном обобщении теоремы Дарбу на многомерный случай // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 118–133.

Статья поступила 28 мая 2001 г.

Коробков Михаил Вячеславович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
korob@math.nsc.ru