Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2002. Том 43, № 3

УДК 517.946+532.68

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЗАДАЧЕ О ВРАЩАЮЩЕМСЯ КОЛЬЦЕ

В. В. Пухначсв

Аннотация: Рассматривается плоское вращательно-симметричное движение по инерции вязкой несжимаемой жидкости в кольце, обе границы которого свободны. Соответствующая начально-краевая задача для уравнений Навье — Стокса сводится к задаче для связанной системы из одного параболического уравнения и двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Коэффициент перед производными по времени от искомых функций (параметр квазистационарности) предполагается малым, так что указанная система является сингулярно возмущенной. В работе построено асимптотическое разложение решения задачи о вращающемся кольце по малому параметру квазистационарности и получена оценка малости разности точного и приближенного решений. Библиогр. 10.

Рассматривается плоское вращательно-симметричное движение по инерции вязкой несжимаемой жидкости в кольце, обе границы которого свободны. Соответствующая начально-краевая задача для уравнений Навье — Стокса изучалась в [1], а также ранее в [2], где рассмотрен случай нулевого поверхностного натяжения.

Задача о вращающемся кольце представляет содержательный и вместе с тем достаточно простой объект для обоснования приближенных методов в теории вязких течений со свободными границами. В [3] на основании схемы, предложенной в [4], построена асимптотика решения этой задачи при больших числах Рейнольдса и доказана близость асимптотического и точного решений на конечном интервале времени.

Целью данной работы является анализ квазистационарного приближения к решению задачи о вращающемся кольце. Уравнения квазистационарного приближения в общей задаче о движении изолированного объема вязкой несжимаемой капиллярной жидкости выведены в [5] из точных уравнений с помощью разложения по малому параметру квазистационарности, равному отношению стоксова времени к капиллярному. Задача содержит еще один безразмерный параметр, пропорциональный модулю сохраняющегося углового момента жидкого объема, который также считается малым. В зависимости от соотношения между этими параметрами получаются три варианта предельной задачи: традиционный и два новых. В [5] построена формальная асимптотика решений возникающих задач при стремлении параметра квазистационарности к нулю.

Вопрос обоснования квазистационарного приближения оставался открытым до последнего времени. В [6] такое обоснование дано для традиционного

Основная часть этой работы была выполнена в Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences (Leipzig), заключительная — при поддержке гранта № 00–15–96162 Совета поддержки ведущих научных школ Российской Федерации.

варианта предельной задачи. К сожалению, стандартная модель квазистационарного приближения оказывается малосодержательной в задаче о вращающемся кольце.

Указанная задача представляет собой первый нетривиальный пример движения вязкой жидкости, топология которого может изменяться со временем — при достаточно большом поверхностном натяжении за конечное время кольцо необратимым образом превращается в круг [1]. Замечательной особенностью квазистационарного приближения является то, что оно способно описать процесс изменения топологии области течения в рассматриваемой задаче в простых терминах путем анализа решений обыкновенного автономного дифференциального уравнения первого порядка.

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается задача о плоском вращательно-симметричном движении вязкой несжимаемой капиллярной жидкости в кольце $r_1(t) < r < r_2(t)$, границы которого свободны. Пусть $v_r = Q(t)/r$, $v_\theta = v(r,t)$ — радиальная и окружная компоненты скорости, $p(r,t)$ — давление, ρ — плотность жидкости, ν — ее вязкость, σ — коэффициент поверхностного натяжения, $r_i(0) = r_{i0}$ $(i = 1, 2)$. Функции v_r, v_θ, p должны удовлетворять уравнениям Навье — Стокса, начальным условиям $v_r(r,0) = Q(0)/r$, $v_\theta = v_0(r)$ $(r_{10} \le r \le r_{20})$ и естественным условиям на свободных границах кольца $r = r_i(t)$, $i = 1, 2$, при $t > 0$.

Определим масштаб времени $t_0 = \rho\nu r_{10}/\sigma$ (капиллярное время) и примем за масштабы длины, радиальной скорости и давления величины r_{10}, $\sigma/\rho\nu$ и σ/r_{10} соответственно. Введем безразмерные независимые переменные $\tau = t/t_0$, $x = (r^2 - r_1^2)/r_{10}^2$ и искомые функции $y = r_1^2/r_{10}^2$, $\varphi = \rho\nu Q/\sigma r_{10}$, $u = r_{10}v/Vr$, так что u — безразмерная угловая скорость жидкой частицы, а V — характерная размерная окружная скорость, определенная ниже. Функции $y(\tau)$, $\varphi(\tau)$ и $u(x,\tau)$ образуют решение следующей задачи в фиксированной области:

$$\delta[(y+x)u]_\tau = 4[(y+x)^2 u_x]_x \quad \text{при } \tau > 0, \quad 0 < x < a, \tag{1.1}$$

$$u_x(0,\tau) = u_x(a,\tau) = 0 \quad \text{при } \tau > 0, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при } 0 \le x \le a, \tag{1.3}$$

$$dy/d\tau = 2\varphi \quad \text{при } \tau > 0, \tag{1.4}$$

$$\delta\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\ln(1+a/y)}\biggl(-\frac{a\varphi(4-\delta\varphi)}{y(y+a)} - \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y+a}} + \frac{\rho V^2 r_{10}}{\sigma}\int\limits_0^a u^2(x,\tau)\,dx\biggr) \quad \text{при} \quad \tau > 0, \tag{1.5}$$

$$y(0) = 1, \quad \varphi(0) = \varphi_0. \tag{1.6}$$

Здесь $\delta = t_s/t_0 = \sigma r_{10}/\rho\nu^2$ — параметр квазистационарности, $t_s = r_{10}^2/\nu$ — стоксово время, $a = (r_{20}/r_{10})^2 - 1$ — относительная толщина кольца, $u_0(x) = \rho\nu v_0(r_{10}\sqrt{1+x})/\sigma\sqrt{1+x}$, $\varphi_0 = \rho\nu Q(0)/\sigma r_{10}$.

Соотношения (1.1)–(1.6) с точностью до обозначений совпадают с полученными в [1, 7] (там вместо δ использовался параметр $\delta^{-1} = \varepsilon^2 = \nu/r_{10}V$, т. е. обратное число Рейнольдса, а характерная скорость V выбиралась как $\max|v_0(r)|$, $r_{10} \le r \le r_{20}$). При выборе этих соотношений использовался интеграл массы, эквивалентный сохранению площади кольца, $S = \pi\bigl[r_2^2(t) - r_1^2(t)\bigr] = \pi\bigl(r_{20}^2 - r_{10}^2\bigr)$. Кроме того, исходная задача со свободной границей обладает законом сохранения момента импульса:

$$L = 2\pi\rho\int\limits_{r_1(t)}^{r_2(t)} r^2 v(r,t)\,dr = 2\pi\rho\int\limits_{r_{10}}^{r_{20}} r^2 v_0(r)\,dr.$$

Отсюда мы можем определить величину $V = L/\pi\rho r_{10}^3$. Если решение задачи (1.1)–(1.6) известно, то функции v_r, v_θ, r_1, $r_2 = \bigl(S/\pi + r_1^2\bigr)^{1/2}$ выражаются явно через u, y и φ, а давление p восстанавливается квадратурой.

В безразмерных переменных предыдущее равенство переписывается в виде

$$2\int\limits_0^a [x + y(\tau)]u(x,\tau)\,dx = 2\int\limits_0^a (x+1)u_0(x)\,dx = 1. \tag{1.7}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$w = u - 2/(a(2y+a)). \tag{1.8}$$

Величина $2/(a(2y+a)) = \omega$ представляет безразмерную мгновенную угловую скорость кольца, вращающегося как твердое тело с заданными площадью и угловым моментом. В силу (1.7) имеем

$$\int\limits_0^a (x+y)w\,dx = 0. \tag{1.9}$$

Из величин L, S, ρ и σ можно составить безразмерное соотношение

$$\alpha = 4\pi^{1/2}L^2/(\rho\sigma S^{5/2}).$$

Параметр α — это единственная безразмерная комбинация интегралов движения в задаче о вращающемся кольце, пропорциональная квадрату углового момента и не содержащая вязкости. Далее предполагается, что центробежные и капиллярные силы в изучаемом движении имеют одинаковый порядок, когда $\delta \to 0$. Это условие будет выполнено, если величина α имеет порядок 1.

Переходя в (1.1)–(1.6) к новой искомой функции $w(x,\tau)$, определенной равенством (1.8), и используя соотношение (1.9), получаем

$$\delta[(y+x)w]_\tau = 4[(y+x)^2 w_x]_x + +4\delta(2x-a)(2y+a)^{-2}\varphi \quad \text{при } \tau > 0,\ 0 < x < a, \tag{1.10}$$

$$w_x(0,\tau) = w_x(a,\tau) = 0 \quad \text{при } \tau > 0, \tag{1.11}$$

$$w(x,0) = w_0(x) \quad \text{при } 0 \le x \le a, \tag{1.12}$$

$$dy/d\tau = 2\varphi \quad \text{при } \tau > 0, \tag{1.13}$$

$$\delta\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\ln(1+a/y)}\Biggl[-\frac{a\varphi(4-\delta\varphi)}{y(y+a)} - \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y+a}} + \frac{\alpha a^{3/2}}{(2y+a)^2} + \frac{\alpha a^{5/2}}{4}\int\limits_0^a w^2(x,\tau)\,dx\Biggr] \quad \text{при } \tau > 0, \tag{1.14}$$

$$y(0) = 1, \quad \varphi(0) = \varphi_0. \tag{1.15}$$

Здесь $w_0(x) = -2/(a(2+a)) + u_0(x)$. Функция $w_0(x)$ подчинена условию

$$\int_0^a (x+1) w_0 \, dx = 0, \tag{1.16}$$

вытекающему из (1.9).

Задача (1.10)–(1.15) составляет предмет дальнейшего исследования. Наша цель — построение асимптотики решения этой задачи при $\delta \to 0$ и ее обоснование.

§ 2. Внешнее разложение. Уравнения квазистационарного приближения

Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи (1.10)–(1.15) при $\delta \to 0$ строится в виде комбинации внешнего и внутреннего разложений. Внешнее разложение ищется в виде формальных степенных рядов

$$y = y^{(0)} + \delta y^{(1)} + \delta^2 y^{(2)} + \dots, \quad \varphi = \varphi^{(0)} + \delta\varphi^{(1)} + \delta^2\varphi^{(2)} + \dots,$$
$$w = \delta w^{(1)} + \delta^2 w^{(2)} + \delta^3 w^{(3)} + \dots. \tag{2.1}$$

Начальные условия для членов разложения y таковы: $y^{(0)} = 1$, $y^{(k)} = 0$ при $\tau = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$. Для функций $\varphi^{(j)}$ $(j = 0, 1, \dots)$, $w^{(k)}$ $(k = 1, 2, \dots)$ начальные условия не задаются. При этом функции $\varphi^{(j)}$ определяются явно через $y^{(j)}$, $w^{(j-1)}$ (полагаем $w^{(-1)} = w^{(0)} = 0$) путем подстановки выражений (2.1) в (1.14) и приравнивания членов при одинаковых степенях δ. Функция $y^{(0)}$ удовлетворяет нелинейному, а функции $y^{(k)}$ $(k = 1, 2, \dots)$ — линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка.

Функции $w^{(j)}$ $(j = 1, 2, \dots)$ определяются из решения краевых задач

$$\bigl[(y^{(0)} + x)^2 w_x^{(j)}\bigr]_x = R_j(x, \tau), \quad 0 < x < a, \ \tau > 0, \tag{2.2}$$

$$w_x^{(j)}(0, \tau) = w_x^{(j)}(a, \tau) = 0, \quad \tau > 0, \tag{2.3}$$

в которые τ входит как параметр. Правые части уравнений (2.2) выражаются через функции $y^{(0)}, \dots, y^{(j)}$; $\varphi^{(0)}, \dots, \varphi^{(j)}$; $w^{(0)}, \dots, w^{(j-1)}$. Условие разрешимости

$$\int_0^a R_j(x, \tau) \, dx = 0, \quad \tau > 0,$$

задачи (2.2), (2.3) при $j = 1$ непосредственно вытекает из (1.10). Для $j = 2, 3, \dots$ его выполнение доказывается по индукции. Решение задачи (2.2), (2.3) определяется с точностью до аддитивной функции τ. Этот произвол позволяет удовлетворить условию разрешимости на следующем шаге индукции.

Перейдем к построению главных членов асимптотических разложений (2.1). Подставляя эти разложения в (1.14) и переходя к пределу при $\delta \to 0$, будем иметь

$$-\frac{4a\varphi^{(0)}}{y^{(0)}(y^{(0)} + a)} - \frac{1}{\sqrt{y^{(0)}}} - \frac{1}{\sqrt{y^{(0)} + a}} + \frac{\alpha a^{3/2}}{(2y^{(0)} + a)^2} = 0.$$

Отсюда заключаем, что

$$\varphi^{(0)} = -\frac{Y(Y + a)}{4a} G(Y), \tag{2.4}$$

где обозначено $Y = y^{(0)}$,

$$G(Y) = \frac{1}{\sqrt{Y}} + \frac{1}{\sqrt{Y+a}} - \frac{\alpha a^{3/2}}{(2Y+a)^2}.$$

Вследствие (1.13), (1.15) и (2.1), (2.4), функция $Y(\tau)$ является решением задачи Коши

$$\frac{dY}{d\tau} = -\frac{Y(Y+a)}{2a}G(Y) \quad \text{при } \tau > 0, \tag{2.5}$$

$$Y(0) = 1. \tag{2.6}$$

Наконец, функция $w^{(1)}$ определяется как решение задачи (2.2), (2.3) с $R_1 = -(2x-a)(2y^{(0)}+a)^{-2}\varphi^{(0)}$, удовлетворяющее условию

$$\int\limits_0^a (x + y^{(0)})w^{(1)}\,dx = 0$$

(здесь $\varphi^{(0)}$ выражается через $y^{(0)} = Y$ по формулам (2.4)). Это решение имеет вид

$$w^{(1)} = -\frac{Y(Y+a)}{a(2Y+a)^2}G(Y)\biggl[x + (2Y+a)\ln\biggl(\frac{Y+a}{Y+x}\biggr) - \frac{Y(Y+a)}{Y+x} - \frac{a(6Y+7a)}{6(2Y+a)} + \frac{Y^2}{a}\ln\biggl(1+\frac{a}{Y}\biggr)\biggr]. \tag{2.7}$$

Для дальнейшего существенно наличие постоянных решений уравнения (2.5), определяемых условием $G(Y) = 0$. Последнее уравнение равносильно системе

$$\alpha a^{7/2}\omega^2 = 4\biggl(\frac{1}{\sqrt{Y}} + \frac{1}{\sqrt{Y+a}}\biggr), \quad \frac{a\omega}{2} = \frac{1}{2Y+a}. \tag{2.8}$$

Ее решение Y, ω описывает вращение капиллярного кольца как твердого тела с безразмерной угловой скоростью ω при заданных угловом моменте и площади кольца. Ему соответствует стационарное решение системы (1.10), (1.13), (1.14), в котором $\varphi = 0$, $w = 0$.

Анализ системы (2.8) выполнен в [1, 7]. Оказывается, что эта система не имеет вещественных решений при $\alpha < \alpha^* \approx 5.89$, имеет одно решение $Y^* = \kappa a$, ω^* при $\alpha = \alpha^*$ ($\kappa = \text{const} \approx 0.121$) и два решения $Y_i(\alpha, a)$, $\omega_i(\alpha, a)$ ($i = 1, 2$) при $\alpha > \alpha_*$, причем $0 < Y_1(\alpha, a) < Y^* < Y_2(\alpha, a)$ и, кроме того, $\lim Y_1 = 0$, $\lim Y_2 = \infty$ при $\alpha \to \infty$. Если $\alpha > \alpha^*$, то функция $G(Y)$ положительна на интервалах $(0, Y_1)$, (Y_2, ∞) и отрицательна на интервале (Y_1, Y_2).

При выполнении неравенств

$$\alpha > \alpha^*, \quad Y_1(\alpha, a) < 1 \tag{2.9}$$

решение $Y(\tau)$ задачи Коши (2.5), (2.6) положительно для всех $\tau > 0$ и $Y \to Y_2(\alpha, a)$ при $\tau \to \infty$ с экспоненциальной скоростью. (Достаточным условием для выполнения второго из неравенств (2.9) будет $a < a^* \approx 8.26$.) При этом функция Y монотонно возрастает, если $1 < Y_2(\alpha, a)$, и монотонно убывает в противном случае. Если $Y_1(\alpha, a) = 1$ или $Y_2(\alpha, a) = 1$, то $Y = 1$ — решение задачи (2.5), (2.6). Оно неустойчиво в первом случае и устойчиво во втором.

Если в (2.9) второе неравенство заменить противоположным, либо если $\alpha < \alpha^*$, то функция Y, монотонно убывая с ростом τ, обращается в нуль при некотором $\tau^* > 0$ по закону

$$Y = (\tau^* - \tau)^2/16 + O(\tau^* - \tau)^3 \quad \text{при } \tau \nearrow \tau^*, \tag{2.10}$$

а для $\tau > \tau^*$ она продолжается нулем. (Необходимость такого продолжения функции Y вызвана тем, что она является главным членом внешнего разложения функции $y(\tau) = r_1^2/r_{10}^2$ при $\delta \to 0$.) При этом вместе с Y продолжаются нулем и функции $\varphi^{(0)}$, $w^{(1)}$, определенные формулами (2.4), (2.7).

Подстановка выражений (2.1) для y, φ в уравнение (1.14) и удержание в нем членов порядка δ приводит к соотношению

$$\varphi^{(1)} = -\left[\frac{Y+a}{8a\sqrt{Y}} + \frac{Y}{8a\sqrt{Y+a}} + \frac{\alpha a^{5/2}}{4(2Y+a)^3}\right]y^{(1)} + \frac{1}{4}(\varphi^{(0)})^2 - \frac{1}{4a}\ln\left(1+\frac{a}{Y}\right)\frac{d\varphi^{(0)}}{d\tau}. \tag{2.11}$$

Отсюда и из (1.13) получаем уравнение для $y^{(1)}$:

$$\frac{dy^{(1)}}{d\tau} = -\left[\frac{Y+a}{4a\sqrt{Y}} + \frac{Y}{4a\sqrt{Y+a}} + \frac{\alpha a^{5/2}}{2(2Y+a)^2}\right]y^{(1)} + \frac{1}{2}(\varphi^{(0)})^2 - \frac{1}{2a}\ln\left(1+\frac{a}{Y}\right)\frac{d\varphi^{(0)}}{d\tau}, \tag{2.12}$$

которое следует решать с начальным условием

$$y^{(1)}(0) = 0 \tag{2.13}$$

(здесь функция $\varphi^{(0)}$ определена равенством (2.4)). Как и при изучении главных членов внешнего разложения, далее следует различать два случая: решение $Y(\tau)$ задачи (2.5), (2.6) положительно при всех $\tau > 0$ (случай A); $Y > 0$ для $0 \le \tau < \tau^* < \infty$, $Y = 0$ для $\tau \ge \tau^*$ (случай B).

В случае A решение $y_1(\tau)$ задачи (2.12), (2.13) регулярно при всех $\tau > 0$ и $y_1 \to \text{const}$ при $\tau \to \infty$ экспоненциально. Случай B более сложен. Используя представление (2.10), мы получаем асимптотику решения указанной задачи в виде

$$y^{(1)} = \frac{\tau^* - \tau}{32a}\ln^2(\tau^* - \tau) + O[(\tau^* - \tau)\ln(\tau^* - \tau)] \tag{2.14}$$

при $\tau \nearrow \tau^*$. На основании (2.14) мы вправе положить $y^{(1)}(\tau) = 0$ для $\tau \ge \tau^*$, и при этом будет справедливо включение $y^{(1)} \in C^\beta[0,\infty)$ с любым $\beta \in (0,1)$. Однако функция $\varphi^{(1)}(\tau)$ имеет логарифмическую особенность при $\tau \nearrow \tau^*$. Полагая $\varphi^{(1)} = 0$ для $\tau > \tau^*$, мы приходим к разрывной функции $\varphi^{(1)}(\tau)$, определенной для всех $\tau > 0$, хотя $\varphi^{(1)} \in L^q(0,\infty)$ с любым $q > 1$. Вместе с тем такой вариант продолжения функции $\varphi^{(1)}$ в область $\tau > \tau^*$ единственно возможен, поскольку эта функция — элемент разложения по параметру δ радиальной скорости кольца, которая обращается в нуль после превращения кольца в круг.

Мы видим, что в случае B разложение (2.1) теряет силу при τ, близких к τ^*. Оказывается, что процедуру построения внешнего разложения в этом случае можно регуляризовать, если перейти в соотношениях (1.10)–(1.15) к новой независимой переменной y вместо τ и новым искомым функциям $\Phi[y(\tau)] = \varphi(\tau)$, $W[x, y(\tau)] = w(x,\tau)$. Это возможно, поскольку функция φ принимает отрицательные значения на интервале $[\tau_0, \tau_*)$, если $\tau_* - \tau_0$ достаточно мало, так что $dy/d\tau = 2\varphi < 0$ [1]. (Здесь τ_* — момент обращения в нуль функции $y(\tau)$ в точном решении задачи (1.10)–(1.15).) В результате мы приходим к задаче

$$\delta\Phi[(y+x)W]_y = 2[(y+x)^2W_x]_x + 2\delta(2x-a)(2y+a)^{-2}\Phi \text{ при } y < y_0,\ 0 < x < a, \tag{2.15}$$

$$W_x(0,y) = W_x(a,y) = 0 \quad \text{при } y < y_0, \tag{2.16}$$

$$W(x,y_0) = W_0(x) \quad \text{при } 0 \le x \le a, \tag{2.17}$$

$$\delta\frac{d\Phi}{dy} = \frac{1}{2\ln(1+a/y)\Phi}\left[-\frac{a\Phi(4-\delta\Phi)}{y(y+a)} - \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y+a}} + \frac{\alpha a^{3/2}}{(2y+a)^2} + \frac{\alpha a^{5/2}}{4}\int\limits_0^a W^2(x,y)\,dx\right] \quad \text{при } y < y_0, \tag{2.18}$$

$$\Phi(y_0) = \Phi_0 \tag{2.19}$$

(здесь обозначено $y_0 = y(\tau_0) > 0$, $\Phi_0 = \varphi(\tau_0) < 0$).

Уравнения (2.15), (2.18) допускают формальные решения вида

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \delta\Phi^{(1)} + \delta^2\Phi^{(2)} + \dots, \quad W = \delta W^{(1)} + \delta^2 W^{(2)} + \delta^3 W^{(3)} + \dots. \tag{2.20}$$

Функции $W^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяют краевым условиям (2.16). Процедура вычисления членов разложения (2.20) очень похожа на описанную в начале этого пункта, и мы ее опускаем. Отметим лишь, что выражение для $\Phi^{(0)}$ совпадает с (2.4) после замены Y на y (теперь y является уже независимой переменной). Аналогично функция $W^{(1)}$ дается формулой (2.7), где Y заменено на y. Однако в следующих членах разложения (2.1) и его аналога (2.20) возникают существенные различия.

Приведем выражение для $\Phi^{(1)}(y)$:

$$\Phi^{(1)} = -\frac{y(y+a)}{4a}\frac{d}{dy}\left\{\ln\left(1+\frac{a}{y}\right)[\Phi^{(0)}(y)]^2\right\}. \tag{2.21}$$

Чтобы получить зависимость $\Phi^{(1)}[y(\tau)]$, нам следует решить задачу Коши

$$\frac{dy}{d\tau} = 2\Phi^{(0)}(y) + 2\delta\Phi^{(1)}(y) \quad \text{при } \tau > \tau_0,$$

$$y(\tau_0) = y_0.$$

Отсюда и из (2.21) ясно, что функция $y(\tau)$ не допускает разложения в асимптотический ряд (2.1) при τ, близких к τ^*.

С другой стороны, гладкость функций $W^{(k)}(x,y)$, $\Phi^{(k)}(y)$ вблизи значений $x = 0$, $y = 0$ не только не ухудшается, но даже увеличивается с ростом k. В частности,

$$\Phi^{(0)} = -\sqrt{y}/4 + O(y), \quad \Phi^{(1)} = -y\ln(1/y)/64 + O(y),$$

$$\Phi^{(2)} = -3y^{3/2}\ln^2(1/y)/1028 + O[y^{3/2}\ln(1/y)],$$

когда $y \to 0$. Более того, пользуясь индукцией, можно показать, что $\Phi^{(k)} \in C^{(k+\beta)/2}[0, y_0]$, $W^{(k)} \in C^{(k+\beta-1)/2}([0,a]\times[0,y_0])$ для $k = 1, 2, \dots$ с любым $\beta \in (0,1)$.

§ 3. Внутреннее разложение. Условия сращивания

Построенное выше формальное решение (2.1) уравнений (1.10), (1.13), (1.14), вообще говоря, не удовлетворяет начальным условиям (1.12) и второму из (1.15). Чтобы компенсировать возникающую невязку, следует искать составляющие φ, w решения задачи (1.10)–(1.15) в виде

$$\begin{gathered}\varphi=\varphi^{(0)}+\psi^{(0)}-\chi^{(0)}+\delta(\varphi^{(1)}+\psi^{(1)}-\chi^{(1)})+\dots,\\ w=v^{(0)}+\delta(w^{(1)}+v^{(1)}-z^{(1)})+\delta^2(w^{(2)}+v^{(2)}-z^{(2)})+\dots,\end{gathered}\tag{3.1}$$

где функции $v^{(0)}$, $v^{(k)}$, $\psi^{(k)}$, $k=1,2,\dots$, (элементы внутреннего разложения) зависят от «быстрого времени» $\eta=\tau/\delta$ (функции $v^{(0)},v^{(k)},\dots$ зависят еще и от x); величины $\chi^{(k)}$, $k=1,2,\dots$, постоянны, а $z^{(k)}$ суть функции от x.

Задача для нахождения $v^{(0)}$ получается следующим образом. Выражения (3.1) подставляются в уравнение (1.10), в котором осуществляется переход к быстрому времени и затем полагается $y=1$, $\delta=0$. В результате получается уравнение

$$[(x+1)v^{(0)}]_\eta=4\big[(x+1)^2v^{(0)}_x\big]_x,\tag{3.2}$$

которое следует решать в полуполосе $S_a=\{x,\eta:0<x<a,\ \eta>0\}$ при краевых условиях

$$v^{(0)}_x(0,\eta)=v^{(0)}_x(a,\eta)=0,\quad \eta>0,\tag{3.3}$$

и начальном условии

$$v^{(0)}(x,0)=w_0(x),\quad 0\le x\le a.\tag{3.4}$$

Решение задачи (3.2)–(3.4) представимо рядом Фурье

$$v^{(0)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}\sum_{i=1}^{\infty}c_i^{(0)}\exp\big(-\lambda_i^2\eta\big)f_i(\sqrt{x+1}),\tag{3.5}$$

где $f_i(r)$ — решение уравнения

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}+\left(\lambda_i^2-\frac{1}{r^2}\right)f=0,$$

удовлетворяющее условиям

$$\frac{df}{dr}-\frac{f}{r}=0\quad\text{при } r=1,\ r=\sqrt{1+a}$$

(т. е. линейная комбинация функций Бесселя первого и второго рода от аргумента $\lambda_i r$); $\lambda_i>0$, $i=1,2,\dots,$ — корни уравнения

$$J_2(\lambda_i\sqrt{1+a})Y_2(\lambda_i)-J_2(\lambda_i)Y_2(\lambda_i\sqrt{1+a})=0,$$

а $c_i^{(0)}$ — постоянные,

$$c_i^{(0)}=\left(\int\limits_0^a\sqrt{x+1}f_i^2(\sqrt{x+1})\,dx\right)^{-1}\int\limits_0^a\sqrt{x+1}w_0(x)f_i(\sqrt{x+1})\,dx.$$

Отсутствие в правой части представления (3.5) члена, не зависящего от η, гарантировано условием (1.16). Это обстоятельство согласуется с тем, что внешнее разложение функции $w(x,\tau)$ начинается с члена порядка δ. Далее предполагается, что функция $w_0(x)$ принадлежит классу Гельдера $C^{2+\beta}[0,a]$, $0<\beta<1$, и удовлетворяет условию согласования $w_0'(0)=w_0'(a)=0$. Это обеспечивает сходимость ряда (3.5) в метрике пространства $C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{S}_a)$.

Функция $\psi^{(0)}(\eta)$ определяется как решение линейной задачи Коши

$$\frac{d\psi^{(0)}}{d\eta}=\frac{1}{\ln(1+a)}\left\{-\frac{4a\psi^{(0)}}{1+a}-1-\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{\alpha a^{3/2}}{(2+a)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha a^{5/2}}{4}\int\limits_0^a[v^{(0)}(x,\eta)]^2\,dx\right\}\quad \text{при } \eta>0, \tag{3.6}$$

$$\psi^{(0)}(0)=\varphi_0. \tag{3.7}$$

Согласно (3.5)–(3.7)

$$\lim_{\eta\to\infty}\psi^{(0)}=\frac{1+a}{4a}\left[1+\frac{1}{\sqrt{1+a}}-\frac{\alpha a^{3/2}}{(2+a)^2}\right],$$

причем стремление к пределу имеет экспоненциальный характер; этот предел и обозначается через $\chi^{(0)}$. Отсюда и из (2.4) видно, что

$$\lim_{\eta\to\infty}\psi^{(0)}=\chi(0)=\lim_{\tau\to 0}\varphi(0).$$

При получении уравнения для функции $v^{(1)}(x,\eta)$ следует подставить разложения (3.1) и $y=y^{(0)}+\delta y^{(1)}+\dots$ в уравнение (1.10) и удержать в результирующем равенстве члены нулевого и первого порядка по δ, после чего перейти к пределу при $\tau\to 0$ в разложении функции $y(\tau)$. Учитывая равенство (3.2) и тот факт, что $y^{(0)}(0)=1$, $y^{(1)}(0)=0$, мы приходим к уравнению

$$[(x+1)v^{(1)}]_\eta=4\big[(x+1)^2v_x^{(1)}\big]_x+4(2x-a)(2+a)^{-2}\psi^{(0)}(\eta), \tag{3.8}$$

которое требуется решить в полуполосе S_a при однородных краевых и начальных условиях

$$v_x^{(1)}(0,\eta)=v_x^{(1)}(a,\eta)=0,\quad \eta>0, \tag{3.9}$$

$$v^{(1)}(x,0)=0,\quad 0\le x\le a. \tag{3.10}$$

Решение задачи (3.8)–(3.10) выражается рядом Фурье, аналогичным (3.5). При $\eta\to\infty$ имеет место представление

$$v^{(1)}=z^{(1)}(x)+O[\exp(-\gamma\eta)] \tag{3.11}$$

с некоторым $\gamma>0$ равномерно по x, $0\le x\le a$. Здесь

$$z^{(1)}=-\frac{1+a}{a(2+a)}\left[1+\frac{1}{\sqrt{1+a}}-\frac{\alpha a^{5/2}}{(2+a)^2}\right]\left[x+(2+a)\ln\left(\frac{1+a}{1+x}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1+a}{1+x}-\frac{a(6+7a)}{6(2+a)}+\frac{1}{a}\ln(1+a)\right]. \tag{3.12}$$

Сравнение (3.11) с (2.7) в силу (3.12) показывает, что

$$\lim_{\eta\to\infty}v^{(1)}=z^{(1)}=\lim_{\tau\to 0}w^{(1)},\quad 0\le x\le a.$$

Подобным же образом получается задача Коши для определения функции $\psi^{(1)}(\eta)$; она имеет вид

$$\frac{d\psi^{(1)}}{d\eta} = \frac{1}{\ln(1+a)}\Bigg[-\frac{4a}{1+a}(\psi^{(1)} - \chi^{(1)}) + \frac{a}{1+a}(\psi^{(0)} - \chi^{(0)})^2 + \frac{\alpha a^{5/2}}{2}\int\limits_0^a v^{(0)}(x,\eta)v^{(1)}(x,\eta)\,dx\Bigg], \quad \eta > 0;\ \psi^{(1)}(0) = 0,$$

где $\chi^{(1)}$ — пока не определенная постоянная. Благодаря экспоненциальному затуханию функций $\psi^{(0)}(\eta) - \chi^{(0)}$, $v^{(0)}(x,\eta)$ при $\eta \to \infty$ и представлению (3.11) для функции $v^{(1)}(x,\eta)$ мы имеем: $\psi^{(1)}(\eta) \to \chi^{(1)}$ при $\eta \to \infty$. Полагая теперь $\chi^{(1)} = \varphi^{(1)}(0)$, мы получаем требуемое условие согласования

$$\lim_{\eta\to\infty} \psi^{(1)} = \chi^{(1)} = \lim_{\tau\to 0} \varphi^{(1)}.$$

Процедура построения функций $v^{(k)}(x,\eta)$, $z^{(k)}(x)$, $\psi^{(k)}(\eta)$ и определения постоянных $\chi^{(k)}$ может быть продолжена до любого натурального N. В результате все члены первого из формальных степенных рядов (3.1) определяются в терминах решения линейных задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, а члены второго ряда (3.1) — посредством решения второй начально-краевой задачи для линейных уравнений типа (3.8).

§ 4. Обоснование асимптотического разложения (случай A)

Определим N-приближенное решение задачи (1.10)–(1.15) ($N = 1, 2, \dots$) формулами

$$\begin{gathered} w_N = v^{(0)}\left(x, \frac{\tau}{\delta}\right) + \sum_{k=1}^{N} \delta^k \left[w^{(k)}(x,\tau) + v^{(k)}\left(x, \frac{\tau}{\delta}\right) - z^{(k)}(x)\right], \\ y_N = \sum_{i=0}^{N} \delta^i y^{(i)}(\tau), \quad \varphi_N = \sum_{i=0}^{N} \delta^i \left[\varphi^{(i)}(\tau) + \psi^{(i)}\left(\frac{\tau}{\delta}\right) - \chi^{(i)}\right]. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Нашей целью является получение оценок близости N-приближенного решения к точному решению задачи (1.10)–(1.15) при $\delta \to 0$. Ниже следует различать два случая A и B (см. § 2). В этом параграфе рассматривается случай A: функция $y^{(0)} = Y(\tau)$, определенная как решение задачи Коши (2.5), (2.6), положительна при всех $\tau > 0$. В этом случае функции w_N, y_N, φ_N определены для $0 \le \tau \le T$, $0 \le x \le a$ при произвольном $T > 0$ и имеют место включения $y_N \in C^2[0,T]$, $\varphi_N \in C^2[0,T]$, $w_N \in C_0^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_T)$, где Q_T — прямоугольник $\{x,\tau : 0 < x < a,\ 0 < \tau < T\}$, а $C_0^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_T)$ — подпространство $C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_T)$, порожденное функциями $u(x,\tau)$, которые удовлетворяют условиям: $u_x(0,\tau) = u_x(a,\tau) = 0$ при $0 \le \tau \le T$, $\int\limits_0^a (x+1)u(x,0)\,dx = 0$.

Запишем равенства (1.10)–(1.15) в операторном виде

$$A(f) = 0, \tag{4.2}$$

где $f = \{w, y, \varphi\}$ — совокупность искомых функций, а A — 6-компонентная оператор-функция, определенная следующими соотношениями:

$$A_1 = \delta[(y+x)w]_\tau - 4[(y+x)^2 w_x]_x - 4\delta(2x-a)(2y+a)^{-2}\varphi, \quad A_2 = \frac{dy}{d\tau} - 2\varphi,$$

$$A_3 = \delta\frac{d\varphi}{d\tau} - \frac{1}{\ln(1+a/y)}\left[-\frac{a\varphi(4-\delta\varphi)}{y(y+a)} - \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y+a}} + \frac{\alpha a^{3/2}}{(2y+a)^2} + \frac{\alpha a^{5/2}}{4}\int\limits_0^a w^2(x,\tau)dx\right],$$

$$A_4 = w(x,0) - w_0(x), \quad A_5 = y(0) - 1, \quad A_6 = \varphi(0) - \varphi_0.$$

Определим два банаховых пространства $B_1 = C_0^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_T) \times C^2[0,T] \times C^2[0,T]$ и $B_2 = C_0^{\beta,\beta/2}(\overline{Q}_T) \times C^1[0,T] \times C^1[0,T] \times C_0^{2+\beta}[0,a] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, где подпространство $C_0^{\beta,\beta/2}(\overline{Q}_T)$ пространства $C^{\beta,\beta/2}(\overline{Q}_T)$ образовано функциями $h(x,\tau)$, имеющими нулевое среднее значение на интервале $(0,a)$ при любом фиксированном $\tau \in [0,T]$, а подпространство $C_0^{2+\beta}[0,a]$ пространства функций $z(x) \in C^{2+\beta}[0,a]$ выделено условиями $z'(0) = z'(a) = 0$, $\int\limits_0^a (x+1)z(x)\,dx = 0$. Нормы в пространствах B_1 и B_2 определяются как суммы норм соответствующих элементов. Например, если $f = \{w, y, \varphi\} \in B_1$, то

$$\|f\|_{B_1} = \|w\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_T)} + \|y\|_{C^2[0,T]} + \|\varphi\|_{C^2[0,T]}.$$

Введем обозначение $f_N = \{w_N, y_N, \varphi_N\}$. Оператор A определен в некотором шаре $\overline{\Omega}_\gamma : \|f - f_N\|_{B_1} \le \gamma < 1$ пространства B_1 и действует в пространство B_2. Он дифференцируем по Фреше в этом шаре, и его производная Фреше A'_g удовлетворяет условию Липшица:

$$\|A'_g - A'_h\|_{B_2} \le K\|g-h\|_{B_1} \quad \text{для } g, h \in \overline{\Omega}_\gamma, \tag{4.3}$$

где величина $K > 0$ зависит от параметра δ. Для дальнейшего существенно, что при выполнении неравенства $0 < \delta \le \delta_0$ имеет место оценка (4.3) с не зависящей от δ постоянной (сохраним за ней прежнее обозначение K). Этот факт непосредственно следует из определения оператора A.

Далее через C_k $(k = 1, 2, \dots)$ обозначаются положительные величины, не зависящие от δ (при этом допускается их зависимость от δ_0 и T). По определению приближенного решения (процедура его построения подробно описана выше) имеет место неравенство

$$\|A(f_N)\|_{B_2} \le C_1\delta^{N+1} \tag{4.4}$$

для $\delta \in (0, \delta_0]$ и любого натурального N. Ниже доказывается, что при любом $T > 0$ и достаточно малом $\delta > 0$ в окрестности приближенного решения уравнения (4.2) существует его точное решение.

Предложение 1. *Пусть выполнены следующие предположения:*

i) $w_0(x) \in C^{2+\beta}[0,a]$, $0 < \beta < 1$; $w'_0(0) = w'_0(a) = 0$; $\int\limits_0^a (x+1)w_0(x)\,dx = 0$;

ii) *решение* $Y(\tau)$ *задачи Коши* (2.5), (2.6) *положительно при всех* $\tau > 0$.

Тогда найдется такое $\delta_0(N) > 0$, *что при* $\delta \in (0, \delta_0]$ *уравнение* (4.2) *имеет единственное решение* $f^* \in \overline{\Omega}_\gamma$ *и справедливо неравенство*

$$\|f^* - f_N\|_{B_1} \leq C_2(N)\delta^{N+1}. \tag{4.5}$$

Доказательство основано на проверке условий применимости теоремы Канторовича о сходимости метода Ньютона к решению уравнения (4.2). Нам удобно использовать вариант этой теоремы, изложенный в [8]. Напомним его формулировку.

Пусть $A(f)$ — оператор, определенный в выпуклой области D банахова пространства B_1, действующий в банахово пространство B_2 и дифференцируемый по Фреше. Предположим, что производная Фреше A'_f оператора A удовлетворяет в области D условию Липшица с постоянной K и что для некоторого $f_0 \in D$ оператор A'_{f_0} имеет ограниченный обратный оператор $(A'_{f_0})^{-1}$ как линейный оператор из B_2 в B_1. Если при этом выполнено неравенство

$$K\|A(f_0)\|_{B_2}\big\|(A'_{f_0})^{-1}\big\|^2 = \varepsilon < 1/2, \tag{4.6}$$

то уравнение (4.2) имеет решение f^*, единственное в некотором шаре пространства B_1 с центром в точке f_0, причем

$$\|f^* - f_0\|_{B_1} \leq [1 - (1 - 2\varepsilon)^{1/2}]K^{-1}\big\|A'_{f_0}\big\|. \tag{4.7}$$

Выше уже отмечалось, что в условиях предложения 1 постоянная K в неравенстве (4.3) может быть выбрана не зависящей от $\delta \in (0, \delta_0]$. Далее, если в качестве f_0 выбрать N-приближенное решение $f_N = \{w_N, y_N, \varphi_N\}$ задачи (1.10)–(1.15), то верна оценка (4.4). Теперь, чтобы применить теорему Канторовича, следует оценить сверху норму оператора $\big(A'_{f_N}\big)^{-1}$. Ясно, что эта норма неограниченно растет, когда $\delta \to 0$. Если удастся доказать, что ее рост имеет степенной характер,

$$\big\|\big(A'_{f_N}\big)^{-1}\big\| \leq C_3\delta^{-n} \quad \text{при } \delta \to 0 \tag{4.8}$$

с фиксированным $n > 0$, то вследствие (4.4) и (4.8) можно обеспечить выполнение неравенства (4.6) при $\delta_0 < 1$ и достаточно большом N.

Рассмотрим линейное уравнение

$$A'_{f_N}(g) = b, \tag{4.9}$$

где $g = \{\omega(x,\tau), q(\tau), \xi(\tau)\} \in B_1$, а $b = \{h(x,\tau), z(\tau), \chi(\tau), l(x), c_1, c_2\} \in B_2$ (c_1 и c_2 — постоянные). Исходя из определения оператора A, мы можем переписать уравнение (4.9) в виде связанной системы из одного параболического уравнения и двух обыкновенных уравнений, дополненной начальными и краевыми условиями. В результате получается следующая задача:

$$\begin{aligned}\delta[(y_N + x)\omega + w_N q]_\tau - 4[(y_N + x)^2\omega_x + 2(y_N + x)w_{N,x}q]_x&\\ + 16\delta(2x - a)(2y_N + a)^{-3}\varphi_N q - 4\delta(2x - a)(2y_N + a)^{-2}\xi&\\ = h(x,\tau), \quad (x,\tau) \in Q_T,&\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\frac{dq}{d\tau} - 2\xi = z(\tau), \quad \tau \in (0, T), \tag{4.11}$$

$$\delta\frac{d\xi}{d\tau}-\frac{aq}{y_N(y_N+a)\ln^2(1+a/y_N)}\bigg[-\frac{a\varphi_N(4-\delta\varphi_N)}{y_N(y_N+a)}-\frac{1}{\sqrt{y_N}}-\frac{1}{\sqrt{y_N+a}}$$

$$+\frac{\alpha a^{3/2}}{2y_N+a)^2}+\frac{\alpha a^{5/2}}{4}\int\limits_0^a w_N^2(x,\tau)\,dx\bigg]-\frac{1}{\ln(1+a/y_N)}\bigg\{-\frac{2a(2-\delta\varphi_N)\xi}{y_N(y_N+a)}$$

$$+\frac{q}{2}\bigg[\frac{1}{y_N^{3/2}}+\frac{1}{(y_N+a)^{3/2}}\bigg]-\frac{4\alpha a^{3/2}q}{(2y_N+a)^3}$$

$$+\frac{\alpha a^{5/2}}{2}\int\limits_0^a w_N(x,\tau)\omega(x,\tau)\,dx\bigg\}=\chi(\tau),\quad \tau\in(0,T),\tag{4.12}$$

$$\omega(x,0)=l(x),\quad 0\le x\le a,\tag{4.13}$$

$$q(0)=c_1,\tag{4.14}$$

$$\xi(0)=c_2,\tag{4.15}$$

$$\omega_x(0,\tau)=\omega_x(a,\tau)=0,\quad 0\le\tau\le T.\tag{4.16}$$

Однозначная разрешимость задачи (4.10)–(4.16) в условиях предложения 1 не вызывает сомнений. Доказательство неравенства (4.8) равносильно получению оценки ее решения вида

$$\|\omega\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_T)}+\|q\|_{C^2[0,T]}+\|\xi\|_{C^2[0,T]}\le C_3\delta^{-n}(\|h\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{Q}_T)}$$
$$+\|z\|_{C^1[0,T]}+\|\chi\|_{C^1[0,T]}+\|l\|_{C^{2+\beta}[0,a]}+|c_1|+|c_2|)\tag{4.17}$$

при $\delta\to 0$ на основе перехода в уравнениях (4.10)–(4.12) к «быстрому времени» $\eta=\tau/\delta$.

Введем обозначения $\widehat{\omega}(x,\eta)=\omega(x,\delta\eta)$, $\hat{q}(\eta)=q(\delta\eta)$, $\hat{\xi}(\eta)=\xi(\delta\eta)$, $\hat{h}(x,\eta)=h(x,\delta\eta)$, $\hat{z}(x,\eta)=z(\delta\eta)$, $\hat{\chi}(\eta)=\chi(\delta\eta)$. Через $\Pi_{T/\delta}$ обозначим прямоугольник $0<x<a$, $0<\eta<T/\delta$, а через $\mathrm{I}_{T/\delta}$ — интервал $0<\eta<T/\delta$. В новых терминах задача (4.10)–(4.16) принимает вид

$$[(y_N+x)\widehat{\omega}]_\eta-4[(y_N+x)^2\widehat{\omega}_x]_x+\Lambda_1(x,\eta)\hat{q}+\Lambda_2(x,\eta)\hat{\xi}$$
$$=\hat{h}(x,\eta)-\delta w_N\hat{z}(\eta),\quad (x,\eta)\in\Pi_{T/\delta},\tag{4.18}$$

$$\frac{d\hat{q}}{d\eta}-2\delta\hat{\xi}=\delta\hat{z}(\eta),\quad \eta\in\mathrm{I}_{T/\delta},\tag{4.19}$$

$$\frac{d\hat{\xi}}{d\eta}+\mu_1(\eta)\hat{\xi}+\mu_2(\eta)\hat{q}+\int\limits_0^a\mu(x,\eta)\widehat{\omega}(x,\eta)\,dx=\hat{\chi}(\eta),\quad \eta\in\mathrm{I}_{T/\delta},\tag{4.20}$$

$$\widehat{\omega}(x,0)=l(x),\quad 0\le x\le a,\tag{4.21}$$

$$\hat{q}(0)=c_1,\tag{4.22}$$

$$\hat{\xi}(0)=c_2,\tag{4.23}$$

$$\widehat{\omega}_x(0,\eta)=\widehat{\omega}_x(a,\eta)=0,\quad \eta\in\overline{\mathrm{I}}_{T/\delta}.\tag{4.24}$$

Здесь обозначено

$$\Lambda_1=w_{N,\eta}-8[(y_N+x)w_{N,x}]_x+16\delta(2x-a)(2y_N+a)^{-2}\varphi_N,$$
$$\Lambda_2=2\delta w_N-4\delta(2x-a)(2y_N+a)^{-2},$$

$$\mu_1 = \frac{2a(2-\delta\varphi_N)}{y_N(y_N+a)\ln(1+a/y_N)}, \quad \mu = -\frac{\alpha a^{5/2} w_N(x,\delta\eta)}{2\ln(1+a/y_N)},$$
$$\mu_2 = \frac{a}{y_N(y_N+a)\ln^2(1+a/y_N)}\left[\frac{a\varphi_N(4-\delta\varphi_N)}{y_N(y_N+a)} + \frac{1}{\sqrt{y_N}}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{y_N+a}} - \frac{\alpha a^{3/2}}{(2y_N+a)^2} - \frac{\alpha a^{5/2}}{4}\int\limits_0^a w_N^2(x,\delta\eta)\,dx\right]$$
$$+ \frac{1}{\ln(1+a/y_N)}\left[\frac{4\alpha a^{3/2}}{(2y_N+a)^3} - \frac{1}{2y_N^{3/2}} - \frac{1}{2(y_N+a)^{3/2}}\right].$$

При получении уравнения (4.18) из (4.10) использовалось уравнение (4.11).

Перечислим свойства коэффициентов и правых частей уравнений (4.18)–(4.20), существенные для дальнейших рассмотрений. В условиях предложения 1 выполнены неравенства $0 < m \le y_N(\delta\eta) \le M < \infty$, $\eta \in \bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}$. Это гарантирует равномерную параболичность уравнения (4.18) в прямоугольнике $\overline{\Pi}_{T/\delta}$, а также ограниченность функций $\mu_k(\eta)$, $k = 1, 2$, на интервале $\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}$ вместе с их производными $d\mu_k/d\eta$. Используя определение (4.1) функции w_N и представление (3.5) для функции v_0, выводим неравенство

$$|\mu(x,\eta)| + |\mu_\eta(x,\eta)| \le C_4 \exp(-C_5\eta) + \delta C_6, \quad (x,\eta) \in \overline{\Pi}_{T/\delta}, \tag{4.25}$$

где в качестве C_5 можно взять любое положительное число, меньшее λ_1.

Обозначим через C_7 величину $\max\limits_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\varphi_N(\delta\eta)|$ и выберем δ_0 меньшим, чем $2C_7^{-1}$. Тогда для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ справедлива оценка

$$\mu_1(\eta) \ge C_8 > 0, \quad \eta \in \bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}. \tag{4.26}$$

Введем обозначения

$$\Lambda_4 = w_{N,\eta} - 8[(y_N + x)w_{N,x}]_x, \quad \Lambda_3 = \Lambda_1 - \Lambda_4.$$

Из предположений относительно функций $\hat{h}$, $\hat{z}$ и свойств функций w_N, y_N, φ_N следуют неравенства

$$\|\hat{h}\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Pi}_{T/\delta})} + \|w_N \hat{z}\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Pi}_{T/\delta})} + \|\Lambda_4\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Pi}_{T/\delta})} \le C_9, \tag{4.27}$$

$$\|\Lambda_k\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Pi}_{T/\delta})} \le \delta C_{10}, \quad k = 2, 3, \tag{4.28}$$

$$\|\Lambda_4(x,\eta)| \le C_{11} \exp(-C_5\eta) + \delta C_{12}, \quad (x,\eta) \in \overline{\Pi}_{T/\delta}. \tag{4.29}$$

Подчеркнем, что константы $C_4, \dots, C_{12}$ в неравенствах (4.25)–(4.29) не зависят от δ.

Нашей ближайшей целью является получение равномерной относительно δ оценки $\max\limits_{\overline{\Pi}_{T/\delta}} |\widehat{\omega}(x,\eta)|$. Для ее получения представим $\widehat{\omega}$ в виде суммы $\widehat{\omega}_1 + \widehat{\omega}_2 + \widehat{\omega}_3$, где функции $\widehat{\omega}_k$ удовлетворяют соотношениям

$$(y_N + x)\widehat{\omega}_{1,\eta} - 4(y_N + x)^2 \widehat{\omega}_{1,xx} - 8(y_N + x)\widehat{\omega}_{1,x} + \zeta\widehat{\omega}_1$$
$$= -\delta w_N \hat{z} - \Lambda_3 \hat{q} - \Lambda_2 \hat{\xi}, \quad (x,\eta) \in \Pi_{T/\delta}, \tag{4.30}$$

$$\widehat{\omega}_1(x, 0) = l(x), \quad x \in [0, a], \tag{4.31}$$

$$\widehat{\omega}_{1,x}(0,\eta) = \widehat{\omega}_{1,x}(a,\eta) = 0, \quad \eta \in \bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}, \tag{4.32}$$

$$[(y_N+x)\widehat{\omega}_2]_\eta - 4[(y_N+x)^2\widehat{\omega}_{2,x}]_x = \hat{h}, \quad (x,\eta)\in\Pi_{T/\delta}, \tag{4.33}$$

$$\widehat{\omega}_2(x,0)=0, \quad x\in[0,a], \tag{4.34}$$

$$\widehat{\omega}_{2,x}(0,\eta)=\widehat{\omega}_{2,x}(a,\eta)=0, \quad \eta\in\bar{\mathrm{I}}_{t/\delta}, \tag{4.35}$$

$$[(y_N+x)\widehat{\omega}_3]_\eta - 4[(y_n+x)^2\widehat{\omega}_{3.x}]_x = -\Lambda_4\hat{q}, \quad (x,\eta)\in\Pi_{T/\delta}, \tag{4.36}$$

$$\widehat{\omega}_3(x,0)=0, \quad x\in[0,a], \tag{4.37}$$

$$\widehat{\omega}_{3,x}(0,\eta)=\widehat{\omega}_{3,x}(a,\eta)=0, \quad \eta\in\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}. \tag{4.38}$$

Здесь введено обозначение $\zeta(\eta)=dy_N(\delta\eta)/d\eta$. Согласно построению y_N имеем

$$dy_N(\tau)/d\tau = 2\varphi_N(\tau)+O(\delta^{N+1}) \quad \text{при } \delta\to 0,$$

так что

$$|\zeta(\eta)|\le C_{13}\delta, \quad \eta\in\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}. \tag{4.39}$$

Перейдем в соотношениях (4.30)–(4.32) к новой искомой функции

$$s_1=\widehat{\omega}_1\exp[-\delta C_{14}\eta+\delta C_{15}x(a-x)]. \tag{4.40}$$

Эта функция является решением следующей задачи:

$$\begin{gathered}(y_N+x)s_{1,\eta}-4(y_N+x)^2 s_{1,xx}-[8(y_N+x)+8\delta C_{15}(y_N+x)^2(2x-a)]s_{1,x}\\ +\{\zeta+\delta[C_{14}(y_N+x)+\delta C_{15}^2(y_N+x)^2(2x-a)^2-8C_{15}(y_N+x)(y_N+3x-a)]\}s_1\\ =-(\delta w_N\hat{z}+\Lambda_3\hat{q}+\Lambda_2\hat{\xi})\exp[-\delta C_{14}\eta+\delta C_{15}x(a-x)], \quad (x,\eta)\in\Pi_{T/\delta}, \end{gathered}\tag{4.41}$$

$$s_1(x,0)=l(x)\exp[\delta C_{15}x(a-x)], \quad x\in[0,a], \tag{4.42}$$

$$s_{1,x}(0,\eta)-\delta C_{15}as_1(0,\eta)=0, \quad \eta\in\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}, \tag{4.43}$$

$$s_{1,x}(a,\eta)+\delta C_{15}zs_1(a,\eta)=0, \quad \eta\in\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}. \tag{4.44}$$

Выберем постоянные C_{14} и C_{15} следующим образом: $C_{14}=(2+C_{13})/m$, $C_{15}=1/8m(2M+a)$. На основании неравенства (4.39) мы получим оценку снизу коэффициента j при функции s_1 в уравнении (4.41):

$$j(x,\eta)\ge\delta, \quad (x,\eta)\in\overline{\Pi}_{T/\delta}, \tag{4.45}$$

что позволяет применить к решению s_1 задачи (4.41)–(4.44) принцип максимума [9]. Используя при этом оценки (4.27), (4.28) и (4.45), получаем

$$\max_{\overline{\Pi}_{T/\delta}}|s_1|\le C_{16}\max_{[0,a]}|l|+C_{17}\max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}}|\hat{z}|+C_{18}(\max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}}|\hat{q}|+\max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}}|\hat{\xi}|). \tag{4.46}$$

Отсюда и из (4.40) следует оценка $\max\limits_{\overline{\Pi}_{T/\delta}}|\widehat{\omega}_1|$ через $\max\limits_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}}|\hat{q}|$ и $\max\limits_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}}|\hat{\xi}|$.

Оценка $\max\limits_{\overline{\Pi}_{T/\delta}}|\widehat{\omega}_2|$ базируется на интегральном тождестве, которому удовлетворяет решение задачи (4.33)–(4.35):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\eta}\int\limits_0^a(y_N+x)\widehat{\omega}_2^2\,dx+\int\limits_0^a\left[4(y_N+x)^2\widehat{\omega}_{2,x}^2+\zeta\widehat{\omega}_2^2\right]dx=\int\limits_0^a\hat{h}\widehat{\omega}_2\,dx, \tag{4.47}$$

Включение $h(x,\tau)\in C_0^{\beta,\beta/2}(\overline{Q}_T)$ влечет выполнение равенства

$$\int\limits_0^a\hat{h}(x,\eta)\,dx=0, \quad \eta\in\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta},$$

в силу которого задача (4.33)–(4.35) обладает законом сохранения

$$\int\limits_0^a (y_N + x)\widehat{\omega}_2\, dx = 0, \quad \eta \in \bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}. \tag{4.48}$$

Гладкая функция $\widehat{\omega}_2(x,\eta)$, удовлетворяющая при любом $\eta \in \bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}$ соотношению (4.48), подчиняется неравенству

$$\int\limits_0^a \widehat{\omega}_2^2\, dx \le a^2 \int\limits_0^a \widehat{\omega}_{2,x}^2\, dx, \quad \eta \in \bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}.$$

Используя это неравенство, оценку (4.39) и выбирая δ_0 меньшим, чем $2C_{13}^{-1}(m/a+1)^2$, из (4.47) получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\eta}\int\limits_0^a (y_N + x)\widehat{\omega}_2^2\, dx + 2\left(\frac{m}{a}\right)^2 \int\limits_0^a \widehat{\omega}_2^2\, dx \le \max_{\overline{\Pi}_{T/\delta}} |\hat{h}| \int\limits_0^a |\hat{\omega}_2|\, dx, \quad \eta \in \bar{\mathrm{I}}_{T/\delta},$$

независимо от $\delta \in (0, \delta_0]$. Отсюда и из (4.47) заключаем, что

$$\left(\int\limits_0^a \widehat{\omega}_2^2(x,\eta)\, dx\right)^{1/2} \le C_{19} \max_{\overline{\Pi}_{T/\delta}} |\hat{h}|, \quad \eta \in \bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}. \tag{4.49}$$

Наличие оценки (4.49) вместе с равномерной ограниченностью и непрерывностью коэффициентов и правой части уравнения (4.33) в области $\overline{\Pi}_{T/\delta}$ дает возможность применить к задаче (4.33)–(4.35) результаты L^q-теории линейных параболических уравнений второго порядка [9], что приводит к неравенству

$$\max_{\overline{\Pi}_{T/\delta}} |\widehat{\omega}_2| \le C_{20} \max_{\overline{\Pi}_{T/\delta}} |\hat{h}|. \tag{4.50}$$

Аналогичное (4.47) тождество справедливо и для решения $\widehat{\omega}_3$ задачи (4.36)–(4.38); оно имеет вид

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\eta}\int\limits_0^a (y_N + x)\widehat{\omega}_3^2\, dx + \int\limits_0^a \left[4(y_N + x)^2\widehat{\omega}_{3,x}^2 + \zeta\widehat{\omega}_3^2\right] dx = -\hat{q}\int\limits_0^a \Lambda_4\widehat{\omega}_3\, dx, \quad \eta \in \bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}.$$

В силу неравенств (4.29), (4.39) из последнего тождества вытекает, что

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{d\eta}\int\limits_0^a (y_N + x)\widehat{\omega}_3^2\, dx - C_{13}\delta \int\limits_0^a \widehat{\omega}_3^2\, dx \\ &\qquad \le [C_{11}\exp(-C_5\eta) + \delta C_{12}] \max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{q}| \int\limits_0^a |\widehat{\omega}_3|\, dx, \quad \eta \in \bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Интегрирование дифференциального неравенства (4.51) с начальным условием (4.37) приводит к оценке

$$\left(\int\limits_0^a \widehat{\omega}_3^2(x,\eta)\, dx\right)^{1/2} \le C_{21} \max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{q}|, \quad \eta \in \bar{\mathrm{I}}_{T/\delta},$$

а вместе с ней и к оценке

$$\max_{\overline{\Pi}_{T/\delta}} |\widehat{\omega}_3| \le C_{22} \max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{q}|. \tag{4.52}$$

Следствием (4.40), (4.46), (4.50) и (4.52) является неравенство

$$\max_{\overline{\Pi}_{T/\delta}} |\widehat{\omega}| \le C_{23} (\max_{\overline{\Pi}_{T/\delta}} |\hat{h}| + \max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{z}| + \max_{[0,a]} |l| + \max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{q}| + \max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{\xi}|). \tag{4.53}$$

Переходим к получению априорных оценок функций $\hat{q}(\eta)$ и $\hat{\xi}(\eta)$. Выберем число $\delta_0 > 0$ меньшим, чем $\min\bigl[2C_7^{-1}, C_8(C_6 C_{23} a)^{-1}, 2C_{13}^{-1}(m/a+1)^2\bigr]$. Тогда на основании уравнения (4.20) и неравенств (4.25), (4.53) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\xi}}{d\eta} + C_{24}\hat{\xi} \le \max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{\chi}| + C_{25} \max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{q}| \\ + C_4 C_{23} a \exp(-C_5 \eta) \max_{[0,\eta]} |\hat{\xi}| + C_{25} (\max_{\overline{\Pi}_{T/\delta}} |\hat{h}| + \max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{z}| + \max_{[0,a]} |l|). \end{aligned} \tag{4.54}$$

Учитывая, что входящие в неравенство (4.54) положительные постоянные не зависят от $\delta \in (0, \delta_0]$, и интегрируя это неравенство с начальным условием (4.23), получим

$$\max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{\xi}| \le C_{26} (\max_{\overline{\Pi}_{T/\delta}} |\hat{h}| + \max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{z}| + \max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{\chi}| + \max_{[0,a]} |l| + |c_2| + \max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{q}|). \tag{4.55}$$

Отсюда с помощью (4.19) и (4.22) получается априорная оценка

$$\max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{q}| \le C_{27} (\max_{\overline{\Pi}_{T/\delta}} |\hat{h}| + \max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{z}| + \max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{\chi}| + \max_{[0,a]} |l| + |c_1| + |c_2|), \tag{4.56}$$

а из нее вследствие (4.53), (4.55) вытекают априорные оценки типа (4.56) величин $\max\limits_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{\xi}|$ и $\max\limits_{\overline{\Pi}_{T/\delta}} |\widehat{\omega}|$.

В силу уравнений (4.19), (4.20) такие же оценки имеют место и для величин $\max\limits_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |d\hat{\xi}/d\eta|$, $\max\limits_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |d\hat{q}/d\eta|$. Их наличие гарантирует принадлежность «свободного члена» $\gamma = -\Lambda_1 \hat{q} - \Lambda_2 \hat{\xi} + \hat{h} - \delta w_N \hat{z}$ в уравнении (4.18) классу $C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Pi}_{T/\delta})$, причем

$$\begin{aligned} \|\gamma\|_{C^{\beta,\beta/2}((\overline{\Pi}_{T/\delta})} \le C_{28} (\|\hat{h}\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Pi}_{T/\delta})} + \|\hat{z}\|_{C^1(\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta})} \\ + \max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{\chi}| + \max_{[0,a]} |l| + |c_1| + |c_2|). \end{aligned} \tag{4.57}$$

Располагая оценкой (4.57), мы можем применить к задаче (4.18), (4.21), (4.24) результаты общей теории линейных параболических уравнений в пространствах Гсльдера [9]. Из них следует, что решение $\widehat{\omega}$ указанной задачи принадлежит классу $C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{\Pi}_{T/\delta})$ и справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\widehat{\omega}\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}((\overline{\Pi}_{T/\delta})} \le C_{29} (\|\hat{h}\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Pi}_{T/\delta})} + \|\hat{z}\|_{C^1(\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta})} \\ + \max_{\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}} |\hat{\chi}| + \|l\|_{C^{2+\beta}[0,a]} + |c_1| + |c_2|). \end{aligned} \tag{4.58}$$

Нам осталось получить оценки норм $\|\hat{\xi}\|_{C^2(\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta})}$, $\|\hat{q}\|_{C^2(\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta})}$. Для получения первой из них продифференцируем уравнение (4.20) и воспользуемся неравенством (4.25) и уже имеющимися оценками $\|\widehat{\omega}\|_{C^{2+\beta,1+\beta/2}((\overline{\Pi}_{T/\delta})}$, $\|\hat{\xi}\|_{C^1(\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta})}$,

$\|\hat{q}\|_{C^1(\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta})}$. Функция $d\hat{\xi}/d\eta$ удовлетворяет линейному уравнению 1-го порядка с коэффициентом μ_1, допускающим оценку (4.26), и правой частью, ограниченной на интервале $\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta}$ по модулю константой независимо от $\delta \in (0, \delta_0]$. Отсюда без труда получается требуемое неравенство

$$\|\hat{\xi}\|_{C^2(\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta})} \le C_{30}(\|\hat{h}\|_{C^{\beta,\beta/2}(\overline{\Pi}_{T/\delta})} + \|\hat{z}\|_{C^1(\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta})} + \|\chi\|_{C^1(\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta})} + \|l\|_{C^{2+\beta}[0,a]} + |c_1| + |c_2|). \quad (4.59)$$

Аналогичная (4.59) оценка нормы $\|\hat{q}\|_{C^2(\bar{\mathrm{I}}_{T/\delta})}$ выводится непосредственно из уравнения (4.19). Возвращаясь в этом неравенстве и в неравенствах (4.58), (4.59) к «медленному времени» $\tau = \delta\eta$, получаем требуемую оценку (4.17) с $n = 2$, равносильную оценке (4.8).

Выберем теперь $N \ge 4$ и зафиксируем его. Тогда из (4.4), (4.8) следует, что

$$\varepsilon = K\|A(f_0)\|_{B_2}\big\|(A'_{f_0})^{-1}\big\|^2 \le KC_1C_3^2\delta^{N-3}, \quad \delta \in (0, \delta_0]. \quad (4.60)$$

Уменьшая в случае необходимости величину δ_0, мы можем добиться выполнения неравенства $\varepsilon < 1/2$ при $\delta \in (0, \delta_0]$, гарантирующего разрешимость уравнения (4.2). Для завершения доказательства предложения 1 требуется получить неравенство (4.5). Пусть теперь N — любое натуральное число. Выбирая в качестве f_0 N^*-приближенное решение задачи (1.10)–(1.15), где $N^* = N + 4$, и используя неравенства треугольника, (4.7) и (4.60), имеем

$$\|f^* - f_N\|_{B_1} \le \|f^* - f_{N^*}\| + \|f_N - f_{N^*}\| \le C_{31}\delta^{N^*-3} + C_{32}\delta^{N+1} \le C_2\delta^{N+1},$$

если $\delta \in (0, \delta_0]$. Предложение 1 доказано полностью.

§ 5. Обоснование асимптотического разложения (случай B)

В этом случае найдется такое τ^*, что решение $Y(\tau)$ задачи (2.5), (2.6) положительно при $\tau \in [0, \tau^*)$, но $Y = 0$ при $\tau \ge \tau^*$. Как уже отмечалось в § 2, здесь целесообразно перейти к новой независимой переменной y вместо τ и новым искомым функциям $\Phi[y(\tau)] = \varphi(\tau)$, $W[x, y(\tau)] = w(x, \tau)$, в результате чего задача (1.10)–(1.15) записывается в виде соотношений (2.15)–(2.19). Напомним, что в этих соотношениях $y_0 = y(\tau_0)$, а $\tau_0 \in (0, \tau^*)$ выбрано таким, что $dy/d\tau = 2\varphi < 0$ при $\tau_0 \le \tau < \tau^*$. Мы можем считать, что на интервале $0 \le \tau \le \tau_0$ асимптотическое решение $f_N = \{w_N, y_N, \varphi_N\}$ задачи (1.10)–(1.15) уже построено, и его близость к точному решению $f^* = \{w, y, \varphi\}$ характеризуется неравенством (4.5). Из него следует, в частности, что

$$\begin{gathered} \|W(x, y_0) - W_N(x, y_0)\|_{C^{2+\beta}[0,a]} \le C_{33}\delta^{N+1}, \\ |\Phi(y_0) - \Phi_N(y_0)| \le C_{34}\delta^{N+1}, \quad \delta \in (0, \delta_0], \end{gathered} \quad (5.1)$$

где обозначено

$$W_N = \sum_{k=1}^{N} \delta^k W^{(k)}(x, y), \quad \Phi_N = \sum_{i=0}^{N} \delta^i \Phi^{(i)}(y), \quad (5.2)$$

а элементы внешнего разложения $W^{(k)}$, $\Phi^{(i)}$ определяются по алгоритму, изложенному в § 2.

В отличие от (4.1) в представлении (5.2) N-приближенного решения $\{W_N, \Phi_N\}$ задачи (2.15)–(2.19) отсутствуют члены, зависящие от быстрой эволюции переменной. Это объясняется тем, что функции $v^{(k)}(x, \tau/\delta) - z^{(k)}(x)$, $\psi^{(i)}(\tau/\delta) - \chi^{(i)}$, участвующие в определении (4.1), удовлетворяют неравенствам

$$\|v^{(k)}(x, \tau/\delta) - z^{(k)}(x)\|_{C^{2+\beta}[0,a]} \le C_{36} \exp(-C_{35}/\delta),$$

$$|\psi^{(i)}(\tau/\delta) - \chi^{(i)}| \le C_{37} \exp(-C_{35}/\delta)$$

при $0 < \tau_0 \le \tau < \tau^*$, $0 < \delta \le \delta_0$. Другое важное свойство приближенного решения задачи (2.15)–(2.19) — наличие «приближенного закона сохранения»

$$\left| \int_0^a (y + x) W_N(x, y)\, dx \right| \le C_{38} \delta^{N+1}, \quad y \in (0, y_0],\ \delta \in (0, \delta_0]. \tag{5.3}$$

Для доказательства (5.3) используется равносильное (1.9) тождество

$$\int_0^a (y + x) W(x, y)\, dx = 0, \quad y \in (0, y_0], \tag{5.4}$$

которому удовлетворяет точное решение задачи (2.15)–(2.19), первая из оценок (5.1) и равенства

$$\frac{d}{dy} \int_0^a (y + x) W^{(k)}(x, y)\, dx = 0, \quad y \in (0, y_0],\ k = 1, 2, \dots. \tag{5.5}$$

Равенства (5.5) доказываются по индукции, исходя из определения функции $W^{(k)}$. При $k = 1$ (5.5) непосредственно вытекает из соотношений, которым удовлетворяет функция $W^{(1)}$:

$$\Phi^{(0)}[(y + x)W^{(1)}]_y = 2\big[(y + x)^2 W_x^{(2)}\big]_x - 2(2x - a)(2y + a)^{-2}\Phi^{(1)},$$

$$0 < x < a, \quad 0 < y < y_0,$$

$$W_x^{(1)}(0, y) = W_x^{(1)}(a, y) = 0, \quad 0 < y \le y_0.$$

Фактически равенства (5.5) означают, что

$$\int_0^a (y + x) W_N(x, y)\, dx = \kappa(\delta),$$

где не зависящая от y функция κ допускает оценку $|\kappa| \le C_{38}\delta^{N+1}$ при $\delta \to 0$. Это позволяет ввести новую функцию $\check{W}_N(x, y)$, для которой выполнено точное равенство

$$\int_0^a (y + x) \check{W}_N(x, y)\, dx = 0, \tag{5.6}$$

а именно

$$W_N = \check{W}_N + \frac{2\kappa(\delta)}{a(a + 2y)}. \tag{5.7}$$

Существенно при этом, что функция $\check{W}_N$, как и W_N, удовлетворяет однородным краевым условиям (2.16), а в начальном условии для $\check{W}_N$ возникает добавка порядка δ^{N+1}, так что неравенство (5.1) (быть может, с новой постоянной) остается в силе при замене W_N на $\check{W}_N$. Порядок невязок при подстановке пары $\check{W}_N$, Φ_N вместо W_N, Φ_N в уравнения (2.15), (2.18) при этом не изменится: соответствующие нормы каждой из них оцениваются сверху величиной, пропорциональной δ^{N+1} при $\delta \to 0$.

Далее предполагается, что для решения W, Φ задачи (2.15)–(2.19) выполнено неравенство $\Phi(y) < 0$, если $0 < y \le y_0$. Как уже отмечалось, при $\alpha < \alpha^* \approx 5.89$ этого всегда можно добиться, выбирая y_0 достаточно малым. В этом случае имеет место оценка

$$-\frac{1}{4}\sqrt{y}\left[1 + \frac{C_{39}}{\sqrt{\ln(1 + a/y)}}\right] \le \Phi \le -\frac{1}{4}\sqrt{y}, \quad 0 \le y \le y_0, \tag{5.8}$$

где постоянная C_{39} не зависит от $\delta \in (0, \delta_0]$. Оценка (5.8) получена в работе [1]. Для элемента Φ_N приближенного решения данной задачи справедлива следующая оценка:

$$-\frac{1}{4}\sqrt{y}\left[1 + C_{40}\sqrt{y}\ln\frac{1}{y}\right] \le \Phi_N \le -\frac{1}{4}\sqrt{y}\left[1 + C_{41}\sqrt{y}\ln\frac{1}{y}\right], \quad 0 \le y \le y_0 < 1, \tag{5.9}$$

с постоянными $C_{40} > C_{41} > 0$, не зависящими от δ. Оценка (5.9) вытекает из неравенств (2.22), включений $\Phi^{(k)} \in C^{(k+\beta)/2}[0, y_0]$, $0 < \beta < 1$, и рекуррентных соотношений типа (2.21) для $\Phi^{(k)}$ при $k = 1, 2, \dots$. Далее будем предполагать $y_0 < 1$, что не умаляет общности рассмотрений.

Обозначим $\Pi_\varepsilon = \{x, y : 0 < x < a,\ \varepsilon < y < y_0\}$, $I_\varepsilon = \{y : \varepsilon < y < y_0\}$. Наша цель — доказать близость функций W и $\widetilde{W}_N$ в прямоугольнике Π_0 и функций Φ и Φ_N на интервале I_0. Введем обозначения $U_N = W - \widetilde{W}_N$, $\Psi_N = \Phi - \Phi_N$. По построению приближенного решения функция $\widetilde{W}_N$ удовлетворяет уравнению (2.15), где Φ заменено на Φ_N, а к правой части добавлена невязка, которую обозначим через Z_N. При известном Ψ_N функция $U_N(x, y)$ определяется как решение линейной начально-краевой задачи

$$\begin{aligned}\delta\Phi[(y + x)U_N]_y = 2[(y + x)^2 U_{N,x}]_x \\ + \delta\Psi_N\{(2y + a)^{-2}(2x - a) - [(y + x)\widetilde{W}_N]_y\} - Z_N, \quad (x, y) \in \Pi_0,\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$U_{N,x}(0, y) = U_{N,x}(a, y) = 0, \quad y \in I_0, \tag{5.11}$$

$$U_N(x, y_0) = U^0(x) \equiv W_0(x) - W_N(x, y_0), \quad 0 \le x \le a. \tag{5.12}$$

Аналогично при заданном U_N функция $\Psi_N(y)$ представляет решение линейной задачи Коши

$$\begin{aligned}\delta\frac{d\Psi_N}{dy} = \frac{\delta a\Psi_N}{2y(y + a)\ln(1 + a/y)} + \frac{\Psi_N}{2\Phi\Phi_N\ln(1 + a/y)} \\ \times \left[\frac{1}{\sqrt{y}} + + \frac{1}{\sqrt{y + a}} - \frac{\alpha a^{3/2}}{(2y + a)^2} - \frac{\alpha a^{5/2}}{4}\int_0^a W^2\,dx\right] \\ + \frac{\alpha a^{5/2}}{2\Phi_N\ln(1 + a/y)}\int_0^a (W + W_N)U_N\,dx + \Omega_N, \quad y \in I_0,\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\Psi_N(y_0) = \Psi^0 \equiv \Phi_0 - \Phi_N(y_0). \tag{5.14}$$

Здесь через Ω_N обозначена невязка, получающаяся при подстановке в уравнение (2.18) приближенного решения Φ_N, W_N.

В дальнейшем нам потребуются неравенства, которым удовлетворяют функции $Z_N(x,y)$, $\Omega_N(y)$ при $N=2,3,\dots$:

$$|Z_N| \le C_{42}\delta^{N+1}\sqrt{y}, \quad (x,y)\in\overline{\Pi}_0, \tag{5.15}$$

$$|\Omega_N| \le C_{43}\delta^{N+1}, \quad y\in\bar{I}_0. \tag{5.16}$$

Если $N=1$, то в правой части неравенств следует добавить множитель $\ln(1/y)$. При получении оценок (5.15), (5.16) используются явные выражения Z_N, Ω_N в терминах $\Phi^{(0)},\dots,\Phi^{(N)}$; $W^{(1)}\dots,W^{(N)}$, свойства гладкости этих функций, выраженные включениями $\Phi^{(k)}\in C^{(k+\beta)/2}[0,y_0]$, $W^{(k)}\in C^{(k+\beta-1)/2}(\overline{\Pi}_0)$, и тот факт, что $\Phi^{(k)}(0)=0$, $W^{(k)}(x,0)=0$ для $x\in[0,a]$ и любого $k=1,2,\dots$.

Для последующих рассмотрений нам будет удобно выделить особенности функций Φ, Φ_N при $y\to 0$ и ввести новые функции Γ, Γ_N соотношениями

$$\Phi = -\frac{1}{4}\sqrt{y}(1+\Gamma), \quad \Phi_N = -\frac{1}{4}\sqrt{y}(1+\Gamma_N). \tag{5.17}$$

В силу неравенств (5.8), (5.9) функции Γ, Γ_N неотрицательны при $y\in\bar{I}_0$ и $\Gamma\to 0$, $\Gamma_N\to 0$, когда $y\to 0$. Обозначим $\Delta_N=\Gamma-\Gamma_N$. Оказывается, что оценка функции Δ_N получается проще, чем оценка $\Psi_N=\Phi-\Phi_N$.

Вследствие (5.13), (5.17) функция Δ_N удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Delta_N}{dy} + q\Delta_N = \omega_N, \quad y\in I_0, \tag{5.18}$$

где

$$q = \frac{1}{\delta\ln(1+a/y)(1+\Gamma)(1+\Gamma_N)}\biggl[-\frac{8a}{y^{3/2}(y+a)} - \frac{16}{y\sqrt{y+a}} - \frac{16}{\sqrt{y}(y+a)} + \frac{16\alpha a^{3/2}}{y(2y+a)^2} + \frac{\delta}{2y} + \frac{\delta a}{y(y+a)\ln(1+a/y)} - \frac{4\alpha a^{5/2}}{y}\int_0^a W^2\,dx\biggr], \tag{5.19}$$

$$\omega_N = -\frac{4\Omega_N}{\delta\sqrt{y}} - \frac{2\alpha a^{5/2}}{\delta y\ln(1+a/y)(1+\Gamma)}\int_0^a (W+W_N)U_N\,dx. \tag{5.20}$$

К уравнению (5.18) присоединяется начальное условие, вытекающее из (5.14), (5.17):

$$\Delta_N(y_0) = \Delta^0 \equiv -4\Psi^0/\sqrt{y_0}. \tag{5.21}$$

Уравнение (5.10) в новых терминах переписывается так:

$$\delta\Phi[(y+x)U_N]_y = 2[(y+x)^2U_{N,x}]_x - Z_N + c_N\Delta_N, \quad (x,y)\in\Pi_0, \tag{5.22}$$

где

$$c_N = -\frac{\delta\sqrt{y}}{4}\{(2y+a)^{-2}(2x-a) - [(y+x)\widetilde{W}_N]_y\}. \tag{5.23}$$

Используя представление (2.7) для $w^{(1)}(x,\tau)=W^{(1)}(x,y)$, исходя из рекуррентных соотношений для функций $W^{(k)}$, $k=2,3,\dots$, и пользуясь индукцией, мы устанавливаем справедливость неравенства

$$|c_N| \le C_{44}\delta\sqrt{y}, \quad (x,y)\in\overline{\Pi}_0 \tag{5.24}$$

для любого $N=2,3,\dots$.

Уравнение (5.22) вырождается на части $y=0$, $0\le x\le a$ границы области Π_0, уравнение (5.18) — в концевой точке $y=0$ интервала I_0. Поэтому мы будем рассматривать задачу (5.22), (5.11), (5.12) в суженной области Π_ε, где $\varepsilon>0$; аналогично, задача (5.18), (5.21) будет рассматриваться на интервале I_ε. При этом получающиеся оценки функций U_N, Δ_N не будут зависеть от ε, что позволит перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$. В процессе их получения мы будем опираться на следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $u(x,y)$ — классическое решение задачи*

$$\delta\Phi[(y+x)u]_y = 2[(y+x)^2 u_x]_x + h, \quad (x,y) \in \Pi_0, \tag{5.25}$$

$$u_x(0,y) = u_x(a,y) = 0, \quad 0 < y \le y_0, \tag{5.26}$$

$$u(x,y_0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le a, \tag{5.27}$$

где $\Phi(y)$, $u_0(x)$, $h(x,y)$ — функции, непрерывные соответственно на отрезках $[0,y_0]$, $[0,a]$ и в прямоугольнике $\overline{\Pi}_0$. Предположим, что выполнены неравенства

$$\Phi < 0 \quad \text{при } 0 < y \le y_0, \tag{5.28}$$

$$|h| \le C_{45}\sqrt{y}, \quad (x,y) \in \overline{\Pi}_0. \tag{5.29}$$

Тогда имеет место оценка

$$|u| \le C_{46}\sqrt{y}\left[\ln\frac{y+x}{y} + \frac{y}{y+x}\right], \quad (x,y) \in \overline{\Pi}_0 \tag{5.30}$$

при любом $\delta \in (0,\delta_0]$, где постоянная $C_{46} > 0$ зависит лишь от a, y_0, C_{45} и $C_{47} = \max|u_0(x)|$, $0 \le x \le a$.

Доказательство. Рассмотрим задачу (5.25)–(5.27) в прямоугольнике Π_ε при $\varepsilon > 0$ и перейдем в ней от x к новой независимой переменной $\xi = x/y$. Образом Π_ε на плоскости ξ, y является область $\Sigma_\varepsilon = \{\xi, y : 0 < \xi < a/y,\ \varepsilon < y < y_0\}$. Введем новую искомую функцию $z(\xi,y)$ с помощью соотношения

$$u(x,y) = \sqrt{y}\left[\ln(1+\xi) + \frac{1}{1+\xi}\right] z(\xi,y). \tag{5.31}$$

Вследствие (5.25)–(5.27) эта функция удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}\delta y\Phi[(1+\xi)\ln(1+\xi)+1]Z_y &= 2(1+\xi)[(1+\xi)\ln(1+\xi)+1]z_{\xi\xi}\\ &+ 2\left\{2(1+\xi)\ln(1+\xi) + 3 + \xi + \frac{\delta}{2}\Phi\xi[(1+\xi)\ln(1+\xi)+1]\right\}z_\xi\\ + \left\{2 - \frac{\delta\Phi}{2}(3+\xi)\left[\ln(1+\xi) + \frac{1}{1+\xi}\right]\right\}&z + \frac{1}{\sqrt{y}}h(\xi y, y), \quad (\xi,y) \in \Sigma_\varepsilon,\end{aligned} \tag{5.32}$$

краевым условиям

$$z_\xi(0,y) = 0, \quad \xi \le y \le y_0, \tag{5.33}$$

$$\left[\ln\left(\frac{a+y}{y}\right) + \frac{y}{a+y}\right] z_\xi\left(\frac{a}{y}, y\right) + \frac{ay}{(a+y)^2} z\left(\frac{a}{y}, y\right) = 0, \quad \varepsilon \le y \le y_0, \tag{5.34}$$

и начальному условию

$$z(\xi,y_0) = y_0^{-1/2}\left[\ln(1+\xi) + \frac{1}{1+\xi}\right]^{-1} u_0(y_0\xi), \quad 0 \le \xi \le \frac{a}{y_0}. \tag{5.35}$$

В силу (5.28) уравнение (5.32) является параболическим в области Σ_ε при любом $\varepsilon > 0$ с учетом того, что задача (5.33)–(5.35) для него решается в направлении убывания y. Коэффициент при z в этом уравнении имеет нужный знак, позволяющий применить принцип максимума [9, 10]; более того, этот коэффициент не меньше 2 при $(\xi,y) \in \Sigma_\varepsilon$ независимо от ε. Поэтому функция $|z|$ не может превосходить $C_{45}/2$, где C_{45} — константа из неравенства (5.29), во внутренних точках области Σ_ε или на части ее границы $0 < \xi < a/\varepsilon$, $y = \varepsilon$. Вследствие теоремы 14 из [10, гл. II] функция z не может достигать положительного максимума или отрицательного минимума на боковых границах области Σ_ε, так как на левой границе она удовлетворяет однородному условию Неймана (5.33), а на правой границе — однородному условию третьего рода с положительным коэффициентом перед z (5.34). Отсюда вытекает, что

$$|z(\xi, y)| \leq \max\left(\frac{C_{45}}{2}, C_{47}C_{48}\right), \quad (\xi, y) \in \overline{\Sigma}_\varepsilon, \tag{5.36}$$

где $C_{47} = \max\limits_{[0,a]} |u_0(x)|$, а $C_{48}(a, y_0) > 0$ — максимальное значение коэффициента при u_0 в равенстве (5.35) на интервале $[0, a/y_0]$.

Возвращаясь по формуле (5.31) к функции $u(x, y)$ и используя неравенство (5.36), мы получаем оценку (5.30) в области $\overline{\Pi}_\varepsilon$. Поскольку постоянные, фигурирующие в правой части (5.36), не зависят от ε (напомним, что неравенство (5.29) предполагается выполненным во всей области $\overline{\Pi}_0$), требуемая оценка (5.30) справедлива и для $(x, y) \in \overline{\Pi}_0$. Лемма доказана.

Предложение 2. *Предположим, что $\alpha < \alpha^*$ и $y_0 > 0$ достаточно мало. Тогда найдется такое $\delta_0 > 0$, что при $\delta \in (0, \delta_0]$ и $N = 1, 2, \ldots$ выполнены неравенства*

$$|U_N| \leq C_{49}\delta^{N+1}\sqrt{y}\left[\ln\left(\frac{y+x}{y}\right) + \frac{y}{y+x}\right], \quad 0 \leq x \leq a, \ 0 \leq y \leq y_0, \tag{5.37}$$

$$|\Psi_N| \leq C_{50}\delta^{N+1}\sqrt{y}, \quad 0 \leq y \leq y_0, \tag{5.38}$$

где $U_N = W - \widetilde{W}_N$, $\Psi_N = \Phi - \Phi_N$, (W, Φ) — точное, а $(\widetilde{W}_N, \Phi_N)$ — приближенное решения задачи (2.15)–(2.19).

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $N \geq 2$. Предположим, что функция $\Delta_N(y)$, входящая в уравнение (5.22), непрерывна на интервале $[\varepsilon, y_0]$, и оценим свободный член в этом уравнении с помощью неравенств (5.15), (5.24):

$$\max_{\overline{\Pi}_\varepsilon} |c_N\Delta_N - Z_N| \leq C_{44}\delta\sqrt{y}\max_{\bar{I}_\varepsilon} |\Delta_N| + C_{42}\delta^{N+1}\sqrt{y}. \tag{5.39}$$

Нашей ближайшей целью является получение равномерной по ε оценки $\max |U_N|$ в области $\overline{\Pi}_\varepsilon$ в терминах входных данных задачи (5.22), (5.11), (5.12) и величины $\max\limits_{\bar{I}_\varepsilon} |\Delta_N|$. В силу оценки (5.39) и неравенства (5.8) мы можем воспользоваться утверждением леммы и заключить, что

$$|U_N| \leq C_{51}\delta \max_{[\varepsilon, y_0]} |\Delta_N| + C_{52}\delta^{N+1}, \quad (x, y) \in \overline{\Pi}_\varepsilon. \tag{5.40}$$

(На данном этапе нам достаточна лишь ограниченность правой части неравенства (5.30) в области $\overline{\Pi}_0$.) Вследствие неравенства (5.8) утверждение леммы применимо и к решению задачи (2.15)–(2.17), что приводит к неравенству

$$|W| \leq C_{53}\delta, \quad (x, y) \in \overline{\Pi}_0. \tag{5.41}$$

Аналогичное неравенство для функции W_N очевидно:

$$|W_N| \leq C_{54}\delta, \quad (x, y) \in \overline{\Pi}_0. \tag{5.42}$$

Это позволяет оценить интегралы, входящие в соотношения (5.19), (5.20):

$$\int_0^a W^2(x, y)\,dx \leq C_{55}\delta^2, \quad 0 \leq y \leq y_0, \tag{5.43}$$

$$\left|\int\limits_0^a (W+W_N)U_N\,dx\right| \le C_{56}\delta^2 \max_{[\varepsilon,y_0]}|\Delta_N| + C_{57}\delta^{N+2}, \quad \varepsilon \le y \le y_0, \tag{5.44}$$

причем постоянные C_{56}, C_{57} не зависят от ε.

Теперь мы воспользуемся представлением решения задачи Коши (5.18), (5.21) в виде

$$\Delta_N(y) = \Delta^0 \exp\left[\int\limits_y^{y_0} q(\eta)\,d\eta\right] - \int\limits_y^{y_0} \exp\left[\int\limits_y^{\eta} q(\zeta)\,d\zeta\right]\omega_N(\eta)\,d\eta. \tag{5.45}$$

Исходя из равенства (5.19) и учитывая (5.41), получаем оценку

$$y^{3/2}\ln(1/y)q(y) \le -C_{58}/\delta, \quad 0 \le y \le y_0. \tag{5.46}$$

Для оценки величины $|\omega_N(y)|$ воспользуемся неравенствами (5.16), (5.44), что дает

$$|\omega_N| \le \frac{4C_{43}}{\sqrt{y}}\delta^N + \frac{C_{59}}{y\ln(1/y)}(\delta \max_{[\varepsilon,y_0]}|\Delta_N| + C_{60}\delta^{N+1}), \quad \varepsilon \le y \le y_0, \tag{5.47}$$

с не зависящими от ε величинами C_{59}, C_{60}. Пользуясь неравенствами (5.46), (5.47) и учитывая, что $\Delta^0 = O(\delta^{N+1})$ при $\delta \to 0$ на основании (5.14), (5.21), выводим из представления (5.45) следующую оценку:

$$|\Delta_N(y)| \le C_{61}\delta \max_{[\varepsilon,y_0]}|\Delta_N| + C_{62}\delta^{N+1}, \quad \varepsilon \le y \le y_0,$$

где C_{61}, C_{62} не зависят от ε. Отсюда вытекает неравенство

$$|\Delta_N(y)| \le C_{63}\delta^{N+1}, \quad \varepsilon \le y \le y_0, \tag{5.48}$$

если $0 < \delta \le \delta_0 < C_{61}^{-1}$ (далее это ограничение на величину δ_0 предполагается выполненным). Поскольку величина C_{63} не зависит от ε, неравенство (5.48) верно и в пределе $\varepsilon = 0$.

Из оценки (5.48) и определения $\Psi_N = -\sqrt{y}\Delta_N/4$ немедленно вытекает неравенство (5.38) для $N = 2, 3, \ldots$. Используя оценку (5.48) с $\varepsilon = 0$ и неравенство (5.39), в котором C_{44} и C_{42} не зависят от ε, получаем оценку свободного члена в уравнении (5.22) вида $|c_N\Delta_N - Z_N| \le C_{64}\sqrt{y}$, $(x,y) \in \overline{\Pi}_0$.

Это позволяет применить утверждение леммы к решению задачи (5.22), (5.11), (5.12). Учитывая, что $|U_N(x,y_0)| = O(\delta^{N+1})$ при $\delta \to 0$ ввиду (5.12), приходим ко второму из требуемых неравенств (5.37), если $N \ge 2$.

Осталось получить оценки (5.37), (5.38) при $N = 1$. Исходя из представления $\Psi_1 = \delta^2\Phi^{(2)} - \Psi_2$, учитывая третье из равенств (5.22) и пользуясь неравенством треугольника и неравенством (5.38) при $N = 2$, заключаем, что $|\Psi_1| \le \mathrm{const}\,\delta^2\sqrt{y}$, $0 \le y \le y_0$. Аналогичными рассуждениями доказывается справедливость оценки (5.37) в случае $N = 1$; здесь учитывается, что $|W^{(2)}| \le \mathrm{const}\,\sqrt{y}[\ln(1+x/y) + y(y+x)^{-1}]$ при $(x,y) \in \overline{\Pi}_0$. Этим завершается доказательство предложения 2.

Предложение 2 означает, что разности U_N, Ψ_N компонент точного и приближенного решений задачи (2.15)–(2.19) обладают такой же гладкостью по переменным x и y, как и главные члены асимптотических разложений (2.20). Из (2.7) следует, что $W^{(1)}(x,y) \in C^{\beta/2}(\overline{\Pi}_0)$, где β — любое число из интервала $(0,1)$, однако при $\beta = 1$ указанное включение теряет силу. Согласно (2.22)

$\Phi^{(0)} \in C^{1/2}(\bar{I}_0)$ и показатель Гсльдера здесь не может быть заменен большей величиной. Эти соображения показывают, что мы не вправе ожидать малости более сильных норм функций U_N, Ψ_N при $\delta \to 0$, рассматриваемых во всем прямоугольнике $\overline{\Pi}_0$ или на всем отрезке $\bar{I}_0$ соответственно. Однако соответствующие оценки могут быть получены, если отступить от линии вырождения уравнений (2.15), (2.18) $y = 0$ на расстояние порядка δ^n, $n > 0$. Покажем, что для любых $\delta \in (0, \delta_0]$ и $N = 1, 2 \ldots$ справедливы неравенства

$$\left| \frac{d\Psi_N}{dy} \right| \le C_{65}\delta^N, \quad \gamma\delta^2 \le y \le y_0, \tag{5.49}$$

$$\int\limits_0^a U_{N,x}^2(x, y)\, dx \le C_{66}\delta^{2(N+1)}, \quad \gamma\delta^2 \le y \le y_0, \tag{5.50}$$

где $\gamma > 0$ — постоянная, не зависящая от δ.

Для доказательства неравенства (5.49) мы исходим из представления

$$\frac{d\Psi_N}{dy} = -\frac{1}{4}\sqrt{y}\,\frac{d\Delta_N}{dy} + \frac{\Delta_N}{8\sqrt{y}}, \tag{5.51}$$

вытекающего из (5.17) и определения функций $\Psi_N = \Phi - \Phi_N$, $\Delta_N = \Gamma - \Gamma_N$. Вследствие (5.38) второй член в правой части (5.51) уже имеет нужный порядок при $y \in [\gamma\delta^2, y_0]$. Для оценки первого члена воспользуемся неравенством

$$\left| \frac{d\Delta_{N+k}}{dy} \right| \le \frac{C_{67}\Delta_{N+k}}{\delta y^{3/2}} + \frac{C_{67}\delta^{N+k}}{y}, \quad \gamma\delta^2 \le y \le y_0, \tag{5.52}$$

в котором N и k — произвольные натуральные числа. Это неравенство вытекает из соотношений (5.18)–(5.20) и оценок (5.47), (5.48). Выберем $k = 4$ и рассмотрим очевидное представление

$$\frac{d\Psi_N}{dy} = \frac{d\Psi_{N+4}}{dy} + \sum_{i=N+1}^{N+4} \delta^i \frac{d\Phi^{(i)}}{dy}.$$

Пользуясь неравенством треугольника, соотношением (5.51), где N заменено на $N + 4$, оценкой (5.52) и учитывая, что функции $d\Phi^{(i)}/dy$ ограничены на интервале $[\gamma\delta^2, y_0]$ при любом $i = 2, 3 \ldots$, приходим к первой из требуемых оценок (5.49).

Чтобы получить неравенство (5.50), выберем натуральное число $M > N$ и рассмотрим начально-краевую задачу (5.22), (5.11), (5.12) для функции $U_M(x, y)$ (всюду в указанных соотношениях число N следует заменить на M). Вследствие оценок (5.15), (5.24) и (5.48) свободный член уравнения (5.22) для U_N удовлетворяет неравенству

$$|c_M\Delta_M - Z_M| \le C_{69}\delta^{M+1}, \quad 0 \le x \le a,\ \gamma\delta^2 \le y \le y_0. \tag{5.53}$$

Согласно (5.12) и утверждению предложения 1 в «начальный момент» $y = y_0$ имеет место оценка

$$|U_{M,x}(x, y_0)| \le C_{70}\delta^{M+1}, \quad 0 \le x \le a. \tag{5.54}$$

Теперь воспользуемся тождеством

$$\delta\Phi \int_0^a \{[(x+y)U_M]_y\}^2\,dx = -\frac{d}{dy}\int_0^a (x+y)^3 U_{M,x}^2\,dx$$
$$+ \int_0^a (x+y)^2 U_{M,x}^2\,dx + \int_0^a (c_M\Delta_M - Z_M)[(x+y)U_M]_y\,dx,$$

которому удовлетворяет решение U_M уравнения (5.22) с краевыми условиями (5.11). Для оценки последнего члена в этом тождестве применим неравенство Коши — Буняковского и неравенство (5.53), проинтегрируем полученное неравенство от текущего значения y до y_0, а затем воспользуемся неравенством (5.54) и отбросим заведомо знакоопределенные слагаемые. В итоге придем к неравенству

$$\int_0^a (x+y)^3 U_{M,x}^2(x,y)\,dx \le C_{71}\delta^{2M+1} \tag{5.55}$$

при $\delta \in (0,\delta_0]$ равномерно по y, $\gamma\delta^2 \le y \le y_0$. Далее используем представление

$$U_N = U_M + \sum_{k=N+1}^{M} \delta^k W^{(k)}.$$

Применяя неравенство треугольника для оценки нормы $\|U_{N,x}(\cdot,y)\|_{L^2(0,a)}$, учитывая гладкость не зависящих от δ функций $W^{(k)}(x,y)$ в области $\overline{\Pi}_{\gamma\delta^2}$, пользуясь неравенством (5.55) и выбирая $M = N+4$, мы приходим к оценке (5.50).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьева О. М.* Предельные режимы движения вращающегося вязкого кольца //Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1980. Вып. 44. С. 15–34.
2. *Бытев В. О.* Неустановившееся движение кольца вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами // Прикл. механика и техн. физика. 1970. № 3. С. 82–88.
3. *Пухначсв В. В.* Неклассические задачи теории пограничного слоя. Новосибирск: НГУ, 1979.
4. *Батищев В. А., Срубщик Л. С.* Об асимптотике свободной поверхности жидкости при исчезающей вязкости // Докл. АН СССР. 1975. Т. 222, № 4. С. 782–785.
5. *Пухначсв В. В.* Квазистационарное приближение в задаче о движении изолированного объема вязкой несжимаемой капиллярной жидкости // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, № 6. С. 1002–1013.
6. *Solonnikov V. A.* On the justification of the quasistationary approximation in the problem of motion of a viscous capillary drop // Interfaces Free Bound. 1999. V. 1, N 2. P. 125–174.
7. *Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначсв В. В., Родионов А. А.* Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
9. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.

Статья поступила 14 мая 2001 г.

Пухначев Владислав Васильевич
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Акад. М. А. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
pukh@hydro.nsc.ru