Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2002. Том 43, № 3

УДК 519.14

О СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ С $k = 2\mu$ И ИХ РАСШИРЕНИЯХ

А. А. Махнев

Аннотация: Получено удобное выражение параметров сильно регулярного графа с $k = 2\mu$ через неглавные собственные значения x, $-y$. Оказалось, в частности, что такие графы являются псевдогеометрическими для $pG_x(2x, y-1)$. Доказано, что сильно регулярный граф с параметрами $(35, 16, 6, 8)$ является частным графа Джонсона $\overline{J}(8, 4)$. Далее, найдены параметры сильно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_x(2x, t)$, $x \leq 3$. Как следствие установлено, что связный граф, в котором окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_3(6, 2)$, совпадает с графом Тэйлора или графом знакопеременных форм $\mathrm{Alt}(4, 2)$, имеющим параметры $(64, 35, 18, 20)$. Библиогр. 8.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро в Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем (μ-) λ-*подграфом.*

Треугольным графом $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, при этом $|X| = m$ и пары $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется $m \times n$ *решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины (x_1, y_1), (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Дистанционно регулярный граф Γ диаметра d называется *антиподальным*, если отношение «совпадать или находиться на расстоянии d» является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. Если r — число вершин в каждом классе эквивалентности, то Γ называется r-*антиподальным*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00462).

графом. *Графом Тэйлора* называется двойной антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 3. Пусть V является n-мерным линейным пространством над полем порядка q. Ранг знакопеременной формы Q на V определяется как $\operatorname{rank} Q = \dim(V/V^{\perp})$, где $V^{\perp} = \{u \in V \mid Q(u,w) = 0$ для всех $w \in V\}$. Заметим, что $\operatorname{rank} Q$ всегда четен. *Графом знакопеременных форм* $\mathrm{Alt}(n,q)$ называется граф, вершинами которого являются знакопеременные формы на V, причем вершины Q, R смежны тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}(Q-R) = 2$.

Геометрия G *ранга* 2 — это система инцидентности с множеством точек P и множеством блоков $\mathscr{B}$ (без кратных блоков). При этом каждый блок можно отождествить с множеством инцидентных ему точек и инцидентность становится обычным включением. Две различные точки из P называются *коллинеарными*, если они лежат в общем блоке. *Точечный граф* геометрии G — это граф на множестве точек P, в котором две точки смежны, если они коллинеарны. Аналогично определяется блок-граф. Геометрию назовем *связной*, если связен ее точечный граф.

Для $a \in P$ *вычетом* G_a называется геометрия с множеством точек P_a, коллинеарных с a, и множеством блоков $\mathscr{B}_a = \{B - \{a\} \mid a \in B \in \mathscr{B}\}$.

Пусть $a \in P$, $B \in \mathscr{B}$ и $a \notin B$ (пара (a,B) называется *антифлагом*). Число точек из B, коллинеарных с a, обозначим через $f(a,B)$. Геометрия G называется *φ-однородной*, если $f(a,B)$ равно 0 или φ для любого антифлага (a,B); G называется *сильно φ-однородной*, если $f(a,B) = \varphi$ для любого антифлага (a,B). Если любые два блока из $\mathscr{B}$ пересекаются не более чем по одной точке, то множество блоков называется *множеством прямых*.

Геометрия G называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой и геометрия является сильно α-однородной (обозначение $pG_\alpha(s,t)$). Если $\alpha = 1$, то геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s,t)$. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s,t)$) сильно регулярен с $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s-1+t(\alpha-1)$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами (для некоторых натуральных значений α, s, t) называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

Геометрия G называется *расширением α-частичных геометрий*, если она связна, и каждый ее вычет является $pG_\alpha(s,t)$ для подходящих (s,t) (обозначение EpG_α). По связности порядок геометрии (s,t) не зависит от выбора вычета, и такое расширение обозначается через $EpG_\alpha(s,t)$. Геометрия EpG_α называется *треугольной*, если любые три попарно коллинеарные точки лежат в общем блоке (необходимо единственном). Изучение треугольных расширений геометрий G из класса pG_α опирается на изучение связных локально $\Gamma(G_a)$ графов.

В [1] получены некоторые результаты о графах, в которых окрестности вершин сильно регулярны с $k = 2\mu$. В данной работе установлено удобное выражение параметров сильно регулярного графа с $k = 2\mu$ через неглавные собственные значения x, $-y$. Оказалось, в частности, что такие графы являются псевдогеометрическими для $pG_x(2x, y-1)$. Далее, найдены параметры сильно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_x(2x,t)$, $x \le 3$.

В работе Ф. Бюкенхаута и К. Юбо [2] рассматривается задача классификации локально полярных пространств, в частности, локально $GQ(s,t)$ графов. Там же получено решение этой задачи в случае $s = 2$.

Пример 1. Каждый локально $GQ(2,t)$ граф может быть получен с помощью следующей конструкции. Пусть $\mathscr{P}$ — полярное пространство ранга 3 и порядка 2, $\mathscr{H}$ — геометрическая гиперплоскость из $\mathscr{P}$ (см. [3, пример 9.6]). Удалив из $\mathscr{P}$ точки и прямые $\mathscr{H}$, получим геометрию $\mathscr{P}_{\mathscr{H}}$, являющуюся треугольным расширением $GQ(2,t)$. Пусть Γ — точечный граф геометрии $\mathscr{P}_{\mathscr{H}}$. В следующих случаях возникают сильно регулярные графы:

(1) $\mathscr{P} = Q_5^+(2)$ и $\mathscr{H} = x^\perp$ для некоторой точки $x \in \mathscr{P}$, Γ имеет параметры (16,9.4,6) ($t = 1$);

(2) $\mathscr{P} = Q_6(2)$ и $\mathscr{H} = Q_5^-(2)$, Γ имеет параметры (36,15.6,6) ($t = 2$);

(3) $\mathscr{P} = Q_6(2)$ и $\mathscr{H} = Q_5^+(2)$, Γ имеет параметры (28,15.6,10) ($t = 2$);

(4) $\mathscr{P} = Q_7^-(2)$ и $\mathscr{H} = x^\perp$ для некоторой точки $x \in \mathscr{P}$, Γ имеет параметры (64,27.10,12) ($t = 4$).

Предложение. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v,k,λ,μ), где $k = 2\mu$, и целочисленными неглавными собственными значениями x, $-y$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *$v = (2x+1)(2y-1)$, $k = 2xy$, $\lambda = xy + x - y$ и $\mu = xy$ (в частности, Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_x(2x, y-1)$);*

(2) *$x + y$ делит $(2x+1)2y(y-1)$, и $y \le x^2(2x+3)$;*

(3) *граф $\overline{\Gamma}$ также имеет $\bar{k} = 2\bar{\mu}$, далее, $\bar{x} = y - 1$, $\bar{y} = x + 1$, и граф $\overline{\Gamma}$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{y-1}(2y-2, x)$.*

Следующий результат устанавливает единственность псевдогеометрического графа для $pG_2(4,3)$ и применяется при изучении графов, окрестности которых являются псевдогеометрическими графами для $pG_3(6,2)$.

Теорема 1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(35,16,6,8)$. Тогда Γ является частным графа Джонсона $\overline{J}(8,4)$.*

Ранее [1] были найдены параметры графов, окрестности вершин которых являются псевдогеометрическими графами для $pG_x(2x,t)$ с $x = 2$. Теорема 2 расширяет этот результат для $x \le 3$.

Теорема 2. *Пусть Γ — сильно регулярный граф, в котором окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_x(2x, y-1)$, $x \le 3$. Тогда*

(1) *$x = 1$, и Γ — один из графов в примере 1*

или

(2) *$(x,y) = (2,10)$, и Γ имеет параметры $(210,95,40,45)$*

или

(3) *$x = 3$, и граф Γ имеет один из следующих наборов параметров:*

(a) $(64,35,18,20)$ *или* $(76,35,18,14)$ *(в обоих случаях $y = 3$);*

(b) $(120,63,30,36)$ *или* $(136,63,30,28)$ *(в обоих случаях $y = 5$);*

(c) $(256,119,54,56)$ $(y = 9)$;

(d) $(288,147,66,84)$ $(y = 11)$;

(e) $(616,287,126,140)$ $(y = 21)$;

(f) $(1576,735,318,364)$ $(y = 53)$.

Под диаметром системы корней будем понимать прямую, соединяющую пару антиподальных корней. Теперь 240 корней системы корней E_8 дают 120 диаметров, любые два из которых образуют угол $\pi/3$ или $\pi/2$. Группа Вейля $W(E_8)$ действует как группа ранга 3 на графе ортогональности диаметров. Окрестности вершин этого графа являются псевдогеометрическими графами для $pG_3(6,4)$. Случай $pG_3(6,2)$ рассмотрен в следствии.

Следствие. *Пусть Γ — связный граф, в котором окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_3(6,2)$ (сильно регулярными графами с параметрами $(35,18,9,9)$). Тогда Γ — граф Тэйлора или граф знакопеременных форм $\mathrm{Alt}(4,2)$, имеющий параметры $(64,35,18,20)$.*

Докажем предложение. Пусть Γ — сильно регулярный граф с $k=2\mu$, имеющий целочисленные неглавные собственные значения x, $-y$. Так как в любом сильно регулярном графе верно равенство $\mu=k-xy$, то в нашем случае $\mu=xy$, $k=2xy$. Далее, $x-y=\lambda-\mu$ и $\lambda=xy+x-y$. Наконец, значение v находится из прямоугольного соотношения $k(k-\lambda-1)=(v-k-1)\mu$. Напомним, что псевдогеометрический граф для $pG_x(2x,t)$ имеет параметры $v=(2x+1)(2t+1)$, $k=2x(t+1)$, $\lambda=(2x-1)+(x-1)t$, $\mu=x(t+1)$. Поэтому Γ — псевдогеометрический граф для $pG_x(2x,y-1)$. Утверждение (1) доказано.

Из условия целочисленности следует, что $x+y$ делит $(2x+1)2y(y-1)$, а граница Крейна дает неравенство $y\le x^2(2x+3)$. Утверждение (2) доказано.

Граф $\overline{\Gamma}$ имеет параметры $\bar{k}=v-k-1=2xy+2y-2x-2$, $\bar{\mu}=v-2k+\lambda=xy+y-x-1$. Далее, $\bar{x}=y-1$, $\bar{y}=x+1$, и по утверждению (1) граф $\overline{\Gamma}$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{y-1}(2y-2,x)$. Предложение доказано.

Из предложения следует, что псевдогеометрический граф для $pG_x(2x,1)$ существует только при x, равном 1, 2 или 4, и является дополнительным для точечного графа $GQ(2,x)$. Далее, если Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_x(2x,2)$, то $\overline{\Gamma}$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(4,x)$.

Приступим к доказательству теоремы 1. Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $pG_2(4,3)$. Тогда он имеет параметры $v=35$, $k=16$, $\lambda=6$, $\mu=8$. Если Γ содержит 5-клику K, то для нее достигается равенство в условии Хоффмана для клик и каждая вершина вне K смежна точно с двумя вершинами из K.

По следствию из [4] любой λ-подграф из Γ состоит либо из двух изолированных треугольников, либо из треугольника и трех изолированных вершин, либо является 6-кокликой.

Лемма 1. *Пусть a, b — смежные вершины из Γ. Тогда $|\Gamma-(a^\perp\cup b^\perp)|=9$ и выполняются утверждения:*

(1) если c — вершина степени α в $[a]\cap[b]$, то $[c]$ содержит по $5-\alpha$ вершин из $[a]-[b]$, $[b]-[a]$ и $4+\alpha$ вершин из $\Gamma-(a^\perp\cup b^\perp)$;

(2) если d — вершина из $\Gamma-(a^\perp\cup b^\perp)$, смежная точно с β вершинами из $[a]\cap[b]$, то $[c]$ содержит по $8-\beta$ вершин из $[a]-[b]$, $[b]-[a]$ и β вершин из $\Gamma-(a^\perp\cup b^\perp)$;

(3) если e — вершина из $[a]-[b]$, смежная точно с γ вершинами из $[a]\cap[b]$, то $[c]$ содержит $6-\gamma$ вершин из $[a]-[b]$, $7-\gamma$ вершин из $[b]-[a]$ и $2+\gamma$ вершин из $\Gamma-(a^\perp\cup b^\perp)$.

Доказательство проводится путем простых вычислений.

Лемма 2. *Пусть a, b — несмежные вершины из Γ. Тогда $|\Gamma-(a^\perp\cup b^\perp)|=9$ и выполняются утверждения:*

(1) если c — вершина степени α в $[a]\cap[b]$, то $[c]$ содержит по $6-\alpha$ вершин из $[a]-[b]$, $[b]-[a]$ и $2+\alpha$ вершин из $\Gamma-(a^\perp\cup b^\perp)$;

(2) если d — вершина из $\Gamma-(a^\perp\cup b^\perp)$, смежная точно с β вершинами из $[a]\cap[b]$, то $[c]$ содержит по $8-\beta$ вершин из $[a]-[b]$, $[b]-[a]$ и β вершин из $\Gamma-(a^\perp\cup b^\perp)$;

(3) *если e — вершина из $[a]-[b]$, смежная точно с γ вершинами из $[a]\cap[b]$, то $[c]$ содержит $6-\gamma$ вершин из $[a]-[b]$, $7-\gamma$ вершин из $[b]-[a]$ и $2+\gamma$ вершин из $\Gamma-(a^\perp\cup b^\perp)$.*

Доказательство проводится путем простых вычислений.

Лемма 3. *Пусть a, b — не смежные вершины из Γ и степень вершины c в графе $[a]\cap[b]$ равна α. Тогда*

(1) *α меньше 5;*

(2) *если $\alpha=4$, то $[a]\cap[c]$ и $[b]\cap[c]$ содержат треугольники, пересекающие $[a]\cap[b]\cap[c]$ по различным вершинам;*

(3) *если $\alpha=3$, то $[a]\cap[c]$ и $[b]\cap[c]$ содержат треугольники, пересекающие $[a]\cap[b]\cap[c]$ по различным вершинам, и $\Lambda\cap[c]$ состоит из треугольника и двух вершин.*

Доказательство. Положим $\Lambda=\Gamma-(a^\perp\cup b^\perp)$. Пусть степень вершины c в графе $[a]\cap[b]$ равна α, $\{d_1,\dots,d_\alpha\}=[a]\cap[b]\cap[c]$, β_j — степень вершины d_j в графе $[a]\cap[b]$. По лемме 2 $[c]$ содержит по $6-\alpha$ вершин из $[a]-[b]$, $[b]-[a]$ и $2+\alpha$ вершин из Λ.

Если $\alpha=6$, то $[d_i]\cap[c]$ содержит a, b и 4 вершины из Λ. Далее, $\beta_j\le 2$ и $|[d_j]\cap\Lambda|\le 4$. Но $[c]\cap[d_j]$ содержит 4 вершины из Λ, поэтому $\beta_j=2$ для всех j и вершина $e\in([a]\cap[b])-c^\perp$ смежна с каждой вершиной d_j. Теперь $[c]\cap[e]$ содержит 8 вершин из $a^\perp\cup b^\perp$ и не менее 7 вершин из Λ. Противоречие.

Пусть $\alpha=5$, $\{e,f\}=([a]\cap[b])-c^\perp$. Если $[d_i]\cap[c]$ пересекает $[a]-[b]$, то $[d_i]\cap[c]$ содержит ребро из $[a]-[b]$; противоречие. Значит, $[d_i]\cap[c]$ содержит a, b и 4 вершины из Λ. Далее, $\beta_j\le 3$ и $|[d_j]\cap\Lambda|\le 5$. С другой стороны, $[d_j]\cap\Lambda$ содержит 4 вершины из $[c]$, поэтому $\beta_j\ge 2$ и можно считать, что e имеет в графе $[a]\cap[b]$ степень, не меньшую 3. В частности, $|[e]\cap\Lambda|\ge 5$, поэтому $[c]\cap[e]$ содержит a, b, три вершины из $\{d_1,\dots,d_5\}$ и три из $\Lambda\cap[c]$. Отсюда e имеет степень 3 в графе $[a]\cap[b]$ и $|[e]\cap\Lambda|=5$. Пусть для определенности e смежна с d_1, d_2, d_3.

Если каждая из вершин d_1, d_2, d_3 имеет степень 2 в графе $[a]\cap[b]$, то $[d_1]\cap[e]$ содержит не более трех вершин из Λ. Поэтому $[d_1]\cap[e]$ содержит ребро из $[a]-[b]$ или из $[b]-[a]$. Можно считать, что $[d_1]\cap[e]$ содержит ребро из $[a]-[b]$, $[d_2]\cap[e]$ — ребро из $[b]-[a]$. Но тогда $[d_3]\cap[e]$ содержит 4 вершины из Λ; противоречие.

Пусть вершина d_1 имеет степень 3 в графе $[a]\cap[b]$. Тогда степень любой вершины d_i для $i>1$ в графе $[a]\cap[b]$ равна 2. Можно считать, что $[d_2]\cap[e]$ содержит ребро из $[a]-[b]$, $[d_3]\cap[e]$ — ребро из $[b]-[a]$ и $[d_1]\cap[e]$ — 4 вершины из Λ. Симметрично, $[d_4]\cap[f]$ содержит ребро из $[a]-[b]$, $[d_5]\cap[f]$ — ребро из $[b]-[a]$ и $[d_1]\cap[f]$ — 4 вершины из Λ.

Отсюда степень d_1 в графе $[e]\cap[f]$ равна 5. Далее, $[e]\cap[f]$ содержит a, b, d_1 и по две вершины из $\Lambda-[c]$ и из $\Lambda\cap[c]$. Противоречие с тем, что степень одной из вершин a, b в графе $[e]\cap[f]$ не больше 1. Утверждение (1) доказано.

Пусть $\alpha=4$. Так как $([a]\cap[c])\cup([b]\cap[c])$ содержит не более двух треугольников, то можно считать, что $\Lambda\cap[c]$ содержит по 4 вершины из $[d_3]$ и $[d_4]$. Тогда $[d_3]\cap[d_4]$ содержит a, b и 2 вершины из $\Lambda\cap[c]$. Поэтому вершина c имеет степень 4 в графе $[d_3]\cap[d_4]$ и $[d_3]\cup[d_4]$ содержит $[c]\cap\Lambda$.

Если $[a]\cap[c]$ не содержит треугольников, а d_1 принадлежит треугольнику из $[b]\cap[c]$, то $[d_2]$ содержит $\Lambda-[d_3]$ и $\Lambda-[d_4]$. В этом случае вершина c имеет степень 4 в графе $[d_i]\cap[d_j]$ для любых различных $i,j\in\{2,3,4\}$. Таким образом, $[a]\cap[c]$ или $[b]\cap[c]$ содержит треугольник.

Пусть d_2, d_3, d_4 не лежат в треугольниках из $([a]\cap[c])\cup([b]\cap[c])$. Тогда $[c]$ содержит 2-коклики $\Lambda\cap[d_2]\cap[d_3]$ из $[d_3]-[d_4]$ и $\Lambda\cap[d_2]\cap[d_4]$ из $[d_4]-[d_3]$. Противоречие с тем, что тогда $[d_3]\cap[c]$ и $[d_4]\cap[c]$ не содержит треугольников. Утверждение (2) доказано.

Если $\alpha=3$, то $[c]$ содержит по 3 вершины из $[a]-[b]$, $[b]-[a]$. Далее, $|\Lambda\cap[c]|=5$. Если вершина d_3 не принадлежит треугольникам из $[a]\cap[c]$ и из $[b]\cap[c]$, то она смежна с 4 вершинами из $\Lambda\cap[c]$. Если вершина d_2 также не принадлежит треугольникам из $[a]\cap[c]$ и из $[b]\cap[c]$, то степень вершины c в графе $[d_2]\cap[d_3]$ не меньше 5. Противоречие с утверждением (1). Значит, $[a]\cap[c]$ и $[b]\cap[c]$ содержат треугольники, пересекающие $[a]\cap[b]\cap[c]$ по различным вершинам. Пусть для определенности $[a]\cap[c]$ и $[b]\cap[c]$ содержат треугольники, пересекающие $[a]\cap[b]\cap[c]$ по вершинам d_1 и d_2 соответственно. Тогда $\Lambda\cap[c]\cap[d_3]$ состоит из треугольника и изолированной вершины.

Лемма 4. *Если вершины a, b графа Γ смежны, то подграф $[a]\cap[b]$ не является кокликой.*

Доказательство. Пусть $[a]\cap[b]$ является кокликой для смежных вершин a, b графа Γ. По лемме 1 число ребер между $[a]\cap[b]$ и $[a]-[b]$ равно 30. Так как $|[a]-[b]|=9$, то некоторая вершина c из $[a]-[b]$ смежна с 4 вершинами из $[a]\cap[b]$. В этом случае степень вершины a в графе $[c]\cap[b]$ равна 4 и по лемме 3 $[a]\cap[b]$ содержит треугольник. Лемма доказана.

Ребро $\{a,b\}$ графа Γ назовем *хорошим* (*плохим*), если $[a]\cap[b]$ содержит два треугольника (треугольник и три изолированных вершины).

Лемма 5. *Пусть $\{a,b\}$ — хорошее ребро, L — треугольник из $[a]\cap[b]$, $\Omega=\Gamma-(a^\perp\cap b^\perp)$. Тогда Ω расщепляется тремя подграфами вида $[x]\cap[y]\cap\Omega$, где x, y — различные вершины из L. Далее, каждое такое расщепление состоит из трех клик или из трех коклик.*

Доказательство. Так как каждая вершина из Ω смежна с ребром в каждом из треугольников в $[a]\cap[b]$, то Ω — регулярный граф степени 4. Пусть $L=\{c,d,e\}$, $\{f,g,h\}$ — различные треугольники из $[a]\cap[b]$.

Подграф Ω расщепляется тремя 3-вершинными подграфами вида $\Omega\cap[x]\cap[y]$, где x,y — различные вершины из $\{c,d,e\}$. Ясно, что каждый из этих подграфов является кликой или кокликой.

Если $\Omega\cap[c]\cap[d]$ и $\Omega\cap[c]\cap[e]$ — клики, то и третий подграф $\Omega\cap[d]\cap[e]$ будет кликой. В противном случае степень вершины из $\Omega\cap[d]\cap[e]$ в графе Ω равна 2.

Если $\{x,y,z\}=\Omega\cap[c]\cap[d]$ и $\{x',y',z'\}=\Omega\cap[c]\cap[e]$ представляют собой коклики, а третий подграф $\Omega\cap[d]\cap[e]$ — клику, то $\Omega\cap[c]$ является полным двудольным графом $K_{3,3}$ и Ω расщепляется тремя 3-кликами вида $\Omega\cap[u]\cap[w]$, где u,w — различные вершины из $\{f,g,h\}$.

Пусть $\Delta=\Omega\cap[c]$, K_i — множество вершин из $\Gamma-\Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, $x_i=|K_i|$. Подсчитав число вершин в $\Gamma-\Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma-\Delta$ и число 2-путей с концами в Δ и средней вершиной в $\Gamma-\Delta$, получим уравнения $\sum x_i=29$, $\sum ix_i=78$, $\sum\binom{i}{2}x_i=84$. Вычитая второе уравнение из суммы первого и третьего, имеем $x_0+\sum\binom{i-1}{2}x_i=35$. При этом $c\in K_6$, $a,b\in K_0$, $f,g,h\in K_4$, K_3 содержит d, e и три вершины из $\Omega-[c]$.

Вершина c смежна с четырьмя вершинами d, x', y', z' из $[x]\cap[y]$, причем $[c]\cap[d]$ содержит треугольник $\{a,b,e\}$ и изолированную вершину z из $\Gamma-(x^\perp\cup y^\perp)$. Без ограничения общности будем считать, что $[c]\cap[z']$ содержит треугольник и изолированную вершину e из $\Gamma-(x^\perp\cup y^\perp)$. Таким образом, $[c]$ содержит 4-клику $\{a,b,d,e\}$, подграф Δ и 3 ребра, смежных с r, r' для $r\in\{x,y,z\}$ соответственно и лежащих в K_3.

Итак, $x_0=2$, $x_3=11$, $x_4=3$ и $x_6=1$. Поэтому $x_1=2$ и $x_2=10$. Пусть $s\in K_1$ и для определенности s смежна с z. Тогда число 2-путей с началом в s, концом в Δ и средней вершиной в $\Gamma-\Delta$ равно 43. Без ограничения общности s смежна с a, d. Тогда s смежна с единственной вершиной из K_4. Даже если s смежна со всеми одиннадцатью вершинами из K_3 и с двумя из K_2, то вышеуказанное число 2-путей равно 41; противоречие.

Лемма 6. *Пусть $M=\{a,b,c\}$ — максимальная клика, K_i — множество вершин из $\Gamma-M$, смежных точно с i вершинами из M, $x_i=|K_i|$. Тогда $x_0=5$ и K_0 содержит по крайней мере две вершины степени, не большей 1, в K_0.*

Доказательство. Подсчитав число вершин в $\Gamma-M$, число ребер между M и $\Gamma-M$ и число 2-путей с концами в M и средней вершиной в $\Gamma-M$, получим уравнения $\sum x_i=32$, $\sum ix_i=42$, $\sum\binom{i}{2}x_i=15$. Отсюда $x_0=5$.

Вершину из K_2 назовем *треугольной*, если она принадлежит треугольнику вида $[u]\cap[w]$ для различных $u,w\in M$ (всего имеется 9 таких вершин). Число флагов, состоящих из двух вершин в K_0 и смежного с ними ребра треугольника вида $[u]\cap[w]$ для различных $u,w\in M$, не меньше 6. Действительно, для данного треугольника из $[u]\cap[w]$ каждая вершина из K_0 смежна с его ребром. Итого получится либо два, либо три флага, содержащих общее ребро из $[u]\cap[w]$.

Таким образом, K_0 содержит по крайней мере две вершины p, q, каждая из которых принадлежит по крайней мере трем флагам. Если такой флаг содержит вершины p, r, то они не смежны. Иначе $[p]\cap[r]$ содержит 3-клику L, пересекающую $[u]\cap[w]$ по ребру, и вершина из $M-\{u,w\}$ смежна не более чем с одной вершиной из $\{p,r\}\cup L$; противоречие.

Значит, степень каждой из вершин p, q в графе K_0 не больше 1.

Лемма 7. *Пусть $\{a,b\}$ — хорошее ребро, L является 5-кликой из $a^\perp\cap b^\perp$. Тогда*

(1) *все ребра L, отличные от $\{a,b\}$, либо одновременно хорошие, либо одновременно плохие;*

(2) *если L содержит два хороших ребра, то все ребра графа Γ хорошие;*

(3) *L содержит два хороших ребра.*

Доказательство. Пусть $\{c,d,e\}=L-\{a,b\}$, $\{f,g,h\}$ — различные треугольники из $[a]\cap[b]$. По лемме 5 все ребра в $\{c,d,e\}$ либо одновременно хорошие, либо одновременно плохие.

Пусть все ребра в $\{c,d,e\}$ хорошие. Допустим, что ребро $\{a,c\}$ плохое, и положим $\Omega=\Gamma-(a^\perp\cap c^\perp)$. Тогда $\Omega\cap[d]\cap[e]$ является 3-кликой, по лемме 5 $\Omega\cap[b]\cap[d]$ и $\Omega\cap[b]\cap[e]$ также 3-клики.

Пусть $\{p,q,r\}$ — изолированные вершины из $[a]\cap[c]$. Тогда $\Omega\cap[p]\cap[q]$ будет 3-кокликой. Если $M=\{a,c,p\}$, K_0 — подграф, индуцированный на множестве вершин из $\Gamma-M$, не смежных с вершинами M, то K_0 содержит вершину и четырехугольник из Ω. Противоречие с леммой 6. Утверждение (1) доказано.

Пусть L содержит два хороших ребра. Из рассуждений, проведенных в предыдущем абзаце, следует, что все ребра графа $[a]\cap[b]$ хорошие. Теперь из связности графа Γ следует, что все ребра графа Γ хорошие. Утверждение (2) доказано.

Покажем, что L содержит два хороших ребра. В противном случае все ребра из $\{c,d,e\}$ и из $\{f,g,h\}$ являются плохими. Далее, любая 5-клика содержит не более одного хорошего ребра. Назовем 5-клику *хорошей*, если она содержит хорошее ребро, плохой в противном случае. Пусть вершина x инцидентна α хорошим и β плохим ребрам. Тогда $\alpha+\beta=16$, $x^\perp$ содержит 2α хороших и $(\beta-6\alpha)/4$ плохих клик. Значит, $x^\perp$ содержит $4-7\alpha/4$ плохих клик, и $\alpha=0$. Противоречие с тем, что Γ содержит хорошее ребро. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Если каждое ребро из Γ плохое, то множество вершин и 5-клик из Γ образует частичную геометрию $pG_2(4,3)$. Противоречие с тем, что частичных геометрий $pG_2(3,4)$ нет. Значит, Γ содержит хорошее ребро $\{a,b\}$. По лемме 7 каждое ребро из Γ хорошее. Теперь в силу леммы 4 степень любой вершины в μ-подграфе равна 2 и по теореме из [5] Γ является частным графа Джонсона $\overline{J}(8,4)$. Теорема 1 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (V,K,Λ,M), в котором окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_x(2x,y-1)$. Тогда $K=(2x+1)(2y-1)$, $\Lambda=2xy$. Так как K нечетно, то Γ не является графом в половинном случае и имеет целочисленные неглавные собственные значения $n-m$, $-m$. Если $x=1$, то по [2] утверждение теоремы выполняется. Поэтому можно считать, что $x>1$.

Лемма 8. *Параметр* $m-1$ *делит* $2(x+1)(y-1)$, $y-1\le m-1\le 2y-2$, $M=2xy+2+(m-1)-(2(x+1)(y-1))/(m-1)$ *и* $n=(m-1)+(2(x+1)(y-1))/(m-1)$. *Далее, наименьшее возможное* M *равно* $(2x+1)(y-1)$ *и отвечает* $m=y$, *а наибольшее возможное значение* M *равно* $(x+1)(2y-1)$ *и отвечает* $m=2y-1$.

Доказательство. По лемме 3.1 из [6] параметр $m-1$ делит $2(x+1)(y-1)$, $M=2xy+2+(m-1)-(2(x+1)(y-1))/(m-1)$ и $n=(m-1)+(2(x+1)(y-1))/(m-1)$. Так как неглавные собственные значения окрестности вершины лежат между неглавными собственными значениями Γ, то $y-1\le m-1\le 2y-2$.

Заметим, что функция $M(z)=z-(2(x+1)(y-1))/z$ монотонно возрастает, поэтому наименьшее возможное значение M равно $(2x+1)(y-1)$ и отвечает $m=y$. Аналогично наибольшее возможное значение M равно $(x+1)(2y-1)$ и отвечает $m=2y-1$.

Лемма 9. *Если* $x=2$, *то либо* $y=2$ *и* Γ *имеет параметры* $(26,15,8,9)$, *либо* $y=10$ *и* Γ *имеет параметры* $(210,95,40,45)$, *либо* $y=28$ *и* $M=135$.

Доказательство. Пусть $x=2$. По лемме 8 $m-1$ делит $6(y-1)$ и $m-1$ равно $y-1$, $2(y-1)$ или $3(y-1)/2$. По условию целочисленности для окрестности вершины $2+y$ делит $10y(y-1)$. По условию целочисленности для Γ число Mn делит $(m-1)K(K+m)$.

Если $m=y$, то $M=5(y-1)$, $n=y+5$ и $y+5$ делит $(2y-1)(11y-5)$. Итак, $y+2$ делит 60, $y+5$ делит 660. Отсюда y равно 1, 10 или 28. Однако в случае $y=1$ граф Γ состоит из изолированных 5-клик.

Если $m=2y-1$, то $M=3(2y-1)$, $n=2y+1$ и $3(2y+1)$ делит $60(y-1)(2y-1)$. Отсюда $y=2$ и Γ имеет параметры $(26,15,8,9)$.

Если $m-1=3(y-1)/2$, то $M=(11y-7)/2$, $n=(3y+5)/2$ и $(11y-7)(3y+5)$ делит $15(y-1)(2y-1)(23y-11)$; противоречие.

Лемма 10. *Если* $x=2$, *то* $y=10$ *и* Γ *имеет параметры* $(210,95,40,45)$.

Доказательство. Пусть $x=2$. Если $y=2$, то ввиду леммы 9 окрестности вершин в Γ изоморфны треугольному графу $T(6)$. Но тогда связные компоненты μ-подграфов из Γ являются октаэдрами и M должно делиться на 6; противоречие.

Если $y = 10$, то окрестности вершин в Γ изоморфны графу Маклафлина. Тогда окрестности вершин в μ-подграфах из Γ изоморфны графу Гевиртца Δ (т. е. сильно регулярному графу с параметрами (56,10,0,2)). В лемме 4.5 из [1] доказано, что каждый локально Δ подграф графа Маклафлина Σ совпадает с $\Sigma_2(b)$ для подходящей вершины $b \in \Sigma$. Поэтому число M должно быть равно 162; противоречие. Лемма доказана.

В леммах 11, 12 предполагается, что $x = 3$. Тогда окрестности вершин в Γ являются псевдогеометрическими графами для $pG_3(6, y-1)$ и $y+3$ делит $14y(y-1)$. Поэтому $y+3$ делит $2^3 \cdot 3 \cdot 7$ и $y = 3, 4, 5, 9, 11, 18, 21, 25, 39, 53$ или 81. В работе [7] отмечено, что окрестности вершин в псевдогеометрическом графе для $pG_3(6, 80)$ являются псевдогеометрическими графами для $pG_2(5, 32)$, и доказано несуществование псевдогеометрического графа для $pG_2(5, 32)$. Тем самым и псевдогеометрический граф для $pG_3(6, 80)$ не существует. Поэтому будем предполагать, что $y \leq 53$. По лемме 8 $m-1$ делит $8(y-1)$, $M = 6y+2+(m-1)-(8y-8)/(m-1)$ и $n = (m-1)+(8y-8)/(m-1)$, $v = 7(2y-1)$, причем Mn делит $(m-1)v(v+m)$.

Лемма 11. *Если $m > y$, то Γ имеет параметры*
(1) $(64, 35, 18, 20)$ $(y = 3)$*;*
(2) $(120, 63, 30, 36)$ $(y = 5)$*;*
(3) $(288, 147, 66, 84)$ $(y = 11)$.

Доказательство. Пусть $m > y$. Тогда либо $m-1 = 2(y-1)$, либо 3 делит $y-1$ и $m-1 = 4(y-1)/3$, либо 5 делит $y-1$ и $m-1 = 8(y-1)/5$ (заметим, что 7 не делит $y-1$).

Пусть 5 делит $y-1$ и $m-1 = 8(y-1)/5$. Тогда y равно 11 или 21. Если $y = 11$, то $m-1 = 16$, $M = 79$, $v = 147$, $v+m = 164$ и M не делит $(m-1)v(v+m)$. Если $y = 21$, то $m-1 = 32$, $M = 155$, $n = 37$, $v = 287$, $v+m = 320$ и n не делит $(m-1)v(v+m)$.

Пусть 3 делит $y-1$. Тогда y равно 4 или 25. Если $y = 4$ и $m-1 = 4$, то $M = 24$, $n = 10$, $v = 49$, $v+m = 54$ и 5 не делит $(m-1)v(v+m)$. Если $y = 25$ и $m-1 = 32$, то $M = 181$, $n = 35$, $v = 343$, $v+m = 376$ и 5 не делит $(m-1)v(v+m)$.

Пусть $m-1 = 2(y-1)$. Тогда $M = 8y-4$, $n = 2y+2$, $v+m = 16y-8$ и $y+1$ делит $14(y-1)(2y-1)$. Поэтому $y+1$ делит $2^3 \cdot 3 \cdot 7$ и y равно 3, 5 или 11.

Если $y = 3$, то $v = 35$, $k = 18$ и $35 \cdot 16 = 20(V-K-1)$. В этом случае Γ имеет параметры $(64, 35, 18, 20)$.

Если $y = 5$, то $v = 63$, $k = 30$ и $63 \cdot 32 = 36(V-K-1)$. В этом случае Γ имеет параметры $(120, 63, 30, 36)$.

Наконец, если $y = 11$, то $v = 147$, $k = 66$ и $147 \cdot 80 = 84(V-K-1)$. В этом случае Γ имеет параметры $(288, 147, 66, 84)$.

Лемма 12. *Если $m = y$, то Γ имеет параметры*
(1) $(76, 35, 18, 14)$ $(y = 3)$*;*
(2) $(136, 63, 30, 28)$ $(y = 5)$*;*
(3) $(256, 119, 54, 56)$ $(y = 9)$*;*
(4) $(616, 287, 126, 140)$ $(y = 21)$*;*
(3) $(1576, 735, 318, 364)$ $(y = 53)$.

Доказательство. Пусть $m = y$. Тогда $M = 7(y-1)$, $n = y+7$ и $y+7$ делит $(2y-1)(15y-7)$. Отсюда $y+7$ делит $16 \cdot 15 \cdot 7$ и $y = 3, 5, 9, 21, 53$.

Если $y = 3$, то $M = 14$, $v = 35$, $k = 18$ и $35 \cdot 16 = 14(V-K-1)$. В этом случае Γ имеет параметры $(76, 35, 18, 14)$.

Если $y = 5$, то $v = 63$, $k = 30$ и $63 \cdot 32 = 28(V-K-1)$. В этом случае Γ имеет параметры $(136, 63, 30, 28)$.

Если $y = 9$, то $v = 119$, $k = 54$ и $119 \cdot 64 = 56(V-K-1)$. В этом случае Γ имеет параметры $(256, 119, 54, 56)$.

Если $y = 21$, то $M = 140$, $v = 287$, $k = 126$ и $287 \cdot 160 = 140(V-K-1)$. В этом случае Γ имеет параметры $(616, 287, 126, 140)$.

Если $y = 53$, то $v = 735$, $k = 318$ и $735 \cdot 416 = 364(V-K-1)$. В этом случае Γ имеет параметры $(1576, 735, 318, 364)$. Лемма, а вместе с ней и теорема 2 доказаны.

Начнем доказательство следствия. Пусть Γ — связный граф, в котором окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_3(6,2)$. По теореме 1 каждая окрестность вершины — дополнительный граф для частного графа Джонсона $\overline{J}(8,4)$, т. е. граф Грассмана $Gr_2(4,2)$. Напомним, что *графом Грассмана* $Gr_q(n,m)$ называется граф, вершинами которого являются m-мерные подпространства данного n-мерного линейного пространства над полем порядка q, причем две вершины a, b смежны тогда и только тогда, когда размерность пересечения $a \cap b$ равна $m-1$. Так как μ-подграфы в $Gr_2(4,2)$ являются 3×3 решетками, связные компоненты μ-подграфов в Γ будут локально решетчатыми.

Заметим, что граф Грассмана $Gr_2(4,2)$ является блок-графом системы троек Штейнера на 15 точках (две тройки смежны, если они пересекаются в единственной точке). Хорошо известно, что существует точно 80 систем троек Штейнера на 15 точках. Из теоремы 1 следует, что блок-графы этих схем изоморфны графу Грассмана $Gr_2(4,2)$.

Лемма 13. *Пусть расстояние в* Γ *между вершинами* a, b *равно* 2. *Тогда подграф* $[a] \cap [b]$ *является дополнительным графом к* (4×4)*-решетке или графом Джонсона* $J(6,3)$.

Доказательство. Пусть Δ — связная компонента μ-подграфа $[a] \cap [b]$. Тогда Δ — локально 3×3 решетчатый граф, в котором μ-подграфы являются m-угольниками для $m = 4$ или $m = 6$. Пусть c, d — вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Δ. Если $\Delta(c) \cap \Delta(d)$ является четырехугольником, то вершина e из $\Delta(d)$, не смежная с вершинами из $\Delta(c) \cap \Delta(d)$, находится на расстоянии 3 от c в графе Δ. В противном случае (3×3)-решетка $\Delta(c)$ содержит два непересекающихся четырехугольника; противоречие. По лемме 2.3 из [1] каждая вершина из Δ лежит в $c^\perp \cup e^\perp$. Отсюда $|\Delta(c) \cap \Delta(d)| = 4$ для любых вершин c, d, находящихся на расстоянии 2 в Δ, и Δ — граф Джонсона $J(6,3)$.

Если же $|\Delta(c) \cap \Delta(d)| = 6$ для любых вершин c, d, находящихся на расстоянии 2 в Δ, то Δ — граф, дополнительный к (4×4)-решетке.

Заметим теперь, что μ-подграф в Γ не может быть несвязным.

Лемма 14. *Если* Γ *содержит* μ*-подграф* $[a] \cap [b]$, *являющийся дополнительным графом к* (4×4)*-решетке, то* Γ *является графом Тэйлора.*

Доказательство. Пусть Δ — (4×4)-решетка в частном Σ графа Джонсона $\overline{J}(8,4)$. Тогда Δ совпадает с окрестностью некоторой вершины в Σ, причем любые две (4×4)-решетки в Σ пересекаются.

Пусть μ-подграф $[a] \cap [b]$ графа Γ является дополнительным графом к 4×4 решетке. Тогда $[b]$ содержит вершину e, не смежную с вершинами из $[a] \cap [b]$. Покажем, что e находится на расстоянии 3 от a в графе Γ. В противном случае $[a]$ содержит два непересекающихся подграфа, дополнительных к (4×4)-решетке, противоречие. Пусть $\Gamma_3(x)$ пусто для некоторой вершины $x \in [a]$ и $\mu(x, y) = 16$ точно для γ вершин из $\Gamma_2(x)$. Тогда $35 \cdot 16 = 16\alpha + 20(36 - \alpha)$ и $\alpha = 40$. Противоречие с тем, что $|\Gamma_2(x)| = 36$.

Итак, если некоторый μ-подграф графа Γ является дополнительным графом к (4×4)-решетке, то Γ — граф Тэйлора.

Лемма 15. *Если каждый μ-подграф из Γ является графом Джонсона $J(6,3)$, то Γ — граф знакопеременных форм* $\mathrm{Alt}(4,2)$, *имеющий параметры* $(64, 35, 18, 20)$.

Доказательство. Пусть каждый μ-подграф из Γ будет графом Джонсона $J(6,3)$. Тогда Γ — сильно регулярный граф, имеющий параметры $(64, 35, 18, 20)$. Поэтому степень каждой вершины в $\Gamma_2(a)$ равна 15. По основной теореме из [8] Γ имеет накрытие, являющееся графом знакопеременных или квадратичных форм. По следствию из [8] Γ совпадает с $\mathrm{Alt}(4,2)$. Лемма, а вместе с ней и следствие доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Махнев А. А.* О графах, окрестности вершин которых сильно регулярны с $k = 2\mu$ // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 7. С. 89–104.
2. *Buekenhout F., Hubaut X.* Locally polar spaces and related rank 3 groups // J. Algebra. 1977. V. 45. P. 391–434.
3. *Cameron P., Hughes D. R., Pasini A.* Extended generalized quadrangles // Geom. Dedicata. 1990. V. 35. P. 193–228.
4. *Махнев А. А.* Псевдогеометрические графы для частичных геометрий $pG_2(4,t)$ // Дискрет. математика. 2000. Т. 12, № 1. С. 113–134.
5. *Махнев А. А.* О псевдогеометрических графах частичных геометрий $pG_2(4,t)$ // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 7. С. 145–160.
6. *Махнев А. А.* О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы // Дискрет. анализ и исследование операций. 1996. Т. 3, № ????. С. 71–83.
7. *Makhnev A. A.* Partial geometries and the Krein condition // Intern. congr. of math.: Abstracts of short comm. and poster session. Berlin: Univ. Bielefeld, 1998. P. 281.
8. *Munemasa A., Pasechnik D. V., Shpektorov S. V.* A local characterization of the graphs of alternating forms and the graphs of quadratic forms over GF(2) // Finite Geometry Combinatorics, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 1993. V. 191. P. 303–318.

Статья поступила 10 апреля 2001 г.

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620219
makhnev@imm.uran.ru