Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2002. Том 43, № 3

УДК 517.962.22

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К. Айдын, А. Я. Булгаков, Г. В. Демиденко

Аннотация: Рассматриваются возмущенные линейные системы разностных уравнений

$$y(n+1) = (A(n) + B(n))y(n), \quad n \geq 0, \tag{1}$$

где $\{A(n)\}$ — T-периодическая матричная последовательность, т. е. $A(n+T) = A(n)$, $n \geq 0$, $B(n)$ — матрица возмущения. Предполагается, что нулевое решение системы $x(n+1) = A(n)x(n)$, $n \geq 0$, асимптотически устойчиво, т. е. все собственные значения матрицы монодромии $X(T) = A(T-1)\dots A(1)A(0)$ принадлежат единичному кругу $\{|\lambda| < 1\}$. Получены условия на возмущение $B(n)$, при которых нулевое решение системы будет асимптотически устойчивым, а также установлена непрерывная зависимость одного класса числовых характеристик асимптотической устойчивости решений системы (1) от коэффициентов системы. Библиогр. 9.

§ 1. Введение

В этой работе мы продолжаем рассматривать системы разностных уравнений с периодическими коэффициентами [1]:

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad n \geq 0, \tag{1.1}$$

где $(N \times N)$-матрица $A(n)$ периодическая с периодом T, т. е.

$$A(n+T) = A(n), \quad n \geq 0.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что нулевое решение системы (1.1) асимптотически устойчиво. Согласно спектральному критерию это означает, что все собственные значения матрицы монодромии системы (1.1):

$$X(T) = A(T-1)\dots A(1)A(0),$$

принадлежат единичному кругу $\{|\lambda| < 1\}$ (см., например, [2, 3]).

В предыдущей работе [1] мы указали ряд числовых характеристик асимптотической устойчивости решений системы (1.1), не опираясь на спектр матрицы монодромии. Используя эти характеристики, можно получать различные оценки норм решений $\{x(n)\}$ системы (1.1), из которых вытекает, что норма $\|x(n)\|$

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда the Scientific and Technical Research Council of Turkey (TUBITAK) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00533).

стремится к нулю при $n \to \infty$. В частности, была определена следующая характеристика асимптотической устойчивости решений (1.1):

$$M(A,T) = \max\{\|H(0)\|, \|H(1)\|, \dots, \|H(T-1)\|\}, \tag{1.2}$$

где

$$H(l) = \sum_{k=l}^{\infty} \left(\prod_{j=l}^{k-1} A(j) \right)^* \left(\prod_{j=l}^{k-1} A(j) \right), \quad l \geq 0, \tag{1.3}$$

и по определению

$$\prod_{j=l}^{k-1} A(j) = \begin{cases} A(k-1)\dots A(l) & \text{при } k > l, \\ I & \text{при } k = l. \end{cases}$$

(Здесь и далее мы используем спектральные нормы матриц.)

В работе [1] была доказана следующая

Теорема. *Для решения* $\{x(n)\}$ *начальной задачи*

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad n \geq 0, \quad x(0) = x_0$$

имеет место

$$\|x(n)\|^2 \leq \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{\|H(j)\|}\right) \|H(0)\| \|x_0\|^2, \quad n \geq 1.$$

Из этой теоремы вытекает оценка для решения системы (1.1):

$$\|x(n)\| \leq \left(1 - \frac{1}{M(A,T)}\right)^{n/2} \|H(0)\|^{1/2} \|x(0)\|, \quad n \geq 0.$$

В случае постоянных коэффициентов $A(n) \equiv A$ эта оценка совпадает с известной (см., например, [4, 5]). Учитывая, что решение (1.1) имеет вид

$$x(n) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} A(j) \right) x(0), \quad n \geq 0,$$

в силу определения (1.2) из этой оценки получаем

$$\left\| \prod_{j=0}^{n-1} A(j) \right\| \leq \left(1 - \frac{1}{M(A,T)}\right)^{n/2} (M(A,T))^{1/2}.$$

Аналогичным образом доказывается неравенство

$$\left\| \prod_{j=l+1}^{n-1} A(j) \right\| \leq \left(1 - \frac{1}{M(A,T)}\right)^{(n-l-1)/2} (M(A,T))^{1/2}, \quad l \leq n-1. \tag{1.4}$$

Отметим, что матричная последовательность $\{H(l)\}$ является периодической с периодом T и удовлетворяет соотношениям

$$A^*(l)H(l+1)A(l) - H(l) = -I, \quad l \geq 0, \tag{1.5}$$

матрицы $H(l)$ эрмитовы положительно определенные, при этом $\|H(l)\| \geq 1$ (см. [1]).

В частном случае, когда коэффициенты системы (1.1) постоянны, т. е. $A(n) = A$, $n \geq 0$, последовательность $\{H(l)\}$ стационарна:

$$H(l) = H = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k A^k, \quad l \geq 0,$$

при этом матрица H — решение дискретного уравнения Ляпунова

$$A^* H A - H = -I.$$

В этой работе мы будем рассматривать возмущенные линейные системы разностных уравнений

$$y(n+1) = (A(n) + B(n))y(n), \quad n \geq 0, \tag{1.6}$$

где $B(n)$ — $(N \times N)$-матрица возмущения. Цель работы — получить условия на возмущение в (1.6), при котором нулевое решение системы будет асимптотически устойчивым, а также установить непрерывную зависимость матриц $H(l)$, $l \geq 0$, от коэффициентов системы разностных уравнений.

§ 2. Периодические возмущения систем разностных уравнений

В этом параграфе мы будем рассматривать возмущенные линейные системы разностных уравнений (1.6) с периодическими коэффициентами и, используя матрицы $H(l)$, укажем условия на матрицу возмущения $B(n)$, при которых нулевое решение системы будет асимптотически устойчивым.

Теорема 2.1. *Пусть матрица возмущения $B(n)$ периодическая с периодом T и $\{H(n)\}$ — последовательность матриц, построенная для системы* (1.1) *по формуле* (1.3). *Предположим, что для T-периодической последовательности $\{\alpha(n)\}$ такой, что*

$$A^*(n)H(n+1)B(n) + B^*(n)H(n+1)A(n) + B^*(n)H(n+1)B(n) \leq I + \alpha(n)H(n), \quad 0 \leq n \leq T-1, \tag{2.1}$$

выполнены условия

$$0 \leq 1 + \alpha(n), \quad \prod_{l=0}^{T-1} (1 + \alpha(l)) < 1. \tag{2.2}$$

Тогда нулевое решение системы (1.6) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Напомним, что матрицы $H(l)$ эрмитовы положительно определенные. Пусть $\{y(n)\}$ — произвольное решение системы (1.6). Используя для скалярного произведения векторов $u, v \in E_N$ обозначение

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{N} u_i \bar{v}_i,$$

рассмотрим форму $\langle H(n+1)y(n+1), y(n+1) \rangle$. Учитывая, что $\{H(l)\}$ удовлетворяет соотношениям (1.5), будем иметь

$$\langle H(n+1)y(n+1), y(n+1) \rangle = \langle H(n+1)(A(n) + B(n))y(n), (A(n) + B(n))y(n) \rangle$$
$$= \langle (A(n)+B(n))^* H(n+1)(A(n)+B(n))y(n), y(n) \rangle = \langle A^*(n)H(n+1)A(n)y(n), y(n) \rangle$$

$$+\langle (A^*(n)H(n+1)B(n)+B^*(n)H(n+1)A(n)+B^*(n)H(n+1)B(n))y(n),y(n)\rangle$$
$$=\langle H(n)y(n),y(n)\rangle-\langle y(n),y(n)\rangle+\langle (A^*(n)H(n+1)B(n)$$
$$+B^*(n)H(n+1)A(n)+B^*(n)H(n+1)B(n))y(n),y(n)\rangle.$$

Тогда в силу условия (2.1)

$$\langle H(n+1)y(n+1),y(n+1)\rangle \le \langle H(n)y(n),y(n)\rangle(1+\alpha(n)).$$

Отсюда, применяя (2.2), для любого $n \ge 0$ получим неравенство

$$\langle H(n)y(n),y(n)\rangle \le \langle H(0)y(0),y(0)\rangle \prod_{l=0}^{n-1}(1+\alpha(l)). \tag{2.3}$$

Следовательно, в силу T-периодичности матрицы $H(n)$ и функции $\alpha(n)$ для любого натурального k имеем

$$\langle H(0)y(kT),y(kT)\rangle \le \langle H(0)y(0),y(0)\rangle \prod_{l=0}^{T-1}(1+\alpha(l))^k.$$

Пусть

$$Y(n)=\prod_{j=0}^{n-1}(A(j)+B(j))$$

— матрицант системы (1.6). В силу T-периодичности матрицы $(A(n)+B(n))$ выполняется равенство

$$y(kT)=Y^k(T)y(0).$$

Тогда предыдущее неравенство переписывается в виде

$$\langle H(0)Y^k(T)y(0),Y^k(T)y(0)\rangle \le \langle H(0)y(0),y(0)\rangle \prod_{l=0}^{T-1}(1+\alpha(l))^k.$$

Отсюда имеем

$$\|Y^k(T)y(0)\|^2 \le \operatorname{cond}(H(0))\|y(0)\|^2 \prod_{l=0}^{T-1}(1+\alpha(l))^k,$$

где $\operatorname{cond}(H(0))=\|H(0)\|\|H^{-1}(0)\|$ — число обусловленности матрицы $H(0)$. Ввиду условия (2.2)

$$\prod_{l=0}^{T-1}(1+\alpha(l))^k \to 0, \quad k\to\infty.$$

Следовательно, из этой оценки вытекает, что все собственные значения λ_j матрицы монодромии $Y(T)$ лежат в единичном круге $\{|\lambda|<1\}$, т. е. нулевое решение системы (1.6) асимптотически устойчиво.

Теорема доказана.

Сейчас мы приведем аналогичную теорему об асимптотической устойчивости решений возмущенной системы разностных уравнений (1.6), в которой вместо условий (2.1), (2.2) на возмущение $B(n)$ будет фигурировать несколько более жесткое, но гораздо проще проверяемое на практике условие.

Теорема 2.2. *Пусть матрица возмущения $B(n)$ периодическая с периодом T и $\{H(n)\}$ — последовательность матриц, построенная для системы (1.1) по формуле (1.3). Предположим, что для норм T-периодической последовательности матриц $\{C(n)\}$,*

$$C(n) = A^*(n)H(n+1)B(n) + B^*(n)H(n+1)A(n) + B^*(n)H(n+1)B(n), \quad (2.4)$$

выполнены неравенства

$$\|C(n)\| < 1, \quad 0 \le n \le T-1. \quad (2.5)$$

Тогда нулевое решение системы (1.6) асимптотически устойчиво. Более того, для решений $\{y(n)\}$ системы (1.6) имеют место оценки

$$\langle H(n)y(n), y(n)\rangle \le \langle H(0)y(0), y(0)\rangle \prod_{l=0}^{n-1}(1+\alpha(l)), \quad n > 0, \quad (2.6)$$

где

$$\alpha(l) = -\frac{1-\|C(l)\|}{\|H(l)\|}.$$

Доказательство. Покажем, что для матрицы возмущения $B(n)$ выполнены условия теоремы 2.1.

Очевидно, $\{\alpha(n)\}$ является T-периодической последовательностью. Покажем, что для нее выполнено условие (2.2) из предыдущей теоремы. Действительно, учитывая, что $\|H(n)\| \ge 1$, имеем

$$1 \ge \frac{1-\|C(n)\|}{\|H(n)\|},$$

а в силу (2.5) —

$$\frac{1-\|C(n)\|}{\|H(n)\|} > 0.$$

Из этих неравенств следует, что

$$1 > 1+\alpha(n) \ge 0, \quad n \ge 0.$$

Отсюда непосредственно вытекает (2.2).

Покажем теперь, что для матричной последовательности $\{C(n)\}$ и последовательности $\{\alpha(n)\}$ выполнено условие (2.1). Для этого согласно определению (2.4), очевидно, нужно показать справедливость неравенств

$$\langle C(n)v, v\rangle \le \|v\|^2 + \alpha(n)\langle H(n)v, v\rangle \quad (2.7)$$

для любого вектора $v \in E_N$.

Выпишем следующую оценку:

$$\langle C(n)v, v\rangle \le \|C(n)\|\|v\|^2 = \|v\|^2 - (1-\|C(n)\|)\|v\|^2.$$

Учитывая неравенство $\langle H(n)v, v\rangle \le \|H(n)\|\|v\|^2$ и условие (2.5), имеем

$$\langle C(n)v, v\rangle \le \|v\|^2 - \frac{1-\|C(n)\|}{\|H(n)\|}\langle H(n)v, v\rangle.$$

Отсюда в силу определения $\alpha(n)$ приходим к (2.7).

Из предыдущего получаем, что для матрицы $B(n)$ выполнены все условия теоремы 2.1. Поэтому нулевое решение системы (1.6) асимптотически устойчиво. А из оценки (2.3), установленной при доказательстве теоремы 2.1, непосредственно вытекает неравенство (2.6).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Предположим, что T-периодическая матрица возмущения $B(n)$ удовлетворяет условию*

$$\|B(n)\| < \sqrt{\|A(n)\|^2 + \frac{1}{\|H(n+1)\|}} - \|A(n)\|, \quad 0 \le n \le T-1. \tag{2.8}$$

Тогда нулевое решение системы (1.6) *асимптотически устойчиво и для ее решений имеют место оценки*

$$\langle H(n)y(n), y(n)\rangle \le \langle H(0)y(0), y(0)\rangle \prod_{l=0}^{n-1}(1+\beta(l)), \quad n > 0, \tag{2.9}$$

где

$$\beta(l) = -\frac{1 - (2\|A(l)\|\|B(l)\| + \|B(l)\|^2)\|H(l+1)\|}{\|H(l)\|} < 0.$$

Доказательство. Вначале заметим, что (2.8) эквивалентно неравенствам

$$2\|A(n)\|\|B(n)\| + \|B(n)\|^2 < \frac{1}{\|H(n+1)\|}, \quad 0 \le n \le T-1. \tag{2.10}$$

Действительно, (2.10) можно переписать в виде

$$(\|B(n)\| + \|A(n)\|)^2 - \left(\|A(n)\|^2 + \frac{1}{\|H(n+1)\|}\right) < 0$$

или

$$\left(\|B(n)\| + \|A(n)\| - \sqrt{\|A(n)\|^2 + \frac{1}{\|H(n+1)\|}}\right) \times \left(\|B(n)\| + \|A(n)\| + \sqrt{\|A(n)\|^2 + \frac{1}{\|H(n+1)\|}}\right) < 0.$$

Отсюда следует эквивалентность (2.8) и (2.10).

Из неравенств (2.10), очевидно, вытекает условие (2.5), поскольку

$$\|C(n)\| \le (2\|A(n)\|\|B(n)\| + \|B(n)\|^2)\|H(n+1)\| < 1.$$

Следовательно, в силу теоремы 2.2 нулевое решение системы (1.6) асимптотически устойчиво.

Из оценки (2.6) ввиду последнего неравенства получаем также оценку (2.9).

Следствие 2. *Если выполнены условия следствия* 1, *то для решений системы* (1.6) *выполнены неравенства*

$$\|y(n)\|^2 \le \|H(0)\|\|y(0)\|^2(1-\gamma)^n, \quad n > 0,$$

где $\gamma = \min\limits_{0\le l\le T-1}\{|\beta(l)|\} \in (0,1)$.

Приведем теоремы об асимптотической устойчивости для некоторых частных случаев, вытекающие из доказанных утверждений.

Вначале рассмотрим возмущенную линейную систему разностных уравнений с вещественным параметром μ:

$$y(n+1) = (A(n) + \mu B(n))y(n), \quad n \ge 0. \tag{2.11}$$

Из теоремы 2.2 непосредственно следует

Теорема 2.3. *Пусть матрица возмущения $B(n)$ периодическая с периодом T и матрицы $C(n)$, $n \geq 0$, определены в* (2.4). *Если параметр μ такой, что выполнены неравенства*

$$|\mu|\|C(n)\| < 1, \quad n \geq 0,$$

то нулевое решение системы (2.11) *асимптотически устойчиво.*

Рассмотрим линейные системы разностных уравнений (1.1) и (1.6) с постоянными коэффициентами. Из следствия 1 вытекает

Теорема 2.4. *Пусть*

$$A(n) = A, \quad B(n) = B, \quad n \geq 0,$$

и матрица H — решение дискретного уравнения Ляпунова $A^*HA - H = -I$, т. е.

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k A^k, \quad l \geq 0.$$

Если

$$\|B\| < \sqrt{\|A\|^2 + \frac{1}{\|H\|}} - \|A\|,$$

то нулевое решение системы (1.6) *асимптотически устойчиво и для ее решений имеют место оценки*

$$\langle Hy(n), y(n)\rangle \leq \langle Hy(0), y(0)\rangle (1-\gamma)^n, \quad n > 0,$$

где

$$\gamma = \frac{1 - (2\|A\|\|B\| + \|B\|^2)\|H\|}{\|H\|} \in (0, 1).$$

Замечание 1. Аналог теоремы 2.4 содержится в [6]. Подобный результат для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\frac{dy}{dt} = Ay$ см. в [6, 7].

Замечание 2. Аналогичные результаты для систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами $\frac{dy}{dt} = A(t)y$, $A(t+T) = A(t)$, получены в [8].

§ 3. Непрерывная зависимость характеристик асимптотической устойчивости решений разностных уравнений

Рассмотрим систему разностных уравнений (1.1):

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad n \geq 0,$$

и возмущенную систему (1.6):

$$y(n+1) = (A(n) + B(n))y(n), \quad n \geq 0.$$

Будем предполагать, что матрица возмущения $B(n)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2 и, значит, нулевое решение (1.6) асимптотически устойчиво. Тогда наряду с матричной последовательностью $\{H(l)\}$, определенной в (1.3), можно ввести аналогичную T-периодическую последовательность $\{\widetilde{H}(l)\}$ по формулам

$$\widetilde{H}(l) = \sum_{k=l}^{\infty} \left(\prod_{j=l}^{k-1} (A(j) + B(j)) \right)^* \left(\prod_{j=l}^{k-1} (A(j) + B(j)) \right), \quad l \geq 0.$$

Матрицы $\{\widetilde{H}(l)\}$ эрмитовы положительно определенные, $\|\widetilde{H}(l)\| \geq 1$ и для них выполняются соотношения

$$(A(l)+B(l))^* \widetilde{H}(l+1)(A(l)+B(l)) - \widetilde{H}(l) = -I, \quad l \geq 0. \tag{3.1}$$

По аналогии с (1.2) определим величину

$$M(A+B,T) = \max\{\|\widetilde{H}(0)\|, \|\widetilde{H}(1)\|, \dots, \|\widetilde{H}(T-1)\|\}, \tag{3.2}$$

которая будет являться числовой характеристикой асимптотической устойчивости решений возмущенной системы разностных уравнений (1.6). Для решений этой системы, очевидно, справедливо неравенство

$$\|y(n)\| \leq \left(1 - \frac{1}{M(A+B,T)}\right)^{n/2} \|\widetilde{H}(0)\|^{1/2} \|y(0)\|, \quad n \geq 0.$$

Из общих соображений ясно, что при достаточно малых возмущениях $\|B(n)\|$, $n \geq 0$, величина модуля разности $|M(A,T) - M(A+B,T)|$ должна быть малой. В этом параграфе мы приведем оценки для норм $\|H(l) - \widetilde{H}(l)\|$, $l \geq 0$, из которых будет вытекать, что при малых возмущениях

$$|M(A,T) - M(A+B,T)| \leq c \max_{0 \leq j \leq T-1} \{\|B(j)\|\}.$$

Теорема 3.1. *Предположим, что для матриц $C(n)$, определенных в* (2.4), *выполнено условие* (2.5), *т. е.* $\|C(n)\| < 1$, $n \geq 0$. *Тогда имеют место оценки*

$$\|H(l) - \widetilde{H}(l)\| \leq \frac{c_{\max}}{1 - c_{\max}} \|H(l)\|, \quad l = 0, 1, \dots, T-1, \tag{3.3}$$

где $c_{\max} = \max_{0 \leq j \leq T-1} \{\|C(j)\|\} \in (0,1)$.

Доказательство. Поскольку для последовательностей $\{H(l)\}$, $\{\widetilde{H}(l)\}$ выполняются соотношения (1.5), (3.1) соответственно, то для T-периодической последовательности $\{V(l)\}$, $V(l) = \widetilde{H}(l) - H(l)$, $l \geq 0$, имеем равенства

$$(A(l)+B(l))^* V(l+1)(A(l)+B(l)) - V(l) = -C(l), \quad l \geq 0, \tag{3.4}$$

где матрицы $C(l)$ определены в (2.4). В следующей лемме мы покажем, что матрицы $V(l)$, $l = 0, 1, \dots, T-1$, являются решениями дискретных уравнений Ляпунова со специальными правыми частями. Этот факт существенно будет использован при получении оценок (3.3).

Введем следующие обозначения:

$$\widetilde{A}(n) = A(n) + B(n), \quad Y(n,l) = \prod_{j=l}^{n-1} \widetilde{A}(j), \quad n \geq l \geq 0,$$

$$D(l) = C(l) + Y^*(l+1,l)C(l+1)Y(l+1,l) + Y^*(l+2,l)C(l+2)Y(l+2,l) + \dots + Y^*(l+T-1,l)C(l+T-1)Y(l+T-1,l), \quad l = 0, 1, \dots, T-1.$$

Лемма 3.1. *Для каждой матрицы $V(l)$, $l = 0, 1, \dots, T-1$, выполнено соотношение*

$$Y^*(l+T,l)V(l)Y(l+T,l) - V(l) = -D(l). \tag{3.5}$$

Доказательство. В силу (3.4), используя наши обозначения, имеем

$$\begin{aligned}
V(l) &= C(l) + \widetilde{A}^*(l)V(l+1)\widetilde{A}(l) \\
&= C(l) + \widetilde{A}^*(l)(C(l+1) + \widetilde{A}^*(l+1)V(l+2)\widetilde{A}(l+1))\widetilde{A}(l) \\
&= C(l) + \widetilde{A}^*(l)C(l+1)\widetilde{A}(l) + (\widetilde{A}(l+1)\widetilde{A}(l))^*V(l+2)\widetilde{A}(l+1)\widetilde{A}(l) \\
&= C(l) + Y^*(l+1,l)C(l+1)Y(l+1,l) + Y^*(l+2,l)V(l+2)Y(l+2,l).
\end{aligned}$$

Если $T > 2$, то, вновь применяя (3.4) для матрицы $V(l+2)$, получим

$$\begin{aligned}
V(l) &= C(l) + Y^*(l+1,l)C(l+1)Y(l+1,l) \\
&\quad + Y^*(l+2,l)(C(l+2) + \widetilde{A}^*(l+2)V(l+3)\widetilde{A}(l+2))Y(l+2,l) \\
&= C(l) + Y^*(l+1,l)C(l+1)Y(l+1,l) \\
&\quad + Y^*(l+2,l)C(l+2)Y(l+2,l) + Y^*(l+3,l)V(l+3)Y(l+3,l),
\end{aligned}$$

и т. д. Наконец,

$$\begin{aligned}
V(l) &= C(l) + Y^*(l+1,l)C(l+1)Y(l+1,l) + Y^*(l+2,l)C(l+2)Y(l+2,l) \\
&+ \dots + Y^*(l+T-1,l)C(l+T-1)Y(l+T-1,l) + Y^*(l+T,l)V(l+T)Y(l+T,l) \\
&= D(l) + Y^*(l+T,l)V(l+T)Y(l+T,l).
\end{aligned}$$

Отсюда, поскольку $V(l+T) = V(l)$, выводим равенство (3.5).

Лемма доказана.

Ввиду принятых обозначений для каждого $l = 0, 1, \dots, T-1$ матричная последовательность $\{Y(n,l)\}$ удовлетворяет равенствам

$$Y(n+1,l) = \widetilde{A}(n)Y(n,l), \quad n \geq l, \quad Y(l,l) = I.$$

Поэтому каждую из матриц

$$Y(l+T,l) = \widetilde{A}(l+T-1)\dots\widetilde{A}(l+1)\widetilde{A}(l), \quad l = 0, 1, \dots, T-1,$$

можно рассматривать в качестве матрицы монодромии возмущенной системы (1.6), если считать $n \geq l$. Но поскольку условие (2.5) на матрицу возмущения $B(n)$ обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1.6), то вследствие спектрального критерия для любого $l = 0, 1, \dots, T-1$ спектр матрицы $Y(l+T,l)$ принадлежит единичному кругу $\{|\lambda| < 1\}$. Следовательно, дискретные уравнения Ляпунова

$$Y^*(l+T,l)VY(l+T,l) - V = -D(l), \quad l = 0, 1, \dots, T-1,$$

однозначно разрешимы, и тогда в силу леммы 3.1 вытекает представление

$$V(l) = \sum_{k=0}^{\infty}(Y^*(l+T,l))^k D(l)(Y(l+T,l))^k, \quad l = 0, 1, \dots, T-1. \tag{3.6}$$

Для получения оценки (3.3) будем использовать формулу (3.6). Учитывая ее, очевидно, имеем

$$\|V(l)\| = \max_{\|u\|=1} |\langle V(l)u, u\rangle| = \max_{\|u\|=1} |\sum_{k=0}^{\infty}\langle D(l)(Y(l+T,l))^k u, (Y(l+T,l))^k u\rangle|. \tag{3.7}$$

Используя обозначение матрицы $D(l)$, получим

$$
\begin{aligned}
|\langle V(l)u,u\rangle| \le \sum_{k=0}^{\infty} |\langle C(l)(Y(l+T,l))^k u, (Y(l+T,l))^k u\rangle| \\
+ \sum_{k=0}^{\infty} |\langle C(l+1)Y(l+1,l)(Y(l+T,l))^k u, Y(l+1,l)(Y(l+T,l))^k u\rangle| \\
+ \dots + \sum_{k=0}^{\infty} |\langle C(l+T-1)Y(l+T-1,l)(Y(l+T,l))^k u, Y(l+T-1,l)(Y(l+T,l))^k u\rangle| \\
\le c_{\max} \sum_{k=0}^{\infty} \langle (Y(l+T,l))^k u, (Y(l+T,l))^k u\rangle \\
+ c_{\max} \sum_{k=0}^{\infty} \langle Y(l+1,l)(Y(l+T,l))^k u, Y(l+1,l)(Y(l+T,l))^k u\rangle \\
+ \dots + c_{\max} \sum_{k=0}^{\infty} \langle Y(l+T-1,l)(Y(l+T,l))^k u, Y(l+T-1,l)(Y(l+T,l))^k u\rangle.
\end{aligned}
$$

Следовательно, учитывая определение последовательности $\{\widetilde{H}(l)\}$, будем иметь оценку

$$|\langle V(l)u,u\rangle| \le c_{\max}\langle \widetilde{H}(l)u,u\rangle.$$

Возвращаясь к равенству (3.7), находим

$$\|V(l)\| \le c_{\max} \max_{\|u\|=1} \langle \widetilde{H}(l)u,u\rangle = c_{\max}\|\widetilde{H}(l)\| \le c_{\max}\|V(l)\| + c_{\max}\|H(l)\|.$$

В силу условия (2.5) $0 \le c_{\max} < 1$, поэтому отсюда непосредственно следует неравенство (3.3).

Теорема доказана.

Следствие. *Предположим, что T-периодическая матрица возмущения $B(n)$ удовлетворяет условию*

$$\|B(n)\| \le \sqrt{\|A(n)\|^2 + \frac{1}{2\|H(n+1)\|}} - \|A(n)\|, \quad 0 \le n \le T-1. \tag{3.8}$$

Тогда имеют место оценки

$$\frac{\|H(l) - \widetilde{H}(l)\|}{\|H(l)\|} \le a_{\max} \max_{0\le i\le T-1} \{\|B(i)\|\}, \quad l = 0,1,\dots,T-1, \tag{3.9}$$

где

$$a_{\max} = 2 \max_{0\le j\le T-1} \left\{ \|H(j+1)\| \left(\|A(j)\| + \sqrt{\|A(j)\|^2 + \frac{1}{2\|H(j+1)\|}} \right) \right\}.$$

Доказательство. В силу определения (2.4) матриц $C(n)$ и условия (3.8), очевидно, имеем $\|C(n)\| \le 1/2$, $n \ge 0$, т. е. условие (2.5) выполнено. Тогда, поскольку неравенство (3.3) будет выполняться, получим

$$
\begin{aligned}
\|H(l) - \widetilde{H}(l)\| \le 2c_{\max}\|H(l)\| \\
\le 2 \max_{0\le j\le T-1} \{\|B(j)\|\|H(j+1)\|(2\|A(j)\| + \|B(j)\|)\}\|H(l)\|.
\end{aligned}
$$

Учитывая (3.8), придем к (3.9).

Из теоремы 2.4 и следствия вытекает

Теорема 3.2. *Пусть* $A(n) = A$, $B(n) = B$, $n \geq 0$, *и матрица* H — *решение дискретного уравнения Ляпунова* $A^*HA - H = -I$. *Если*

$$\|B\| < \sqrt{\|A\|^2 + \frac{1}{2\|H\|}} - \|A\|,$$

то дискретное уравнение Ляпунова

$$(A+B)^*\widetilde{H}(A+B) - \widetilde{H} = -I$$

однозначно разрешимо и для решения $\widetilde{H}$ *справедлива оценка*

$$\frac{\|H - \widetilde{H}\|}{\|H\|} \leq 2\|B\|\|H\| \left(\|A\| + \sqrt{\|A\|^2 + \frac{1}{2\|H\|}} \right).$$

§ 4. Непериодические возмущения систем разностных уравнений

Рассмотрим теперь возмущенную линейную систему разностных уравнений (1.6):

$$y(n+1) = (A(n) + B(n))y(n), \quad n \geq 0,$$

где $B(n)$ — произвольная $(N \times N)$-матрица. В следующей теореме мы даем достаточные условия на матрицу возмущения $B(n)$, при которых нулевое решение системы (1.6) будет асимптотически устойчивым.

Теорема 4.1. *Пусть* $\{H(l)\}$ — *последовательность матриц, построенная для системы* (1.1) *по формуле* (1.3). *Предположим, что для последовательности матриц* $\{C(n)\}$,

$$C(n) = A^*(n)H(n+1)B(n) + B^*(n)H(n+1)A(n) + B^*(n)H(n+1)B(n),$$

выполнены условия

$$\|C(n)\| \leq 1, \quad n \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1 - \|C(j)\|}{\|H(j)\|} = \infty. \tag{4.1}$$

Тогда нулевое решение системы (1.6) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть $\{y(n)\}$ — произвольное решение системы (1.6). Рассмотрим форму $\langle H(n+1)y(n+1), y(n+1)\rangle$. Учитывая, что $\{H(l)\}$ удовлетворяет соотношениям (1.5), как при доказательстве теоремы 2.1, будем иметь

$$\langle H(n+1)y(n+1), y(n+1)\rangle = \langle H(n)y(n), y(n)\rangle - \langle y(n), y(n)\rangle + \langle C(n)y(n), y(n)\rangle.$$

Поскольку $\|H(n)\| \geq 1$, в силу условия (4.1)

$$0 \leq \frac{1 - \|C(n)\|}{\|H(n)\|} \leq 1, \quad n \geq 1.$$

Тогда, используя неравенство $\langle H(n)v, v\rangle \leq \|H(n)\|\|v\|^2$, получим

$$\langle H(n+1)y(n+1), y(n+1)\rangle \leq \prod_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{1 - \|C(j)\|}{\|H(j)\|}\right) \langle H(0)y(0), y(0)\rangle$$

$$\leq e^{-\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{1-\|C(j)\|}{\|H(j)\|}}\langle H(0)y(0), y(0)\rangle.$$

Следовательно, учитывая условие (4.1), имеем, что

$$\langle H(n)y(n), y(n)\rangle \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поскольку матрицы $H(l)$ положительно определены и последовательность $\{H(l)\}$ периодическая, отсюда вытекает асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1.6).

Теорема доказана.

Заметим, что если возмущение $B(n)$ является T-периодическим и $\|C(n)\| < 1$, $n \geq 0$, то, как следует из теоремы 2.2, нулевое решение системы (1.6) асимптотически устойчиво. Так как матричная последовательность $\{H(n)\}$ является T-периодической, в этом случае последовательность $\{C(n)\}$ также T-периодическая, поэтому условие (4.1) будет выполнено. Следовательно, теорему 4.1 можно рассматривать как обобщение теоремы 2.2 на случай не T-периодических возмущений.

Из доказательства теоремы 4.1, очевидно, вытекает, что в первой части условия (4.1) достаточно потребовать выполнения неравенства $\|C(n)\| \leq 1$ начиная с некоторого номера n_0. В следующих двух примерах, на первый взгляд мало отличающихся друг от друга, покажем, насколько существенной является вторая часть условия (4.1) для асимптотической устойчивости.

Пример 4.1. Рассмотрим разностное уравнение

$$y(n+1) = \frac{n+1}{n+2}y(n), \quad n \geq 0.$$

Имеем

$$A(n) = 0, \quad B(n) = \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Поэтому

$$H(n) = 1, \quad C(n) = B^2(n) = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^2.$$

Очевидно,

$$\sum_{j=0}^{n}(1 - C(j)) = \sum_{j=0}^{n}\frac{2}{j+2} - \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(j+2)^2} \to \infty, \quad n \to \infty,$$

т. е. условие (4.1) выполнено. Поэтому нулевое решение уравнения асимптотически устойчиво.

Пример 4.2. Рассмотрим разностное уравнение

$$y(n+1) = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}y(n), \quad n \geq 0.$$

Имеем

$$A(n) = 0, \quad B(n) = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = 1 - \frac{1}{(n+2)^2}.$$

Поэтому

$$H(n) = 1, \quad C(n) = B^2(n) = \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right)^2.$$

Очевидно,

$$\sum_{j=0}^{n}(1-C(j))=\sum_{j=0}^{n}\frac{2}{(j+2)^2}-\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(j+2)^4},$$

и ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(1-C(j))$ сходится, т. е. условие (4.1) не выполнено и теорема 4.1 не дает ответа об асимптотической устойчивости решений. Покажем, что нулевое решение не является асимптотически устойчивым.

Из явного вида решения

$$y(n)=\left(\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{1}{(j+2)^2}\right)\right)y(0),\quad n\geq 0,$$

имеем

$$\ln|y(n)|=\sum_{j=0}^{n-1}\ln\left(1-\frac{1}{(j+2)^2}\right)+\ln|y(0)|,\quad n\geq 0.$$

Учитывая, что $\ln\bigl(1-\frac{1}{l^2}\bigr)=O\bigl(\frac{1}{l^2}\bigr)$, $l\to\infty$, и ряд $\sum\limits_{l\geq 1}\frac{1}{l^2}$ сходится, получаем существование предела

$$\lim_{n\to\infty}\ln|y(n)|=a.$$

Значит, нулевое решение уравнения является устойчивым, но не асимптотически устойчивым.

Следующая теорема является дискретным аналогом теоремы Левинсона [9].

Теорема 4.2. *Пусть $A(n)\not\equiv 0$, $n\geq 0$, и для матрицы возмущения $B(n)$ выполнено условие*

$$\sum_{l=0}^{\infty}\|B(l)\|<\infty. \tag{4.2}$$

Тогда нулевое решение системы (1.6) *асимптотически устойчиво и для ее решений имеют место оценки*

$$\|y(n)\|\leq\left(1-\frac{1}{M(A,T)}\right)^{n/2}e^{b_n}(M(A,T))^{1/2}\|y(0)\|,\quad n>0, \tag{4.3}$$

где

$$b_n=\frac{M(A,T)}{\sqrt{M(A,T)-1}}\sum_{l=0}^{n-1}\|B(l)\|. \tag{4.4}$$

Доказательство. В силу T-периодичности матричных последовательностей $\{A(n)\}$, $\{H(l)\}$ из условия (4.2) вытекает, что существует $n_0\geq 0$ такое, что для матриц $C(n)$, определенных в теореме 4.1, будут выполнены неравенства $\|C(n)\|\leq c<1$, $n\geq n_0$. Очевидно также, что ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1-\|C(j)\|}{\|H(j)\|}$$

расходится. Следовательно, по теореме 4.1 нулевое решение системы (1.6) асимптотически устойчиво. Докажем неравенство (4.3).

Пусть $\{y(n)\}$ — решение системы (1.6). Для него, очевидно, имеем

$$y(n) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} A(j)\right) y(0) + \sum_{l=0}^{n-1} \left(\prod_{j=l+1}^{n-1} A(j)\right) B(l)y(l), \quad n \geq 0,$$

где по определению

$$\sum_{l=0}^{-1} \varphi(l) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\|y(n)\| \leq \left\| \left(\prod_{j=0}^{n-1} A(j)\right) y(0) \right\| + \sum_{l=0}^{n-1} \left\| \left(\prod_{j=l+1}^{n-1} A(j)\right) B(l)y(l) \right\|.$$

Используя неравенства (1.4), получим

$$\|y(n)\| \leq \left(1 - \frac{1}{M(A,T)}\right)^{n/2} (M(A,T))^{1/2} \|y(0)\| + \sum_{l=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{M(A,T)}\right)^{(n-l-1)/2} (M(A,T))^{1/2} \|B(l)\| \|y(l)\|. \quad (4.5)$$

Поскольку $A(n) \not\equiv 0$, $n \geq 0$, из определений (1.2), (1.3), очевидно, следует, что $M(A,T) > 1$. Поэтому неравенство (4.5) можно переписать в виде

$$\left(1 - \frac{1}{M(A,T)}\right)^{-n/2} \|y(n)\| \leq (M(A,T))^{1/2} \|y(0)\| + \sum_{l=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{M(A,T)}\right)^{(-l-1)/2} (M(A,T))^{1/2} \|B(l)\| \|y(l)\|$$

или

$$\left(1 - \frac{1}{M(A,T)}\right)^{-n/2} \|y(n)\| \leq (M(A,T))^{1/2} \|y(0)\| + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{M(A,T)}{\sqrt{M(A,T) - 1}} \|B(l)\| \left(1 - \frac{1}{M(A,T)}\right)^{-l/2} \|y(l)\|.$$

Тогда в силу дискретного неравенства Гроноулла (см., например, [3]) будем иметь

$$\left(1 - \frac{1}{M(A,T)}\right)^{-n/2} \|y(n)\| \leq e^{b_n} (M(A,T))^{1/2} \|y(0)\|,$$

где b_n определены в (4.4). Отсюда непосредственно вытекает оценка (4.3).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айдын К., Булгаков А. Я., Демиденко Г. В.* Числовые характеристики асимптотической устойчивости решений линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1227–1237.
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

3. *Elaydi S. N.* An introduction to difference equations. New York: Springer-Verl., 1996.
4. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.
5. *Akin O., Bulgak H.* Linear difference equations and stability theory. Selcuk University, Research Centre of Applied Mathematics, Konya, 1998. (in Turkish).
6. *Bulgak H.* Pseudoeigenvalues, spectral portrait of a matrix and their connections with different criteria of stability // Error Control and Adaptivity in Scientific Computing. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. P. 95–124. (NATO Sc. Ser.).
7. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1994.
8. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.
9. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

Статья поступила 31 мая 2001 г.

Айдын Кемал (Kemal Aydin), Булгаков Айдер Якубович (Haydar Bulgak)
Research Centre of Applied Mathematics, Selcuk University, Konya, Turkey
kaydin@selcuk.edu.tr, hbulgak@selcuk.edu.tr

Демиденко Геннадий Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru