Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2002. Том 43, № 2

УДК 514.752

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГИПОТЕЗА КАРАТЕОДОРИ

В. В. Иванов

Аннотация: Цель статьи — дать читателю реальную возможность убедиться в том, что индекс изолированной омбилической точки аналитической поверхности не может быть больше единицы. Для поверхности, гомеоморфной сфере, это означает, в частности, что на ней непременно найдутся по крайней мере две омбилические точки, как и предполагал Каратеодори. Ил. 24, библиогр. 9.

Точку, где нормальные кривизны поверхности во всех направлениях одинаковы, называют омбилической. Вблизи такой точки поверхность очень похожа на кусочек сферы или плоскости. Согласно классической гипотезе, которую традиция с давних времен приписывает Каратеодори, на любой достаточно гладкой замкнутой выпуклой поверхности существуют как минимум две омбилические точки.

Единственный реальный способ доказательства этой гипотезы, известный в настоящее время, основан на ее редукции к более смелому утверждению, которое связывают с именем Левнера. Его предположение заключается в том, что индекс изолированной омбилической точки не может быть больше единицы. Так ли это на самом деле — все еще остается загадкой. Чуть ниже мы подробнее расскажем об этой замечательной задаче, которая, несмотря на свой вдохновляюще локальный характер, оказалась на удивление сложной и глубокой. В самой общей своей постановке она, по-видимому, еще долго будет ждать своего решения. При этом трудно сказать наперед, к чему может привести та патологическая свобода, которой обладают даже бесконечно дифференцируемые функции и описываемые ими поверхности. Не ограниченные никакими условиями регулярности, они способны преподнести любые сюрпризы. Если же речь идет об аналитической поверхности, когда сколь угодно сложные «особенности» рассыпаются на простейшие за конечное число шагов, то, казалось бы, вся проблема лишь в том, чтобы найти в себе силы совершить эти шаги …

Прошло более полувека с тех пор, как Гамбургер [1] и Бол [2] предложили первые доказательства гипотезы Левнера для аналитических поверхностей, и свыше сорока лет после выхода в свет работы Клотц [3], где изложено доказательство, более короткое, чем в [1], и «более правильное», чем в [2]. Спустя полтора десятка лет Титус публикует большую работу [4], посвященную доказательству «обобщенной» гипотезы Левнера, по-прежнему содержащей в себе гипотезу Каратеодори. Но, судя по всему, за прошедшие долгие годы эти доказательства, как и другие, более поздние, так и не убедили математическую общественность. В этом отношении показательна, например, вполне современная статья [5], где авторы, соблюдая осторожность, выражают свой основной результат в форме импликации: если гипотеза Левнера справедлива для аналитических поверхностей, то гипотеза Каратеодори верна и в том случае, когда на поверхности есть омбилическая точка, удовлетворяющая условию

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Лоясевича ... Иными словами, и для аналитических поверхностей вопрос как бы остается не закрытым. Во всяком случае — психологически.

Впрочем, с «общим» настроением в полной мере коррелирует и наш собственный «горький опыт». Когда коллеги рассказали нам о гипотезе Каратеодори и драматичной ее истории, мы с энтузиазмом взялись за изучение работы Клотц. Поначалу хотелось верить, что единственная проблема, оставшаяся после указанной работы без удовлетворительного решения, — это проблема ясного изложения. Такая проблема действительно осталась. Но утверждать, что она единственная, мы уже не можем — это означало бы грешить перед истиной ... Обращаясь снова и снова к уже знакомым нам рассуждениям, мы каждый раз замечали, что в какой-то момент почва начинала уходить из-под наших ног, концы с концами не соединялись, а индукционный шаг, как нам казалось, обретал такую самодостаточность, что уже никакие узы не связывали его ни с прошлым, ни с будущим ...

Мы не станем судить здесь о том, кто истинный виновник в сложившемся положении — непонятые авторы или непонятливые читатели, вроде нас. Чтобы разобраться в этом, нам потребовалось бы намного больше времени, чем на решение самой задачи, и мы оставляем подобные исследования тем, кто имеет к этому вкус. Нам же интересно было только одно — верна гипотеза или нет. И мы очень надеемся, что наша работа позволит внести ясность в этот вопрос. Во-первых, имея в виду аналитические поверхности, мы со всей ответственностью заявляем, что Каратеодори был прав. Во-вторых, мы знаем, как это может быть строго доказано. В-третьих, мы намерены изложить здесь доказательство, которое, на наш взгляд, убедит любого читателя, если только он действительно готов преодолеть вместе с нами долгий и совсем не легкий путь. Но мы не сможем отправиться в наше путешествие с легким сердцем, если забудем о тех, кому обязаны этой возможностью, кто открыл для нас истинные глубины необычайно красивой проблемы, подаренной нам знаменитым классиком. Теперь, когда мы знаем ответ и знаем дорогу, ведущую к нему, мы со всей определенностью утверждаем, что смогли пройти весь путь до конца только потому, что важнейшие его этапы были изведаны задолго до нас.

Чтобы освободить себя от скучной обязанности каждый раз указывать, кому именно «принадлежит» та или иная конкретная мысль, то или иное наблюдение или рассуждение, Клотц в упомянутой выше статье заранее предупреждает читателя, что будет идти путем Бола, исправляя и дополняя его в тех местах, где это окажется необходимым. Следуя этому замечательному примеру, мы тоже заранее объявляем, что будем идти, пока это возможно, «вдоль» работы Клотц, наслаждаясь ландшафтами, обустроенными первопроходцами, и описывая увиденное своими словами. Но после начального этапа исследования наши пути разойдутся. Далее нам придется решительно изменить логическую схему изложения, взяв за основу те дополнительные «резервы вращения», которые доселе таили в себе симпатичные алгебраические линии, естественно возникающие в обсуждаемой нами геометрической задаче. Кроме того, мы должны будем полнее использовать теорию Вейерштрасса неявных аналитических функций. Наконец, для достижения большей ясности и простоты, мы применим иные преобразования при разрешении особенностей указанных выше алгебраических линий. Тем не менее, и здесь мы часто будем опираться на многое из того, чему научились у Тиллы Клотц.

Наша главная задача в этой статье — убедить читателя в справедливости гипотезы Каратеодори для аналитических поверхностей. Но, быть может, еще в большей степени автору хотелось поделиться тем очарованием, которое он сам испытал, познакомившись поближе с этой захватывающей проблемой, где в чудесном переплетении заново соединились разные области математики, где все красиво — и живые образы дифференциальной геометрии, и строгая логика комбинаторных схем, и анализ, который выплескивается порой за пределы «действительных» чисел, чтобы в таинственных недрах «мнимых» величин найти себе оправдание и опору ... И пусть простит нам опытный и зрелый исследователь наши наивно-восторженные пассажи и восклицания, и лишь одна его снисходительно-усталая улыбка будет нам маленьким упреком. Но прежде всего мы будем помнить о юном читателе, у которого все еще впереди. Ему и посвящаются эти строки ...

***

Очень удобно, когда текст, занимающий многие страницы, снабжают тем или иным путеводителем, например, в виде краткого описания его структуры и содержания основных разделов. Мы надеемся, что в данном случае таким подспорьем читателю послужит приводимая ниже схема нашей статьи.

Как можно заметить, помимо специальных вопросов, прямо относящихся к нашей задаче, мы касаемся и ряда общих тем. Мы очень надеемся, что это, слегка увеличив статью, существенно сэкономит время ее читателю.

§ 1. От геометрии к анализу

Здесь мы расскажем о тех давно известных классических конструкциях, которые сводят нашу геометрическую задачу к замечательной аналитической проблеме. Более подробное и «традиционное» изложение этих вопросов можно найти, например, в обзоре [6]. Мы же хотим, не вдаваясь в детали и опуская вычисления, пройти вместе с нашим читателем галерею славных имен и помочь ему разобраться в том, каким образом задачу «геометрии в целом» можно заменить задачей локального характера. Как мы увидим, дело сводится к изучению индекса особой точки специального векторного поля на обычной евклидовой плоскости, которое допускает удивительно компактное и симметричное выражение при помощи двух гиперболических дифференциальных операторов второго порядка, представленных в канонической форме.

1.1. Индекс омбилической точки. В каждой неомбилической точке среди всех направлений на поверхности выделяются два главных, а именно направление меньшей кривизны и ортогональное ему направление большей кривизны [7]. Так внешний вид поверхности определяет в «неомбилической» ее области два вполне конкретных поля направлений. Интегральные линии этих полей называют линиями кривизны. Все вместе они дважды покрывают неомбилическую область поверхности, образуя на ней ортогональную сеть, имеющую всюду одинаковое и очень простое локальное устройство. Совсем иначе выглядит картина вблизи тех мест, где располагаются омбилические точки и где нет возможности выделить главные направления. Но об этом — чуть позже, а пока подчеркнем, что сеть линий кривизны и полный ансамбль омбилических точек — это первое, что возникает на поверхности, дополняя ее внутреннюю геометрию, когда она устраивается в трехмерном евклидовом пространстве, и это — важнейшие ее черты, характерные для ее внешнего облика.

Рассмотренных понятий уже вполне достаточно, чтобы сформулировать целый ряд естественных вопросов, относящихся к внешней геометрии поверхностей. Оставляя в стороне проблемы «геометрии в целом», мы укажем здесь лишь на одну задачу «локальной геометрии». Представим себе изолированную омбилическую точку и выделим на поверхности содержащую ее маленькую область. Интересно было бы выяснить, какие бывают узоры, образуемые линиями кривизны в указанной области. Никто не знает ответа на этот вопрос даже в том случае, когда поверхность аналитическая и локально может быть заменена полиномиальной. Впрочем, непосредственно к нашей теме относится лишь часть этой общей проблемы, причем, как мы сейчас увидим, самая простая.

Индексом изолированной омбилической точки мы будем считать вращение относительно нее любого из полей главных направлений, которое выражается одним и тем же для обоих полей целым или полуцелым числом. Если поверхность замкнута и все ее омбилические точки изолированы, то сумма их индексов согласно теореме Пуанкаре — Хопфа равна эйлеровой характеристике поверхности — топологическому инварианту, который для сферы равен двум. Поскольку замкнутая выпуклая поверхность гомеоморфна сфере, то гипотеза Каратеодори, как мы видим, действительно вытекает из гипотезы Левнера, согласно которой индекс изолированной омбилической точки не бывает больше единицы. На самом деле именно это утверждение и служит предметом обсуждения практически во всех работах, посвященных гипотезе Каратеодори. В этом плане не будет исключением и наша статья.

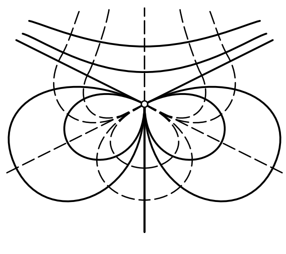


Рис. 1.1. ind $= 3/2$.

Гипотеза об индексе омбилической точки, безусловно, является более глубоким и содержательным утверждением, чем исходная гипотеза. Во-первых, оно никак не связано с топологией поверхности, поскольку относится к ее малой части. Во-вторых, оно указывает важную причину, по которой на сфероподобной поверхности — уже не обязательно выпуклой — должна быть вторая омбилическая точка. В-третьих, оно доставляет нетривиальную информацию об устройстве сети линий кривизны около изолированной омбилической точки. В самом деле, если какое-либо из двух семейств линий кривизны вблизи омбилической точки распадается на несколько узловых секторов, e эллиптических и h гиперболических, то индекс этой точки можно посчитать по формуле

$$\mathrm{ind} = 1 + \frac{e-h}{2}, \tag{1.1}$$

которую связывают с именем Бендиксона. Как мы видим, неравенство $\mathrm{ind} \leq 1$ означает, что число эллиптических секторов не может превосходить числа гиперболических: $e \leq h$. Например, топологическое строение сети линий кривизны по крайней мере аналитической поверхности никогда не бывает таким, как это изображенно на рис. 1.1.

1.2. Главные направления. Дифференциальные уравнения главных направлений обретают особенно компактную и элегантную форму, когда для описания поверхности используются так называемые координаты Бонне. Чуть ниже мы расскажем, как строятся эти координаты в окрестности точки, где гауссова кривизна поверхности отлична от нуля. Между тем, интересующая нас омбилическая точка вполне может оказаться «плоской». В таком случае полезно содержащий ее кусок поверхности подвергнуть инверсии относительно какой-нибудь сферы — лишь бы только ее центр не лежал в касательной плоскости к поверхности в исследуемой точке. В результате плоская точка превратится в омбилическую точку новой поверхности, где кривизна будет уже строго положительна. При этом новая сеть линий кривизны около нее сохранит топологическую структуру прежней сети, так что индекс новой точки окажется равным индексу исходной.

Итак, мы вправе ограничиться изучением такой изолированной омбилической точки, в которой кривизна поверхности больше нуля. В этом случае сферическое отображение Гаусса представляет собой диффеоморфизм малой окрестности нашей точки на некоторую область единичной сферы. Образ самой точки мы назовем северным полюсом сферы. Через центр сферы проведем плоскость, ортогональную диаметру, соединяющему северный полюс с противоположным ему южным. Сочетая сферическое отображение со стереографической проекцией сферы из южного ее полюса на описанную плоскость, мы получим диффеоморфизм между куском поверхности и некоторой плоской областью. Введя теперь обычные декартовы координаты для точек плоскости, мы можем объявить их координатами соответствующих точек поверхности. Это и будут координаты Бонне. Начало декартовых координат мы выберем в центре сферы. Тогда координаты Бонне исследуемой точки будут равны нулю.

Для каждой точки P нашей поверхности посчитаем скалярное произведение $\mu(P)$ ее радиуса-вектора и построенного в ней вектора нормали. Так на поверхности возникает очень важная для нее функция, которую называют опорной функцией Минковского. Если точка P расположена не слишком далеко от фиксированной нами омбилической точки, мы найдем ее координаты Бонне (u, v) и вместо $\mu(P)$ напишем $\mu(u, v)$. В результате опорная функция соответствующего куска поверхности, который мы считаем «достаточно гладким», превращается в обыкновенную гладкую функцию двух вещественных переменных. Обыкновенная она потому, что среди других гладких функций не выделяется никакими особенными чертами. Но для той части поверхности, которой она обязана своим происхождением, эта функция имеет первостепенное значение, являясь для нее, как бы, аналитическим двойником, содержащим в себе всю информацию о своем геометрическом прообразе. Например, если мы «нормируем» функцию Минковского, полагая

$$\beta(u, v) = (1 + u^2 + v^2)\mu(u, v), \tag{1.2}$$

то получим так называемую функцию Бонне изучаемой нами части поверхности. Она интересна для нас тем, что направления линий кривизны, выраженные в координатах Бонне, — это в точности собственные направления симметрической матрицы

$$\begin{pmatrix} \beta_{uu} & \beta_{uv} \\ \beta_{uv} & \beta_{vv} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Для омбилической точки, имеющей координаты $u = v = 0$, когда все направления вправе считать себя «главными», эта матрица скалярная: диагональные ее элементы равны между собой, остальные — равны нулю. Изолированность омбилической точки означает, что для всех других близких к ней точек матрица не является скалярной.

1.3. Удвоение аргумента. Теперь легко найти выражения для главных направлений $du : dv$ в точке (u, v). В самом деле, каждому из них соответствует собственное число указанной выше матрицы, и если для направления $du : dv$ оно равно λ, то

$$\beta_{uu}\, du + \beta_{uv}\, dv = \lambda\, du, \quad \beta_{uv}\, du + \beta_{vv}\, dv = \lambda\, dv. \tag{1.4}$$

Умножая первое из этих соотношений на dv, второе — на du, а затем вычитая результаты, мы придем к уравнению

$$(\beta_{uu} - \beta_{vv})\, dudv + \beta_{uv}(dv^2 - du^2) = 0. \tag{1.5}$$

Решая это квадратное уравнение и замечая, что при $u^2 + v^2 \neq 0$ его дискриминант $(\beta_{uu} - \beta_{vv})^2 + (2\beta_{uv})^2$ строго больше нуля, мы находим два главных направления $du : dv$, которые ортогональны не только на исходной поверхности, но и на координатной плоскости (u, v).

Чтобы освободиться от радикалов и максимально упростить задачу, мы воспользуемся услугами комплексной арифметики. А именно, рассмотрим два комплексных числа $du + i\, dv$ и $A + iB$, где

$$A = \beta_{uu} - \beta_{vv}, \quad B = 2\beta_{uv}. \tag{1.6}$$

Возвращаясь к уравнению (1.5), мы можем теперь отметить, что оно имеет простой геометрический смысл. А именно, оно показывает нам, что радиус-вектор числа $(du + i\, dv)^2$ ортогонален вектору $B - iA$, а значит, коллинеарен вектору $A + iB$. Но аргумент квадрата $(du + i\, dv)^2$ равен удвоенному аргументу комплексного числа $du + i\, dv$. Поэтому индекс поля $du : dv$ составляет ровно половину от индекса поля (A, B). Ясно, что здесь не имеет значения, о каком из двух главных направлений $du : dv$ идет речь, поскольку они ортогональны и после удвоения их полярных углов становятся коллинеарными.

Таким образом, гипотеза Левнера об индексе омбилической точки, а тогда и гипотеза Каратеодори о двух омбилических точках будут доказаны, если мы убедимся в справедливости неравенства

$$\operatorname{ind}(A, B) \leq 2. \tag{1.7}$$

То обстоятельство, что функция $\beta(u, v)$ возникла у нас как функция Бонне некоторой поверхности, не придает соответствующему полю (A, B) никаких дополнительных специфических черт, поскольку любое векторное поле вида (1.6) может быть связано в описанном выше смысле с подходящей поверхностью.

В этом отношении можно утверждать лишь одно — аналитическим поверхностям соответствуют аналитические функции Бонне и определяемые ими векторные поля.

Иными словами, вся геометрия для нас в этом месте заканчивается. Теперь можно полностью забыть обо всем, что говорилось выше, и начать «с чистого листа». Перед нами — новая задача, на наш взгляд, совершенно восхитительная, мимо которой невозможно пройти, хотя бы не полюбовавшись на нее. Впрочем, судите сами.

Нам дана вещественная функция $\beta(u,v)$, определенная при всех достаточно малых вещественных значениях переменных u и v. Считая ее дважды гладкой, построим по ней в соответствии с формулами (1.6) непрерывное векторное поле (A,B). Предположим, что начало координат является для него изолированной особой точкой. Ничего другого больше не нужно. Требуется доказать, что индекс этого поля в нуле удовлетворяет неравенству (1.7).

То ли своей очаровательной простотой, то ли пленительно-обманчивой доступностью, но эта задача оказала на автора столь магическое воздействие, что освободиться от ее чар можно было только одним способом — найти ее решение. Хотя бы в аналитическом случае. И если не удастся «найти» его у других, то придумать свое ...

1.4. Полярные координаты. Чтобы посчитать индекс поля (A,B) относительно начала координат, мы заставим точку (u,v) пробежать против часовой стрелки маленькую окружность с центром в нуле и посмотрим, сколько раз вектор (A,B) обернется вокруг начала координат в том же «положительном» направлении. Нам удобнее будет следить за движением вектора, если в плоскости переменных u,v мы перейдем к полярным координатам ϱ,ϑ, полагая $u=\varrho\cos\vartheta$ и $v=\varrho\sin\vartheta$. Теперь интересующее нас движение происходит при фиксированном значении полярного радиуса $\varrho>0$ и мы должны проследить за вращением вектора (A,B), пока угловая переменная пробегает какой-нибудь отрезок длины 2π.

Чтобы найти закон движения нашего вектора, нужно лишь переписать формулы (1.6) в новых переменных. Пусть $\omega(\varrho,\vartheta)$ означает функцию $\beta(u,v)$, выраженную в полярных координатах:

$$\omega(\varrho,\vartheta)=\beta(\varrho\cos\vartheta,\varrho\sin\vartheta). \tag{1.8}$$

В дальнейшем функции ω переменных ϱ и ϑ предстоит исполнить роль первичного источника всех других аналитических и геометрических объектов, которые нам придется изучить в нашей работе. Главными из них будут две функции X и Y, определяемые равенствами

$$X=\omega_{\vartheta\vartheta}+\varrho\omega_\varrho-\varrho^2\omega_{\varrho\varrho},\quad Y=\varrho\omega_{\varrho\vartheta}-\omega_\vartheta. \tag{1.9}$$

Как легко проверить элементарными вычислениями, зависимость вектора (A,B) от полярных переменных ϱ и ϑ может быть представлена теперь в следующей замечательной форме:

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\frac{1}{\varrho^2}\begin{pmatrix}\cos 2\vartheta & -\sin 2\vartheta\\ \sin 2\vartheta & \cos 2\vartheta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-X\\2Y\end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Эта формула замечательна тем, что позволяет освободить нашу задачу от сопутствующих ей тривиальных обстоятельств. А именно, мы в состоянии теперь избавиться от двойки в неравенстве (1.7), которая появилась в нем только потому, что порядок дифференциальных операторов, определяющих векторное поле (A, B), равен двум.

В самом деле, пусть N означает число оборотов, которое точка (X, Y) совершает вокруг начала координат в положительном направлении, пока полярный угол ϑ пробегает период 2π. Тогда число аналогичных оборотов, совершаемых точкой $(-X, 2Y)$, очевидно, будет равно $-N$, а что касается вектора (A, B), то формула (1.10) добавляет ему еще два лишних оборота против часовой стрелки. Таким образом,

$$\operatorname{ind}(A, B) = 2 - N, \tag{1.11}$$

так что неравенство (1.7) эквивалентно более приятному для глаза неравенству

$$N \geq 0. \tag{1.12}$$

1.5. Аналитические поверхности. Начиная с этого момента мы считаем функцию $\beta(u, v)$ аналитической в том смысле, что она представима в виде суммы двойного степенного ряда, который при достаточно малом $R > 0$ абсолютно сходится для всех значений переменных u и v, удовлетворяющих неравенствам $|u| < R$ и $|v| < R$. Поскольку $A = B = 0$ при $u = v = 0$, квадратичная часть этого ряда, как показывают формулы (1.6), пропорциональна сумме $u^2 + v^2$ и в выражениях A и B не участвует. Что касается линейной части ряда и, тем более, его свободного члена, то они просто исчезают при двойном дифференцировании. Иными словами, мы вполне можем опустить свободный член ряда $\beta(u, v)$, его линейную составляющую и даже квадратичную часть, и это никак не отразится на поле (A, B). Таким образом, мы считаем, что ряд, представляющий функцию $\beta(u, v)$, имеет следующий вид:

$$\beta(u, v) = \sum_{i+j \geq k} \beta_{ij} u^i v^j, \quad \text{где} \quad k \geq 3, \tag{1.13}$$

причем хотя бы один из «младших» коэффициентов этого ряда отличен от нуля.

В результате перехода к полярным координатам функция $\beta(u, v)$ согласно (1.8) превращается в новую функцию $\omega(\varrho, \vartheta)$, определенную в области $0 \leq \varrho < R$, $-\infty < \vartheta < +\infty$. В этой «полосе» она допускает представление в виде суммы «тригонометрического» ряда, который получается из ряда (1.13) заменой каждого его монома $u^i v^j$ выражением $\varrho^{i+j} \cos^i \vartheta \sin^j \vartheta$. Новый ряд, как и прежний, сходится абсолютно, а значит, мы вправе произвольно переставлять и группировать его элементы. Например, если расположить слагаемые ряда по возрастающим степеням полярного радиуса, предварительно приведя подобные, мы придем к разложению

$$\omega = \sum_{m=k}^{\infty} \omega_m(\vartheta) \varrho^m, \tag{1.14}$$

где $\omega_m(\vartheta)$ означают тригонометрические многочлены степени не выше m. Заметим, что первый из них, отвечающий индексу $m = k$, в соответствии с нашей договоренностью отличен от тождественного нуля.

Как легко убедиться, в рассматриваемой нами области ряд (1.14) можно почленно дифференцировать по каждой из полярных переменных, причем сколько угодно раз. В частности, для функций X и Y, определенных выше формулами (1.9), это означает, что теперь они выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{m=k}^{\infty} (\omega''_m(\vartheta) - m(m-2)\omega_m(\vartheta))\varrho^m, \\ Y &= \sum_{m=k}^{\infty} (m-1)\omega'_m(\vartheta)\varrho^m. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Для дальнейшего исключительно важно подчеркнуть, что функция ω, а вслед за ней и функции X и Y допускают «естественное» аналитическое продолжение в двумерно-комплексную область, содержащую все комплексные пары (ϱ, ϑ), удовлетворяющие неравенству $|\varrho| e^{|\operatorname{Im}\vartheta|} < R$. В этой области они представляются все теми же рядами (1.14) и (1.15), с которыми можно производить любые «разумные» действия.

Итак, подводя итоги нашим приготовлениям, еще раз уточним, что мы имеем и что хотим. Прежде всего у нас есть функция ω, представленная рядом (1.14), о происхождении и свойствах которого мы только что говорили. Далее, эта функция согласно формулам (1.9) порождает две новые функции X и Y, чьи аналитические выражения имеют вид (1.15). Теперь для каждого достаточно малого $\varrho > 0$ построим на плоскости (x, y) замкнутую линию $C(\varrho)$, полагая

$$x = X(\varrho, \vartheta), \quad y = Y(\varrho, \vartheta), \tag{1.16}$$

и предположим, что ни одна из этих линий не проходит через начало координат. Символом $\operatorname{ind} C(\varrho)$ мы обозначим число оборотов, которое совершает линия $C(\varrho)$ в положительном направлении вокруг начала координат за один период. В зависимости от настроения и контекста мы будем называть это целое число либо вращением линии $C(\varrho)$, либо ее индексом. Ясно, что индекс линии $C(\varrho)$ не зависит от ϱ. Нам остается лишь доказать, что он неотрицателен:

$$\operatorname{ind} C(\varrho) \geq 0. \tag{1.17}$$

Именно это неравенство будет итогом нашего исследования. Но пока нас отделяет от него «долгий и совсем не легкий путь». Хочется верить, что мы придем к заветной цели вместе с нашим читателем ...

§ 2. Введение в доказательство Бола и Клотц

Поведение линии $C(\varrho)$ во многом определяется свойствами ее «главного контура», который описывается одним лишь «младшим» тригонометрическим многочленом $\omega_k(\vartheta)$ ряда ω. Так, в случае «общего положения», когда этот контур не проходит через начало координат, его индекс равен индексу самой линии, и наша задача сводится к очень простому и симпатичному вопросу. О нем прежде всего и пойдет речь в этом параграфе.

2.1. Вращение правильной линии. На плоскости (x, y) рассмотрим прямую линию L и выберем на ней определенное направление $\vec{\tau}$. Пусть $\vec{\nu}$ означает такой вектор нормали к L, для которого пара $(\vec{\nu}, \vec{\tau})$ ориентирована так же, как оси x и y. Ту из двух открытых полуплоскостей, примыкающих к линии L, на которую указывает вектор $\vec{\nu}$, мы назовем нижней, другую же — будем считать верхней (рис. 2.1).

Дугой мы будем называть кривую на плоскости (x, y), параметризованную некоторым числовым отрезком. Дугу, как и любую другую параметризованную линию, мы всегда будем считать направленной в сторону возрастания параметра. Пусть дуга такова, что ее начало и конец лежат на прямой L, а все остальные ее точки оказались в нижней полуплоскости. В этом случае мы скажем, что дуга опирается на L снизу. Такую дугу мы назовем правильной относительно прямой L, если ее конец располагается строго справа от ее начала. Если же речь идет о произвольной направленной линии на той же плоскости, то мы считаем ее правильной относительно данной ориентированной прямой, если каждая ее дуга, опирающаяся снизу на эту прямую, правильная. Пример такой линии приведен на рис. 2.2.

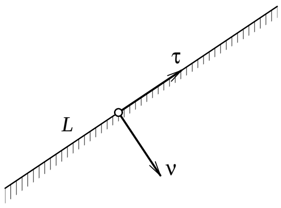


Рис. 2.1. Низ и верх.

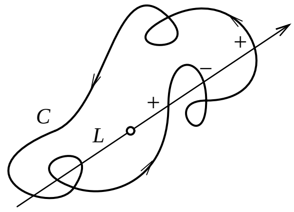


Рис. 2.2. Правильная линия.

В дальнейшем нам придется иметь дело лишь с аналитическими или, в крайнем случае, кусочно-аналитическими линиями, у которых нет прямолинейных участков. Любая дуга такой линии может иметь с той или иной прямой лишь конечное число общих точек. Если линия замкнута, то для подсчета ее вращения, или индекса, относительно точки, через которую она не проходит, достаточно совершить следующие действия: (1) провести через эту точку прямую и ориентировать ее; (2) отметить все моменты в течение одного периода, когда кривая пересекает прямую справа от изучаемой точки; (3) посчитать разность между числом пересечений снизу вверх и числом пересечений в обратном направлении. Это и будет искомый индекс. Например, для той линии, что указана на рис. 2.2, ее индекс относительно точки, отмеченной на том же рисунке, равен единице. Мы надеемся, что после этих замечаний у читателя не возникнет сомнений в справедливости следующего утверждения.

Лемма 2.1. *Замкнутая линия, правильная по отношению к какой-нибудь направленной прямой, имеет неотрицательный индекс относительно любой точки прямой, не принадлежащей самой линии.*

Говоря об индексе той или иной замкнутой линии C, мы не станем больше указывать, относительно какой точки он вычисляется, поскольку впредь всегда будем иметь в виду вращение вокруг начала координат, обозначая это число символом $\operatorname{ind} C$.

Две замкнутые линии, не проходящие через начало координат, условимся называть гомотопически эквивалентными, если существует непрерывная деформация одной из них в другую, при которой «промежуточные» линии также не пересекают начала координат. Ясно, что в таком случае наши линии имеют общий индекс.

Сочетание гомотопической инвариантности индекса с предыдущей леммой, в конечном счете, будет служить нам основным средством исследования вращений замкнутых линий.

2.2. Случай общего положения. Уже сейчас мы найдем первые применения нашим наблюдениям. Возвращаясь к интересующей нас линии $C(\varrho)$, заметим, что при близких к нулю значениях полярного радиуса ϱ она слишком мала, чтобы можно было хоть что-то в ней разглядеть. Впрочем, с этой проблемой легко справиться — достаточно поделить уравнения нашей линии на ϱ^k. В результате мы получим гомотетичную ей «приведенную» линию $\Gamma(\varrho)$, имеющую, с одной стороны, уже вполне приемлемые размеры, а с другой — тот же индекс, что и исходная линия:

$$\operatorname{ind} C(\varrho) = \operatorname{ind} \Gamma(\varrho). \tag{2.1}$$

При малых ϱ новые линии, как показывают формулы (1.16) и (1.15), практически сливаются с контуром Γ_0, который описывается уравнениями

$$x = p_0(\vartheta), \quad y = q_0(\vartheta), \tag{2.2}$$

где $p_0(\vartheta)$ и $q_0(\vartheta)$ означают тригонометрические многочлены от угловой переменной ϑ, определяемые формулами

$$\begin{aligned} p_0(\vartheta) &= \omega_k''(\vartheta) - k(k-2)\omega_k(\vartheta), \\ q_0(\vartheta) &= (k-1)\omega_k'(\vartheta). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ясно, что этому «предельному» контуру Γ_0 необходимо уделить особое внимание. Мы назовем его главным контуром семейства линий $C(\varrho)$. Следующая лемма отражает основное — для нас — его свойство.

Лемма 2.2. *Контур Γ_0 представляет собой линию, правильную относительно произвольно ориентированной оси абсцисс.*

Доказательство. Предположим, что нашлись такие два значения $\vartheta_1 < \vartheta_2$ полярного угла, что $y(\vartheta_1) = y(\vartheta_2) = 0$ и $y(\vartheta) < 0$ для всех ϑ из интервала $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$. В терминах функции ω_k это означает, что $\omega_k'(\vartheta_1) = \omega_k'(\vartheta_2) = 0$ и $\omega_k'(\vartheta) < 0$ при $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$. В таком случае, очевидно, $\omega_k''(\vartheta_1) \le 0$ и $\omega_k''(\vartheta_2) \ge 0$. Отсюда

$$x(\vartheta_2) - x(\vartheta_1) = \omega_k''(\vartheta_2) - \omega_k''(\vartheta_1) - k(k-2)\int\limits_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \omega_k'(\vartheta)d\vartheta > 0,$$

так что контур Γ_0 правильный относительно положительно ориентированной оси абсцисс. Точно так же устанавливается правильность контура и по отношению к противоположному направлению той же оси. Лемма доказана.

Большая редкость, когда случайно нарисованная нами линия пройдет через заданную точку. Так и контур Γ_0, как правило, не проходит через начало координат. И если это действительно так, то мы вправе говорить об его индексе, а поскольку он служит пределом для контуров $\Gamma(\varrho)$ при $\varrho \to 0$, его индекс будет индексом и для этих «приведенных» линий:

$$\operatorname{ind} \Gamma(\varrho) = \operatorname{ind} \Gamma_0. \tag{2.4}$$

Сопоставляя теперь равенства (2.1) и (2.4), а также опираясь на две предыдущие леммы, мы приходим к первому важному выводу.

Лемма 2.3. *Если главный контур* Γ_0 *семейства* $C(\varrho)$ *не проходит через начало координат, то*

$$\operatorname{ind} C(\varrho) = \operatorname{ind} \Gamma_0 \geq 0. \tag{2.5}$$

Итак, если мы имеем «обычный» случай, то наше исследование в этом месте заканчивается. Но цель у нас иная — мы хотим доказать, что вывод, легко полученный нами в типичном случае, справедлив всегда. Теперь мы предположим, что контур Γ_0 при некоторых значениях параметра ϑ пересекает начало координат. Вблизи таких значений поведение линии $C(\varrho)$, как и «эквивалентной» ей приведенной линии $\Gamma(\varrho)$, даже при очень малой величине полярного радиуса ϱ уже не определяется в нужной нам степени главным контуром. Здесь требуется более детальное исследование, которое будет опираться на достаточно глубокие свойства аналитических функций двух переменных. В оставшейся части параграфа мы проведем лишь необходимую для такого анализа подготовительную работу. Кроме того, мы познакомимся здесь с теми конструкциями и аргументами, которые пригодятся нам и на дальнейших этапах нашего исследования.

2.3. Классификация особенностей. Как мы договаривались, функция $\omega_k(\vartheta)$ отлична от тождественного нуля. Более того, мы можем и будем считать, что она не является постоянной, поскольку иначе контур Γ_0 сводился бы к точке, лежащей на оси абсцисс в стороне от начала координат, а это — тривиальный частный случай уже решенной задачи. Легко понять, что теперь ни один из тригонометрических многочленов $p_0(\vartheta)$ и $q_0(\vartheta)$ не может быть тождественно равен нулю, а значит, каждый из них имеет — в пределах одного периода — не более $2k$ вещественных корней, даже с учетом их кратности. Выберем среди них общие корни наших многочленов. Именно в те моменты, когда угловая переменная совпадает с одним из таких корней, контур Γ_0 проходит через начало системы отсчета. Мы назовем эти моменты особыми значениями начального, или нулевого, уровня.

Пусть α_0 будет одним из них:

$$p_0(\alpha_0) = 0, \quad q_0(\alpha_0) = 0. \tag{2.6}$$

Чтобы двигаться дальше, мы должны хорошо представлять, как выглядит главный контур «вблизи» каждой особой точки. Различных вариантов здесь не так уж и много.

Мы скажем, что значение α_0 полярного угла является особенностью типа $(0, +)$, если $q_0'(\alpha_0) > 0$. Иначе говоря, в момент α_0 линия Γ_0 переходит из нижней полуплоскости в верхнюю, имея при этом строго положительную вертикальную компоненту скорости.

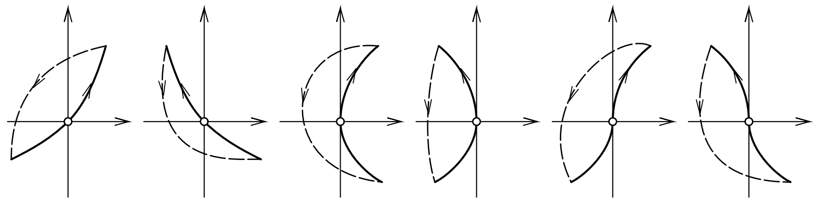


Рис. 2.3. Особенности типа $(0, +)$.

На рис. 2.3 приведены все возможные виды картинок, соответствующих особенностям типа $(0,+)$. Близкие к особому значению участки главного контура изображены сплошной линией. Для экономии места на этом же рисунке мы указали пунктирными линиями некоторые вспомогательные дуги, играющие в дальнейшем важную роль. Мы подробно расскажем о них чуть ниже.

Следующий класс особенностей вполне аналогичен предыдущему. А именно, будем считать, что особенность α_0 имеет тип $(0,-)$, если $q_0'(\alpha_0) < 0$. Теперь в момент α_0 линия Γ_0 переходит, напротив, из верхней полуплоскости в нижнюю, имея строго отрицательную вертикальную компоненту скорости. Этот класс особенностей дает, очевидно, те же самые локальные формы главного контура, что и в предыдущем случае, меняя лишь их направленность. Эти «формы» иллюстрирует рис. 2.4. Как можно заметить, «вспомогательные» пунктирные линии выглядят здесь уже совсем иначе.

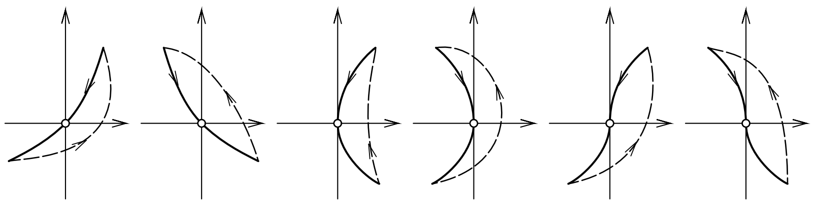


Рис. 2.4. Особенности типа $(0,-)$.

Как мы вскоре убедимся, особенности типа $(0,\pm)$ не доставят нам серьезных хлопот. Во всяком случае, мы завершим их исследование уже в этом параграфе. Более «перспективными» окажутся те особенности α_0, для которых $q_0'(\alpha_0) = 0$. И если объем нашей статьи когда-нибудь выйдет за пределы разумных границ, то виной тому будут именно такие особенности. Для каждой из них, как показывают соотношения (2.6) и (2.3),

$$\omega_k(\alpha_0) = \omega_k'(\alpha_0) = \omega_k''(\alpha_0) = 0. \tag{2.7}$$

Отсюда следует, что функция $\omega_k(\vartheta)$ допускает представление

$$\omega_k(\vartheta) = A_0(\vartheta - \alpha_0)^{n_0}(1 + O(\vartheta - \alpha_0)), \tag{2.8}$$

где $A_0 \neq 0$ и $n_0 \geq 3$, а тогда функции $p_0(\vartheta)$ и $q_0(\vartheta)$ могут быть записаны в следующей асимптотической форме:

$$\begin{aligned} p_0(\vartheta) &= A_0 n_0(n_0 - 1)(\vartheta - \alpha_0)^{n_0 - 2}(1 + O(\vartheta - \alpha_0)), \\ q_0(\vartheta) &= A_0 n_0(k - 1)(\vartheta - \alpha_0)^{n_0 - 1}(1 + O(\vartheta - \alpha_0)). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Вид контура Γ_0 около таких особых точек, очевидно, полностью определяется четностью номера n_0 и знаком коэффициента A_0. При нечетном n_0 будем считать α_0 особенностью типа $(1,+)$ или $(1,-)$, смотря по тому, $A_0 > 0$ или $A_0 < 0$. В случае же четного номера n_0 мы считаем α_0 особенностью типа $(2,+)$ или $(2,-)$ в той же зависимости от знака A_0. Все возможные здесь варианты изображены на рис. 2.5.

Эти четыре типа особенностей являются для нас главными, как указано в надписи к последнему рисунку, не только по той причине, что практически все дальнейшее наше исследование будет посвящено именно им. Они «главные» еще

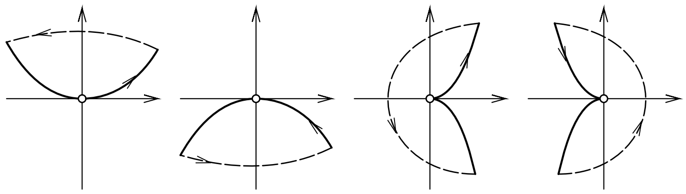


Рис. 2.5. Главные типы особенностей.

и потому, что новые линии, которые будут возникать на каждом этапе нашего пути, почти всегда будут иметь в точности такие же особенности. Во всяком случае каждый раз, когда мы встретим иные особенности, мы легко сможем довести их исследование до конца, не переходя к следующим этапам.

2.4. Перестройка главного контура. Теперь, когда мы познакомились со всеми особенностями «начального уровня», мы начинаем подготовку к следующему этапу исследования. Как мы помним, наша конечная цель — доказательство неотрицательности индекса контура $C(\varrho)$. Но при малых значениях полярного радиуса этот контур практически стянут в точку и устройство его почти невозможно разглядеть. Чтобы понапрасну не перенапрягать зрение себе и читателю, мы будем — до поры до времени — говорить о приведенном контуре $\Gamma(\varrho)$, имеющем тот же индекс. Остаток параграфа мы посвятим решению трех задач. Во-первых, общее вращение контура $\Gamma(\varrho)$ мы намерены разложить в суперпозицию, так скажем, его «глобального» вращения и нескольких «локальных» вращений, каждое из которых связано с отдельной особой точкой. Во-вторых, мы докажем, что глобальная компонента вращения неотрицательна. В-третьих, уже здесь, в этом параграфе, мы должны убедиться, что и локальная компонента вращения, отвечающая особенности типа $(0, \pm)$, также не может быть меньше нуля. Таким образом, после выполнения намеченного плана нам останется исследовать лишь особые точки типа $(1, \pm)$ и $(2, \pm)$.

Выберем какое-нибудь неособое значение ϑ^* угловой переменной и отметим все особенности α_0, оказавшиеся строго между ϑ^* и $\vartheta^* + 2\pi$. Пусть ε_0 означает настолько малое положительное число, что для всех отмеченных особенностей α_0 заключающие их отрезки $[\alpha_0 - \varepsilon_0, \alpha_0 + \varepsilon_0]$, во-первых, не пересекаются между собой, а во-вторых, содержатся в интервале между ϑ^* и $\vartheta^* + 2\pi$. Если мы изобразим все эти особенности в виде точек на «тригонометрической» окружности, у нас получится что-то вроде рис. 2.6.

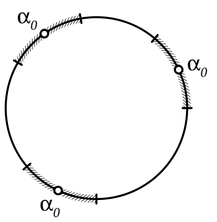


Рис. 2.6. Изоляция особенностей.

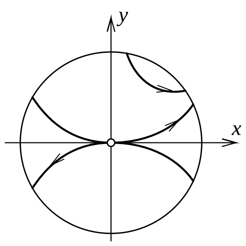


Рис. 2.7. Локализующий диск.

В дальнейшем нам придется не раз уточнять, насколько малым должно быть число ε_0. А пока, каким бы оно в итоге ни оказалось, с каждой особенностью α_0 из рассмотренного выше интервала свяжем дугу $\gamma^*(\alpha_0)$ контура Γ_0, описываемую уравнениями

$$x = p_0(\vartheta), \quad y = q_0(\vartheta), \quad \text{где} \quad |\vartheta - \alpha_0| \le \varepsilon_0. \tag{2.10}$$

На плоскости, где лежат изучаемые нами линии, построим диск B с центром в нуле, взяв его настолько маленьким, чтобы в его пределах контур Γ_0 не пересекал осей координат, за исключением тех случаев, когда он проходит через общее их начало (рис. 2.7). Уменьшая, если нужно, число ε_0, будем считать, что для каждой особенности α_0 локализующая ее дуга $\gamma^*(\alpha_0)$ лежит внутри круга B. Ясно, что тогда «половина» этой дуги, предшествующая моменту α_0, располагается в одной из открытых четвертей, на которые плоскость разбивается осями координат, другая же ее часть, следующая за этим моментом, целиком расположена в какой-то из оставшихся трех четвертей.

Теперь для каждой дуги $\gamma^*(\alpha_0)$ нам нужно специальным образом построить некую вспомогательную, или «замыкающую», дугу $\gamma^+(\alpha_0)$. Способ ее построения будет зависеть от типа особой точки α_0. Именно эта дуга изображена пунктирной линией на рис. 2.3–2.5. Во всех случаях эта линия соединяет конец дуги $\gamma^*(\alpha_0)$ с ее началом, располагается внутри локализующего диска B и имеет с осью абсцисс не более одной общей точки. Кроме того, в зависимости от типа особой точки α_0 должны быть соблюдены следующие правила.

Правило 0. В случае особенности типа $(0,+)$ дуга $\gamma^+(\alpha_0)$ пересекает ось абсцисс слева от нуля. Если особенность α_0 имеет тип $(0,-)$, дуга $\gamma^+(\alpha_0)$ пересекает ту же ось уже справа от нуля.

Правило 1. В случае особенностей типа $(1,+)$ или $(1,-)$ вспомогательная дуга, не задевая оси абсцисс, переходит из первой четверти во вторую или соответственно из третьей в четвертую.

Правило 2. Если речь идет об особенности типа $(2,+)$, то теперь замыкающая дуга сначала переходит из первого квадранта во второй, пересекая ось ординат выше нуля, затем она переходит через отрицательную полуось абсцисс и оказывается в третьей четверти, после чего, снова перейдя ось ординат, но уже ниже нуля, попадает в четвертый квадрант, где устремляется к началу исходной дуги. Что же касается особенности типа $(2,-)$, то для нее картина симметрична только что описанной.

Пусть $\gamma^-(\alpha_0)$ означает дугу $\gamma^+(\alpha_0)$, пробегаемую в обратном направлении, т. е. от начала дуги $\gamma^*(\alpha_0)$ к ее концу. Если теперь каждый участок $\gamma^*(\alpha_0)$ контура Γ_0 заменить дугой $\gamma^-(\alpha_0)$, у нас получится новый контур, который мы обозначим символом Γ_0'. В отличие от Γ_0 перестроенный контур не проходит через начало координат, но при этом в полной мере наследует главное свойство оригинала — быть правильным относительно оси абсцисс.

Лемма 2.4. *Перестроенный контур Γ_0' представляет собой замкнутую линию, правильную относительно произвольно ориентированной оси абсцисс, а значит, имеет неотрицательный индекс:*

$$\operatorname{ind} \Gamma_0' \ge 0. \tag{2.11}$$

Как мы надеемся, читатель не нуждается в наших комментариях по поводу этого очевидного утверждения и самостоятельно проведет необходимую проверку.

2.5. Локализация задачи. Для каждого из особых значений α_0, рассмотренных в предыдущем разделе, выделим на контуре $\Gamma(\varrho)$ участок $\gamma^*(\varrho;\alpha_0)$, отвечающий отрезку $\alpha_0-\varepsilon_0\le\vartheta\le\alpha_0+\varepsilon_0$ углового параметра ϑ. При малых значениях ϱ дугу $\gamma^*(\varrho;\alpha_0)$ практически невозможно отличить от дуги $\gamma^*(\alpha_0)$. В частности, дуга $\gamma^*(\varrho;\alpha_0)$ начинается и заканчивается в тех же четвертях координатной плоскости, где лежат соответственно начало и конец дуги $\gamma^*(\alpha_0)$. Это позволяет нам построить для $\gamma^*(\varrho;\alpha_0)$ вспомогательную дугу $\gamma^+(\alpha_0,\varrho)$ в соответствии с теми правилами, что описаны в разд. 2.4. При желании нетрудно провести новые дуги так, чтобы они непрерывно зависели от ϱ, а при $\varrho\to 0$ стремились к соответствующим дугам $\gamma^+(\alpha_0)$, выбранным выше для контура Γ_0. Читатель вполне может считать, если ему так будет уютнее, что эти дополнительные предосторожности соблюдены, хотя формальной необходимости в них нет никакой.

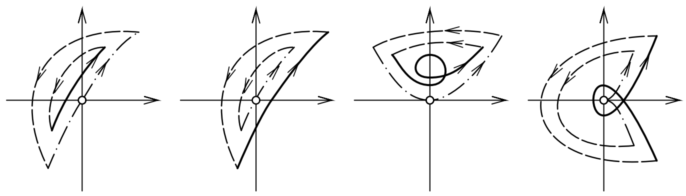


Рис. 2.8. Локализующие петельки.

Дуги $\gamma^*(\varrho,\alpha_0)$ и $\gamma^+(\varrho,\alpha_0)$ сочетаются между собой таким образом, что из них можно составить маленький ориентированный замкнутый контур. Мы обозначим его символом $\gamma(\varrho,\alpha_0)$ и назовем петелькой, локализующей особенность α_0. Несколько таких петелек приведены на рис. 2.8, где сплошные линии означают участки $\gamma^*(\varrho,\alpha_0)$ контура $\Gamma(\varrho)$, штрих-пунктирные — это аналогичные участки $\gamma^*(\alpha_0)$ главного контура Γ_0, пунктирные же линии изображают соответствующие «замыкающие» дуги.

Лемма 2.5. *Неравенство* $\operatorname{ind}\Gamma(\varrho)\ge 0$ *будет установлено, если для каждого особого значения* α_0 *начального уровня мы докажем, что локализующая его петелька* $\gamma(\varrho,\alpha_0)$ *имеет неотрицательный индекс:*

$$\operatorname{ind}\gamma(\varrho,\alpha_0)\ge 0. \tag{2.12}$$

Доказательство. Пусть $\gamma^-(\varrho,\alpha_0)$ означает дугу, которая отличается от $\gamma^+(\varrho,\alpha_0)$ лишь направленностью. Заменим в контуре $\Gamma(\varrho)$ каждый его участок $\gamma^*(\varrho,\alpha_0)$ дугой $\gamma^-(\varrho,\alpha_0)$. Новый контур, который получается в результате этих операций, мы обозначим символом $\Gamma'(\varrho)$. Очевидно, он гомотопически эквивалентен контуру Γ'_0, так что

$$\operatorname{ind}\Gamma'(\varrho)=\operatorname{ind}\Gamma'_0. \tag{2.13}$$

Заметим теперь, что контур $\Gamma(\varrho)$ мы можем представить себе как «формальную» сумму перестроенного контура $\Gamma'(\varrho)$ и конечного семейства петелек $\gamma(\varrho,\alpha_0)$, причем ни одна из названных замкнутых линий не проходит через начало координат. В этих условиях аддитивность индекса позволяет нам разложить вращение контура $\Gamma(\varrho)$ в сумму вращений его «слагаемых»:

$$\operatorname{ind}\Gamma(\varrho)=\operatorname{ind}\Gamma'(\varrho)+\sum_{\alpha_0}\operatorname{ind}\gamma(\varrho,\alpha_0). \tag{2.14}$$

Роль упоминавшегося выше «глобального» вращения контура $\Gamma(\varrho)$ здесь выполняет индекс перестроенного контура $\Gamma'(\varrho)$. Согласно (2.11) и (2.13) этот индекс неотрицателен. «Локальные» же вращения — это индексы петелек $\gamma(\varrho, \alpha_0)$, и нам действительно достаточно убедиться в том, что они также неотрицательны. Лемма доказана.

В разд. 2.3, как и в 2.4, мы обещали не допускать особенности типа $(0, \pm)$ к дальнейшим этапам нашего исследования и разобраться с ними уже в этом параграфе. Поскольку параграф уже заканчивается, нам самое время выполнить свое обещание.

Лемма 2.6. *Если особенность α_0 имеет тип $(0, \pm)$, то индекс соответствующей петельки $\gamma(\varrho, \alpha_0)$ либо равен нулю, либо равен единице, так что в любом случае неравенство* (2.12) *справедливо.*

Доказательство. Уменьшая, если нужно, число ε_0, мы вправе считать, что производная $q_0'(\vartheta)$ отлична от нуля не только при $\vartheta = \alpha_0$, но и на всем отрезке $|\vartheta - \alpha_0| \le \varepsilon_0$. Тогда при достаточно малых значениях $\varrho > 0$ дуга $\gamma^*(\varrho, \alpha_0)$ будет всюду иметь ненулевой наклон, а значит, она ровно один раз пересечет ось абсцисс. Но вспомогательная дуга $\gamma^+(\varrho, \alpha_0)$, дополняющая $\gamma^*(\varrho, \alpha_0)$ до петли $\gamma(\varrho, \alpha_0)$, тоже лишь один раз пересекает эту ось, причем в противоположном направлении. Если эти пересечения происходят с одной стороны от нуля, то индекс петли $\gamma(\varrho, \alpha_0)$ нулевой, а если с разных, то положительную полуось абсцисс петелька $\gamma(\varrho, \alpha_0)$ пересекает непременно снизу вверх, так что ее вращение равно единице. В случае особенности типа $(0, +)$ эти утверждения иллюстрируют рис. 2.8 (a) и 2.8 (b). Мы предлагаем читателю самому нарисовать аналогичные картинки для особенности типа $(0, -)$. Лемма доказана.

Заметим, что точно так же уже сейчас мы могли бы исследовать и любую особенность α_0 типа $(1, \pm)$, для которой $n_0 = 3$, но — по соображениям «эстетического» характера — мы не будем этого делать.

Итак, нам остается доказать неравенство (2.12) в том случае, когда особенность α_0 имеет тип $(1, \pm)$ или $(2, \pm)$, а значит, устройство главных частей основных наших функций ω, X и Y описывается формулами (2.8) и (2.9), где $A_0 \ne 0$ и $n_0 \ge 3$. Начиная с этого момента, мы фиксируем одну из таких особенностей α_0 и всю оставшуюся часть нашей работы посвящаем ее изучению.

Нам незачем больше говорить о приведенных линиях. Они хорошо помогли нам в описанных выше построениях, но теперь их роль исчерпана, и мы возвращаемся к исходным объектам. Вместо $\Gamma(\varrho)$ мы снова будем говорить о контуре $C(\varrho) = \varrho^k \Gamma(\varrho)$, а петельку $\gamma(\varrho, \alpha_0)$ заменим гомотетичной ей петелькой $c(\varrho, \alpha_0) = \varrho^k \gamma(\varrho, \alpha_0)$. Она для нас удобнее тем, что основной ее участок задается уравнениями

$$x = X(\varrho, \vartheta), \quad y = Y(\varrho, \vartheta), \quad |\vartheta - \alpha_0| \le \varepsilon_0, \tag{2.15}$$

где функции X и Y определяются изначальными структурными формулами (1.9) и представляются рядами (1.15). Индекс у петельки $c(\varrho, \alpha_0)$, очевидно, такой же, как и у приведенной петельки $\gamma(\varrho, \alpha_0)$, и вся наша задача сводится к доказательству неравенства

$$\operatorname{ind} c(\varrho, \alpha_0) \ge 0. \tag{2.16}$$

В этом месте мы вынуждены пока прервать наше исследование, чтобы обсудить важные для дальнейшего результаты комплексной теории функций и относящиеся к ним вопросы алгебры.

§ 3. Неявные аналитические функции

По смыслу исходной геометрической задачи в дальнейшем нам придется исследовать лишь вещественные аналитические функции при вещественных значениях их аргументов. Но без выхода в комплексную область нам не удалось бы рассмотреть интересующие нас детали вещественной картины. Поэтому автор настоятельно рекомендует читателю на некоторое время полностью отвлечься от наших проблем и погрузиться в тот «загадочный комплексный мир, где скрываются порой истинные причины реальных явлений» … Единственное, что будет напоминать нам об оставленной нами задаче, — это буквы ϱ и ϑ, служившие прежде обозначениями для полярного радиуса и полярного угла, но теперь обретающие смысл совершенно свободных комплексных переменных.

3.1. Подготовительная теорема Вейерштрасса. Каждая отличная от нуля функция $f(\varrho,\vartheta)$ комплексных переменных ϱ и ϑ, определенная и аналитическая в окрестности точки $(0,\alpha_0)$, может быть единственным способом записана в следующей асимптотической форме:

$$f(\varrho,\vartheta)=\varrho^k(p_0(\vartheta)+\varrho S(\varrho,\vartheta-\alpha_0)). \tag{3.1}$$

Здесь k — неотрицательное целое число, $p_0(\vartheta)$ — аналитическая около точки α_0 функция переменной ϑ, не сводящаяся к тождественному нулю, а символ $S(\cdot,\cdot)$ всюду в этом параграфе будет служить у нас общим обозначением для любой функции, аналитической при всех достаточно малых значениях указанных в скобках величин, а потому представимой в виде абсолютно сходящегося двойного степенного ряда. Если же ряд S не имеет свободного члена, и это нам важно будет подчеркнуть, вместо S мы напишем S_*.

Функцию $p_0(\vartheta)$ мы будем называть «главной частью» ряда $f(\varrho,\vartheta)$. Пусть α_0 служит нулем этой функции, так что

$$p_0(\vartheta)=A_0(\vartheta-\alpha_0)^{k_0}(1+O(\vartheta-\alpha_0)) \tag{3.2}$$

при некоторых $A_0\neq 0$ и $k_0\geq 1$. «Подготовительная» теорема Вейерштрасса, доказательство которой можно найти, например, в учебнике Гурса [8], утверждает, что при указанных условиях функция $f(\varrho,\vartheta)$ вблизи точки $(0,\alpha_0)$ допускает представление в виде произведения

$$f(\varrho,\vartheta)=A_0\varrho^kP(\varrho,\vartheta)(1+S_*(\varrho,\vartheta-\alpha_0)), \tag{3.3}$$

где $P(\varrho,\vartheta)$ означает многочлен вида

$$P(\varrho,\vartheta)=(\vartheta-\alpha_0)^{k_0}+a_1(\varrho)(\vartheta-\alpha_0)^{k_0-1}+\ldots+a_{k_0}(\varrho), \tag{3.4}$$

у которого коэффициентами $a_m(\varrho)$ служат аналитические функции переменной ϱ, определенные в некоторой окрестности нуля и удовлетворяющие условию $a_m(0)=0$.

Эта замечательная теорема показывает, что при достаточно малых $\varrho\neq 0$ и значениях ϑ, близких к точке α_0, уравнение $f(\varrho,\vartheta)=0$ эквивалентно полиномиальному уравнению $P(\varrho,\vartheta)=0$. Теперь нам предстоит выяснить, как устроено множество решений полиномиального уравнения с аналитическими коэффициентами. Ясно, что каждому значению ϱ отвечает — с учетом кратности — ровно k_0 корней ϑ нашего уравнения, причем все они при $\varrho\to 0$ стремятся к α_0. Но весь вопрос в том, можно ли для каждого отдельного значения ϱ перенумеровать эти корни таким образом, чтобы в результате их зависимость от ϱ имела сколь-нибудь регулярный характер. Чтобы разобраться в этом, нам потребуется немного алгебры и комплексного анализа.

Разумеется, все эти вопросы давно изучены, и мы хотим лишь помочь нашему читателю, для которого они, быть может, еще не успели попасть в сферу его геометрических интересов. Потратив несколько, казалось бы, лишних страничек, мы постараемся внушить читателю уверенность в правомерности последующих наших действий.

3.2. Ростки и результанты. Естественно, прежде всего, разложить наш многочлен на неприводимые множители. Но чтобы в дальнейшем иметь возможность применить соответствующие алгебраические конструкции, нам необходимо придать точный смысл ряду используемых ниже понятий. Учитывая «локальный характер» нашего интереса к полиномиальному уравнению с аналитическими коэффициентами, мы не станем указывать, насколько мала та окрестность нуля, где заданы эти коэффициенты, и не будем заботиться о том, насколько нам придется уменьшить ее в процессе изучения уравнения, чтобы обеспечить справедливость тех или иных наших утверждений. Иными словами, коэффициенты многочлена нам важны лишь как представители соответствующих ростков аналитических функций. Каждый такой представитель любого ненулевого ростка однозначно записывается в виде

$$c\varrho^m(1 + O(\varrho)), \tag{3.5}$$

где коэффициент c отличен от нуля, показатель m представляет собой неотрицательное целое число, а символ $O(\varrho)$ означает степенной ряд относительно переменной ϱ без свободного члена, сходящийся при всех достаточно малых значениях ϱ. При этом главная часть $c\varrho^m$ указанного разложения и коэффициенты ряда $O(\varrho)$ для всех представителей данного ростка одни и те же.

Пусть $\mathbf{T}$ означает множество всех ростков аналитических около нуля функций, или, что то же самое, всех тейлоровских рядов, каждый из которых имеет положительный радиус сходимости. Естественные операции сложения и умножения превращают это множество в коммутативное кольцо с единицей. В кольце $\mathbf{T}$, очевидно, нет делителей нуля. Обратимые его элементы, как легко понять, — это ростки вида (3.5), где $m = 0$. Можно было бы еще заметить, что кольцо $\mathbf{T}$ служит прекрасным примером кольца главных идеалов, и даже — евклидова кольца. Действительно, чтобы убедиться в этом, достаточно объявить число m «порядком» или «степенью» ростка (3.5). Впрочем, это замечание могло бы оказаться для нас полезным лишь одним своим следствием (см. [9, § 17, 18]), которое в нашем случае и без того очевидно: каждый отличный от нуля элемент кольца $\mathbf{T}$ единственным образом — «с точностью до обратимых множителей» — разлагается в произведение простых, или неразложимых, элементов.

Приятно отметить, что эту «теорему единственности», справедливую для кольца $\mathbf{T}$, наследует и кольцо многочленов с коэффициентами из $\mathbf{T}$, как это, вслед за Гауссом, показано, например, в [9, § 30]. Но для нас важнее другой вытекающий отсюда вывод. Пусть $\mathbf{L}$ означает поле отношений, отвечающее кольцу $\mathbf{T}$. Всякий многочлен над кольцом $\mathbf{T}$ мы можем считать многочленом над полем $\mathbf{L}$. Так вот, если какой-то из таких многочленов оказался разложимым «над» этой более широкой алгебраической системой, то он разлагается и как многочлен над исходным кольцом $\mathbf{T}$. Все об этих немудреных вещах читатель может найти в книге [9], хотя и здесь мы могли бы обойтись без помощи алгебры. В самом деле, в нашем случае «поле отношений» $\mathbf{L}$, очевидно, реализуется как множество ростков функций, аналитических в проколотой окрестности нуля, которые имеют в нуле либо полюс, либо и вовсе устранимую особенность. Каждая такая функция определяется своим лорановским рядом и асимптотически представляется в форме (3.5) с той лишь разницей, что теперь показатель m может быть любым целым числом. Учитывая эти замечания, наш читатель вполне элементарными рассуждениями легко убедится сам в справедливости высказанного выше утверждения о разложимости многочленов.

Возвращаясь к нашему многочлену P, оставшемуся в разд. 3.1, где он был представлен выражением (3.4), запишем его в виде произведения неразложимых многочленов над кольцом $\mathbf{T}$. Поскольку произведение старших коэффициентов этих «множителей» равно единице, то все они представляют собой обратимые элементы кольца $\mathbf{T}$. Вынося их «за скобки», мы придем к разложению многочлена P в произведение неприводимых многочленов с единичными старшими коэффициентами. Пусть Q будет одним из таких «простых» множителей:

$$Q = (\vartheta - \alpha_0)^q + b_1(\varrho)(\vartheta - \alpha_0)^{q-1} + \ldots + b_q(\varrho), \tag{3.6}$$

где $1 \leq q \leq k_0$ и $b_m \in \mathbf{T}$ для всех $m = 1, \ldots, q$. Поскольку корни многочлена Q являются одновременно корнями и многочлена P, то все они при $\varrho \to 0$ стремятся к α_0, а значит, $b_m(0) = 0$. Главный же итог наших наблюдений заключен в следующем утверждении.

Лемма 3.1. *При каждом достаточно малом значении $\varrho \neq 0$ уравнение $Q(\varrho, \vartheta) = 0$ имеет ровно q различных корней ϑ.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что при $q = 1$ наше утверждение тривиально. Предположим теперь, что $q > 1$.

Благодаря Эйлеру и Сильвестру, как говорит об этом Ван дер Варден [9], мы легко можем узнать, когда два многочлена положительных степеней с коэффициентами из некоторого поля имеют общий множитель в виде многочлена над тем же полем и тоже положительной степени. А именно, такой множитель найдется тогда и только тогда, когда результант наших многочленов, представляющий собой элемент данного поля, равен нулю.

Пусть Δ означает результант многочлена Q и его производной Q_ϑ по переменной ϑ. Мы утверждаем, что он — как аналитическая в окрестности нуля функция переменой ϱ — отличен от нуля. В самом деле, мы вполне можем считать Q и Q_ϑ многочленами над полем $\mathbf{L}$, и если их результант был бы равен нулю, то они имели бы общий множитель в виде многочлена положительной степени с коэффициентами из поля $\mathbf{L}$. В частности, это означало бы, что многочлен Q разложим «над» указанным «лорановским» полем. Но тогда, как мы уже знаем, он разлагался бы и как многочлен над исходным «тейлоровским» кольцом $\mathbf{T}$, вопреки истинному положению дел.

Итак, $\Delta \neq 0$. В таком случае, благодаря «внутренней теореме единственности» для аналитических функций одной переменной, $\Delta(\varrho) \neq 0$ для всех достаточно малых $\varrho \neq 0$. Применяя еще раз теорему о результантах — но теперь уже в ее классическом варианте — мы заключаем, что при указанных значениях ϱ многочлены $Q(\varrho, \vartheta)$ и $Q_\vartheta(\varrho, \vartheta)$ переменной ϑ, чьими коэффициентами служат обыкновенные комплексные числа, не имеют общих множителей. Такое бывает лишь в том случае, если у многочлена $Q(\varrho, \vartheta)$ все корни ϑ простые, а значит, число различных его корней равно его степени q. Лемма доказана.

Это небольшое алгебраическое отступление нам нужно было для того, чтобы уточнить рассуждения Гурса в том месте, где у читателя могли бы возникнуть резонные вопросы [8, п. 356].

3.3. Круговые системы корней. Итак, изучая устройство множества решений полиномиального уравнения $P(\varrho, \vartheta) = 0$, мы вправе заменить многочлен P одним из неразложимых его множителей Q вида (3.6). Впрочем, в этом разделе нам незачем считать многочлен Q неразложимым — для нас важна будет лишь простота корней ϑ уравнения $Q(\varrho, \vartheta) = 0$, соответствующих достаточно малым значениям $\varrho \neq 0$. Пусть число $\varepsilon > 0$ таково, что указанное условие выполнено в комплексной области D, определяемой неравенствами $0 < |\varrho| < \varepsilon$. Таким образом, каждому значению $\varrho \in D$ мы можем поставить в соответствие полный набор корней интересующего нас уравнения, который мы обозначим символом $\vartheta[\varrho]$, и всякий раз это множество будет содержать ровно q различных элементов.

Когда переменная ϱ непрерывно меняется, оставаясь в области D, ансамбль соответствующих корней $\vartheta[\varrho]$ также непрерывно движется как единое целое. При этом ни один из корней — в силу его «простоты» — не теряет своей «индивидуальности» и мы сколь угодно долго можем следить за его перемещением. Более того, каждый корень из набора $\vartheta[\varrho]$ не только непрерывно зависит от ϱ, но локально представляет собой голоморфную функцию этой переменной, как вытекает, например, из той же теоремы Вейерштрасса.

Самое интересное здесь происходит в тот момент, когда переменная ϱ, описав петлю в области D, возвращается в исходное положение. Тогда и набор корней $\vartheta[\varrho]$ в конце пути, очевидно, совместится с первоначальным набором. Но это вовсе не означает, что каждый отдельно взятый корень займет свое прежнее место. Можно утверждать лишь одно — каждый корень либо вернется в исходную точку, либо займет место одного из своих собратьев, которому в таком случае придется также найти себе новое пристанище среди оставшихся $q-1$ точек. Словом, с каждой петлей, описанной переменной ϱ, связана определенная перестановка набора $\vartheta[\varrho]$, отвечающего тому значению ϱ, где начинается и заканчивается петля.

Если переменная ϱ, описав одну петлю, продолжит свое движение и снова вернется в исходное положение, у нас появятся уже две перестановки. Ясно, что итоговое преобразование корней в таком случае выразится обычной суперпозицией перестановок. Заметим также, что обратному ходу вдоль заданной петли соответствует обратная перестановка. Наконец, гомотопически эквивалентные петли порождают, очевидно, одну и ту же перестановку корней. Например, если петля не охватывает точку $\varrho = 0$, а значит, гомотопически тривиальна, то отвечающая ей перестановка тождественна и каждый корень в конце путешествия возвращается в исходную точку.

Разумеется, совсем нетрудно было бы привести здесь формально безукоризненные определения и рассуждения, но в нашу задачу не входит испытывать терпение читателя. Мы надеемся, что ему вполне достаточно будет высказанных только что замечаний, чтобы согласиться и с дальнейшими нашими выводами.

Предположим теперь, что переменная ϱ, выходя из какой-либо точки ϱ_0, один раз пробегает вокруг нуля «против часовой стрелки». Точнее говоря, пусть она движется в области D вдоль замкнутой линии, у которой индекс относительно нуля — при стандартной ориентации комплексной плоскости — равен единице. Поскольку все такие петли гомотопически эквивалентны, возникающая в результате перестановка множества $\vartheta[\varrho_0]$ не зависит от конкретного способа движения, и мы обозначим ее символом $\sigma[\varrho_0]$.

Непустую часть множества $\vartheta[\varrho_0]$, инвариантную относительно отображения $\sigma[\varrho_0]$, назовем круговой системой, если $\sigma[\varrho_0]$ действует на ней как циклическая перестановка. Вполне может оказаться, что все элементы множества $\vartheta[\varrho_0]$ образуют единую круговую систему, и вскоре мы сможем точно сказать, когда это бывает. Если же это не так, то множество $\vartheta[\varrho_0]$ распадается на несколько круговых систем (рис. 3.1). Пусть $c[\varrho_0]$ означает одну из них.

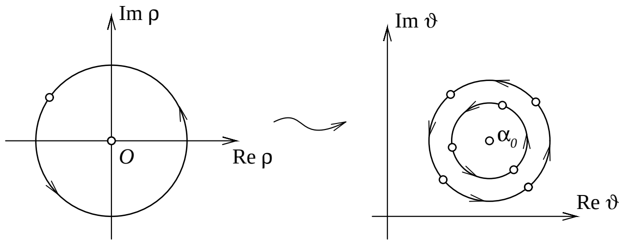


Рис. 3.1. «Типичные» круговые системы.

Перенесем теперь переменную ϱ из точки ϱ_0 в другую точку ϱ_1 вдоль некоторого пути, как всегда, не покидающего пределы области D. В результате каждый элемент множества $\vartheta[\varrho_0]$ переместится в соответствующую точку множества $\vartheta[\varrho_1]$. Ясно, что возникающая при этом биекция между множествами $\vartheta[\varrho_0]$ и $\vartheta[\varrho_1]$, вообще говоря, зависит от пути, по которому мы перешли от точки ϱ_0 к точке ϱ_1. Но все эти биекции, как легко понять, преобразуют систему $c[\varrho_0]$ в одну и ту же часть множества $\vartheta[\varrho_1]$, которую естественно обозначить символом $c[\varrho_1]$. Более того, множество $c[\varrho_1]$, очевидно, представляет собой круговую систему множества $\vartheta[\varrho_1]$.

Итак, мы ясно видим, что число m круговых систем $c_1[\varrho], \ldots, c_m[\varrho]$, на которые при каждом значении $\varrho \in D$ разбивается множество $\vartheta[\varrho]$, не зависит от $\varrho \in D$, причем нумерацию этих систем можно организовать так, что для всякого $i = 1, \ldots, m$ система $c_i[\varrho]$, не меняя количества своих элементов, будет непрерывно зависеть от ϱ. При этом каждый элемент системы $c_i[\varrho]$ окажется «локально-аналитической» функцией переменной ϱ. Если же мы посчитаем, например, сумму всех элементов системы $c_i[\varrho]$ или какой-нибудь другой симметрический многочлен от них, у нас получится уже настоящая однозначная аналитическая функция в области D. Более того, в нуле всякая такая функция будет иметь, очевидно, устранимую особенность, поскольку все элементы системы $c_i[\varrho]$ при $\varrho \to 0$ стремятся к α_0. Таким образом, если множество $c_i[\varrho]$ состоит из q_i элементов и мы перенумеруем их как попало, обозначив их символами $\vartheta_{i1}(\varrho), \ldots, \vartheta_{iq_i}(\varrho)$, то многочлен

$$Q_i = (\vartheta - \vartheta_{i1}(\varrho)) \ldots (\vartheta - \vartheta_{iq_i}(\varrho)), \tag{3.7}$$

разложенный по степеням разности $\vartheta - \alpha_0$, будет иметь следующий вид:

$$Q_i = (\vartheta - \alpha_0)^{q_i} + b_{i1}(\varrho)(\vartheta - \alpha_0)^{q_i - 1} + \ldots + b_{iq_i}(\varrho), \tag{3.8}$$

где коэффициентами $b_{ij}(\varrho)$ служат функции, аналитические в области $|\varrho| < \varepsilon$ и равные нулю при $\varrho = 0$. Поскольку все корни $\vartheta_{ij}(\varrho)$ многочленов $Q_1, \ldots, Q_m$ в совокупности составляют полный набор $\vartheta[\varrho]$ корней многочлена Q, то

$$Q = Q_1 \ldots Q_m. \tag{3.9}$$

Пожалуй, стоит подчеркнуть, что ни один из многочленов Q_i уже не допускает дальнейшего разложения. В самом деле, как мы только что видели, каждый нетривиальный множитель многочлена порождает по крайней мере одну круговую систему его корней, и если мы на минуту представим многочлен Q_i разложенным в произведение хотя бы двух таких множителей, то на наших глазах единый цикл его корней должен будет разорваться на несколько меньших циклов, а то и вовсе рассыпаться на отдельные звенья ...

Таким образом, между неприводимыми множителями многочлена Q и круговыми системами корней уравнения $Q = 0$ имеется замечательное взаимно-однозначное соответствие. В частности, учитывая предыдущую лемму, мы приходим к следующему важному выводу.

Лемма 3.2. *Многочлен Q вида* (3.6) *неразложим тогда и только тогда, когда при каждом достаточно малом значении $\varrho \neq 0$ уравнение $Q(\varrho, \vartheta) = 0$ имеет ровно q различных корней ϑ и все они образуют единую круговую систему.*

3.4. Ряды Пюизо простого многочлена. В нашем экскурсе в комплексную теорию неявных функций мы вплотную подошли к самому торжественному моменту. Кульминацией нашего повествования будет представление решений полиномиальных уравнений с аналитическими коэффициентами в виде «многозначных дробно-степенных» рядов, которые именуют рядами Пюизо.

Пусть Q означает тот же многочлен, что мы изучали в предыдущем разделе, но теперь мы считаем его неразложимым. Иными словами, мы теперь предполагаем, что для любого $\varrho \in D$ все корни ϑ уравнения $Q(\varrho, \vartheta) = 0$ не только простые, а значит, число их равно степени q многочлена Q, но все они циклически преобразуются один в другой, когда переменная ϱ совершает обход вокруг нуля в положительном направлении. Если же мы заставим эту переменную q раз обернуться вокруг нуля против часовой стрелки, то каждый корень набора $\vartheta[\varrho]$ вернется к исходному своему значению. И здесь возникает неизбежная идея: давайте «параметризуем» переменную ϱ более «медленной» комплексной переменной r, полагая $\varrho = r^q$. Тогда за один оборот новой переменной r вокруг нуля прежняя переменная ϱ совершит q таких оборотов, а значит, каждый корень системы $\vartheta[\varrho] = \vartheta[r^q]$, описав положенную ему петлю, вернется к первоначальному значению. Иначе говоря, как показывают простые аргументы вроде «теоремы монодромии», каждый корень многочлена Q представляет собой однозначную аналитическую функцию переменной r, а поскольку этот корень стремится к α_0 при $r \to 0$, он допускает «аналитическое продолжение» и в точку $r = 0$. Это значит, что в области $|r| < \varepsilon^{1/q}$ он может быть разложен по неотрицательным степеням переменной r.

Пусть $\vartheta(r^q)$ будет одним из таких корней, и мы запишем его в виде суммы степенного ряда:

$$\vartheta(r^q) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j r^j. \tag{3.10}$$

Если теперь предложить переменной r пробежать q-ю часть окружности в положительном направлении и понаблюдать за соотношением (3.10), мы обнаружим любопытнейшую вещь. А именно, с одной стороны, поскольку точка r^q за это время совершит ровно один оборот вокруг нуля, корень $\vartheta(r^q)$ превратится в следующий за ним «по циклу» новый корень. С другой же стороны, если новую сумму ряда (3.10) мы захотим выразить через первоначальное значение r, то нам всего лишь нужно будет каждый коэффициент β_j умножить на j-ю степень комплексного числа $e^{2\pi i/q}$. Ясно, что описанную процедуру можно повторить, применив ее к новому ряду, и так за несколько шагов у нас получатся аналитические представления всех корней.

Чтобы выразить соотношение (3.10) в терминах исходной переменной ϱ, всюду заменим в нем r на $\varrho^{1/q}$, и тогда ряд Тейлора для функции $\vartheta(r^q)$ превратится в дробно-степенной ряд Пюизо для корня $\vartheta(\varrho)$:

$$\vartheta(\varrho) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j (\varrho^{1/q})^j. \tag{3.11}$$

Сказанное выше показывает нам, что q различным значениям выражения $\varrho^{1/q}$ соответствуют q различных корней многочлена Q. Таким образом, все эти корни фактически представляются одним рядом, но зависящим от многозначной (при $q > 1$) переменной $\varrho^{1/q}$. Невозможно не восхититься этим совершенно потрясающим результатом, и мы не могли бы обойти его молчанием. Но, все же, нам удобнее будет иметь дело с q различными рядами, выражающими в совокупности все интересующие нас корни, и мы уже знаем, как найти их аналитические выражения. Действительно, если с каждым коэффициентом β_j связать цепочку

$$\beta_{1j} = \beta_j, \quad \beta_{2j} = \beta_{1j} e^{2\pi i j/q}, \ \dots\ , \ \beta_{qj} = \beta_{q-1,j} e^{2\pi i j/q}, \tag{3.12}$$

а затем для каждого ϱ выбрать какое-нибудь одно из значений выражения $\varrho^{1/q}$, то ряды

$$\vartheta_l(\varrho) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{lj} (\varrho^{1/q})^j, \quad l = 1, \dots , q, \tag{3.13}$$

сходящиеся по крайней мере в диске $|\varrho| < \varepsilon$, и дадут нам полный набор корней $\vartheta_1(\varrho), \dots , \vartheta_q(\varrho)$ многочлена Q. В результате сам многочлен окажется представленным в виде произведения:

$$Q = (\vartheta - \vartheta_1(\varrho)) \cdot \ldots \cdot (\vartheta - \vartheta_q(\varrho)). \tag{3.14}$$

Следует подчеркнуть, что формула (3.14) справедлива только в том случае, если при вычислении сумм (3.13) всюду используется одно и то же значение корня $\varrho^{1/q}$. Если же мы решим заменить его другим, это приведет лишь к перестановке множителей в произведении (3.14).

3.5. Цепочки Тейлора регулярной функции. Мы давно уже не вспоминали о функции $f(\varrho, \vartheta)$, которая послужила источником для всего этого параграфа, но пока осталась забытой в разд. 3.1. Теперь мы легко завершим описание ее локального устройства. Прежде всего многочлен P, тесно связанный с нею теоремой Вейерштрасса, мы разложим на «простые» множители с единичными старшими коэффициентами. Каждый из них, как мы только что видели, порождает одну «круговую систему» рядов Пюизо, причем число элементов в системе равно степени множителя. Таким образом, с многочленом P, имеющим степень k_0, связана система из k_0 таких рядов, и мы обозначим их символами $P_1, \dots , P_{k_0}$. Тогда, разумеется,

$$P = (\vartheta - P_1(\varrho)) \cdot \ldots \cdot (\vartheta - P_{k_0}(\varrho)), \tag{3.15}$$

но чтобы эта формула имела смысл, нужно еще указать, как вычисляется ее правая часть. Мы имеем в виду, что для каждой круговой системы рядов Пюизо, входящей в цепочку $P_1, \dots , P_{k_0}$, выбирается хотя и произвольное, но общее для всех ее представителей значение соответствующего корня из переменной ϱ. Для разных круговых систем никакого согласования, даже если оно возможно, не требуется. Подчеркнем также, что среди множителей, участвующих в разложении (3.15), в отличие от (3.14) вполне могут оказаться равные.

Разложение (3.15) вместе с формулой Вейерштрасса (3.3) показывает нам, что функция $f(\varrho, \vartheta)$ в некоторой окрестности точки $(0, \alpha_0)$ может быть записана следующим образом:

$$f(\varrho, \vartheta) = A_0 \varrho^k (\vartheta - P_1(\varrho)) \cdot \ldots \cdot (\vartheta - P_{k_0}(\varrho))(1 + S_*(\varrho, \vartheta - \alpha_0)), \tag{3.16}$$

где символ S_*, как мы помним, означает степенной ряд относительно переменных ϱ и $\vartheta - \alpha_0$ без свободного члена. Правая часть этой формулы имеет тот же смысл, что и в разложении (3.15) многочлена P. Теперь мы видим, что среди всех пар (ϱ, ϑ), достаточно близких к точке $(0, \alpha_0)$, уравнению $f(\varrho, \vartheta) = 0$ при $\varrho \neq 0$ удовлетворяют в точности те из них, которые связаны соотношением $\vartheta = P_i(\varrho)$ при некотором i.

Нам остается представить изложенные выше классические результаты в той форме, которая будет наиболее удобной для последующего их применения. В некотором смысле, мы совершим сейчас небольшой шаг назад, поскольку выводы, к которым мы придем, непосредственно вытекают уже из формулы (3.10). Мы непременно воспользовались бы ею, если бы устояли перед искушением рассказать нашему читателю о круговых системах рядов Пюизо ...

Итак, если перейти от ϱ к переменной r, полагая $\varrho = r^p$, где p может быть пока произвольным натуральным числом, то функция $f(\varrho, \vartheta)$, имеющая вид (3.1), превратится в новую аналитическую функцию $F(r, \vartheta) = f(r^p, \vartheta)$, а формулу (3.1) заменит асимптотическая формула

$$F(r, \vartheta) = r^{k_*}(p_0(\vartheta) + rS(r, \vartheta - \alpha_0)), \tag{3.17}$$

где $k_* = pk$. С другой стороны, если ту же замену применить к дробностепенному ряду от переменной $\varrho^{1/q}$, где q нацело делит число p, и вместо $\varrho^{1/q}$ всюду написать $r^{p/q}$, то он превратится в обычный тейлоровский ряд относительно переменной r. Таким образом, если в качестве p взять общее кратное степеней всех неразложимых множителей многочлена P, то функция $F(\varrho, \vartheta)$ согласно (3.16) представится в следующей замечательной форме:

$$F = A_0 r^{k_*} (\vartheta - T_1(r)) \cdot \ldots \cdot (\vartheta - T_{k_0}(r))(1 + S_*(r, \vartheta - \alpha_0)), \tag{3.18}$$

где $T_i(r)$ — однозначные аналитические функции от r, определенные в некоторой окрестности нуля и равные α_0 при $r = 0$. Иначе говоря, каждая из них записывается в виде суммы степенного ряда

$$T_i(r) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} r^j, \tag{3.19}$$

сходящегося при всех достаточно малых значениях переменной r.

Любую аналитическую функцию F переменных r и ϑ, допускающую представление вида (3.18), где коэффициент A_0 отличен от нуля, $k_* \geq 0$, а ряды $T_i(r)$ определяются выражениями вида (3.19), мы будем называть регулярной в точке $r = 0$, $\vartheta = \alpha_0$. Ясно, что такая функция F может быть только одним способом представлена в виде (3.18), если не учитывать очередность сомножителей. Поэтому для каждого $s \geq 1$ семейство $\alpha_{1s}, \ldots, \alpha_{k_0,s}$ полностью — с точностью до перестановки — определяется самой функцией F. Элементы этого семейства в дальнейшем именуются тейлоровскими параметрами функции F уровня s. Начальные «отрезки» коэффициентов рядов (3.19) мы назовем цепочками Тейлора нашей функции. Если среди них найдется цепочка вида $\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1}, \alpha_s$, то о коэффициенте α_s мы скажем, что он продолжает тейлоровскую цепочку $\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1}$ порядка $s-1$. Число α_0 мы считаем «началом» всех этих цепочек.

Подводя итоги сказанному, подчеркнем еще раз, что любая аналитическая функция вида (3.1), (3.2) путем подходящей степенной замены первой ее переменной превращается в регулярную функцию. Так как последующие замены степенного характера не нарушают уже достигнутой регулярности, мы имеем возможность для всякого конечного набора функций обсуждаемого типа выбрать общий для них регуляризующий показатель.

§ 4. Преобразования регулярных рядов

Уже скоро мы сможем применить рассмотренные выше результаты комплексного анализа к исследованию тех функций, которые мы оставили на время в конце второго параграфа. Но чтобы вернуться к этим функциям во всеоружии, нам нужны еще несколько простых утверждений о формальном строении рядов, описывающих регулярные функции. В частности, нам предстоит выяснить, как они преобразуются при некоторых специальных заменах переменных.

4.1. Замедление времени. Те семейства линий, которые нас ждут впереди, будут описываться аналитическими функциями двух переменных r и ϑ. При этом r будет играть роль индекса, или «номера», линии в семействе, а ϑ будет служить параметризующей переменной. Мы лучше разглядим, как устроена линия в том месте, где параметр ϑ близок к тому или иному «критическому» значению α_0, если перейдем от переменной ϑ к новой переменной z, полагая $\vartheta = \alpha_0 + zr$. Смысл этого перехода в том, что если новое «время» z течет с «обычной» скоростью, то прежняя переменная ϑ при малом r изменяется очень медленно, и мы не спеша движемся вдоль малого участка изучаемой линии, успевая рассмотреть более тонкие ее черты.

Ясно, что все функции и их аргументы в нашей геометрической задаче будут вещественными, но сейчас это не имеет значения. Рассмотрим пока произвольную функцию F двух комплексных переменных r и ϑ, аналитическую в окрестности некоторой точки $(0, \alpha_0)$, а значит, представимую в виде абсолютно сходящегося двойного ряда

$$F = r^{k_*} \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} r^i (\vartheta - \alpha_0)^j. \tag{4.1}$$

Как легко убедиться, функция F после указанной замены превратится в степенной ряд относительно переменной r, в котором роль коэффициентов выполняют некоторые многочлены от z. Точнее говоря, зависимость F от r и z будет выражаться формулами

$$F = r^{k_*} \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} r^{i+j} z^j = \sum_{m=k_*}^{\infty} r^m f_m(z), \tag{4.2}$$

где каждая функция f_m, как мы видим, действительно представляет собой многочлен от z, причем степень его не выше $m - k_*$. Например, первая из этих функций постоянна, а следующий за ней многочлен линеен, если только он тоже не сводится к постоянной. Здесь уместно подчеркнуть, что, каким бы большим мы ни взяли круг для комплексной переменной z, функция F, понимаемая в новом смысле, будет определена и аналитична для всех пар (r, z), где z пробегает указанный круг, а r — маленькую окрестность нуля.

Таким образом, мы можем выбрать для z произвольное значение α_1 и разложить функцию F в ряд по степеням r и $z - \alpha_1$. Полагая теперь $z = \alpha_1 + ur$, или $\vartheta = \alpha_0 + \alpha_1 r + ur^2$, мы получим новый ряд:

$$F = \sum_{m=k_*}^{\infty} r^m g_m(u), \tag{4.3}$$

где коэффициентами g_m также служат многочлены, только теперь от переменной u, причем здесь уже два первых многочлена постоянны, два следующих линейны, и т. д. Это и понятно, ибо в любом мономе ряда (4.3) переменная u может появиться только в паре с r^2.

Разумеется, подобные преобразования можно продолжать и дальше. Следующая лемма подводит итог нашим наблюдениям.

Лемма 4.1. *Пусть функция F, зависящая от переменных r и ϑ, определена и аналитична при всех достаточно малых r и всех значениях ϑ, близких к α_0. Тогда, какую бы цепочку чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$ ни взять, замена $\vartheta = \alpha_0 + \alpha_1 r + \ldots + \alpha_{s-1} r^{s-1} + ur^s$ приводит функцию F к виду* (4.3), *где коэффициенты g_m представляют собой многочлены от переменной u, причем первые s из них постоянны, следующие за ними s многочленов линейны, и т. д. В новых переменных функция F аналитична и представляется рядом* (4.3) *в области, где r и произведение ur достаточно малы.*

4.2. Тейлоровские преобразования. Выводы, полученные в предыдущем разделе, допускают существенное для нас уточнение, если обсуждаемая нами функция F регулярна в точке $(0, \alpha_0)$, а в качестве коэффициентов рассмотренных выше замен переменных берутся тейлоровские параметры функции. Действительно, мысленно представим нашу функцию в виде (3.18), а затем, полагая $\vartheta = \alpha_0 + zr$, перемножим в этом выражении все скобки, преобразованные к новой переменной z, и приведем подобные. Учитывая формулы (3.19), мы обнаружим тогда, что функция F примет следующий вид:

$$F = r^{k_* + k_0}(p_1(z) + rH(r, z)), \tag{4.4}$$

где p_1 означает многочлен степени k_0 со старшим коэффициентом A_0, корнями которого служат тейлоровские параметры первого уровня функции F, причем каждый из них имеет ровно такую кратность, сколько имеется содержащих его множителей в разложении (3.18). Таким образом,

$$p_1(z) = A_0(z - \alpha_{11}) \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_{k_0,1}). \tag{4.5}$$

Что же касается появившегося здесь нового символа $H(r, z)$, то не только в формуле (4.4), но и всюду в дальнейшем он каждый раз будет означать некую функцию комплексных переменных r и z, относительно которой нам важно подчеркнуть лишь одно: она определена и аналитична в комплексно-двумерной области, содержащей все точки (r, z), где r и rz достаточно малы.

Рассмотрим теперь один из корней α_1 многочлена p_1, и пусть его кратность равна k_1. Тогда асимптотика $p_1(z)$ при $z \to \alpha_1$, очевидно, выражается формулой

$$p_1(z) = A_1(z - \alpha_1)^{k_1}(1 + O(z - \alpha_1)), \tag{4.6}$$

где $A_1 \neq 0$. Таким образом, функция F, преобразованная описанным выше способом к переменным r и z, снова имеет такое же асимптотическое строение, как и по отношению к прежним переменным, — изменились лишь «начальный» коэффициент и кратность нуля главной части, да еще «внешний» степенной множитель r^{k_*} превратился в $r^{k_*+k_0}$. При этом, как непосредственно видно из разложения (3.18), функция сохранила и регулярность, только теперь она регулярна по отношению к точке $r = 0$, $z = \alpha_1$. Теперь α_1 становится началом всех ее тейлоровских цепочек, а ее параметрами Тейлора уровня $s \geq 1$ служат прежние тейлоровские параметры уровня $s+1$, продолжающие цепочку α_0, α_1.

Учитывая эти замечания или же снова обращаясь к формуле (3.18), можно утверждать, что следующая замена $z = \alpha_1 + ur$, или $\vartheta = \alpha_0 + \alpha_1 r + ur^2$, приводит функцию F к виду

$$F = r^{k_*+k_0+k_1}(p_2(u) + rH(r,u)), \tag{4.7}$$

где $p_2(u)$ представляет собой многочлен, имеющий степень k_1 и старший коэффициент A_1. Корнями же его служат в точности те — исходные — параметры Тейлора второго уровня функции F, которые продолжают цепочку α_0, α_1. При этом кратность каждого такого корня α_2 равна числу тех множителей в разложении (3.18), в которых участвует цепочка $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$. Нам остается лишь обобщить эти новые выводы.

Лемма 4.2. *Выберем тейлоровскую цепочку $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$ порядка $s-1$ регулярной функции F, допускающей представление* (3.18). *Пусть для каждого $i = 0, \ldots, s-1$ номер k_i означает число множителей в формуле* (3.18), *в которых участвует цепочка $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i$, так что $k_0 \geq k_1 \geq \ldots \geq k_{s-1} \geq 1$. Мы утверждаем, что после замены $\vartheta = \alpha_0 + \alpha_1 r + \ldots + \alpha_{s-1} r^{s-1} + ur^s$ функция F будет выглядеть следующим образом:*

$$F = r^{k_*+k_0+k_1+\ldots+k_{s-1}}(p_s(u) + rH(r,u)). \tag{4.8}$$

Здесь $p_s(u)$ означает многочлен степени k_{s-1}, чьими корнями являются тейлоровские параметры функции F уровня s, которые служат продолжением выбранной нами цепочки, а кратность каждого корня равна числу тех содержащих его множителей в (3.18), *где он играет роль такого продолжения.*

Мы не стали здесь описывать старший коэффициент возникшего многочлена — в этом отношении нам вполне достаточно будет замечаний, высказанных в начале раздела. Рассмотренные в лемме замены переменной ϑ мы будем называть иногда тейлоровскими ее преобразованиями. Следующее утверждение дает нам конструктивный способ проверить, является ли данная замена тейлоровской. Как можно заметить, в каком-то смысле оно служит обращением предыдущего.

Лемма 4.3. *Пусть аналитическая функция $F = F(r, \vartheta)$ регулярна в точке $(0, \alpha_0)$. Предположим, что нашлась такая числовая цепочка $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$, что замена $\vartheta = \alpha_0 + \alpha_1 r + \ldots + \alpha_{s-1} r^{s-1} + ur^s$ приводит функцию F к виду*

$$F = r^m(p(u) + rH(r,u)), \tag{4.9}$$

где $m \geq 0$, а p означает многочлен строго положительной степени. Тогда указанная замена является тейлоровским преобразованием переменной ϑ. Иными словами, числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$ составляют одну из тейлоровских цепочек функции F порядка $s-1$. При этом корни многочлена p представляют собой *полный набор тейлоровских параметров функции F уровня s, продолжающих эту цепочку.*

Доказательство. Если указанное в лемме выражение для ϑ подставить в формулу (3.18), мы в любом случае получим представление функции F вида (4.9) с ненулевой главной частью p. Однако если обсуждаемая замена не является тейлоровской, то многочлен p, как легко можно увидеть при некотором напряжении внимания, окажется постоянным. Таким образом, если условия нашей леммы все же выполнены, то набор чисел $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$ действительно составляет тейлоровскую цепочку функции F порядка $s-1$. Мы оказались в условиях предыдущей леммы, так что утверждение о корнях многочлена p вытекает уже из нее. Лемма доказана.

4.3. Локализующий радиус. Продолжая изучение регулярной функции $F(r,\vartheta)$, изначально представленной формулами (3.17) и (3.2), выделим ее «главный моном», полагая

$$F(r,\vartheta) = A_0 r^{k_*}(\vartheta - \alpha_0)^{k_0}(1 + R_0(r,\vartheta)). \tag{4.10}$$

Возникшая здесь «остаточная» функция $R_0(r,\vartheta)$ однозначно определяется соотношением (4.10), если $r \neq 0$ и $\vartheta \neq \alpha_0$.

Лемма 4.4. *Благодаря регулярности функции F можно найти настолько малое $\varepsilon > 0$, что «остаток» R_0 будет подчиняться неравенству $|R_0(r,\vartheta)| \leq 1/2$ всякий раз, когда*

$$0 < |\vartheta - \alpha_0| \leq \varepsilon \quad \text{и} \quad 0 < |r| \leq \varepsilon |\vartheta - \alpha_0|. \tag{4.11}$$

Доказательство. Считая, что функция F по-прежнему представлена у нас разложением (3.18), запишем каждый из тейлоровских рядов (3.19) в виде $T_i(r) = \alpha_0 + rS_i(r)$. Тогда функция $S_i(r)$, очевидно, будет аналитической в той же области, что и $T_i(r)$. Полагая $\widetilde{\vartheta} = \vartheta - \alpha_0$ и $r = t\widetilde{\vartheta}$, преобразуем выражение (3.18) к переменным $\widetilde{\vartheta}$ и t. Очевидно, в результате интересующий нас множитель $1 + R_0(r,\vartheta)$ разложится в произведение

$$(1 - tS_1(t\widetilde{\vartheta})) \cdot \ldots \cdot (1 - tS_n(t\widetilde{\vartheta}))(1 + S_*(t\widetilde{\vartheta}, \widetilde{\vartheta})), \tag{4.12}$$

где двойной ряд S_* не имеет свободного члена. Теперь ясно, что при $r = t\widetilde{\vartheta}$ остаток R_0 примет форму линейной комбинации переменных t и $\widetilde{\vartheta}$ с коэффициентами, аналитически зависящими от этих переменных, а значит, он будет меньше $1/2$ при малых t и $\widetilde{\vartheta}$. Лемма доказана.

Каждое число ε, удовлетворяющее указанным в лемме условиям, мы будем называть локализующим радиусом точки α_0. В следующем разделе мы выясним, в чем заключается для нас его действительное значение. А пока убедимся, что локализующий радиус дает нам размер той окрестности точки α_0, в которой эта «особенность» заведомо является единственным нулем главной части p_0 ряда F.

Лемма 4.5. *В области $|\vartheta - \alpha_0| \leq \varepsilon$ уравнение $p_0(\vartheta) = 0$ не имеет корней ϑ, кроме $\vartheta = \alpha_0$.*

Доказательство. Пусть $0 < |\vartheta - \alpha_0| \leq \varepsilon$. Сравнивая формулы (3.17) и (4.10), мы приходим к соотношению

$$p_0(\vartheta) + rS(r, \vartheta - \alpha_0)) = A_0(\vartheta - \alpha_0)^{k_0}(1 + R_0(r,\vartheta)). \tag{4.13}$$

При $r \to 0$, как показывает это равенство, остаток $R_0(r, \vartheta)$ стремится к некоторому пределу $R_0(\vartheta)$, причем

$$p_0(\vartheta) = A_0(\vartheta - \alpha_0)^{k_0}(1 + R_0(\vartheta)). \tag{4.14}$$

Поскольку согласно предыдущей лемме $R_0(r, \vartheta)$ при заданном ϑ рано или поздно становится по модулю меньшим $1/2$, когда r стремится к нулю, то и $|R_0(\vartheta)| \leq 1/2$. В таком случае равенство (4.14) убеждает нас в том, что $p_0(\vartheta) \neq 0$. Лемма доказана.

4.4. Схема разрешения особенностей. Для наглядности, а также учитывая наши дальнейшие планы, предположим, что функция F, о которой только что шла речь, вещественна при вещественных r и ϑ. Разумеется, теперь мы считаем, что и «особая» точка α_0 лежит на вещественной прямой. Возьмем в качестве ε локализующий радиус точки α_0 и в плоскости (ϑ, x) нарисуем график функции $x = p_0(\vartheta)$, где ϑ пробегает отрезок от $\alpha_0 - \varepsilon$ до $\alpha_0 + \varepsilon$. Согласно лемме 4.5 наш график ровно один раз пересекает ось ϑ, а именно в точке α_0. Слева же и справа от нее расположение графика относительно этой оси, очевидно, определяется знаком числа A_0 и четностью номера k_0.

А теперь представим себе, что для каждого достаточно малого $r > 0$ нам необходимо изучить уравнение $F(r, \vartheta) = 0$, где роль «неизвестной» играет переменная ϑ, принимающая значения вблизи точки α_0. Рассмотрим это уравнение в области

$$0 < r \leq \varepsilon^2, \quad |\vartheta - \alpha_0| \leq \varepsilon. \tag{4.15}$$

Чтобы придать геометрический смысл нашей задаче, для каждого r из указанного промежутка нарисуем в плоскости (ϑ, x) график функции $x = F(r, \vartheta)$ на прежнем отрезке $|\vartheta - \alpha_0| \leq \varepsilon$. Если $k_* > 0$, то при очень малых r такой график практически сливается с осью ϑ, и мы ничего не сможем разглядеть. Чтобы лучше видеть, растянем график вдоль оси x, поделив функцию F на r^{k_*}. Иначе говоря, теперь уже речь идет об уравнении

$$p_0(\vartheta) + rS(r, \vartheta - \alpha_0) = 0, \tag{4.16}$$

которое мы тоже рассмотрим в области (4.15), где оно абсолютно эквивалентно исходному. Наши новые линии при малых r почти неотличимы от графика функции $p_0(\vartheta)$. В частности, они начинаются и заканчиваются в тех же полуплоскостях, что и «предельный» график. Если к тому же $p_0'(\alpha_0) \neq 0$, то каждая из них один раз пересекает ось ϑ вблизи точки α_0, и картина здесь достаточно ясна. Если же кратность нуля α_0 главной части p_0 уравнения (4.16) окажется больше единицы, мы должны будем провести более детальное исследование.

Для этого, как и выше, «растянем» аргумент ϑ, перейдя к новой переменной z по формуле $\vartheta = \alpha_0 + zr$. Тогда, как это вытекает из результатов разд. 4.2, уравнение (4.16), если еще поделить его на r^{k_0}, примет следующий вид:

$$p_1(z) + rH(r, z) = 0, \tag{4.17}$$

где p_1 означает многочлен от z степени k_0 со старшим коэффициентом A_0. Но следует иметь в виду, что теперь, чтобы прежняя переменная ϑ прошла весь участок от $\alpha_0 - \varepsilon$ до $\alpha_0 + \varepsilon$, параметр z при заданном r должен пробежать огромный отрезок от $-\varepsilon/r$ до $+\varepsilon/r$, тем больший, чем меньше r. Это значит, что наша прямоугольная область (4.15) переменных r, ϑ переходит в правую половину неограниченного «гиперболического шестиугольника» в плоскости r, z, изображенного на рис. 4.1, где ради симметричности мы взяли для переменной r отрезок $|r| \le \varepsilon^2$.

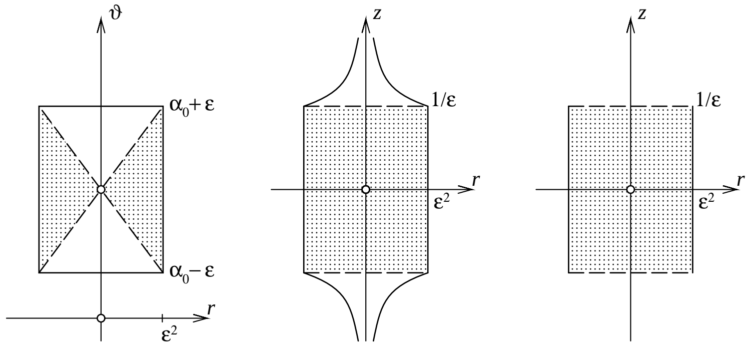


Рис. 4.1. Преобразование области нулей.

Именно здесь сказывается удачность нашего выбора числа ε. Действительно, в новых переменных формула (4.13) эквивалентна соотношению

$$p_1(z) + rH(r,z) = A_0 z^{k_0}(1 + R_1(r,z)), \tag{4.18}$$

где R_1 означает переобозначенный прежний остаток R_0, который по модулю остается меньшим $1/2$, если выполнены условия (4.11). Теперь они выражаются неравенствами $0 < |zr| \le \varepsilon$ и $0 < |r| \le \varepsilon|zr|$, справедливыми, в частности, если

$$0 < r \le \varepsilon^2 \quad \text{и} \quad 1/\varepsilon \le |z| \le \varepsilon/r. \tag{4.19}$$

Таким образом, согласно (4.18) уравнение (4.17) не имеет корней в области (4.19), и мы приходим к следующему замечательному выводу.

Лемма 4.6. *Уравнение* (4.16) *в области* (4.15) *эквивалентно уравнению* (4.17) *в прямоугольнике*

$$0 < r \le \varepsilon^2, \quad |z| < 1/\varepsilon. \tag{4.20}$$

Иными словами, при каждом достаточно малом r мы можем ограничиться изучением нового уравнения (4.17) относительно новой переменной z только на отрезке от $-1/\varepsilon$ до $+1/\varepsilon$, который может быть очень большим, но для нас важно, что он уже не зависит от r.

Приятно также отметить, что главной частью преобразованного уравнения служит уже многочлен, а значит, в пределе, когда r стремится к нулю, это уравнение переходит в алгебраическое. Нам остается выяснить, где располагаются решения «предельного» уравнения.

Лемма 4.7. *Все корни z уравнения $p_1(z) = 0$, как вещественные, так и комплексные, заключены в области $|z| < 1/\varepsilon$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что при каждом $z \ne 0$ остаток $R_1(r,z)$, как показывает формула (4.18), имеет конечный предел $R_1(z)$, когда r стремится к нулю, и

$$p_1(z) = A_0 z^{k_0}(1 + R_1(z)). \tag{4.21}$$

Пусть теперь $|z| \ge 1/\varepsilon$. С другой стороны, $|z| \le \varepsilon/r$, если положительное число r достаточно мало. Эти двусторонние оценки, как отмечалось выше, гарантируют неравенство $|R_1(r,z)| \le 1/2$, откуда следует, что и $|R_1(z)| \le 1/2$. Согласно (4.21) в таком случае $p_1(z) \ne 0$. Лемма доказана.

Итак, после первого этапа разрешения особенности перед нами совершенно ясная картина. У нас имеется семейство функций $p_1(z) + rH(r,z)$, которые при $r \to 0$ равномерно на отрезке $-1/\varepsilon \le z \le +1/\varepsilon$ стремятся к многочлену $p_1(z)$, не имеющему вне отрезка ни одного корня. Концы графика многочлена на этом отрезке, как и концы стремящихся к нему линий, расположены в тех же открытых четвертях плоскости, что и у графика функции $A_0 z^{k_0}$, а значит, эти четверти легко определяются по знаку коэффициента A_0 и четности номера k_0. Исходная наша задача сводится теперь к изучению точек указанного отрезка, где линии семейства пересекают ось z. Ясно, что при малых r эти точки, если таковые найдутся, могут локализоваться только около вещественных корней многочлена p_1 и здесь начинается новый этап анализа. Регулярность функции гарантирует нам, что и на всех последующих шагах у нас в полной мере сохраняются те замечательные возможности, которые мы имели на первом этапе.

4.5. Обрывание совместных цепочек. Рассмотрим теперь сразу два регулярных в точке $(0,\alpha_0)$ ряда $F(r,\vartheta)$ и $G(r,\vartheta)$ с вещественными коэффициентами. Будем считать, что для достаточно малых $r > 0$ и близких к α_0 вещественных значений переменной ϑ они не равны нулю одновременно:

$$F(r,\vartheta)^2 + G(r,\vartheta)^2 \ne 0. \tag{4.22}$$

Предположим, что нам нужно доказать некую гипотезу $H(\alpha_0)$ о паре наших функций F и G. Мы приступаем к работе и в какой-то момент либо справляемся с задачей, либо обнаруживаем некоторые неожиданные для нас сложности. Мы замечаем, что эти сложности возникают лишь в том случае, когда у функций F и G имеется хотя бы один общий вещественный тейлоровский параметр α_1 первого уровня. Тогда для каждого такого параметра мы придумываем новую гипотезу $H(\alpha_0,\alpha_1)$ и устанавливаем, что из совокупности этих гипотез «первого уровня» вытекает и наша изначальная гипотеза $H(\alpha_0)$. Далее, перебирая по очереди все значения α_1, мы для каждого из них пытаемся доказать соответствующую ему гипотезу $H(\alpha_0,\alpha_1)$, и снова либо доказываем ее, либо встречаем новые затруднения. И в этот раз выясняется, что новые препятствия появляются лишь при наличии у функций F и G общего вещественного тейлоровского параметра α_2 второго уровня, продолжающего их совместную цепочку Тейлора α_0,α_1. Теперь для каждого такого значения α_2 мы придумываем гипотезу $H(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)$, убеждаемся, что из совокупности этих новых гипотез — уже «второго уровня» — вытекает гипотеза $H(\alpha_0,\alpha_1)$, и так движемся дальше.

Возникает естественный вопрос: если мы на каждом этапе описанного пути действительно либо доказываем очередную гипотезу, либо сводим ее — при появлении известных нам обстоятельств — к гипотезам следующего этапа, то закончится ли когда-нибудь наша работа, а точнее — можем ли мы утверждать, что гипотеза $H(\alpha_0)$ справедлива? Утвердительный ответ на этот важный и совсем не праздный для нас вопрос, как легко понять, вытекает из следующего, почти очевидного, утверждения.

Лемма 4.8. *Благодаря условию (4.22) функции F и G могут иметь лишь конечное число общих вещественных цепочек Тейлора с началом в точке α_0.*

Доказательство. В самом деле, каждая тейлоровская цепочка той или иной регулярной функции по определению является начальным отрезком последовательности коэффициентов некоторого ее тейлоровского ряда. Каждый такой ряд, как мы знаем, представляет собой настоящую аналитическую функцию, решающую соответствующее уравнение. С другой стороны, общее число тейлоровских рядов с данным началом у каждой регулярной функции конечно. Поэтому функции F и G могли бы иметь бесконечно много общих вещественных цепочек Тейлора, «начинающихся» в точке α_0, лишь в том случае, если у них был бы общий тейлоровский ряд $T(r)$ с вещественными коэффициентами, равный α_0 при $r = 0$. Но тогда для всех достаточно малых $r > 0$ при $\vartheta = T(r)$ были бы одновременно выполнены равенства $F(r, \vartheta) = 0$ и $G(r, \vartheta) = 0$. Поскольку $\vartheta = T(r) \to T(0) = \alpha_0$ при $r \to 0$, это противоречило бы условию (4.22). Лемма доказана.

В заключение параграфа особо подчеркнем, что и для вещественной аналитической функции ее регулярность в нашем смысле означает, что тейлоровскими являются абсолютно все ее ряды Пюизо, не только вещественные, но и комплексные, которые, пряча свой облик где-то за рамками «вещественной картины», тайно определяют важнейшие и вполне реальные ее черты. Без учета их незримого присутствия мы не смогли бы прийти к описанным выше выводам о формальном устройстве рядов, полученных после рассмотренных здесь замен переменных. Ясно, что вещественные замены, примененные к вещественным регулярным функциям, будут приводить нас к новым степенным рядам с действительными полиномиальными коэффициентами. Но теперь, когда нам придется воспользоваться изученными здесь замечательными свойствами новых рядов, мы иной раз будем вспоминать, где лежат истинные источники этих свойств, о которых мы никогда не узнали бы, оставаясь в тисках одномерной «действительной» прямой . . .

§ 5. Опережение событий

Семейство линий, которое терпеливо дожидалось, пока мы получим в свое распоряжение подходящий аналитический инструмент, наконец-то, снова становится предметом нашего внимания. Как мы уже убедились, «обычно» эти линии устроены относительно просто, и задача может быть исчерпана элементарными средствами. Между тем, случается, что на некоторых участках наши линии ведут себя настолько замысловато, причудливо петляя вокруг начала координат, что распутать этот клубок было бы очень трудно без того «увеличительного» аппарата, который обсуждался в двух предыдущих параграфах. Здесь мы лишь подготовим условия, необходимые для применения этого аппарата. Сейчас наша главная задача — заранее провести регуляризацию тех аналитических функций, которые наряду с уже известными нам могут появиться на сколь угодно далеких этапах ожидающего нас исследования.

5.1. Замена полярного радиуса. Мы предлагаем читателю заглянуть в конец второго параграфа, где осталась наша маленькая петелька $c(\varrho, \alpha_0)$, локализующая одну из особенностей α_0 начального уровня, и вспомнить о той задаче, которую нужно решить, чтобы убедиться в справедливости гипотезы Каратеодори. Как мы видели, нам достаточно доказать, что индекс петельки $c(\varrho, \alpha_0)$ никогда не бывает отрицательным. Более того, нам остается изучить лишь тот случай, когда особенность α_0 имеет тип $(1, \pm)$ или $(2, \pm)$.

Впрочем, пока нас будет интересовать не столько петелька $c(\varrho, \alpha_0)$, сколько ряды X и Y, которые параметризуют «основной» ее участок. Напомним, что особенность α_0 относится именно к этому участку и представляет собой совместный корень главных частей функций X и Y. При этом, как мы отметили в разд. 1.5, функции X и Y, изначально зависящие от полярного радиуса ϱ и полярного угла ϑ, допускают аналитическое продолжение в довольно широкую область комплексных пар (ϱ, ϑ). Все это означает, что обе они могут быть регуляризованы в точке $\varrho = 0$, $\vartheta = \alpha_0$. Пусть p будет одним из тех показателей, для которых замена $\varrho = r^p$ превращает оба ряда X и Y в регулярные функции переменных r и ϑ.

Важно подчеркнуть, что здесь нас вполне устроил бы и любой другой показатель, кратный p, и уже сейчас мы воспользуемся этим обстоятельством. Как мы помним, оба ряда X и Y специальным образом выражаются через «первичную» аналитическую функцию ω, главной частью которой служит тригонометрический многочлен ω_k. При этом особенность α_0, имеющая в нашем случае тип $(1, \pm)$ или $(2, \pm)$, согласно (2.7) является корнем многочлена ω_k, причем кратности не ниже трех. Поэтому и для главных частей рядов

$$\omega_\vartheta = \sum_{m=k}^{\infty} \varrho^m \omega'_m(\vartheta), \quad \omega_{\vartheta\vartheta} = \sum_{m=k}^{\infty} \varrho^m \omega''_m(\vartheta) \tag{5.1}$$

особенность α_0 оказывается корнем. Таким образом, не только функция ω, но и ее производные ω_ϑ и $\omega_{\vartheta\vartheta}$ допускают регуляризацию в точке $(0, \alpha_0)$. Будем считать, что показатель p, только что выбранный для рядов X и Y, одновременно «обслуживает» и эти три функции. Чуть ниже мы окончательно определимся в выборе этого показателя, а пока выясним, к каким изменениям в нашей задаче приводит указанная выше замена полярного радиуса.

Прежде всего заметим, что функция ω, как и порожденные ею ряды X и Y, становятся теперь функциями переменных r и ϑ, и мы принимаем для них новые обозначения w, X_0 и Y_0, полагая

$$w(r, \vartheta) = \omega(r^p, \vartheta), \quad X_0(r, \vartheta) = X(r^p, \vartheta), \quad Y_0(r, \vartheta) = Y(r^p, \vartheta). \tag{5.2}$$

Функция w, как показывает формула (1.14), задается теперь степенным рядом следующего вида:

$$w = \sum_{m=pk}^{\infty} r^m w_m(\vartheta), \tag{5.3}$$

где w_m представляют собой тригонометрические многочлены переменной ϑ. Можно заметить, что здесь $w_m = \omega_{m/p}$, если m делится на p, и $w_m = 0$ для остальных значений индекса m, но нам ни разу не придется применить эти наблюдения. Важнее подчеркнуть, что главной частью ряда w служит, разумеется, прежний тригонометрический многочлен ω_k, который лишь получил новое обозначение w_{pk}.

Необходимо также отметить, что любая замена одного лишь полярного радиуса, очевидно, коммутирует с дифференцированием по полярному углу. В частности,

$$w_\vartheta(r, \vartheta) = \omega_\vartheta(r^p, \vartheta), \quad w_{\vartheta\vartheta}(r, \vartheta) = \omega_{\vartheta\vartheta}(r^p, \vartheta), \tag{5.4}$$

так что регуляризация рядов (5.1) означает, что производные w_ϑ и $w_{\vartheta\vartheta}$ новой функции w тоже оказываются регулярными в точке $r = 0$, $\vartheta = \alpha_0$.

Как легко проверить, функции X_0 и Y_0 связаны с функцией w новыми уравнениями

$$\begin{aligned} X_0 &= (p^2 w_{\vartheta\vartheta} + (2p-1) r w_r - r^2 w_{rr})/p^2, \\ Y_0 &= (r w_{r\vartheta} - p w_{\vartheta})/p, \end{aligned} \tag{5.5}$$

в которые после перехода к переменным r и ϑ преобразуются прежние дифференциальные выражения (1.9). Отсюда вытекает, что разложения этих функций по степеням переменной r имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} X_0 &= \sum_{m=pk}^{\infty} r^m (p^2 w_m''(\vartheta) - m(m-2p) w_m(\vartheta))/p^2, \\ Y_0 &= \sum_{m=pk}^{\infty} r^m (m-p) w_m'(\vartheta)/p. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Подчеркнем, что главными частями новых рядов служат тригонометрические многочлены

$$\begin{aligned} p_0(\vartheta) &= w_{pk}''(\vartheta) - k(k-2) w_{pk}(\vartheta), \\ q_0(\vartheta) &= (k-1) w_{pk}'(\vartheta), \end{aligned} \tag{5.7}$$

и мы с удовлетворением отмечаем, что они — хотя это и не должно нас удивлять — идентичны прежним нашим многочленам p_0 и q_0, определенным выше формулами (2.3).

Петельку $c(\varrho, \alpha_0)$ теперь естественно обозначить символом $c_0(r, \alpha_0)$. Основной ее участок, очевидно, описывается уравнениями

$$x = X_0(r, \vartheta), \quad y = Y_0(r, \vartheta), \quad |\vartheta - \alpha_0| \le \varepsilon_0, \tag{5.8}$$

равносильными уравнениям (2.15). Правила замыкания этого участка, разумеется, не изменились от смены обозначений, так что речь идет о прежней петельке, которой лишь слегка поменяли «номер».

Таким образом, наша исходная геометрическая задача сводится к доказательству неравенства

$$\operatorname{ind} c_0(r, \alpha_0) \ge 0, \tag{5.9}$$

каким бы ни оказался в итоге показатель p, который мы, очевидно, все еще вправе заменить, например, любым кратным ему числом.

5.2. Деревья Каратеодори. Логика излагаемого ниже доказательства такова, что нам необходимо заранее предвидеть, когда и чем все закончится, чтобы знать, с чего начать. Дело в том, что на каждом этапе нашего исследования у нас будут возникать новые линии и описывающие их аналитические функции и нам хотелось бы, чтобы они были регулярными, подобно тем функциям, о регулярности которых мы уже позаботились. Но эти новые функции, вообще говоря, вовсе не обязаны отвечать нашим пожеланиям. Разумеется, можно было бы тут же, на месте, провести их регуляризацию, еще раз применив степенную замену «радиальной» переменной. Но вся беда в том, что это изменит и прежние функции, которые появлялись у нас на пройденных к этому времени этапах, и мы должны будем снова вернуться к их изучению, не имея никакой гарантии, что после этого вновь не встретим такие же затруднения. Ясно, что так построенное «доказательство» навряд ли имело бы шанс кого-нибудь убедить и даже когда-нибудь закончиться ...

Чтобы успешно выйти из этой драматичной ситуации, нужно по крайней мере заранее знать все функции, которые встретятся на нашем пути и на чью регулярность мы возлагаем особые надежды. К счастью, мы знаем эти функции, и теперь приступаем к описанию всего их дружного семейства, которое — в честь бесспорного его прародителя — мы назовем деревом Каратеодори.

Итак, пусть p означает любой из показателей, удовлетворяющих тем условиям, о которых говорилось в предыдущем разделе. А именно, пусть в результате замены $\varrho = r^p$ функции X, Y и ω превратились в регулярные в точке $(0, \alpha_0)$ функции X_0, Y_0 и w, причем производные w_ϑ и $w_{\vartheta\vartheta}$ также оказались регулярными. С каждым таким показателем p мы и свяжем вполне определенный набор функций, который обозначим символом $D(p)$ и назовем деревом Каратеодори веса p.

Пусть набор из s вещественных чисел $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$ представляет собой совместную тейлоровскую цепочку функций X_0 и Y_0. Для каждой такой цепочки построим прежде всего два многочлена, играющие в дальнейшем исключительно важную роль:

$$\varphi_{s-1}(r) = \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_i r^i, \quad \psi_{s-1}(r) = r\varphi'_{s-1}(r). \tag{5.10}$$

Мы должны признаться, что в полной мере осознаем, насколько некорректны наши обозначения, когда индекс определяемой нами функции мы связываем с длиной породившей ее цепочки, хотя прекрасно понимаем, что разные цепочки вполне могут иметь одинаковую длину, порождая при этом абсолютно разные функции. Нам остается лишь уповать на снисходительность нашего читателя, который со временем, возможно, обнаружит в наших вольностях некую целесообразность ... Продолжая в том же духе, построим еще «две» функции X_s и Y_s, определяемые той же тейлоровской цепочкой:

$$X_s = X_0, \quad Y_s = Y_0 + \frac{\psi_{s-1}(r)/p}{1 - (\psi_{s-1}(r)/p)^2} \cdot X_0. \tag{5.11}$$

Учитывая несовершенство наших обозначений, мы обязаны пояснить, что при $s = 1$ речь идет об «одноместной» цепочке Тейлора, сводящейся к ее «началу» α_0. Этому крайнему случаю отвечают многочлены $\varphi_0(r) \equiv \alpha_0$ и $\psi_0(r) \equiv 0$, так что не только $X_1 = X_0$, но и $Y_1 = Y_0$. Значению $s = 2$ соответствуют уже более интересные многочлены $\varphi_1(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r$ и $\psi_1(r) \equiv \alpha_1 r$, и хотя X_2 означает все ту же функцию X_0, ее спутница Y_2 при $\alpha_1 \neq 0$ доставляет нам пример новой функции, еще не встречавшейся прежде. По-видимому, можно согласиться, что при $s \geq 3$ выражение «$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$» уже вполне корректно и ни в каких комментариях не нуждается.

Другое дело — откуда и зачем появились многочлены (5.10) и, особенно, пары функций (5.11) столь странного вида? В силу обстоятельств, отмеченных в самом начале раздела, сейчас мы не можем сказать по этому поводу ничего вразумительного. Все прояснится в последних двух параграфах нашей работы. А пока мы предлагаем читателю смириться с мыслью, что эти функции нам действительно будут нужны, и отнестись к ним с должным вниманием.

Множество $D(p)$ мы определяем как совокупность всех функций Y_s вида (5.11), построенных по всевозможным вещественным наборам $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$, представляющим собой общие цепочки Тейлора регулярных рядов X_0 и Y_0.

Как мы увидим, функции X_s и Y_s всегда будут составлять у нас неразлучную пару. Поэтому с нашей стороны, пожалуй, было бы несправедливо разлучать их безо всякой надобности, включая лишь одну из них в состав дерева $D(p)$. И в самом деле, ничто не мешает нам сложить это дерево из цельных пар (X_s, Y_s), положив в его основу изначальную пару (X_0, Y_0). И тогда, как бы в ответ на этот наш благородный жест, хотя он ничего нам и не стоил, дерево Каратеодори, расправляя свои бесчисленные ветви, открывает перед нашим взором всю панораму будущих событий.

Мы видим, как это дерево начинает произрастать из своего «корня» α_0, олицетворяющего первородную пару (X_0, Y_0), и выпускает из него столько побегов, сколько у этих двух функций имеется общих вещественных тейлоровских параметров α_1 первого уровня. Каждый такой побег заканчивается узлом, где поселяется соответствующая ему пара (X_1, Y_1). В свою очередь, некоторые из этих пар — в меру свой плодовитости — порождают новые побеги, а число их определяется тем, сколько у функций X_0 и Y_0 общих вещественных тейлоровских параметров α_2 второго уровня, продолжающих цепочку α_0, α_1. Каждый из новых побегов заканчивается новым узлом, где устраивается парочка (X_2, Y_2), представляющая новое поколение, и все повторяется снова. Так растет дерево Каратеодори ...

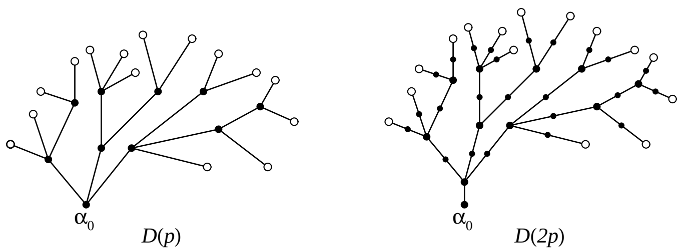


Рис. 5.1. Деревья Каратеодори.

Но жизненные ресурсы у нашей коренной пары (X_0, Y_0) небезграничны. Рано или поздно они будут исчерпаны и дерево $D(p)$ закончит свой рост. И сколь бы необъятным оно ни оказалось, любой путь по нему снизу вверх заканчивается в одной из «бесплодных» его вершин, число которых «генетически» предопределено и всегда конечно. Наша задача в оставшейся части работы — изведать все эти пути, добравшись, если потребуется, до каждой вершины дерева Каратеодори.

5.3. Регуляризация задачи. Как мы отмечали в разд. 5.1, любая замена вида $r = R^N$ с натуральным показателем N сохраняет регулярность функций X_0 и Y_0, если выразить их в терминах переменных R и ϑ. То же самое относится к функции w и ее производным первого и второго порядков, посчитанным по угловой переменной, причем все равно — считать ли их до или после указанной замены. Таким образом, мы вправе говорить о дереве Каратеодори $D(P)$ веса $P = pN$. Для решения основной задачи этого раздела нам необходимо хорошо представлять, как устроено новое дерево $D(P)$.

Лемма 5.1. *В состав дерева $D(P)$ входят те и только те функции переменных R и ϑ, которые получаются подстановкой $r = R^N$ из функций переменных r и ϑ, составляющих дерево $D(p)$.*

Доказательство. Заметим, что «новые» тейлоровские ряды функций X_0 и Y_0, выраженных в терминах R, получаются из «прежних» рядов простой подстановкой R^N вместо r. Иначе говоря, происходит лишь «разрежение» исходных рядов. Но следует иметь в виду, что при этом каждый прежний тейлоровский отрезок $\varphi_{s-1}(r)$ порядка $s - 1$ переходит в тейлоровский отрезок нового ряда, повышая в N раз свой порядок относительно новой переменной R, который теперь становится равным $N(s-1)$. Таким образом, если бы мы, не зная о происхождении новых переменных, повторили описанные выше построения, пользуясь соответствующими большими буквами, то этот последний отрезок нам пришлось бы обозначить символом $\Phi_{S-1}(R)$, где $S = N(s-1)+1$. Тогда соответствующая функция $\Psi_{S-1}(R)$ будет иметь вид

$$\Psi_{S-1}(R) := R\Phi'_{S-1}(R) = NR^N\varphi'_{s-1}(R^N) = N\psi_{s-1}(R^N) \tag{5.12}$$

и мы приходим к замечательному соотношению:

$$(\Psi_{S-1}/P)(R) = (\psi_{s-1}/p)(R^N). \tag{5.13}$$

Это показывает, что функция переменных R и ϑ, которую для номера S указанного специального вида мы построили бы по второй из формул типа (5.11), на самом деле получается из Y_s заменой $r = R^N$. Что же до остальных функций из дерева $D(P)$, то каждая из них, как это следует из замечания о разрежении рядов, совпадает с одной из только что рассмотренных нами функций. Лемма доказана.

Как мы видим, увеличение показателя p в N раз приводит к N-кратному увеличению числа узлов дерева $D(p)$, фактически не меняя его «мощности». Точнее говоря, в результате обсуждаемого преобразования каждый прежний узел заменяется в новом дереве $D(P)$ набором из N идентичных узлов, связанных линейной цепочкой побегов, в пределах которой «потомки» представляют собой точные копии своих «предков». На рис. 5.1 мы попытались, как могли, изобразить «удвоение» дерева Каратеодори.

Теперь мы готовы решить основную задачу, пожалуй, не только этого раздела, но и всего параграфа. Если мы посмотрим на соотношения (5.6) и (5.11), а также учтем, что всегда $\psi_{s-1}(r) = O(r)$, то увидим, что главными частями аналитических функций Y_s при всех s, как и при $s = 0$, служит один и тот же тригонометрический многочлен q_0, определенный второй из формул (5.7) и равный нулю в точке α_0. Это наблюдение показывает, что все функции Y_s допускают регуляризацию в точке $(0, \alpha_0)$. Более того, поскольку X_0 и Y_0 при малых $r > 0$ не равны нулю одновременно, то множество $D(p)$ конечно, как мы недавно заметили, имея в виду лемму 4.8. Таким образом, все входящие в его состав функции Y_s могут быть регуляризованы единой степенной заменой переменной r. Но мы утверждаем больше.

Лемма 5.2. *От любого из рассмотренных нами показателей p можно перейти к такому кратному ему показателю P, что все функции, входящие в состав множества $D(P)$, окажутся регулярными в интересующей нас точке.*

Доказательство. Подберем номер N так, чтобы замена $r = R^N$ привела все функции Y_s к регулярному виду в точке $R = 0$, $\vartheta = \alpha_0$. Мы утверждаем, что в качестве искомого показателя можно взять, например, число $P = Np$. Некоторая нетривиальность нашего утверждения связана с тем, что не только количество функций в дереве Каратеодори, но и формулы для них зависят от веса этого дерева. В частности, мы не могли бы ограничиться просто тем замечанием, что все функции Y_s, выраженные в переменных R, ϑ, стали регулярными в нужной нам точке. Теперь нас интересуют не эти функции, а те их аналоги, к которым мы пришли бы, взяв еще в начале параграфа вместо p число P. Словом, мы должны убедиться в регулярности всех функций, составляющих новое дерево $D(P)$. Но предыдущая лемма только что показала нам, что на самом деле каждая функция из множества $D(P)$, зависящая от переменных R и ϑ, совпадает с одной из функций вида $Y_s(R^N, \vartheta)$, где $Y_s \in D(p)$, и потому регулярна в точке $R = 0, \vartheta = \alpha_0$. Лемма доказана.

Итак, змея, ухватив себя за хвост, свернулась в кольцо, определив для нас арену будущих действий ... Здесь мы навсегда прощаемся с полярным радиусом, наконец-то, найдя ему достойную замену. Нам не нужны больше и заглавные буквы P и R, и мы возвращаемся к более удобным обозначениям p и r, но уже по праву считая, что вместе с рядами w, w_ϑ и $w_{\vartheta\vartheta}$ все функции X_s и Y_s, по каким бы общим для X_0 и Y_0 вещественным тейлоровским цепочкам они ни были построены, регулярны в точке $(0, \alpha_0)$. Это значит, что к ним применимы все выводы о регулярных функциях, полученные в предыдущем параграфе.

5.4. Замена полярного угла. К тому моменту, когда в предстоящем нам исследовании мы придем к необходимости изучения функций X_s и Y_s, у нас накопится совместная вещественная тейлоровская цепочка $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$ функций X_0 и Y_0. На этом этапе особенно удобно будет заменить полярный угол ϑ новой переменной u, полагая

$$\vartheta = \varphi_{s-1}(r) + ur^s. \tag{5.14}$$

Здесь $\varphi_{s-1}(r)$ означает многочлен переменной r, определенный первой из формул (5.10). Вскоре нам пригодится и связанный с ним многочлен $\psi_{s-1}(r)$, заданный вторым из упомянутых соотношений. Пока нет необходимости обсуждать, почему возникает потребность именно в таких заменах угловой переменной, хотя мы уже видели в § 4, насколько они естественны и полезны. Здесь наша задача сводится к тому, чтобы в дальнейшем освободить себя от тяжелых и отвлекающих вычислений. Лучше такую работу выполнить заранее, что мы и предлагаем читателю.

Прежде всего преобразуем «главную» нашу функцию w к переменным r и u. Как показывает лемма 4.1, в результате она запишется в виде степенного ряда

$$w = \sum_{m=pk}^{\infty} r^m g_m(u), \tag{5.15}$$

чьими коэффициентами служат некоторые алгебраические многочлены g_m переменной u. Разумеется, в этом месте можно было бы точнее сказать, откуда начинается ряд, учитывая регулярность функции w, но сейчас для нас это не имеет значения.

Как читатель уже заметил, говоря о функции w, мы часто упоминали и первые две ее производные по переменной ϑ. Они и в самом деле будут нам интересны, и мы тоже запишем их в новых переменных, выразив их через коэффициенты ряда (5.15). Это легко:

$$w_\vartheta = \sum_{m=pk} g'_m(u) r^{m-s}, \quad w_{\vartheta\vartheta} = \sum_{m=pk} g''_m(u) r^{m-2s}. \tag{5.16}$$

Обращаясь теперь с той же целью к дифференциальным выражениям (5.5), после немалой, хотя и элементарной вычислительной работы мы обнаружим, что функции X_0 и Y_0 в переменных r и u примут следующий вид:

$$\begin{aligned} X_0 &= \sum_{m=pk}^{\infty} \bigl(a_m^{(0)} r^m + a_m^{(1)} r^{m-s} + a_m^{(2)} r^{m-2s}\bigr)/p^2, \\ Y_0 &= \sum_{m=pk}^{\infty} \bigl(b_m^{(1)} r^{m-s} + b_m^{(2)} r^{m-2s}\bigr)/p, \end{aligned} \tag{5.17}$$

где коэффициенты $a_m^{(i)}$, участвующие в первом из этих соотношений, явно выражаются через многочлены $\psi_{s-1} = \psi_{s-1}(r)$ и $g_m = g_m(u)$ по формулам

$$\begin{aligned} a_m^{(0)} &= m(2p-m)g_m + (2m-s-2p)sug_m' - s^2u^2g_m'', \\ a_m^{(1)} &= (2(m-s-p)\psi_{s-1} + r\psi_{s-1}')g_m' - 2\psi_{s-1}sug_m'', \\ a_m^{(2)} &= \bigl(p^2 - \psi_{s-1}^2\bigr)g_m'', \end{aligned} \tag{5.18}$$

и то же самое относится к коэффициентам $b_m^{(j)}$ второго соотношения, для которых аналогичные формулы уже заметно проще:

$$\begin{aligned} b_m^{(1)} &= (m-s-p)g_m' - sug_m'', \\ b_m^{(2)} &= -\psi_{s-1}g_m''. \end{aligned} \tag{5.19}$$

К счастью, мы далеко не сразу столкнемся с этими устрашающими выражениями. Например, если взять в них $s = 0$, полагая $\varphi_{-1} = \psi_{-1} = 0$ и справедливо считая, что в таком случае $u = \vartheta$ и $g_m(u) = w_m(\vartheta)$, то соотношения (5.17)–(5.19), как и должно быть, превратятся в исходные формулы (5.6). Затем мы возьмем $s = 1$ и соответственно функции $\varphi_0(r) = \alpha_0$ и $\psi_0(r) = 0$, когда формулы (5.17)–(5.19) имеют еще вполне приличный вид. Они не слишком усложнились бы, если мы перешли бы к следующему шагу, полагая $s = 2$, поскольку функции $\varphi_1(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r$ и $\psi_1(r) = \alpha_1 r$ еще совсем просты. И только когда перед нами встанет задача совершения индукционного шага, наши выражения предстанут нам во всей своей красе. Но здесь уж ничего не поделаешь — нам придется познакомиться с ними поближе, привыкнуть к ним и обнаружить, что на самом деле они вполне обозримы и даже привлекательны, но что совсем неожиданно, после их преобразования в соответствии с формулами (5.11) в главных своих частях они будут иметь простую и ясную структуру, общую для всех шагов.

В заключение раздела — простая загадка. Если бы мы, преобразуя функции X_0 и Y_0 к новым переменным, исходили не из дифференциальных выражений (5.5), а из разложений (5.6), у нас получились бы степенные ряды относительно переменной r, в которых нигде не могли бы появиться отрицательные показатели. Между тем, если внимательно посмотреть на формулы (5.17), то можно заметить, что отрицательные показатели в них все же появляются — это происходит, когда номер шага s становится больше числа pk, всегда остающегося неизменным. В чем же дело? Впрочем, загадка легко разгадывается, и мы получаем первую возможность удивиться внутренней организованности внешне неуклюжих выражений (5.18) и (5.19). Действительно, согласно лемме 4.1 многочлены g_m, возникшие в новом разложении (5.15) функции w, не могут быть совсем произвольными. Например, первые s из них постоянны, а следующие за ними s многочленов линейны. Если мы еще раз обратимся к формулам (5.17)–(5.19), то увидим, что всякий раз, когда степень r падает от значения m на s единиц, в качестве сомножителя обязательно присутствует по крайней мере первая производная g'_m, которая может быть отличной от нуля только при $m \geq pk + s$. В тех же местах, где степень m уменьшается на $2s$, непременно появляется вторая производная g''_m и только при $m \geq pk + 2s$ она вправе быть ненулевой. Таким образом, в наших рядах нет степеней переменной r, меньших pk. Кстати, то же самое касается и рядов (5.16). Словом, дело здесь, разумеется, не в рядах, а в способе преобразования переменных.

5.5. Что нас ждет впереди. Следует признать, что до сих пор мы не приступили еще к настоящему исследованию, но лишь готовились к нему. Впрочем, в этом мы не чувствуем за собой никакой вины, ибо все определяется объективной сложностью самой задачи, и мы не хотели бы посвящать ей работу, которая бы, оставшись непонятой, канула в Лету ...

Так что впереди у нас самое интересное. А ждут нас красивые аналитические и алгебраические линии, как и неразлучные их спутники — степенные ряды и многочлены, скрывающие где-то в своих недрах те пружины, за счет которых и вращаются их геометрические подруги ... Самое же удивительное заключается в том, что — при невероятной сложности возникающей здесь картины — эти линии все же подчиняются определенным запретам, не позволяющим им накапливать отрицательный индекс. Но убедиться в этом мы сможем далеко не сразу — прежде мы должны детально изучить каждую «критическую» область, пройдя, если будет нужно, через несколько все более и более тонких уровней. Нам предстоит совершить неизвестное, хотя и конечное число шагов, пока мы не преодолеем весь процесс разрешения особенностей, ветвящийся на каждом этапе и доставляющий всякий раз новые линии и новые критические точки. Чтобы в течение всего пути не терять ориентации и чувства уверенности, нам нужна единообразная для всех шагов система обозначений и стройная логическая схема дальнейшего исследования. Кое-что в этом отношении мы уже сделали и теперь предлагаем вниманию читателя краткий план той работы, которую нам осталось провести.

Каждый «объект», который нам придется исследовать, всегда будет относиться к определенному «уровню». Все такие уровни «нумеруются» значком s, принимающим последовательные целые значения начиная с единицы. Изучению объектов уровня s отводится отдельный «одноименный» этап, или s-й шаг, нашего исследования. К началу каждого такого шага в нашем распоряжении будут:

(1) один из наборов $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$ вещественных чисел, представляющих собой совместную тейлоровскую цепочку функций X_0 и Y_0;

(2) связанное с этой цепочкой семейство замкнутых линий $C_s(r)$, определенных для всех достаточно малых значений $r > 0$ и не пересекающих начала координат; каждая такая линия будет состоять из «основного» участка и «замыкающей» его дуги; при этом основной участок параметризуется знакомыми нам функциями X_s и Y_s, построенными выше по формулам (5.11), а замыкающие дуги строятся по определенным правилам, о которых здесь вряд ли уместно говорить;

(3) некая гипотеза H_s о линиях $C_s(r)$, а точнее об их индексах; согласно этой гипотезе всегда

$$\operatorname{ind} C_s(r) \geq 0, \tag{5.20}$$

а если нам попался «избранный» случай, то справедливо более сильное неравенство

$$\operatorname{ind} C_s(r) \geq 1. \tag{5.21}$$

Сейчас у нас нет никакой возможности, равно как и необходимости, пояснять, что такое «избранный случай».

Наш «план» в точности соответствует той «логической схеме», которую мы описали в разд. 4.5, и сводится к следующему. Прежде всего, построив семейство $C_1(r)$, отвечающее «цепочке» α_0, мы обнаружим, что из гипотезы H_1 вытекает неравенство (5.9), заключающее в себе, как мы видели, гипотезу Каратеодори. Тем самым будет завершен начальный этап исследования, который мы начали — и почти полностью прошли — еще в § 2.

Заметим, что так называемые «избранные» случаи здесь нам пока не встретятся. Таким образом, дело теперь сводится к доказательству неотрицательности индекса контура $C_1(r)$. Постановка этой новой задачи означает начало «первого» этапа. Здесь мы либо решаем нашу задачу, и тогда все заканчивается, либо выясняем, что вынуждены свести ее к другой задаче, относящейся уже к новому этапу. Последнее случается лишь при условии, что у главных частей рядов X_1 и Y_1 объявляется общий вещественный корень. Замечая, что каждый такой корень α_1 вместе с особенностью α_0 составляет совместную тейлоровскую цепочку α_0, α_1 функций X_0 и Y_0, мы строим отвечающее этой цепочке новое семейство контуров $C_2(r)$, с которым связываем гипотезу H_2, и убеждаемся, что из гипотезы H_2 вытекает гипотеза H_1. На этом задача первого шага исчерпывается.

На самом деле и здесь никаких «избранных» случаев еще не бывает, хотя это уже требует доказательства, которое мы — с большим сожалением — вынуждены будем опустить, постоянно стремясь к максимальной краткости нашей работы … Мы лишь заметим, что теперь оказались на старте «второго» этапа, и оставшаяся наша задача — доказательство гипотезы H_2. Однако отдельное внимание мы уделять ей не будем, поскольку ровно в этот момент почувствуем готовность к совершению «индукционного» шага …

И тогда мы представим себе, что находимся в начале этапа с номером $s \geq 2$, а значит, у функций X_0 и Y_0 уже сформировалась совместная вещественная цепочка Тейлора $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$, с которой связано семейство контуров $C_s(r)$, а еще — гипотеза H_s, заключающая в себе нашу «заветную цель». Как и прежде, либо мы докажем ее, либо обнаружим, что нам мешает это сделать некий общий вещественный корень главных частей рядов X_s и Y_s. Здесь мы снова заметим, что любой такой корень α_s служит совместным тейлоровским параметром функций X_0 и Y_0, продолжающим имеющуюся у нас цепочку. Так у функций X_0 и Y_0 возникает новая общая цепочка Тейлора $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \alpha_s$ порядка s, а вслед за ней — и новое семейство линий $C_{s+1}(r)$, с которым связана новая гипотеза H_{s+1}. Последняя наша задача — доказать гипотезу H_s «при условии», что гипотеза H_{s+1} справедлива.

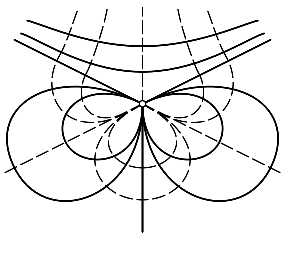


Рис. 5.2. Логика разрешения особенностей.

Как мы уже убедились, число путей вдоль дерева Каратеодори конечно, и каждый путь имеет конечную длину. Таким образом, у нас лишь конечное число сценариев, и, что гораздо важнее, любой из них когда-нибудь заканчивается — в каждом из них рано или поздно наступает тот волнующий и праздничный момент, после которого особенностей нового уровня уже не будет. Поэтому успешное выполнение намеченной нами программы будет означать и окончание нашей работы.

Нам остается заметить, что реализации нашего плана посвящаются два последних параграфа этой статьи, а еще — выразить надежду, что теперь наш читатель в полной мере готов ко всем трудностям, ожидающим его в долгой дороге. Своенравная и непредсказуемая, она с каждым шагом будет уводить его все дальше и дальше от привычных масштабов «реальных» объектов, показывая ему в мельчайших деталях, как устроены настолько микроскопические их части, что представить их откажется любое воображение. И повсюду будет встречать его та нерукотворная гармония, которая безмолвно царит на любой глубине, ничуть не заботясь, будет ли она кому-нибудь доступна ... Но в какой-то момент читатель заметит, что проплывающие перед ним картины начинают повторяться, и может показаться, что этому никогда не будет конца. Особая прелесть изучаемых нами аналитических объектов заключается в том, что этот процесс не в силах продолжаться до бесконечности и весь — до последнего остатка — может быть заключен в конечную схему вроде той, что в двух вариантах представлена на рис. 5.2. Два приведенных здесь образа, развивающие неисчерпаемую художественную тему «деревья Каратеодори», абсолютно эквивалентны и различаются между собой лишь тем, что первый из них, скорее, относится к веселому жанру детского рисунка и призван поддержать хорошее настроение читателя в предстоящем ему нелегком пути, второй же — выдержан в стиле строгой линейной графики ...

§ 6. Комбинаторика правильных линий

На каждом этапе дальнейшего исследования у нас будут возникать различные семейства кривых, параметризуемых рядами одного и того же вида, но зависящими от нескольких параметров, которые от шага к шагу будут менять свои значения. И всегда «главными частями» этих семейств будут симпатичные алгебраические линии, обладающие замечательными свойствами. Чтобы не запутаться в деталях, а их будет немало, мы заранее изучим ряд общих свойств этих линий и опишем связанные с ними специальные конструкции.

6.1. Четыре типа контуров. Пусть дуга K^* начинается в одной из открытых четвертей координатной плоскости (x, y), а заканчивается в другой. Из двенадцати логически возможных вариантов нас будут интересовать только четыре. А именно, мы скажем, что дуга K^* имеет: тип $(1, +)$, если она начинается во второй четверти и заканчивается в первой; тип $(1, -)$, если ее начало лежит в четвертой четверти, а конец в третьей; тип $(2, +)$, если она выходит из четвертой четверти и приходит в первую; тип $(2, -)$, если она, начав свой путь во второй четверти, завершает его в третьей.

Все эти варианты схематически изображены на рис. 6.1, где дуга K^* представлена сплошной линией. На том же рисунке читатель видит пунктирные линии K^+, дополняющие дуги K^* до замкнутых контуров. Правила их построения вполне аналогичны уже встречавшимся нам, но если раньше мы особенно заботились о том, как вспомогательные дуги пересекают ось абсцисс, то теперь все наше внимание переключается на ось ординат.

Итак, в случае нечетного типа мы считаем, что вспомогательная дуга идет от конца линии K^* к ее началу, пересекая один раз ось ординат, причем это пересечение должно состояться в точке, лежащей строго выше начала координат и всех пересечений указанной оси самой линией K^*, если тип положителен, и ниже всех указанных точек, если тип отрицателен. В случае четного типа замыкающая дуга тоже соединяет конец основной линии с ее началом, но уже дважды пересекая ось ординат: один раз выше начала координат и всех точек, где через ту же ось проходит линия K^*, а другой раз ниже. Подчеркнем, что в «нечетном» случае дуга K^+ должна иметь только одну общую точку с осью ординат, а в «четном» — ровно две.

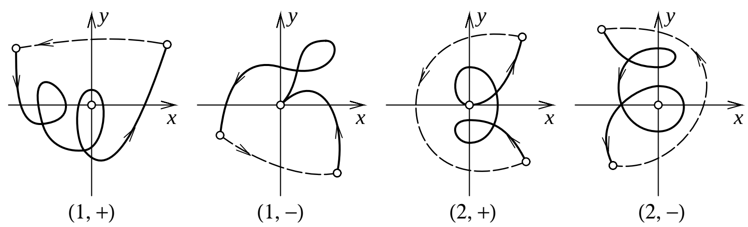


Рис. 6.1. Четыре типа контуров.

Пусть K означает контур $K^* + K^+$, составленный из дуг K^* и K^+. Линию K^* мы будем считать основным участком контура K, а линию K^+ назовем вспомогательной, или замыкающей, дугой. Тип дуги K^* естественно считать и типом контура K.

Из описанных только что правил построения замыкающих дуг, как легко видеть, вытекает следующее утверждение.

Лемма 6.1. *Если в качестве дуги K^* взять линию, правильную относительно оси ординат, ориентированной в ту или иную сторону, то и контур K будет правильным относительно той же оси.*

В дальнейшем мы считаем, что дуга K^* может лишь конечное число раз пересекать ось ординат. Разумеется, тогда и контур K обладает таким же свойством. Таким образом, если K^* не проходит через начало координат, то в качестве луча, «считающего» индекс контура K, можно взять как положительную, так и отрицательную полуось ординат. Следующее утверждение, как и предыдущее, геометрически очевидно и вряд ли нуждается в комментариях.

Лемма 6.2. *Пусть контур K представляет собой правильную линию относительно так или иначе ориентированной оси ординат и не проходит через ее начало. Тогда в любом случае* $\operatorname{ind} K \geq 0$. *Если же при указанных условиях дополнительно известно, что контур K правильный относительно отрицательно ориентированной оси ординат и имеет тип* $(2,+)$ *либо, напротив, он правильный по отношению к положительно направленной вертикали, имея при этом тип* $(2,-)$, *то* $\operatorname{ind} K \geq 1$.

6.2. Основной класс линий. Рассмотрим вещественный многочлен $f(t)$ переменной t, имеющий степень $n \geq 3$ и старший коэффициент A. Построим с его помощью два других многочлена:

$$\begin{aligned} p(t) &= f''(t) + a, \\ q(t) &= bf'(t) - ctf''(t) + d, \end{aligned} \tag{6.1}$$

где a, b, c и d означают вещественные постоянные, причем первая и четвертая из них могут быть произвольными, а вторая и третья подчиняются неравенствам

$$b > (n-1)c > 0. \tag{6.2}$$

Если разложить многочлены $p(t)$ и $q(t)$ по убывающим степеням переменной t, мы придем к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} p(t) &= An(n-1)t^{n-2} + \dots\,, \\ q(t) &= An(b - c(n-1))t^{n-1} + \dots\,. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Таким образом, степень многочлена p равна $n-2$, а его старший коэффициент имеет тот же знак, что и A. Что касается многочлена q, то его степень благодаря условию (6.2) в точности равна $n-1$, причем знак старшего коэффициента также совпадает со знаком A.

Выберем теперь число t^* настолько большим, чтобы в области $|t| \geq t^*$ многочлены $p(t)$ и $q(t)$ не имели корней. Пусть Γ^* означает дугу на плоскости (x, y), определенную соотношениями

$$x = p(t), \quad y = q(t), \quad |t| \leq t^*. \tag{6.4}$$

Как вытекает из предыдущих замечаний о степенях и старших коэффициентах многочленов $p(t)$ и $q(t)$, дуга Γ^* принадлежит одному из рассмотренных выше четырех классов линий. Точнее говоря, она имеет: тип $(1, +)$, если номер n нечетный и $A > 0$; тип $(1, -)$, если номер n нечетный и $A < 0$; тип $(2, +)$, если номер n четный и $A > 0$; тип $(2, -)$, если номер n четный и $A < 0$.

Основным предметом нашего исследования здесь и в дальнейшем будут семейства линий следующего вида:

$$\begin{aligned} x &= p(t) + rH(r, t), \\ y &= q(t) + rH(r, t), \end{aligned} \tag{6.5}$$

где символы $H(r, t)$, как и ранее, означают двойные степенные ряды, абсолютно сходящиеся при всех достаточно малых значениях r и rt. Таким образом, каким бы большим ни оказалось выбранное выше число t^*, можно указать настолько малое $r^* > 0$, что при $0 < r < r^*$ «остаточные» функции $rH(r, t)$ определены на всем отрезке $|t| \leq t^*$ и равномерно на нем стремятся к нулю, когда $r \to 0$. В дальнейшем мы считаем, не оговаривая этого более, что переменная r принимает свои значения лишь в пределах интервала $0 < r < r^*$.

Для каждого такого r обозначим символом $\Gamma^*(r)$ участок линии (6.5), отвечающий отрезку $|t| \leq t^*$. Поскольку при $r \to 0$ дуги $\Gamma^*(r)$ равномерно стремятся к Γ^*, то при достаточно малых r они относятся к тому же типу, что и предельная дуга. Уменьшив, если нужно, число r^*, мы будем считать, что это верно для всех r из интервала $0 < r < r^*$.

В соответствии с правилами, принятыми нами в предыдущем разделе, построим для линии Γ^* замыкающую ее дугу Γ^+ и образуем контур $\Gamma = \Gamma^* + \Gamma^+$. Аналогичные построения выполним для каждой линии $\Gamma^*(r)$, замыкая ее соответствующей вспомогательной дугой $\Gamma^+(r)$ до контура $\Gamma(r)$. Вполне можно считать, что и $\Gamma(r) \to \Gamma$ при $r \to 0$.

Начиная с этого момента мы предполагаем, что ни одна из линий $\Gamma^*(r)$ не проходит через начало координат, а значит, можно говорить об индексе каждого контура $\Gamma(r)$. Ясно, что в этом случае все контуры $\Gamma(r)$ гомотопически эквивалентны, так что все они имеют общий индекс. Наша задача — указать полезные для дальнейшего условия, при которых этот индекс неотрицателен, а также выяснить, в каких случаях он не меньше единицы.

6.3. Вращение главного контура. Следующая лемма отражает важнейшее свойство контура Γ, который мы будем называть главным контуром семейства $\Gamma(r)$.

Лемма 6.3. *Контур Γ представляет собой замкнутую линию, правильную относительно оси ординат, ориентированной подходящим образом, а именно: в отрицательную сторону, если $a \geq 0$, и в положительную — в случае $a \leq 0$. В частности, при $a = 0$ контур Γ будет правильным при любой ориентации оси ординат.*

Доказательство. Согласно лемме 6.1 нам достаточно установить правильность основного участка Γ^* контура Γ. Рассмотрим случай $a \geq 0$. Пусть нашлись такие два значения $t_1 < t_2$ переменной t, что $x(t_1) = x(t_2) = 0$ и $x(t) < 0$, когда $t_1 < t < t_2$. В терминах многочлена f это означает, что $f''(t_1) = f''(t_2) = -a$ и $f''(t) < -a$ при $t_1 < t < t_2$. Тогда

$$y(t_2) - y(t_1) = b \int_{t_1}^{t_2} f''(t)dt + ac(t_2 - t_1), \tag{6.6}$$

где интеграл строго меньше $(-a)(t_2 - t_1)$. Отсюда даже при более слабых, чем у нас, условиях $b > 0$ и $b \geq c$ мы получаем нужную оценку

$$y(t_2) - y(t_1) < (-a)(b - c)(t_2 - t_1) \leq 0, \tag{6.7}$$

доказывающую правильность линии Γ^*, а значит, и контура Γ относительно оси ординат, направленной вниз. Точно так же устанавливается правильность контура по отношению к положительно ориентированной вертикальной оси, когда $a \leq 0$. Лемма доказана.

В случае «общего положения» уже одна эта лемма позволяет в полной мере решить задачу, поставленную в конце предыдущего раздела.

Лемма 6.4. *Пусть главный контур Γ семейства $\Gamma(r)$ не проходит через начало координат. Тогда*

$$\operatorname{ind}\Gamma(r) = \operatorname{ind}\Gamma \geq 0. \tag{6.8}$$

Если же, кроме того, номер n четный и $aA \geq 0$, так что либо $a = 0$, либо знак a совпадает со знаком коэффициента A, то

$$\operatorname{ind}\Gamma(r) = \operatorname{ind}\Gamma \geq 1. \tag{6.9}$$

Доказательство. В условиях леммы индекс любой кривой нашего семейства, очевидно, равен индексу его главного контура, так что, фактически, оба утверждения леммы относятся именно к нему. Согласно лемме 6.3 в любом случае ось ординат можно ориентировать так, что контур Γ окажется правильным относительно нее. Но тогда, как мы отметили в лемме 6.2, его индекс неотрицателен. Если же номер n четный, а коэффициент A, скажем, больше нуля, то контур Γ имеет тип $(2, +)$. Если к тому же $a \geq 0$, то наш контур в силу предыдущей леммы правильный относительно отрицательно направленной оси ординат. Но в таком случае лемма 6.2 гарантирует нам, что его индекс не меньше единицы. Аналогично исчерпывается и случай $A < 0$. Лемма доказана.

6.4. Простые особенности. Здесь мы отметим один важный случай, когда утверждения предыдущей леммы сохраняют силу без предположения о поведении главного контура.

Лемма 6.5. *Если $a \neq 0$, то в любом случае*

$$\operatorname{ind}\Gamma(r) \geq 0. \tag{6.10}$$

Если при этом номер n четный и знак постоянной a совпадает со знаком коэффициента A, то

$$\operatorname{ind}\Gamma(r) \geq 1. \tag{6.11}$$

Доказательство. Случаи $a < 0$ и $a > 0$ эквивалентны не только по существу, но и формально, так что нам достаточно обсудить только один из них. Пусть для определенности $a > 0$.

Если главный контур не проходит через начало координат, то задача уже решена. Предположим теперь, что в какой-то момент t_0 он оказался в этой точке. Подчеркнем, что контур Γ лишь основной своей частью Γ^* может пересекать начало координат, причем только при тех значениях параметра, которые по модулю строго меньше t^*. Таким образом, около точки t_0, как слева, так и справа от нее, контур Γ параметризуется многочленами $p(t)$ и $q(t)$, причем $p(t_0) = 0$ и $q(t_0) = 0$.

Первым делом мы докажем, что в момент t_0 контур Γ имеет ненулевую «скорость». Действительно, если $f'''(t_0) \neq 0$, то $p'(t_0) \neq 0$. Если же $f'''(t_0) = 0$, то

$$q'(t_0) = (b - c)f''(t_0) = (b - c)(-a) < 0. \tag{6.12}$$

Важно заметить, что во втором случае контур идет через начало координат сверху вниз. Именно это обстоятельство позволит нам провести описываемые ниже построения, решающие нашу задачу.

Контур Γ конечное число раз пересекает ось ординат или задевает ее. Поэтому мы можем выбрать настолько малый круг B с центром в нуле, что внутри него контур Γ не будет иметь общих точек с осью ординат, кроме нуля. Пусть число $\varepsilon > 0$ таково, что отрезки $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, которые мы построим для каждого из имеющихся у нас особых значений t_0, не пересекаются между собой и лежат в интервале $(-t^*, t^*)$. Для каждого из указанных отрезков выделим на дуге Γ^* соответствующую ему часть $\gamma^*(t_0)$. Уменьшая, если нужно, число ε, мы вправе считать, что участок $\gamma^*(t_0)$ целиком располагается в пределах диска B, а его «скорость» всюду, как и в момент $t = t_0$, имеет отличную от нуля соответствующую компоненту.

Рис. 6.2. Случай $p'(t_0) \neq 0$.

Соединим теперь конец дуги $\gamma^*(t_0)$ с ее началом вспомогательной дугой $\gamma^+(t_0)$, которую построим специальным образом. Прежде всего эта дуга должна оставаться внутри круга B. Кроме того, в случае $p'(t_0) \neq 0$ она имеет ровно одну общую точку с осью ординат, где и пересекает ее, причем происходит это выше нуля, если $p'(t_0) > 0$, и, напротив, ниже, если $p'(t_0) < 0$. Два таких примера — по одному для каждого варианта — приведены на рис. 6.2. Если же $p'(t_0) = 0$, дуга $\gamma^+(t_0)$ лишь один раз пересекает ось абсцисс, причем непременно справа от нуля, а что касается оси ординат, то дуге $\gamma^*(t_0)$ разрешается иметь с ней лишь минимально необходимое число общих точек. Эти требования иллюстрирует рис. 6.3.

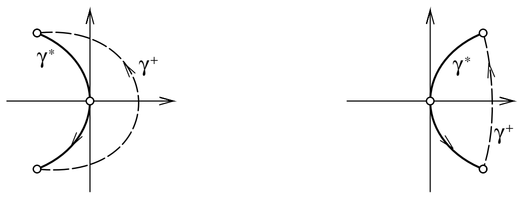


Рис. 6.3. Случай $p'(t_0) = 0$.

Теперь, подобно нашим действиям в разд. 2.4, мы перестроим контур Γ, заменяя каждый его участок $\gamma^*(t_0)$ дугой $\gamma^-(t_0)$, которая отличается от $\gamma^+(t_0)$ лишь направленностью. В результате у нас возникнет некий новый контур. Мы обозначим его символом Γ'. Если наш читатель уже достаточно хорошо ориентируется в ситуации, для него должно быть очевидно, что контур Γ' наследует важнейшее свойство исходного контура Γ быть правильным относительно оси ординат, направленной в отрицательную сторону. Мы лишь заметим, что именно здесь сказываются наши предосторожности, связанные с пересечениями оси ординат вспомогательными дугами.

Новый контур Γ' в отличие от Γ не проходит через начало координат. Ясно, что «глобальный тип» у перестроенного контура такой же, как у главного, а значит, определяется четностью показателя n и знаком коэффициента A. Поэтому, опираясь на лемму 6.2 точно так же, как при доказательстве леммы 6.4, мы приходим к следующему выводу: всегда $\operatorname{ind}\Gamma' \geq 0$, а в случае, если номер n четный и $A > 0$, справедливо более сильное неравенство $\operatorname{ind}\Gamma' \geq 1$.

Как уже отмечалось, при $r \to 0$ линии $\Gamma^*(r)$ равномерно стремятся к дуге Γ^*. В частности, если для каждого особого значения t_0 обозначить символом $\gamma^*(r, t_0)$ участок линии $\Gamma(r)$, отвечающий отрезку $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + \varepsilon$, то при достаточно малых $r > 0$ начало и конец дуги $\gamma^*(r, t_0)$ попадут в те же открытые четверти плоскости (x, y), где расположены соответствующие граничные точки дуги $\gamma^*(t_0)$. Разумеется, мы можем и для линий $\gamma^*(r, t_0)$ построить замыкающие дуги $\gamma^+(r, t_0)$ в соответствии с только что описанными правилами, причем легко сделать так, что при $r \to 0$ они будут стремиться к $\gamma^+(t_0)$. Аналогично предыдущим нашим действиям для любого достаточно малого r построим контур $\Gamma'(r)$, заменяя каждую дугу $\gamma^*(r, t_0)$ в контуре $\Gamma(r)$ дугой $\gamma^-(r, t_0) = -\gamma^+(r, t_0)$. Кроме того, из двух дуг $\gamma^*(r, t_0)$ и $\gamma^+(r, t_0)$ мы образуем петельку $\gamma(r, t_0)$, «локализующую» особенность t_0. В итоге контур $\Gamma(r)$ окажется представленным в виде формальной суммы замкнутых линий, ни одна из которых не проходит через начало координат, а именно:

$$\Gamma(r) = \Gamma'(r) + \sum_{t_0} \gamma(r, t_0), \tag{6.13}$$

где суммирование ведется по всем особым значениям t_0 главного контура Γ. Как мы уже говорили, в таком случае

$$\operatorname{ind}\Gamma(r) = \operatorname{ind}\Gamma'(r) + \sum_{t_0} \operatorname{ind}\gamma(r, t_0). \tag{6.14}$$

Поскольку $\Gamma'(r) \to \Gamma'$ при $r \to 0$, индекс $\Gamma'(r)$ равен индексу Γ', для которого мы уже имеем нужные оценки. Это значит, что для завершения доказательства леммы нам достаточно установить неотрицательность индекса любой локализующей петельки $\gamma(r, t_0)$.

Мы будем рассуждать здесь фактически так же, как и при доказательстве леммы 2.6. Пусть, например, $p'(t_0) \neq 0$. Тогда при достаточно малом $r > 0$ скорость линии $\gamma^*(r, t_0)$ на всем ее протяжении имеет отличную от нуля первую координату, поскольку почти не отличается от скорости предельной линии $\gamma^*(t_0)$. В таком случае $\gamma^*(r, t_0)$ ровно один раз пересекает ось ординат. Но вспомогательная дуга $\gamma^+(r, t_0)$ построена так, что и она пересекает ту же ось только один раз, причем в противоположном направлении. Как мы видим, если эти пересечения происходят с одной стороны от начала координат, то $\operatorname{ind}\gamma(r, t_0) = 0$, а если с разных, то еще лучше — тогда $\operatorname{ind}\gamma(r, t_0) = 1$. Если же $p'(t_0) = 0$, то $q'(t_0) \neq 0$, и мы можем повторить наши аргументы, заменив ось ординат осью абсцисс. Лемма доказана.

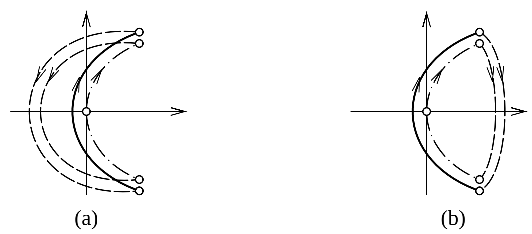


Рис. 6.4. Невозможный вариант.

Мы очень сожалеем, что доказательство достаточно очевидного утверждения заняло у нас много места, но порой очень трудно выразить словами то, что легко показать на картинке при живом общении ... Последнее наше замечание в этом разделе, как мы надеемся, поможет читателю по достоинству оценить то влияние, которое оказывает на изучаемые нами линии специфическая структура уравнений (6.1), чьи параметры связаны условиями (6.2). А именно, представим на минуту, что в обсуждавшемся выше случае $a > 0$ нам попалась особая точка t_0, для которой дуга $\gamma^*(t_0)$ выглядит так же, как на последней картинке рис. 6.3, но идет снизу вверх. Как нам тогда строить дугу $\gamma^+(t_0)$, замыкающую такой участок? Если мы проведем ее так, чтобы она пересекала ось абсцисс слева от нуля, как показано на рис. 6.4 (a), то возникающая вслед за этим локализующая петелька $\gamma(r, t_0)$ снова будет иметь неотрицательный индекс, но контур Γ' утратит свою правильность относительно оси ординат, направленной вниз. Между тем, именно это его свойство служило основой доказательства указанных выше оценок для индекса перестроенного контура $\Gamma'(r)$.

Если же вспомогательная линия будет пересекать ось абсцисс справа от нуля, как на рис. 6.4 (b), то контур Γ' получится правильным, но петелька $\gamma(r, t_0)$ будет вращаться не туда, куда нужно, и ее индекс вполне может оказаться отрицательным. Теперь мы видим, какое счастье, что для изучаемых нами линий рассмотренный вариант невозможен.

6.5. Сложные особенности. По-прежнему считая, что построенные в разд. 6.2 контуры $\Gamma(r)$ при малых $r > 0$ не пересекают начала координат, продолжим изучение вопроса об их индексе. Напомним, что в разд. 6.3 мы уже исчерпали этот вопрос в «случае общего положения», когда главный контур Γ семейства $\Gamma(r)$ не проходит через нуль. Если же $a \neq 0$, то и без этого предположения мы в полной мере решили нашу задачу в разд. 6.4. В этом «грубом случае» мы смогли получить необходимые для дальнейшего выводы буквально «за один шаг» только потому, что все особенности главного контура оказались простыми. Теперь пришло время обратиться к более тонкой ситуации. А именно, в этом разделе мы считаем, что $a = 0$, а значит, многочлены $p(t)$ и $q(t)$, параметризующие основной участок контура Γ, задаются уравнениями

$$\begin{aligned} p(t) &= f''(t), \\ q(t) &= bf'(t) - ctf''(t) + d. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Кроме того, предположим, что эти многочлены обладают хотя бы одним общим вещественным корнем.

Выясним, прежде всего, как устроен контур Γ вблизи каждого такого «особого» значения. Пусть t_i будет одним из них. Поскольку $f''(t_i) = p(t_i) = 0$, разложение многочлена $f(t)$ по возрастающим степеням разности $t - t_i$ имеет следующий вид:

$$f(t) = c_i + c_i'(t - t_i) + A_i(t - t_i)^{n_i} + \dots\,, \tag{6.16}$$

где c_i и c_i' означают некоторые постоянные, коэффициент A_i отличен от нуля, а номер n_i не меньше трех.

Применяя это разложение к формулам (6.15), а также учитывая условие $bc_i' + d = q(t_i) = 0$, мы легко посчитаем асимптотику многочленов $p(t)$ и $q(t)$ при $t \to t_i$. При этом выяснится, что характер асимптотики существенно зависит от того, равен нулю корень t_i или нет. Так, в последнем случае главные члены асимптотических формул окажутся пропорциональными:

$$\begin{aligned} p(t) &= A_i n_i (n_i - 1)(t - t_i)^{n_i - 2} + \dots\,, \\ q(t) &= -ct_i A_i n_i (n_i - 1)(t - t_i)^{n_i - 2} + \dots\,. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Последние две формулы позволяют лишь найти направление, в котором контур Γ в момент t_i входит в начало координат и выходит из него. Но этой информации нам явно недостаточно.

Чтобы в любом случае картина стала совершенно прозрачной, подвергнем контур Γ линейному преобразованию

$$\hat{x} = x, \quad \hat{y} = y + ct_i x, \tag{6.18}$$

каким бы ни оказалось значение t_i. В результате он превратится в новый контур $\widehat{\Gamma}$, который на участке $|t| \leq t^*$ описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \hat{p}(t) := p(t), \\ \hat{y} &= \hat{q}(t) := q(t) + ct_i p(t). \end{aligned} \tag{6.19}$$

Новые многочлены $\hat{p}(t)$ и $\hat{q}(t)$, как нетрудно проверить, могут быть представлены в следующей асимптотической форме:

$$\begin{aligned}\hat{p}(t) &= A_i n_i (n_i - 1)(t - t_i)^{n_i - 2}(1 + O(t - t_i)),\\ \hat{q}(t) &= A_i n_i (b - c(n_i - 1))(t - t_i)^{n_i - 1}(1 + O(t - t_i)).\end{aligned} \tag{6.20}$$

Напомним, что у нас $3 \le n_i \le n$, так что

$$n_i - 2 \ge 1 \quad \text{и} \quad b - c(n_i - 1) \ge b - c(n - 1) > 0. \tag{6.21}$$

Таким образом, главные члены предыдущих асимптотических формул имеют положительные степени, причем у $\hat{p}(t)$ она на единицу меньше, чем у многочлена $\hat{q}(t)$, а коэффициенты перед этими степенями имеют одинаковый знак, совпадающий со знаком A_i. Иными словами, мы имеем здесь четыре знакомых варианта, которые встречались нам еще во втором параграфе. А именно, значение t_i для контура $\widehat{\Gamma}$ является особенностью типа $(1, \pm)$ или $(2, \pm)$ в зависимости от четности номера n_i и знака коэффициента A_i.

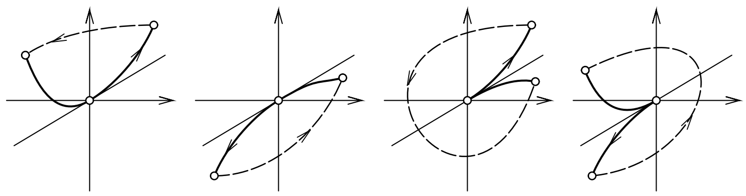


Рис. 6.5. Особенности контура Г.

Теперь легко понять, как выглядит вблизи особенности t_i исходный наш контур Г. Достаточно заметить, что он получается из контура $\widehat{\Gamma}$ обратным к (6.18) преобразованием:

$$x = \hat{x}, \quad y = \hat{y} - ct_i\hat{x}. \tag{6.22}$$

Результаты обратного перехода, при котором мы сохраняем название типа особой точки, иллюстрирует рис. 6.5. Как мы видим, здесь появляется некая «асимптотическая» линия, которая определяется уравнением $y + ct_ix = 0$ и вместе с осью ординат разделяет плоскость (x, y) на четыре открытых сектора. Каждый из двух маленьких участков контура Г, примыкающих к особому значению t_i с той или иной стороны, лежит в одном из этих секторов, а в начале координат касается указанной линии.

Следующая наша задача в этом разделе — перестройка контура Г. Подобно тому, как мы уже поступили дважды, нарисуем вокруг начала координат маленький диск B. При этом мы возьмем его настолько маленьким, чтобы ни один участок контура Г, оказавшийся внутри диска, не имел общих точек с осью ординат, кроме нуля. Выберем теперь число $\varepsilon > 0$ так, чтобы на каждом из участков $t_i - \varepsilon \le t < t_i$ и $t_i < t \le t_i + \varepsilon$ контур Г располагался в одном из указанных выше секторов, оставаясь внутри диска B. Обозначим символом $\gamma^*(t_i)$ дугу контура Г, отвечающую отрезку $|t - t_i| \le \varepsilon$.

Построим еще вспомогательную дугу $\gamma^+(t_i)$, как это показано на рис. 6.5. Подчеркнем, что во всех случаях дуга $\gamma^+(t_i)$ соединяет конец дуги $\gamma^*(t_i)$ с ее началом и целиком лежит внутри круга B. В отношении переходов через ось ординат она должна подчиняться тем правилам, о которых мы говорили в разд. 6.1. Пусть $\gamma^-(t_i)$ означает только что построенную дугу, но пробегаемую в противоположном направлении. Если, наконец, мы заменим участок $\gamma^*(t_i)$ контура Γ дугой $\gamma^-(t_i)$, и эту операцию повторим для всех остальных особых значений, сколько бы их ни оказалось, у нас получится новый контур, который мы обозначим все тем же символом Γ'.

В отличие от Γ контур Γ' не проходит через начало координат, и это позволяет нам говорить об его индексе. Другое отличие имеет уже негативный характер. А именно, согласно лемме 6.3 в обсуждаемом нами случае контур Γ правильный относительно оси ординат, как бы ее ни ориентировать. Что же касается контура Γ', то он, вообще говоря, не обладает этим свойством, причем в самом ужасном смысле этих слов — он может оказаться «неправильным» относительно оси ординат, «как бы ее ни ориентировать». Тем не менее и в этой ситуации можно указать полезные для нас оценки его индекса.

Лемма 6.6. *Пусть* $N(2,+)$ *означает число особенностей контура* Γ, *имеющих тип* $(2,+)$. *Тогда*

$$\operatorname{ind}\Gamma' \geq -N(2,+), \tag{6.23}$$

а если сам контур Γ *имеет тип* $(2,+)$, *то*

$$\operatorname{ind}\Gamma' \geq 1 - N(2,+). \tag{6.24}$$

Аналогично если число особенностей контура Γ, *имеющих тип* $(2,-)$, *равно* $N(2,-)$, *то во всех случаях*

$$\operatorname{ind}\Gamma' \geq -N(2,-), \tag{6.25}$$

а если и контур Γ *имеет тип* $(2,-)$, *то*

$$\operatorname{ind}\Gamma' \geq 1 - N(2,-). \tag{6.26}$$

Доказательство. Обратимся сначала к первой паре неравенств. Прежде всего заметим, что если у контура Γ совсем нет особенностей типа $(2,+)$, так что $N(2,+) = 0$, то контур Γ' будет все же правильным по крайней мере по отношению к отрицательно ориентированной оси ординат. В этом случае неравенства (6.23) и (6.24) непосредственно вытекают из леммы 6.2.

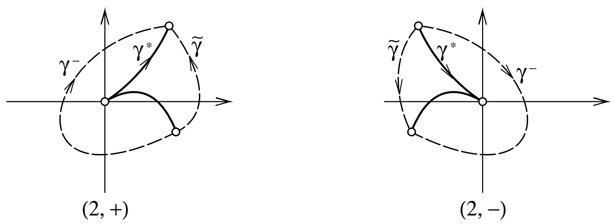


Рис. 6.6. Вращение «в долг».

Теперь мы предположим, что у контура Γ есть хотя бы одна особенность типа $(2,+)$, и пусть t_i будет одной из них. Ясно, что теперь перестроенный контур Γ' утрачивает правильность относительно отрицательно направленной оси ординат. А именно, входящая в его состав дуга $\gamma^-(t_i)$ имеет «неправильный» участок, поскольку она пересекает ось ординат сначала ниже нуля, а затем выше, как это ясно видно на рис. 6.6.

Попробуем заменить эту дугу другой дугой $\widetilde{\gamma}(t_i)$, которая, оставаясь строго справа от оси ординат, соединяет начало дуги $\gamma^*(t_i)$ с ее концом, как показано на первом из рис. 6.6. Разумеется, эту замену мы должны осуществить для каждой особенности типа $(2,+)$. Для остальных же особых значений никаких изменений мы не вносим. В результате у нас появится новый контур $\widetilde{\Gamma}$, связанный с контуром Γ' очевидным «формальным» равенством:

$$\Gamma' = \widetilde{\Gamma} + \sum_{(2,+)} (\gamma^-(t_i) - \widetilde{\gamma}(t_i)). \tag{6.27}$$

Контур $\widetilde{\Gamma}$ обладает тем приятным для нас свойством, что он правильный относительно отрицательно направленной оси ординат, а его «глобальный» тип, очевидно, тот же самый, что и у контура Γ. Таким образом, согласно лемме 6.2 в любом случае

$$\operatorname{ind} \widetilde{\Gamma} \geq 0, \tag{6.28}$$

а если контур Γ имеет тип $(2,+)$, то

$$\operatorname{ind} \widetilde{\Gamma} \geq 1. \tag{6.29}$$

Что же касается дуг $\gamma^-(t_i) - \widetilde{\gamma}(t_i)$, участвующих в разложении (6.27), то каждая из них, как легко понять, представляет собой петельку, совершающую один оборот вокруг начала координат по часовой стрелке (см. первый из рис. 6.6), а значит,

$$\operatorname{ind}(\gamma^-(t_i) - \widetilde{\gamma}(t_i)) = -1. \tag{6.30}$$

Таким образом, индекс контура Γ' согласно (6.27) вычисляется по формуле

$$\operatorname{ind} \Gamma' = \operatorname{ind} \widetilde{\Gamma} - N(2,+). \tag{6.31}$$

Нам остается соединить это равенство с оценками (6.28) и (6.29), чтобы получить неравенства (6.23) и (6.24).

Ясно, что вторая часть леммы вполне аналогична первой — здесь контур Γ' нужно перестроить около каждого из особых значений типа $(2,-)$, если таковые найдутся, обращаясь при этом за помощью ко второму из рис. 6.6. Лемма доказана.

Возвращаясь теперь к семейству $\Gamma(r)$, выделим на каждом из этих контуров участки $\gamma^*(r,t_i)$, соответствующие отрезкам $|t - t_i| \leq \varepsilon$, и построим вспомогательные дуги $\gamma^+(r,t_i)$, которые ведут себя подобно дугам $\gamma^+(t_i)$ и стремятся к ним при $r \to 0$. Заменим в контуре $\Gamma(r)$ каждый участок $\gamma^*(r,t_i)$ дугой $-\gamma^+(r,t_i)$, которая отличается от $\gamma^+(r,t_i)$ лишь ориентацией. В результате у нас получится контур $\Gamma'(r)$. Наконец, для каждого особого значения t_i мы образуем «локализующую» его петельку $\gamma(r,t_i) = \gamma^*(r,t_i) + \gamma^+(r,t_i)$. В результате каждый контур $\Gamma(r)$ «разлагается в сумму» конечного числа замкнутых линий, не проходящих через начало координат:

$$\Gamma(r) = \Gamma'(r) + \sum_{(1,\pm)} \gamma(r,t_i) + \sum_{(2,-)} \gamma(r,t_i) + \sum_{(2,+)} \gamma(r,t_i). \tag{6.32}$$

Поскольку при $r \to 0$ контур $\Gamma'(r)$, очевидно, стремится к контуру Γ', то $\operatorname{ind} \Gamma'(r) = \operatorname{ind} \Gamma.'$ Это равенство вместе с предыдущим разложением, а также леммой 6.6 приводит нас к следующему выводу.

Лемма 6.7. *Предположим, что у всех петелек $\gamma(r, t_i)$ индексы неотрицательны, а у тех из них, что локализуют особенности типа $(2, +)$, они не меньше единицы. Тогда* $\operatorname{ind}\Gamma(r) \geq 0$, *а если контур* $\Gamma(r)$ *имеет тип* $(2, +)$, *то* $\operatorname{ind}\Gamma(r) \geq 1$.

Пусть, как и выше, индексы у всех петелек $\gamma(r, t_i)$ неотрицательны, но теперь известно, что в случае особенностей типа $(2, -)$ эти индексы не меньше единицы. Тогда снова $\operatorname{ind}\Gamma(r) \geq 0$, *а если контур* $\Gamma(r)$ *имеет тип* $(2, -)$, *то* $\operatorname{ind}\Gamma(r) \geq 1$.

Заметим, что здесь мы впервые встречаем столь неприятное обстоятельство, как «неправильность» перестроенного контура, и нам необходимо отнестись к нему с полным вниманием. На самом деле, как будет ясно из дальнейшего, именно здесь, наконец, начинается настоящее сопротивление со стороны гипотезы, которую мы пытаемся доказать. Как показывает последняя лемма, если нам достался контур, имеющий «четные» особенности разных знаков, то для установления нужных нам оценок его индекса уже недостаточно неотрицательности индексов локализующих петелек — от некоторых из них мы ждем, что их вращение строго положительно. Теперь нам предстоит научиться заранее угадывать, от каких петелек мы можем это ожидать, а от каких — нет.

§ 7. Ключевой момент

То, о чем говорилось в предыдущем параграфе, не могло бы удивить никого из наших предшественников. Теперь мы обсудим такие свойства изучаемых нами линий, которые мы не смогли обнаружить в известных нам работах. Между тем, как нам представляется, без учета этих свойств доказательство гипотезы Каратеодори вряд ли возможно … Иными словами, если нам и довелось внести какой-то вклад в решение знаменитой проблемы, то главное его содержание заключено в этом параграфе. Все остальное — только следствия и дело техники.

7.1. Невидимые знаки перемен. Предметом нашего внимания снова будут линии (6.5), а точнее — отвечающие им контуры $\Gamma(r)$, которые мы построили в разд. 6.2. Как и ранее, мы считаем, что при достаточно малых $r > 0$ эти контуры не проходят через начало координат. Нам предстоит изучить здесь тот случай, когда в уравнениях (6.1) не только $a = 0$, но и $d = 0$, а значит, многочлены $p(t)$ и $q(t)$ имеют особенно простой вид:

$$\begin{aligned} p(t) &= f''(t), \\ q(t) &= bf'(t) - ctf''(t). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Именно такие многочлены будут возникать на первых этапах ожидающего нас исследования. Принципиально важно уже в самом начале пути правильно сформулировать его конечную цель. Вся драматичность изучаемой нами проблемы заключается в том, что цель эта определяется такими обстоятельствами, которые рождаются порой намного раньше, чем начинают проявляться. Представьте себе снежный ком, который в какой-то момент срывается с места и, увлекая за собой все новые и новые снежные массы, превращается в мощную и грозную лавину, стремительно несущуюся к подножью горы. И мирная долина, еще ни о чем не подозревающая и продолжающая жить своей размеренной жизнью, уже обречена …

В отличие от $\Gamma(r)$ главный контур Γ этого семейства вправе пересекать начало координат. Отметим все моменты t_i, когда это происходит. Заметим, что указанные критические значения, как показывают соотношения (7.1), представляют собой в точности все вещественные корни производной $f'(t)$ многочлена

$f(t)$ кратности два или выше. Таким образом, для каждого i разложение многочлена $f(t)$ по возрастающим степеням разности $t - t_i$ имеет следующий вид:

$$f(t) = c_i + A_i(t - t_i)^{n_i} + \dots, \tag{7.2}$$

где c_i означает некоторую постоянную, коэффициент A_i отличен от нуля, а номер n_i не меньше трех.

Как мы увидим, дальнейшая программа изучения особенности t_i будет зависеть от четности номера n_i, а в четном случае — еще и от соотношения между знаками постоянной c_i и коэффициента A_i. Подчеркнем, что многочлен $f(t)$ участвует в формулах (7.1) только под знаком производной и постоянная c_i к поведению контура Γ, казалось бы, не имеет отношения. Каждую такую постоянную, отдельно взятую, можно вовсе опустить, и это не отразится на уравнениях (7.1). Но ансамбль этих постоянных, отвечающий полному набору критических значений, разумеется, не столь беззащитен перед подобным произволом. Как мы вскоре убедимся, он довольно жестко организован и, кроме того, тесно связан с набором кратностей корней многочлена $f'(t)$ и отвечающих им «начальных» коэффициентов. Именно с этим связан тот резерв, который мы используем при решении проблемы Каратеодори.

В предыдущем параграфе мы уже выяснили, как выглядит контур Γ около каждой особенности t_i, и с каждой из них связали специальным образом построенную локализующую ее петельку $\gamma(r, t_i)$. Дальнейший анализ этих петелек, разумеется, невозможен без дополнительной информации о свойствах остаточных функций $H(r, t)$ в уравнениях (6.5). Но здесь наша задача — указать цель такого анализа. Когда в дальнейшем нам встретятся линии, описываемые столь компактными и красивыми уравнениями, нам каждый раз важно будет знать, что индексы соответствующих контуров неотрицательны. Так вот, мы и намерены здесь понять, какими должны быть индексы петелек $\gamma(r, t_i)$, чтобы это было действительно так. При этом, конечно же, речь идет о таких условиях, которым на самом деле удовлетворяют линии, возникающие в исходной нашей геометрической задаче. Следующая лемма и доставляет нам такие условия.

Лемма 7.1. *Предположим, что*

$$\operatorname{ind} \gamma(r, t_i) \geq 0 \tag{7.3}$$

для каждого особого значения t_i, а в случае, если номер n_i четный и $c_i A_i < 0$, выполнено более жесткое условие

$$\operatorname{ind} \gamma(r, t_i) \geq 1. \tag{7.4}$$

Тогда индекс контура $\Gamma(r)$ неотрицателен:

$$\operatorname{ind} \Gamma(r) \geq 0. \tag{7.5}$$

Именно это утверждение полностью определит нам логическую схему предстоящего исследования. Его доказательству посвящена вся оставшаяся часть текущего параграфа.

7.2. Корни нечетной кратности. Итак, пусть многочлены $p(t)$ и $q(t)$, параметризующие основную часть контура Γ, определяются формулами (7.1). Поскольку в этих формулах исходный многочлен $f(t)$ нигде не встречается «в чистом виде», для описания контура Γ нам вполне достаточно производной $f'(t)$. И здесь мы должны сделать маленькое «техническое» заявление. А именно, мы не только имеем право, но и будем считать, что все корни многочлена $f'(t)$ по модулю строго меньше t^*. В самом деле, число t^* было выбрано выше всего лишь с тем расчетом, чтобы в области $|t| \geq t^*$ многочлены $p(t)$ и $q(t)$ не имели корней. Если же теперь мы увеличим его, как нам захочется, это не изменит индекса контура $\Gamma(r)$ при малых $r > 0$ и не прибавит особых точек t_i главному контуру Γ. Словом, ничто не мешает нам считать число t^* настолько большим, что производная $f'(t)$ отлична от нуля при $|t| \geq t^*$. Это дополнительное требование, не имеющее никакого принципиального значения, мы принимаем лишь для того, чтобы немного упростить наши рассуждения.

Пусть упорядоченная цепочка $s_1 < \ldots < s_l$ будет полным набором вещественных корней многочлена $f'(t)$, а числа $m_1, \ldots, m_l$ означают их кратности. Подчеркнем, что каждое особое значение t_i содержится среди корней $s_1, \ldots, s_l$, причем если $t_i = s_j$, то $m_j = n_i - 1 \geq 2$. Таким образом, особенности контура Γ, имеющие «нечетный» тип, представлены теперь корнями многочлена $f'(t)$ четной кратности, а особенности «четного» типа — корнями нечетной кратности, не меньшей трех. Все остальные корни s_j многочлена $f'(t)$, не соответствующие никаким особенностям, простые, так что для них $m_j = 1$.

Зная все вещественные корни многочлена $f'(t)$ и их кратности, мы можем однозначно записать его в виде

$$f'(t) = nA(t - s_1)^{m_1} \ldots (t - s_l)^{m_l} f_0(t), \tag{7.6}$$

где $f_0(t)$ означает многочлен без вещественных корней и с единичным старшим коэффициентом, так что он имеет четную степень и всюду больше нуля. Если его степень равна m_0, то

$$m_0 + m_1 + \ldots + m_l = n - 1. \tag{7.7}$$

Поскольку число m_0 четно, сумма $m_1 + \ldots + m_l$, как это следует из предыдущей формулы, имеет ту же четность, что и степень $n - 1$ многочлена $f'(t)$.

Нас особенно будут интересовать корни нечетной кратности. Очевидно, именно они представляют собой те моменты, когда многочлен $f'(t)$ меняет знак. Найдем все такие корни, если они есть, и тоже упорядочим их по возрастанию: $\sigma_1 < \ldots < \sigma_\lambda$. Обозначая символами $\mu_1, \ldots, \mu_\lambda$ кратности этих корней, заметим, что суммы

$$\mu_1 + \ldots + \mu_\lambda \quad \text{и} \quad m_1 + \ldots + m_l \tag{7.8}$$

имеют одинаковую четность, поскольку первая получается из второй удалением всех ее четных слагаемых. Но последняя сумма имеет ту же четность, что и число $n - 1$, как мы заметили выше. Поэтому четность суммы $\mu_1 + \ldots + \mu_\lambda$ противоположна четности степени n исходного нашего многочлена $f(t)$.

Теперь ясно, что если степень n многочлена $f(t)$ нечетная, так что контур Γ имеет тип $(1, \pm)$, то число λ, напротив, четно, и его можно записать в виде $\lambda = 2\nu$. В случае, когда обсуждаемых корней нет, мы полагаем $\nu = 0$. Если же степень n четная, а значит, Γ представляет собой контур типа $(2, \pm)$, то интересующие нас корни непременно существуют и число их нечетное, так что $\lambda = 2\nu - 1$, где $\nu \geq 1$. В любом случае у нас возникает вполне конкретное неотрицательное целое число ν, играющее в дальнейшем важную роль.

Пусть число $N^+(\Gamma)$ означает, сколько раз контур Γ пересекает положительную полуось ординат справа налево. Отметим также все моменты, когда наш контур пересекает неотрицательную полуось ординат слева направо. Число таких пересечений мы обозначим символом $N^-(\Gamma)$. Важно подчеркнуть, что здесь — в отличие от предыдущего случая — мы учитываем и проходы контура через начало координат. Пусть, наконец, $N(\Gamma) = N^+(\Gamma) - N^-(\Gamma)$. Как мы сейчас увидим, эта разность полностью определяется числом корней многочлена $f'(t)$ нечетной кратности.

Лемма 7.2. $N(\Gamma) = \nu$.

На самом деле это утверждение имеет ясный геометрический смысл, но чтобы понять его, нужно научиться строить контур Γ по одному лишь виду графика многочлена $f'(t)$. Автор настоятельно рекомендует читателю овладеть соответствующим мастерством и самому убедиться, насколько увлекательное это занятие, чем-то напоминающее построение фазового портрета консервативной системы Ньютона по графику ее потенциальной энергии …

7.3. Уроки рисования. В нашем случае правила построения сводятся к следующим элементарным положениям. На каждом участке переменной t, где многочлен $f'(t)$ возрастает, контур Γ расположен в полуплоскости $x \geq 0$, поскольку

$$x = p(t) = f''(t) \geq 0. \tag{7.9}$$

Аналогично, пока $f'(t)$ убывает, $x = f''(t) \leq 0$ и контур Γ лежит в полуплоскости $x \leq 0$. На оси ординат контур оказывается в те моменты t, когда $f''(t) = 0$, причем соответствующая этому моменту точка контура имеет ординату

$$y = q(t) = bf'(t) - ctf''(t) = bf'(t), \tag{7.10}$$

а значит, лежит выше нуля, если $f'(t) > 0$, и ниже, если $f'(t) < 0$. Если же $f'(t) = 0$, она попадает точно в начало координат. В те моменты t, когда $f''(t) = 0$, график многочлена $f'(t)$ имеет горизонтальную касательную. Если это перегиб, то функция $f'(t)$ не меняет характера монотонности, так что в этот момент контур Γ лишь задевает ось ординат, оставаясь с одной стороны от нее. Как нетрудно убедиться, хотя нам это и неважно, на самом деле вблизи такой точки контур имеет форму клювика: он не «касается» оси ординат, но «клюет» ее с соответствующей стороны, тут же отскакивая от нее. Самое же интересное для нас — это точки экстремума многочлена $f'(t)$. В эти моменты его график меняет характер монотонности, а значит, контур Γ пересекает ось ординат. При этом точкам минимума, очевидно, соответствуют пересечения слева направо, а точкам максимума — пересечения справа налево. Что касается места, где происходит каждое такое пересечение, то об этом мы уже говорили — оно определяется значением $f'(t)$. Сказанного вполне достаточно, чтобы по заданной форме графика многочлена $f'(t)$ мы смогли описать все существенные для нас черты контура Γ.

Доказательство леммы 7.2. Выясним сначала, как ведет себя дуга L_j контура Γ, соответствующая отрезку $\sigma_j \leq t \leq \sigma_{j+1}$, где σ_j и σ_{j+1} означают два соседних корня многочлена $f'(t)$ нечетной кратности.

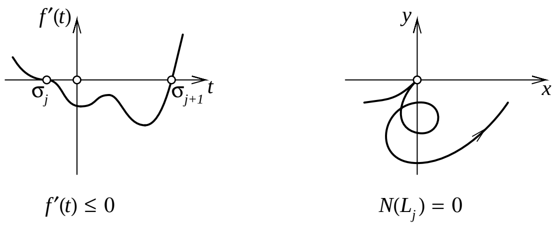
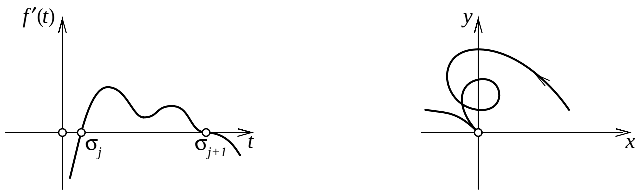


Рис. 7.1. Отрицательный участок.

На рис. 7.1 представлен случай, когда на интересующем нас участке $f'(t) \leq 0$. Здесь все точки, где дуга L_j пересекает ось ординат, находятся либо строго ниже нуля, либо прямо в начале координат. Но последнее случается лишь тогда, когда мы имеем точку максимума графика $f'(t)$, а значит, дуга переходит через особую точку справа налево. Как читатель помнит, при подсчете числа $N(\Gamma)$ такие переходы не учитываются. Заметим также, что концы дуги L_j не являются точками, где контур Γ пересекает ось ординат. Таким образом, никакого вклада в число $N(\Gamma)$ участок L_j не вносит.

Совсем иная картина складывается, когда на изучаемом участке $f'(t) \geq 0$. Этот случай изображен на рис. 7.2. Теперь дуга L_j пересекает ось ординат только в точках, расположенных не ниже нуля, причем через начало координат наша дуга проходит слева направо, поскольку в этот момент график $f'(t)$ может иметь только минимум. Как и в предыдущем варианте, концы L_j не являются точками пересечения контуром Γ оси ординат. Заметим, что на любом участке у любого графика минимумы и максимумы чередуются. Но в данном случае, как легко понять, цепочка экстремумов начинается и заканчивается точками максимума. Это значит, что суммарный вклад, который вносят в число $N(\Gamma)$ все такие точки дуги L_j, равен $+1$.



$f'(t) \geq 0$ $\qquad$ $N(L_j) = 1$

Рис. 7.2. Положительный участок.

Возможно, следует подчеркнуть, что на самом деле во втором случае «картина» вовсе не «иная», как мы оценили ее чуть выше. Напротив, она абсолютно эквивалентна, или, лучше сказать, «симметрична», предыдущей. И если мы пришли к разным выводам о вкладах, которые вносят в число N рассмотренные две дуги, то лишь потому, что сами при определении этого числа установили неравноправие между положительной и отрицательной полуосями ординат.

Итак, мы выяснили, как устроены дуги контура Γ, отвечающие «внутренним» участкам знакопостоянства многочлена $f'(t)$, расположенным между соседними его корнями нечетной кратности. Разумеется, таких участков может и вовсе не быть. Но если среди корней многочлена $f'(t)$ найдется хотя бы один, имеющий нечетную кратность, то на отрезке от $-t^*$ до t^* у нашего многочлена непременно будет два «крайних» участка, на каждом из которых он не меняет знака, а именно — левый участок $-t^* \leq t \leq \sigma_1$ и правый участок $\sigma_\lambda \leq t \leq t^*$, хотя σ_1 и σ_λ вполне могут совпадать. Соответствующие этим участкам дуги мы обозначим символами L_0 и L_λ.

Исследуем теперь, какой вклад в число $N(\Gamma)$ вносят дуги L_0 и L_λ. Как легко видеть, он нулевой. В самом деле, мы имеем здесь четыре варианта: участок может быть левым или правым и на каждом из них может быть $f'(t) \leq 0$ или $f'(t) \geq 0$. Все эти варианты приведены на рис. 7.3. Нам незачем больше рисовать по этим графикам соответствующие им дуги L_0 и L_λ контура Γ — все необходимые нам выводы можно сделать и без этого. Как и раньше, концы интересующих нас дуг не имеют отношения к пересечениям оси ординат контуром Г. Что касается их внутренних точек, то для них остаются в силе наши прежние замечания с той лишь разницей, что теперь график многочлена внутри каждого крайнего участка имеет столько же точек минимума, сколько у него точек максимума. Таким образом, в «отрицательном» случае (первая и третья картинки на рис. 7.3) просто нет никаких пересечений оси ординат контуром Г, учитываемых при подсчете «алгебраической» суммы $N(\Gamma)$. В «положительном» же случае (вторая и четвертая картинки на рис. 7.3) пересечения в одну сторону в точности компенсируются пересечениями в обратном направлении.

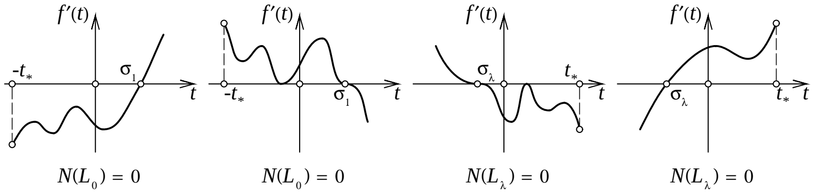


Рис. 7.3. Крайние участки.

Нам остается рассмотреть тот — вполне возможный — случай, когда у многочлена $f'(t)$ совсем нет корней нечетной кратности. В такой ситуации весь его график целиком располагается с одной стороны от оси t. Два возникающих здесь варианта представлены на рис. 7.4. Наша задача — определить тот вклад, который вносит в число $N(\Gamma)$ дуга контура Г, отвечающая отрезку $|t| \leq t^*$. Как мы помним, эта дуга называется у нас основной частью контура Г, и мы обозначили ее символом Γ^*. Автор надеется, что его читателю уже ясен ответ. А именно, если $f'(t) \leq 0$ для всех t, то вклад дуги Γ^* нулевой. Подчеркнем, что в этом случае дуга Γ^* имеет тип $(1, -)$. Если же всюду $f'(t) \geq 0$, то точек минимума у многочлена $f'(t)$ ровно на одну больше, чем точек максимума. Это значит, что дуга Γ^*, имеющая теперь тип $(1, +)$, вносит в число $N(\Gamma)$ отрицательный вклад, равный -1.

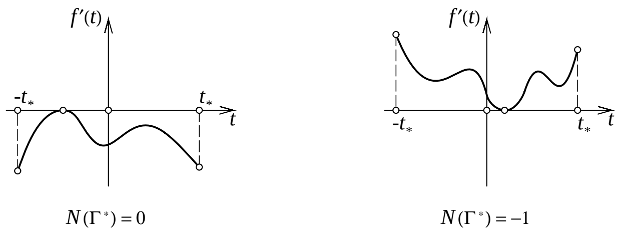


Рис. 7.4. Когда нет «четных» особенностей.

Не забудем, что у нас есть еще дуга Γ^+, замыкающая дугу Γ^* до контура Г. Ее вклад в число $N(\Gamma)$ лишь для контура типа $(1, -)$ равен нулю. Во всех же остальных случаях он равен $+1$.

После этого замечания нам остается лишь суммировать результаты. Если L представляет собой дугу контура Г, у которой концы не являются точками, где этот контур пересекает ось ординат, то ее вклад в число $N(\Gamma)$ мы обозначим символом $N(L)$. В качестве L можно взять, например, Γ^* или Γ^+. Заметим, что во всех случаях

$$N(\Gamma) = N(\Gamma^*) + N(\Gamma^+). \tag{7.11}$$

О втором слагаемом в последней сумме мы только что говорили. Посмотрим, чему равно первое из них для каждого из четырех имеющихся у нас типов линий.

Тип $(1, -)$. В этом случае, как мы помним, $\lambda = 2\nu$. Легко видеть, что ν означает число положительных внутренних участков графика $f'(t)$. Каждый из них вносит в число $N(\Gamma)$ по единичке. Остальные участки Γ^* не вносят никакого вклада, и то же самое относится к дуге Γ^+. Таким образом, $N(\Gamma) = \nu$.

Тип $(1, +)$. Здесь по-прежнему $\lambda = 2\nu$, хотя аргументы, приводящие к нужной формуле, несколько иные. Если $\nu = 0$, то график $f'(t)$ не имеет точек ниже оси t. Как мы видели, в таком случае $N(\Gamma^*) = -1$. Но зато $N(\Gamma^+) = +1$. В результате число $N(\Gamma)$ равно нулю, т. е. совпадает с ν. Если же $\nu \geq 1$, то график $f'(t)$ имеет ровно $\nu - 1$ внутренних положительных участков. Их суммарный вклад в число $N(\Gamma^*)$ равен их количеству. Другие участки Γ^* никакого вклада не привносят, так что $N(\Gamma^*) = \nu - 1$. Приятно отметить, что эта формула справедлива и при $\nu = 0$. Последнюю необходимую нам единичку мы находим на контуре Γ^+, так что снова $N(\Gamma) = \nu$.

Тип $(2, \pm)$. В этих двух случаях $\lambda = 2\nu - 1$, где $\nu \geq 1$. Теперь график многочлена $f'(t)$ имеет равное число положительных и отрицательных внутренних участков и это число равно $\nu - 1$. Таким образом, $N(\Gamma^*) = \nu - 1$. Поскольку и здесь $N(\Gamma^+) = 1$, то мы и в этот раз приходим все к той же формуле $N(\Gamma) = \nu$. Лемма доказана.

Полученный нами результат представляет собой важный элемент доказательства леммы 7.1. Но нам нужен еще один элемент, ничуть не менее важный. О нем и пойдет речь в следующем разделе.

7.4. Активные рядом с пассивными. Вспомним теперь об особых значениях t_i контура Γ, их кратностях n_i, а также о разложениях (7.2) исходного многочлена $f(t)$, постоянных c_i и коэффициентах A_i. Основные трудности решаемой нами геометрической задачи связаны с особенностями четной кратности. Если бы их вовсе не было, все было бы намного проще. Но ничто не мешает им встречаться буквально на каждом шагу того процесса разрешения особенностей, который нас ждет впереди. И мы должны быть готовы к встрече с ними. Для этого нам и нужна лемма 7.1.

Итак, пусть особенность t_i имеет четную кратность n_i. Мы назовем ее пассивной, если $c_i A_i \geq 0$. Если же $c_i A_i < 0$, мы будем считать эту особенность активной. Следующее наше утверждение представляет собой именно тот необходимый нам «элемент», о котором говорилось в конце предыдущего раздела.

Лемма 7.3. *Число пассивных особенностей не больше числа* $N(\Gamma)$.

Доказательство. Если у многочлена $f'(t)$ совсем нет корней нечетной кратности, то у контура Γ нет ни одной четной особенности, в том числе и пассивной. Поскольку в этом случае $N(\Gamma) = 0$, доказывать больше нечего.

Пусть теперь «нечетные» корни у многочлена $f'(t)$ есть, так что их число λ не меньше единицы. Как мы помним, цепочка $\sigma_1 < \ldots < \sigma_\lambda$ содержит все четные особенности контура Γ. Все остальные ее элементы, если они найдутся, — это простые корни многочлена $f'(t)$. Разобьем нашу цепочку на ν групп. А именно, если $\lambda = 2\nu$, то в каждой группе будет по два соседних элемента:

$$\{\sigma_1, \sigma_2\}, \ \ldots \ , \{\sigma_{2\nu-1}, \sigma_{2\nu}\}. \tag{7.12}$$

Если же $\lambda = 2\nu - 1$, то в последней группе окажется всего один элемент:

$$\{\sigma_1, \sigma_2\},\ \ldots\ , \{\sigma_{2\nu-3}, \sigma_{2\nu-2}\},\ \{\sigma_{2\nu-1}\}. \tag{7.13}$$

Поскольку $N(\Gamma) = \nu$, то нам, очевидно, достаточно убедиться, что ни одна из этих групп не может содержать больше одной пассивной особенности. Как мы сейчас увидим, это действительно так.

Нам незачем больше говорить о наших группах — они уже сыграли свою маленькую «комбинаторную» роль. Мы возьмем произвольную пару соседних корней σ_j и σ_{j+1} и покажем, что хотя бы один из них не может представлять собой пассивную особенность. Заметим, что если среди этих корней есть простой, то наша задача решена, так как простым корням вовсе не соответствуют никакие особенности. Поэтому далее мы считаем, что оба корня кратные. Нам нужно доказать, что хотя бы один из них представляет активную особенность.

Пусть $t_i = \sigma_j$. Если разложить многочлен $f'(t)$ по возрастающим степеням переменной $t - \sigma_j = t - t_i$, то младшим коэффициентом в этом разложении, как показывает формула (7.2), будет число $n_i A_i$, имеющее тот же знак, что и A_i. Найдем также номер $i' > i$, для которого $t_{i'} = \sigma_{j+1}$. Разлагая теперь многочлен $f'(t)$ по возрастающим степеням переменной $t - \sigma_{j+1} = t - t_{i'}$, как и выше, мы убеждаемся, что младшим коэффициентом в новом разложении будет число $n_{i'} A_{i'}$. Но между σ_j и σ_{j+1} у многочлена $f'(t)$ могут быть корни лишь четной кратности. Поэтому всюду на интервале $\sigma_j < t < \sigma_{j+1}$ он сохраняет знак. Говоря более определенно, если $A_i > 0$, то $f'(t) \geq 0$, если же $A_i < 0$, то $f'(t) \leq 0$. Что же касается момента $t = \sigma_{j+1}$, то здесь многочлен $f'(t)$ проходит через нуль, меняя свой знак на противоположный, совпадающий теперь со знаком $A_{i'}$. Это значит, что коэффициенты A_i и $A_{i'}$ имеют разные знаки.

Ключевым моментом в наших рассуждениях является следующее наблюдение. Если $A_i > 0$, то $c_{i'} > c_i$. Если же $A_i < 0$, то, напротив, $c_{i'} < c_i$. В самом деле, как видно из разложения (7.2), постоянные c_i и $c_{i'}$ являются значениями многочлена $f(t)$ соответственно при $t = \sigma_j$ и при $t = \sigma_{j+1}$. Поэтому

$$c_{i'} - c_i = f(\sigma_{j+1}) - f(\sigma_j) = \int\limits_{\sigma_j}^{\sigma_{j+1}} f'(t)dt, \tag{7.14}$$

где знак подынтегрального выражения, как мы отмечали, совпадает со знаком коэффициента A_i.

Наше доказательство завершает миниатюрное логическое кружево. Пусть $A_i > 0$. Если особенность σ_j пассивна, так что $c_i A_i \geq 0$, то $c_i \geq 0$. Но $c_{i'} > c_i$. Следовательно, $c_{i'} > 0$. С другой стороны, в данном случае $A_{i'} < 0$. Отсюда $c_{i'} A_{i'} < 0$. Это значит, что особенность σ_{j+1} активная. Таким образом, хотя бы один из корней σ_j и σ_{j+1} представляет собой активную особенность. Аналогично если $A_i < 0$ и особенность σ_j пассивна, то снова $c_i A_i \geq 0$, но здесь это уже означает, что $c_i \leq 0$. С другой стороны, в этом случае $c_{i'} < c_i$, так что $c_{i'} < 0$. Поскольку теперь $A_{i'} > 0$, мы приходим к прежнему выводу: $c_{i'} A_{i'} < 0$, и особенность σ_{j+1} вновь оказывается активной. Лемма доказана.

7.5. Ключ к разгадке. Теперь уже легко доказать лемму 7.1. Автор рекомендует читателю еще раз просмотреть разд. 6.5 и вспомнить о построенных нами «вспомогательных» дугах $\gamma^+(t_i)$, замыкающих «критические» участки $\gamma^*(t_i)$ контура Γ, а также об аналогичных дугах $\gamma^*(r, t_i)$ и $\gamma^+(r, t_i)$ контуров $\Gamma(r)$ и о петельках $\gamma(r, t_i) = \gamma^*(r, t_i) + \gamma^+(r, t_i)$, «локализующих» особенности t_i.

Доказательство леммы 7.1. Перестроим контур Γ подобно тому, как мы это делали в разд. 6.5. А именно, каждый его критический участок $\gamma^*(t_i)$ мы заменим дугой $\gamma^-(t_i)$, которая отличается от $\gamma^+(t_i)$ лишь ориентацией. В результате у нас получится новый контур, который мы обозначим символом Γ'. Напомним, что если в разд. 6.4 аналогичный контур унаследовал правильность «оригинала», то здесь, увы, это совсем не так.

Проведем такую же операцию над контуром $\Gamma(r)$, заменяя каждый его участок $\gamma^*(r, t_i)$ дугой $\gamma^-(r, t_i)$. Получившийся в результате контур обозначим символом $\Gamma'(r)$. Подчеркнем, что контуры Γ' и $\Gamma'(r)$ не проходят через начало координат, так что мы вправе говорить об их индексах, а поскольку $\Gamma'(r) \to \Gamma'$ при $r \to 0$, то

$$\operatorname{ind}\Gamma'(r) = \operatorname{ind}\Gamma'. \tag{7.15}$$

С другой стороны, если для контура Γ' мы определим число $N(\Gamma')$ подобно тому, как в разд. 7.2 мы это сделали для Γ, то оно, очевидно, и будет индексом нового контура:

$$\operatorname{ind}\Gamma' = N(\Gamma'). \tag{7.16}$$

Выясним теперь, чем $N(\Gamma')$ отличается от $N(\Gamma)$. Для этого нужно вспомнить, как по отношению к оси ординат вели себя дуги $\gamma^*(t_i)$, и сравнить это с поведением заменивших их дуг $\gamma^-(t_i)$. Рассмотрим все четыре имеющиеся у нас варианта.

Особенность типа $(1,-)$. Дуга $\gamma^*(t_i)$ проходит через начало координат, пересекая вертикальную ось справа налево. Это пересечение не учитывается в числе $N(\Gamma)$. Новая дуга $\gamma^-(t_i)$ пересекает ту же ось в том же направлении строго ниже нуля, так что она не дает вклада в число $N(\Gamma')$.

Особенность типа $(1,+)$. Дуга $\gamma^*(t_i)$ проходит через начало координат, пересекая вертикальную ось слева направо. Такое пересечение мы учитывали как отрицательное, так что вклад дуги $\gamma^*(t_i)$ в число $N(\Gamma)$ равен -1. Новая дуга $\gamma^-(t_i)$ тоже один раз пересекает ось ординат в том же направлении, причем строго выше нуля, так что она дает такой же вклад в число $N(\Gamma')$.

Особенности типа $(2,\pm)$. Ни в одном из этих случаев дуга $\gamma^*(t_i)$ не пересекает оси ординат и не влияет на число $N(\Gamma)$. С другой стороны, в каждом из обсуждаемых вариантов новая дуга $\gamma^-(t_i)$, напротив, пересекает указанную ось, и даже дважды: один раз ниже нуля, что нам безразлично, а другой раз выше, причем слева направо. Таким образом, ее вклад в число $N(\Gamma')$ отрицательный и равен -1.

Итак, мы приходим к следующему выводу: число $N(\Gamma')$ меньше числа $N(\Gamma)$ ровно на столько, сколько имеется особенностей типа $(2,\pm)$. Каждая такая особенность либо пассивная, либо активная. Поэтому, если обозначить символами N_p и N_a число пассивных и активных особенностей, предыдущий вывод можно выразить точной формулой:

$$N(\Gamma') = N(\Gamma) - N_p - N_a. \tag{7.17}$$

Нам остается заметить, что контур $\Gamma(r)$ у нас представлен в виде «суммы» контура $\Gamma'(r)$ и всех локализующих петелек $\gamma(r, t_i)$. Таким образом,

$$\operatorname{ind}\Gamma(r) = \operatorname{ind}\Gamma'(r) + \sum_{(1,\pm)} \operatorname{ind}\gamma(r, t_i) + \sum_{(2,\pm)} \operatorname{ind}\gamma(r, t_i), \tag{7.18}$$

где первое суммирование ведется, разумеется, по всем особенностям нечетного типа, второе — по четным особенностям. Учитывая предыдущие наши замечания, в частности формулы (7.15)–(7.17), мы можем представить это равенство в следующем виде:

$$\operatorname{ind}\Gamma(r) = N(\Gamma) - N_p - N_a + \sum_{(1,\pm)} \operatorname{ind}\gamma(r,t_i) + \sum_{(2,p)} \operatorname{ind}\gamma(r,t_i) + \sum_{(2,a)} \operatorname{ind}\gamma(r,t_i), \quad (7.19)$$

где первый знак суммирования имеет прежний смысл, во втором имеются в виду пассивные особенности, в третьем — активные. Поскольку $N(\Gamma) \geq N_p$ согласно лемме 7.3, мы приходим к следующему неравенству:

$$\operatorname{ind}\Gamma(r) \geq \sum_{(1,\pm)} \operatorname{ind}\gamma(r,t_i) + \sum_{(2,p)} \operatorname{ind}\gamma(r,t_i) + \sum_{(2,a)} \operatorname{ind}\gamma(r,t_i) - N_a. \quad (7.20)$$

Мы видим, что и в самом деле, если петельки $\gamma(r,t_i)$ типа $(1,\pm)$, а также пассивные петельки типа $(2,\pm)$ имеют, хотя бы, неотрицательный индекс, в то время как у каждой активной петельки типа $(2,\pm)$ он не меньше единицы, то $\operatorname{ind}\Gamma(r) \geq 0$. Лемма доказана.

В заключение параграфа — буквально несколько слов о смысле того, что мы обнаружили. Вычисление или, скажем, доказательство неотрицательности индекса того или иного контура не является задачей локального анализа. Но устройство контура вблизи некоторых «критических» точек, где он очень близко подходит к началу координат, бывает настолько сложно разглядеть, что приходится расщепить задачу на две части: изучение поведения контура в целом и анализ его маленьких, но сложно устроенных частей. В результате вращение контура складывается из его «глобального» вращения и вращений его «локализованных» участков. При этом выясняется, что такие участки бывают разные. Одни из них совсем «безобидные», и в нашем случае это те, что локализуют особенности типа $(1,\pm)$. Они не вмешиваются в общее вращение, и если их собственный индекс не меньше нуля, то никто от них большего и не ждет. Но бывают участки «агрессивные» — у нас они связаны с особенностями типа $(2,\pm)$. Для собственных нужд они заимствуют у общего вращения определенную долю. Но они тоже бывают разные. Часть из них — у нас это «активные» участки — ведет себя так, что сколько отнимает от общего вращения, столько и прибавляет к нему. Другие же ведут себя подобно паразитам — читатель, разумеется, уже догадался, что речь идет об участках, локализующих «пассивные» особенности. Они только отнимают, не привнося взамен ничего полезного. В таком случае остается одна надежда — что «глобальное» вращение контура компенсирует эти локальные потери.

Смысл доказанного нами заключается в том, что в условиях леммы 7.1 именно так и происходит. Замечательно, что эти условия действительно будут всегда выполнены, на каких бы этапах ожидающего нас исследования ни возникали те линии, о которых мы здесь говорили.

§ 8. Разрешение особенностей

Теперь, когда все подготовительные работы завершены, мы возвращаемся к петельке $c_0(r,\alpha_0)$, которая фактически появилась у нас еще в конце § 2, а в разд. 5.1 лишь получила нынешнее свое обозначение. Там же всю нашу задачу мы свели к неравенству $\operatorname{ind} c_0(r,\alpha_0) \geq 0$. Для его доказательства нам придется сильно увеличить петельку и растянуть время движения вдоль нее. Чтобы понять, как это сделать и что в результате у нас получится, мы должны вспомнить, какие у нас основные действующие лица и как они выглядят.

8.1. Уточнение задачи. Прежде всего, у нас есть два натуральных числа $p \geq 1$ и $k \geq 3$, а также функция w, представленная степенным рядом

$$w = \sum_{m=pk}^{\infty} w_m(\vartheta) r^m, \tag{8.1}$$

у которого коэффициентами служат тригонометрические многочлены $w_m(\vartheta)$. Первый из них в точке α_0 имеет следующее асимптотическое устройство:

$$w_{pk}(\vartheta) = A_0(\vartheta-\alpha_0)^{n_0}(1+O(\vartheta-\alpha_0)), \tag{8.2}$$

где $A_0 \neq 0$ и $n_0 \geq 3$. Ряд w в соответствии с формулами (5.5) или (5.6) определяет два других ряда X_0 и Y_0. Здесь нам достаточно привести их в неполной форме:

$$\begin{aligned} X_0 &= r^{pk}(p_0(\vartheta) + rS(r,\vartheta-\alpha_0)), \\ Y_0 &= r^{pk}(q_0(\vartheta) + rS(r,\vartheta-\alpha_0)). \end{aligned} \tag{8.3}$$

Главные части $p_0(\vartheta)$ и $q_0(\vartheta)$ этих рядов определяются многочленом $w_{pk}(\vartheta)$ по формулам (5.7), но сейчас нам нужна лишь их асимптотика при $\vartheta \to \alpha_0$:

$$\begin{aligned} p_0(\vartheta) &= K_0(\vartheta-\alpha_0)^{n_0-2}(1+O(\vartheta-\alpha_0)), \\ q_0(\vartheta) &= L_0(\vartheta-\alpha_0)^{n_0-1}(1+O(\vartheta-\alpha_0)), \end{aligned} \tag{8.4}$$

где коэффициенты K_0 и L_0 определяются равенствами

$$K_0 = A_0 n_0(n_0-1), \quad L_0 = A_0 n_0(k-1), \tag{8.5}$$

из которых видно, что эти два числа имеют общий знак, совпадающий со знаком числа A_0.

Напомним, что петелька $c_0(r,\alpha_0)$ составлена из двух дуг — основной и вспомогательной. Первую из них мы обозначим символом $c_0^*(r,\alpha_0)$. Вспомогательная дуга замыкает основную. Мы сами построили ее по определенным правилам, зависящим от четности номера n_0 и знака коэффициента A_0. Другими словами, правила замыкания определяются типом особенности α_0, который у нас может быть одним из четырех: $(1,\pm)$ или $(2,\pm)$. Будем надеяться, что читатель уже хорошо усвоил эти правила, описанные в разд. 2.4, и помнит их. Что касается основной дуги $c_0^*(r,\alpha_0)$, то она задается уравнениями

$$x = X_0(r,\vartheta), \quad y = Y_0(r,\vartheta), \quad |\vartheta-\alpha_0| \leq \varepsilon_0, \tag{8.6}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ означает настолько малое число, что при $0 < |\vartheta-\alpha_0| \leq \varepsilon_0$ знаки $p_0(\vartheta)$ и $q_0(\vartheta)$ совпадают со знаками мономов

$$K_0(\vartheta-\alpha_0)^{n_0-2} \quad \text{и} \quad L_0(\vartheta-\alpha_0)^{n_0-1}. \tag{8.7}$$

Ничего другого от числа ε_0 нам уже не нужно, а значит, у нас еще есть право уменьшить его, если это окажется необходимым. Вскоре мы воспользуемся нашим правом. Но прежде вспомним, что мы перешли от полярного радиуса к переменной r, в частности, с тем расчетом, чтобы не только X_0 и Y_0, но и все функции X_s и Y_s, построенные в соответствии с формулами (5.11) по всевозможным совместным вещественным цепочкам Тейлора функций X_0 и Y_0, оказались регулярными в точке α_0. В частности, это относится к функциям X_1 и Y_1, которые согласно (5.11) определяются равенствами

$$X_1 = X_0 \quad \text{и} \quad Y_1 = Y_0 + \frac{\psi_0(r)/p}{1-(\psi_0(r)/p)^2} X_0, \tag{8.8}$$

где $\psi_0(r) = r\varphi_0'(r)$. Но у нас $\varphi_0(r) \equiv \alpha_0$, так что $\psi_0(r) \equiv 0$. Поэтому $X_1 = X_0$ и $Y_1 = Y_0$. Тем не менее в дальнейших наших рассуждениях мы будем говорить именно о функциях X_1 и Y_1. Пусть это будет лишь сменой обозначений, но мы тем самым не нарушим единообразия, которое должно объединять все этапы нашего исследования.

Итак, функции X_1 и Y_1 регулярны в точке α_0. Это позволяет нам выбрать для них общий локализующий радиус (см. разд. 5.3). Будем считать, что число ε_0 и является таким радиусом. Это значит, что указанные две функции могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} X_1 &= r^{pk} K_0(\vartheta - \alpha_0)^{n_0-2}(1 + \widetilde{X}_1(r,\vartheta)), \\ Y_1 &= r^{pk} L_0(\vartheta - \alpha_0)^{n_0-1}(1 + \widetilde{Y}_1(r,\vartheta)), \end{aligned} \tag{8.9}$$

где «остаточные» слагаемые $\widetilde{X}_1(r,\vartheta)$ и $\widetilde{Y}_1(r,\vartheta)$ по абсолютной величине строго меньше единицы, когда

$$0 < |\vartheta - \alpha_0| \le \varepsilon_0 \quad \text{и} \quad 0 < r \le \varepsilon_0|\vartheta - \alpha_0|. \tag{8.10}$$

Скоро мы убедимся в удачности нашего выбора числа ε_0.

8.2. Переход к новому уровню. Перейдем теперь от полярного угла ϑ к переменной z, полагая $\vartheta = \alpha_0 + rz$. Как показывают наши наблюдения, описанные в разд. 4.2, а также формулы (8.3) и (8.4), регулярные функции $X_1 = X_0$ и $Y_1 = Y_0$ в новых переменных будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} X_1 &= r^{m_0-2}(p_1(z) + rH(r,z)), \\ Y_1 &= r^{m_0-1}(q_1(z) + rH(r,z)). \end{aligned} \tag{8.11}$$

Здесь $m_0 = pk + n_0$, а главные части $p_1(z)$ и $q_1(z)$ этих асимптотических формул представляют собой алгебраические многочлены переменной z, у которых степени равны соответственно $n_0 - 2$ и $n_0 - 1$, а старшими коэффициентами служат K_0 и L_0. Таким образом, если разложить их по убывающим степеням z, мы придем к следующим соотношениям:

$$p_1(z) = K_0 z^{n_0-2} + \dots, \quad q_1(z) = L_0 z^{n_0-1} + \dots. \tag{8.12}$$

Дуга $c_0^*(r, \alpha_0)$ определяется теперь уравнениями

$$x = X_1(r,z), \quad y = Y_1(r,z), \quad |z| \le \varepsilon_0/r, \tag{8.13}$$

и мы вынуждены здесь повторить наши рассуждения из разд. 5.4. Рискуя утомить нашего читателя своей назойливостью, мы считаем, что это все же лучше, чем остаться непонятым. Так или иначе, мы видим, что новой переменной z для параметризации основного участка контура $c_0(r, \alpha_0)$ при заданном r приходится пробегать отрезок от $-\varepsilon_0/r$ до $+\varepsilon_0/r$, тем больший, чем меньше r. Но, к счастью, поведение дуги при больших z легко контролируется, и мы можем свести ее изучение к некоторому вполне конкретному отрезку параметров, не зависящему от r. В самом деле, согласно (8.9) уравнения линии $c_0^*(r, \alpha_0)$ могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= K_0 r^{m_0-2} z^{n_0-2}(1+\widetilde{X}_1), \\ y &= L_0 r^{m_0-1} z^{n_0-1}(1+\widetilde{Y}_1), \end{aligned} \tag{8.14}$$

где $|\widetilde{X}_1| < 1$ и $|\widetilde{Y}_1| < 1$, если выполнены условия (8.10), которые выражаются теперь неравенствами $0 < |rz| \le \varepsilon_0$ и $0 < r \le \varepsilon_0|rz|$. Как легко видеть, они справедливы, если

$$0 < r \le \varepsilon_0^2 \quad \text{и} \quad 1/\varepsilon_0 \le |z| \le \varepsilon_0/r. \tag{8.15}$$

Эти наблюдения показывают нам, что при достаточно малых $r > 0$ каждый из двух участков дуги $c_0^*(r, \alpha_0)$, один из которых параметризован отрезком $1/\varepsilon_0 \le z \le \varepsilon_0/r$, а другой — симметричным отрезком $-\varepsilon_0/r \le z \le -1/\varepsilon_0$, целиком располагается в той же открытой четверти плоскости (x, y), что и принадлежащий ему конец дуги $c_0^*(r, \alpha_0)$. Если мы, отбросив эти огромные «крайние» участки, оставим лишь «среднюю» часть дуги, отвечающую отрезку $|z| \le 1/\varepsilon_0$, а затем замкнем ее с помощью «вспомогательной» линии подобно тому, как замыкали дугу $c_0^*(r, \alpha_0)$ и как это в двух вариантах показано на рис. 8.1, то мы получим контур, очевидно, гомотопически эквивалентный контуру $c_0(r, \alpha_0)$, а значит, имеющий такой же индекс.

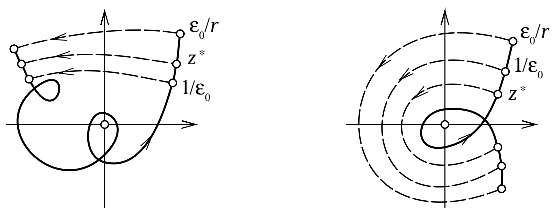


Рис. 8.1. Вне области нулей.

Для упрощения логической схемы дальнейших рассуждений и построений полезно заметить, что вместо упомянутой только что «средней» части дуги $c_0^*(r, \alpha_0)$ мы с тем же успехом можем взять любой другой ее участок, соответствующий отрезку $|z| \le z^*$, если выбрать $z^* > 0$ настолько большим, чтобы многочлены $p_1(z)$ и $q_1(z)$ не имели корней в области $|z| \ge z^*$. В самом деле, согласно лемме 4.7 все корни этих многочленов, если они есть, сосредоточены в области $|z| < 1/\varepsilon_0$. Поэтому для всех достаточно малых $r > 0$ точки дуги $c_0^*(r, \alpha_0)$, отвечающие значениям переменной z, пробегающей отрезок между z^* и $1/\varepsilon_0$, лежат в одной и той же четверти и то же самое верно для точек, соответствующих всем значениям z между $-z^*$ и $-1/\varepsilon_0$. Таким образом, два участка дуги $c^*(r, \alpha_0)$, один из которых построен по отрезку $|z| \le 1/\varepsilon_0$, а другой параметризован отрезком $|z| \le z^*$, после их «положительных» замыканий (см. снова рис. 8.1) превращаются в гомотопически эквивалентные контуры, имеющие одинаковый индекс.

Итак, мы в состоянии теперь точно сформулировать задачу, которая возникает у нас после перехода к новой переменной. Пусть $z^* > 0$ означает настолько большое число, что $p_1(z) \ne 0$ и $q_1(z) \ne 0$ при $|z| \ge z^*$. Для каждого достаточно малого $r > 0$ построим линию $C_1^*(r)$ на координатной плоскости (x, y), полагая

$$x = X_1(r, z), \quad y = Y_1(r, z), \quad |z| \le z^*. \tag{8.16}$$

Пусть $C_1(r)$ означает ее «положительное» замыкание. Вся наша задача сводится теперь к доказательству неравенства

$$\operatorname{ind} C_1(r) \geq 0. \tag{8.17}$$

В этом месте мы, наконец, завершаем начальный, или предварительный, этап нашего исследования, начатый еще в § 2, и здесь же начинаем первый этап «разрешения» особенности α_0.

8.3. Главный контур первого порядка. Пусть Γ_1^* означает дугу на плоскости (x, y), заданную уравнениями

$$x = p_1(z), \quad y = q_1(z), \quad |z| \leq z^*. \tag{8.18}$$

Дуга Γ_1^*, как и $C_1^*(r)$, имеет тот же тип, что и особенность α_0. Замыкая ее по обычным нашим правилам, мы получим контур Γ_1, который будем называть главным контуром семейства $C_1(r)$, или главным контуром первого порядка. Наша ближайшая задача — выяснить, как устроены многочлены $p_1(z)$ и $q_1(z)$, параметризующие основной участок этого контура.

Прежде всего заметим, снова ссылаясь на результаты разд. 4.2, что после перехода от полярного угла к переменной z функция w, регулярная в точке α_0, представляется в виде ряда

$$w = \sum_{m=m_0}^{\infty} f_m(z) r^m, \tag{8.19}$$

у которого роль коэффициентов исполняют уже алгебраические многочлены $f_m(z)$ от переменной z. Подчеркнем, что многочлен $f_{m_0}(z)$, которым начинается ряд, имеет степень n_0, а его старший коэффициент равен A_0.

Теперь мы обратимся к общим структурным уравнениям (5.17), которые мы привели в разд. 5.4. Чтобы применить их на данном этапе, возьмем в этих формулах $s = 1$ и всюду заменим u на z и g_m на f_m, учитывая, что у нас $\psi_{s-1}(r) = \psi_0(r) \equiv 0$ и, кроме того, $f_m(z) \equiv 0$ при $m < m_0$. В результате функции $X_1 = X_0$ и $Y_1 = Y_0$ предстанут перед нами в следующей форме:

$$X_1 = \frac{1}{p^2} \sum_{m=m_0}^{\infty} a_m^{(0)} r^m + a_m^{(2)} r^{m-2}, \quad Y_1 = \frac{1}{p} \sum_{m=m_0}^{\infty} b_m^{(1)} r^{m-1}, \tag{8.20}$$

где для каждого m коэффициенты $a_m^{(0)}, a_m^{(2)}$ и $b_m^{(1)}$ согласно (5.18) и (5.19) определяются многочленом $f_m(z)$ по формулам

$$\begin{gathered} a_m^{(0)} = m(2p - m) f_m(z) + (2m - 1 - 2p) z f_m'(z) - z^2 f_m''(z), \\ a_m^{(2)} = p^2 f_m''(z), \quad b_m^{(1)} = (m - 1 - p) f_m'(z) - z f_m''(z). \end{gathered} \tag{8.21}$$

Сравнивая теперь разложения (8.20) и (8.11), мы ясно видим, что многочлены $p_1(z)$ и $q_1(z)$ явно выражаются через «главную часть» $f_{m_0}(z)$ ряда w хорошо знакомыми нам соотношениями

$$\begin{aligned} p_1(z) &= f_{m_0}''(z), \\ q_1(z) &= b f_{m_0}'(z) - c z f_{m_0}''(z), \end{aligned} \tag{8.22}$$

где коэффициенты b и c принимают здесь вполне определенные значения:

$$b = \frac{m_0 - 1 - p}{p}, \quad c = \frac{1}{p}. \tag{8.23}$$

Именно такие линии мы изучали в предыдущих двух параграфах. Чтобы мы могли применить здесь полученные там выводы, коэффициенты b и c должны удовлетворять неравенствам $b > (n_0 - 1)c > 0$. Эти условия действительно выполнены, и даже с некоторым запасом. В самом деле, $c > 0$ и

$$b - (n_0 - 1)c = \frac{pk + n_0 - 1 - p}{p} - \frac{n_0 - 1}{p} = k - 1 \geq 2 > 0. \tag{8.24}$$

Итак, если контур Γ_1 не проходит через начало координат, то индекс его неотрицателен, как это показано в лемме 6.4. Кроме того, линии $C_1(r)$ в этом случае, очевидно, гомотопически эквивалентны своему главному контуру. Таким образом,

$$\operatorname{ind} C_1(r) = \operatorname{ind} \Gamma_1 \geq 0, \tag{8.25}$$

и наше исследование в этом месте заканчивается.

8.4. Выпрямление локализующих петелек. Теперь нам предстоит изучить тот случай, когда при некоторых значениях переменной z основная дуга Γ_1^* контура Γ_1 пересекает начало координат. Каждое такое значение мы назовем особенностью первого уровня.

Пусть α_1 будет одним из них, так что

$$p_1(\alpha_1) = 0 \quad \text{и} \quad q_1(\alpha_1) = 0. \tag{8.26}$$

Особенность α_1, как это вытекает из результатов разд. 4.2, является тейлоровским параметром первого уровня как для функции X_0, так и для функции Y_0. Иными словами, пара α_0, α_1 представляет собой совместную вещественную цепочку Тейлора функций X_0 и Y_0, и мы подчеркиваем еще раз, что лишь при наличии такой цепочки возникает необходимость нового этапа исследования.

Согласно нашим наблюдениям из разд. 7.1 многочлен $f_{m_0}(z)$ около точки α_1 устроен следующим образом:

$$f_{m_0}(z) = c_1 + A_1(z - \alpha_1)^{n_1}(1 + O(z - \alpha_1)), \tag{8.27}$$

где $A_1 \neq 0$, а показатель n_1 заключен в пределах $3 \leq n_1 \leq n_0$. Что касается постоянной c_1, то нам, в принципе, все равно, какой она может быть.

В соответствии с правилами, описанными в разд. 6.5, для каждого достаточно малого $r > 0$ построим «на» контуре $C_1(r)$ петельку $c_1(r, \alpha_1)$, локализующую особенность α_1. Если быть совсем педантичным, разумеется, нужно сначала перейти от функций X_1 и Y_1 к «приведенным» рядам, для чего первую из них согласно (8.11) нужно поделить на r^{m_0-2}, а вторую — на r^{m_0-1}. Тогда мы окажемся ровно в той обстановке, которую обсуждали в разд. 6.5. Построив по установленным там правилам локализующую петельку для приведенной линии, мы заменяем ее гомотопически эквивалентной, возвращаясь к исходным «масштабам». Так и возникает петелька $c_1(r, \alpha_1)$, о которой идет речь.

Как показывает лемма 7.1, неравенство (8.17) будет установлено, если мы убедимся в справедливости следующего утверждения: во всех случаях

$$\operatorname{ind} c_1(r, \alpha_1) \geq 0, \tag{8.28}$$

а если номер n_1 четный и $c_1 A_1 < 0$, то

$$\operatorname{ind} c_1(r, \alpha_1) \geq 1. \tag{8.29}$$

Итак, перед нами новая задача, очень похожая на ту, которая была у нас в начале параграфа. Только сейчас мы на один шаг ближе к завершению нашего исследования. Для подготовки к следующему этапу анализа нам снова придется увеличить петельку и «растянуть время». Но теперь, кроме этих уже знакомых операций, нам придется еще подвергнуть петельку некоторому «выпрямляющему» преобразованию. Его описанию и посвящена оставшаяся часть этого раздела.

Петелька $c_1(r, \alpha_1)$, как всегда, состоит из двух участков — основного и вспомогательного. Основной участок описывается уравнениями

$$x = X_1(r, z), \quad y = Y_1(r, z), \quad |z - \alpha_1| \le \varepsilon_1, \tag{8.30}$$

которые отличаются от (8.16) только тем, что переменная z пробегает здесь маленький отрезок с центром в точке α_1. Вспомогательный участок замыкает основной и строится по определенным правилам, учитывающим тип особенности α_1. Мы надеемся, что читатель уже давно не нуждается в наших напоминаниях о том, каковы эти типы, как зависят от них упомянутые правила и насколько малым должно быть число $\varepsilon_1 > 0$. Отметим лишь, что это число при необходимости еще может быть уменьшено и чуть ниже мы воспользуемся этой возможностью.

В дальнейшем важную роль играют знакомые нам два многочлена:

$$\varphi_1(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r \quad \text{и} \quad \psi_1(r) = r\varphi_1'(r) = \alpha_1 r. \tag{8.31}$$

Второй из них мы используем уже сейчас. А именно, построим с его помощью функцию $\Delta_1(r)$, полагая

$$\Delta_1(r) = \frac{\psi_1(r)/p}{1 - (\psi_1(r)/p)^2} - \frac{\psi_0(r)/p}{1 - (\psi_0(r)/p)^2}. \tag{8.32}$$

Разумеется, второе слагаемое в правой части этой формулы можно было опустить, поскольку оно равно нулю, но мы намеренно записали $\Delta_1(r)$ в такой форме, чтобы дальнейшие наши шаги максимально были похожи на первые.

«Выпрямляющее» преобразование, упоминавшееся выше, — это переход от точки (x, y) к точке $(\hat{x}, \hat{y})$ с координатами

$$\hat{x} = x, \quad \hat{y} = y + \Delta_1(r)x. \tag{8.33}$$

Петелька $c_1(r, \alpha_1)$ в результате такого преобразования превратится в новую петельку $\hat{c}_1(r, \alpha_1)$, чья «основная» часть определяется уравнениями

$$x = X_2(r, z), \quad y = Y_2(r, z), \quad |z - \alpha_1| \le \varepsilon_1, \tag{8.34}$$

где функции X_2 и Y_2 в соответствии с (8.33) имеют следующий вид:

$$X_2 = X_1, \quad Y_2 = Y_1 + \Delta_1(r)X_1. \tag{8.35}$$

Рассмотренное нами преобразование имеет для нас двоякий смысл. Прежде всего, оно приводит к известному нам «каноническому» виду главные части уравнений, параметризующих основной участок новой петельки. Действительно, замечая, что

$$\Delta_1(r) = \frac{\alpha_1}{p} r + O(r^2), \tag{8.36}$$

и учитывая асимптотические формулы (8.11), мы можем записать новые функции X_2 и Y_2 в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_2 &= r^{m_0-2}(\hat{p}_2(z) + rH(r,z)),\\ Y_2 &= r^{m_0-1}(\hat{q}_2(z) + rH(r,z)), \end{aligned} \tag{8.37}$$

где функции $\hat{p}_2(z)$ и $\hat{q}_2(z)$ представляют собой многочлены переменной z, определяемые соотношениями

$$\hat{p}_2(z) = p_1(z), \quad \hat{q}_2(z) = q_1(z) + \frac{\alpha_1}{p} \cdot p_1(z). \tag{8.38}$$

Из (8.22), (8.23) и (8.27), как легко проверить элементарными вычислениями, вытекают асимптотические формулы для новых многочленов:

$$\begin{aligned} \hat{p}_2(z) &= K_1(z-\alpha_1)^{n_1-2}(1 + O(z-\alpha_1)),\\ \hat{q}_2(z) &= L_1(z-\alpha_1)^{n_1-1}(1 + O(z-\alpha_1)), \end{aligned} \tag{8.39}$$

где коэффициенты K_1 и L_1 определяются равенствами

$$K_1 = A_1 n_1(n_1-1), \quad L_1 = A_1 n_1(p(k-1) + n_0 - n_1)/p. \tag{8.40}$$

Поскольку $k \geq 3$ и $n_0 \geq n_1 \geq 3$, то K_1 и L_1 отличны от нуля, а их знак совпадает со знаком A_1. Таким образом, при нечетном n_1 мы имеем здесь знакомую особенность типа $(1, \pm)$, а в случае, когда номер n_1 четный, получается особенность типа $(2, \pm)$. При этом знак особенности в каждом случае определяется знаком коэффициента A_1.

Возможно, стоит отметить, что в этом месте мы пришли бы к таким же результатам, если бы в качестве $\Delta(r)$ взяли любую другую функцию, имеющую асимптотику вида (8.36). Но мы должны помнить и о дальнейших шагах, а значит, должны учитывать, как преобразуются не только главные части уравнений, но и следующие за ними члены более высоких степеней. В самом деле, если сейчас они для нас «второстепенны», то на следующих этапах они уже станут «главными». И нам нужно не только предвидеть, что будет дальше, но суметь выбрать такие преобразования, которые обеспечат единообразие всем этапам нашего исследования. В этом и заключается еще одна причина, по которой коэффициент $\Delta(r)$ в преобразовании (8.33) и в уравнениях (8.35) мы взяли в форме (8.32).

Нам остается заметить, что якобиан преобразования (8.33) равен единице, а значит, петельки $c_1(r, \alpha_1)$ и $\hat{c}_1(r, \alpha_1)$ имеют одинаковый индекс. Поэтому задача дальнейшего исследования, выраженная неравенствами (8.28) и (8.29), сводится теперь к следующей: мы должны доказать, что для любой особенности α_1 первого уровня

$$\operatorname{ind} \hat{c}_1(r, \alpha_1) \geq 0, \tag{8.41}$$

а в том случае, когда номер n_1 четный и $c_1 A_1 < 0$, справедливо более сильное неравенство

$$\operatorname{ind} \hat{c}_1(r, \alpha_1) \geq 1. \tag{8.42}$$

8.5. Базис предстоящей индукции. Если функции X_2 и Y_2, построенные в предыдущем разделе, непосредственно выразить через функции X_0 и Y_0, то мы придем ровно к тем формулам, о которых шла речь в § 5, а точнее:

$$X_2 = X_0, \quad Y_2 = Y_0 + \frac{\psi_1(r)/p}{1 - (\psi_1(r)/p)^2} X_0. \tag{8.43}$$

Таким образом, X_2 и Y_2 входят в класс тех функций, о регулярности которых мы заранее позаботились, когда заменили полярный радиус переменной r. Здесь следует заметить, что X_2 и Y_2 как функции от r и ϑ регулярны в точке $\vartheta = \alpha_0$, но после перехода от ϑ к переменной z они становятся функциями от r и z, регулярными в точке $z = \alpha_1$. Теперь мы можем окончательно определиться в выборе числа ε_1. А именно, будем считать, что по отношению к точке α_1 оно служит локализующим радиусом как функции X_2, так и функции Y_2. Иначе говоря, пусть оно настолько мало, что функции X_2 и Y_2 могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_2 &= r^{m_0-2}K_1(z-\alpha_1)^{n_1-2}(1+\widetilde{X}_2(r,z)),\\ Y_2 &= r^{m_0-1}L_1(z-\alpha_1)^{n_1-1}(1+\widetilde{Y}_2(r,z)), \end{aligned} \tag{8.44}$$

где «остаточные» слагаемые $\widetilde{X}_2(r,z)$ и $\widetilde{Y}_2(r,z)$ по абсолютной величине строго меньше единицы, когда

$$0 < |z-\alpha_1| \le \varepsilon_1 \quad \text{и} \quad 0 < r \le \varepsilon_1|z-\alpha_1|. \tag{8.45}$$

Как мы видим, эти формулы вполне аналогичны соотношениям (8.9) и (8.10), которые относились к функциям X_1 и Y_1 предыдущего этапа.

Заменим теперь переменную z новым параметром u, полагая $z = \alpha_1 + ur$. Иными словами, прежний наш полярный угол ϑ мы записываем теперь в виде $\vartheta = \varphi_1(r) + ur^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r + ur^2$. Как показывают результаты разд. 4.2, а также формулы (8.37) и (8.39), регулярные функции X_2 и Y_2 в новых переменных будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} X_2 &= r^{m_1-4}(p_2(u) + rH(r,u)),\\ Y_2 &= r^{m_1-2}(q_2(u) + rH(r,u)). \end{aligned} \tag{8.46}$$

Здесь $m_1 = m_0 + n_1 = pk + n_0 + n_1$, а главные части $p_2(u)$ и $q_2(u)$ этих асимптотических формул представляют собой алгебраические многочлены переменной u, у которых степени равны соответственно $n_1 - 2$ и $n_1 - 1$, а старшими коэффициентами служат K_1 и L_1. Таким образом, если разложить их по убывающим степеням u, мы придем к следующим соотношениям:

$$p_2(u) = K_1 u^{n_1-2} + \dots, \quad q_2(u) = L_1 u^{n_1-1} + \dots. \tag{8.47}$$

Основная часть дуги $\hat{c}_1(r,\alpha_1)$ определяется теперь уравнениями

$$x = X_2(r,u), \quad y = Y_2(r,u), \quad |u| \le \varepsilon_1/r, \tag{8.48}$$

и мы снова замечаем, что новой переменной u при заданном r приходится пробегать большой отрезок от $-\varepsilon_1/r$ до $+\varepsilon_1/r$. Но мы уже знаем, что от этого отрезка можно оставить лишь его «среднюю» часть, чьи размеры не зависят от r. В самом деле, согласно (8.44) уравнения основного участка линии $\hat{c}_1(r,\alpha_1)$ могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= K_1 r^{m_1-4}u^{n_1-2}(1+\widetilde{X}_2),\\ y &= L_1 r^{m_1-2}u^{n_1-1}(1+\widetilde{Y}_2), \end{aligned} \tag{8.49}$$

где $|\widetilde{X}_2| < 1$ и $|\widetilde{Y}_2| < 1$, если выполнены условия (8.45), которые выражаются теперь неравенствами $0 < |ru| \le \varepsilon_1$ и $0 < r \le \varepsilon_1|ru|$. Ясно, что они соблюдены, если

$$0 < r \le \varepsilon_1^2 \quad \text{и} \quad 1/\varepsilon_1 \le |u| \le \varepsilon_1/r. \tag{8.50}$$

Рассуждая так же, как в разд. 8.2, мы оставим от основного участка нашей петельки лишь ее дугу, отвечающую отрезку $|u| \le 1/\varepsilon_1$, замкнем ее, как положено, и получим новую петельку, имеющую тот же индекс, что и прежняя. Кроме того заметим, что теперь число $1/\varepsilon_1$ для нас важно лишь тем, что в области $|u| \ge 1/\varepsilon_1$ многочлены $p_2(u)$ и $q_2(u)$ не имеют корней. Поэтому мы можем заменить его любым другим числом, обладающим подобным свойством.

Итак, пусть $u^* > 0$ настолько велико, что $p_2(u) \ne 0$ и $q_2(u) \ne 0$ при $|u| \ge u^*$. Построим на координатной плоскости (x, y) линию $C_2^*(r)$, полагая

$$x = X_2(r,u), \quad y = Y_2(r,u), \quad |u| \le u^*. \tag{8.51}$$

Пусть $C_2^+(r)$ означает соответствующую замыкающую дугу, правила построения которой зависят от типа особенности α_1 и хорошо нам известны. «Сумма» $C_2^*(r) + C_2^+(r)$ этих двух линий дает нам замкнутый контур, который мы обозначим символом $C_2(r)$. Как показывают только что проведенные наблюдения, новый контур имеет тот же индекс, что и породившая его петелька:

$$\operatorname{ind} C_2(r) = \operatorname{ind} \hat{c}_1(r, \alpha_1). \tag{8.52}$$

Таким образом, задачу дальнейшего исследования, выраженную неравенствами (8.41) и (8.42), мы можем сформулировать в терминах контура $C_2(r)$. Этот контур и будет основным объектом нашего внимания на следующем этапе. Но необходимые нам оценки его индекса, как можно заметить, зависят от обстоятельств, которые выражаются в терминах настоящего этапа: речь идет о четности номера n_1 и взаимоотношениях между коэффициентом A_1 и постоянной c_1. Для того чтобы каждый этап обладал максимальной автономностью, мы должны выразить его задачу в его же внутренних терминах. Для этого нам потребуется еще одно небольшое исследование.

Мы еще не говорили о том, что происходит с основной нашей функцией w после перехода к переменной u. Здесь надо различать два случая. Если $c_1 = 0$, то пара α_0, α_1, как показывают соотношения (8.19) и (8.27), является тейлоровской цепочкой функции w. Регулярность этой функции, как мы выяснили в § 4, позволяет нам утверждать, что после перехода от переменной z к новой переменной u ряд (8.19) преобразуется в следующий:

$$w = \sum_{m=m_1}^{\infty} g_m(u) r^m, \tag{8.53}$$

где $g_m(u)$ представляют собой многочлены от u. При этом первый из них имеет степень n_1 и старший коэффициент A_1, так что его разложение по убывающим степеням переменной u выглядит так:

$$g_{m_1}(u) = A_1 u^{n_1} + \dots . \tag{8.54}$$

Если же $c_1 \ne 0$, то значение α_1 уже не является тейлоровским параметром первого уровня функции w, и предыдущие выводы на этот случай не переносятся. Впрочем, это и непосредственно видно из прежних соотношений (8.19) и (8.27), которые теперь показывают, что в переменных r и u функция w выражается степенным рядом

$$w = \sum_{m=m_0}^{\infty} g_m(u) r^m \tag{8.55}$$

с полиномиальными коэффициентами, причем ряд начинается в точности с номера m_0 и

$$g_{m_0}(u) \equiv c_1 \neq 0. \tag{8.56}$$

Итак, в обсуждаемом нами случае главная часть ряда w определяется постоянной c_1, а номер n_1 и коэффициент A_1, как может показаться, где-то затерялись в недрах этого ряда. Тем не менее и в данном случае они играют в структуре ряда w важную роль.

В самом деле, как мы отмечали в разд. 5.4, но в чем легко убедиться и заново, функция w_ϑ в переменных r и z выражается рядом

$$w_\vartheta = \sum_{m=m_0}^{\infty} f'_m(z) r^{m-1}, \tag{8.57}$$

у которого главная часть согласно (8.27) имеет вид

$$f'_{m_0}(z) = A_1 n_1 (z-\alpha_1)^{n_1-1}(1 + O(z-\alpha_1)). \tag{8.58}$$

Таким образом, для функции w_ϑ, которая у нас также считается регулярной, пара α_0, α_1 служит цепочкой Тейлора. Это значит, что в переменных r и u ряд w_ϑ имеет следующее устройство:

$$w_\vartheta = \sum_{m=m_1}^{\infty} \widetilde{g}_m(u) r^{m-2}, \tag{8.59}$$

где $\widetilde{g}_m(u)$ означают некоторые многочлены от переменной u, а первый из них, будучи разложен по убывающим степеням указанной переменной, имеет вид

$$\widetilde{g}_{m_1}(u) = A_1 n_1 u^{n_1-1} + \dots . \tag{8.60}$$

Если же мы посчитаем производную функции w по угловой переменной ϑ, опираясь на разложение (8.55), то придем к следующему соотношению:

$$w_\vartheta = \sum_{m=m_0}^{\infty} g'_m(u) r^{m-2}. \tag{8.61}$$

Сопоставляя разложения (8.61) и (8.59), мы видим, что $g'_m(u) = 0$ для всех m из промежутка $m_0 \leq m < m_1$, так что все начальные многочлены $g_m(u)$, пока номер m остается строго меньшим m_1, сводятся к постоянным. С другой стороны, если $m \geq m_1$, то $g'_m(u) = \widetilde{g}_m(u)$. В частности, это показывает нам, что многочлен $g_{m_1}(u)$ представляет собой первый отличный от постоянной полиномиальный коэффициент ряда (8.55), а его разложение согласно (8.60) имеет в точности вид (8.54), так что его степень равна n_1, а старшим коэффициентом ему служит A_1.

Нам пора подвести итоги. Как мы видим, задача следующего этапа действительно может быть поставлена в терминах тех объектов, изучению которых он посвящен. А именно, к началу нового этапа у функций X_0 и Y_0 накопилась совместная вещественная тейлоровская цепочка α_0, α_1, и с нею связаны два номера n_0 и n_1, удовлетворяющие неравенствам $n_0 \geq n_1 \geq 3$. Из них мы сформировали показатель $m_1 = pk + n_0 + n_1$. Далее, записав полярный угол в виде $\vartheta = \alpha_0 + \alpha_1 r + ur^2$, мы выразили в переменных r и u изначальную функцию w.

Как мы видели, возможны два варианта: либо ряд w имеет вид (8.53), либо он выглядит следующим образом:

$$w = Cr^M + \ldots + \sum_{m=m_1}^{\infty} g_m(u) r^m. \tag{8.62}$$

В этом разложении $C = c_1$ и $M = m_0 = pk + n_0$, и нам важно подчеркнуть, что $C \neq 0$ и $M < m_1$. Многоточие здесь заменяет несколько степенных членов с постоянными коэффициентами и показателями от $M+1$ до $m_1 - 1$, хотя на более далеких этапах нашего анализа наряду с постоянными коэффициентами в аналогичном отрезке могут оказаться и линейные функции от u. Наконец, многочлен $g_{m_1}(u)$ в любом из двух случаев имеет вид (8.54), так что он заключает в себе информацию о важных для нас номере n_1 и коэффициенте A_1.

Напомним, что функции X_0 и Y_0 еще в самом начале нашего исследования были построены специальным образом по функции w. В свою очередь, они в соответствии с формулами (8.43) и (8.31) порождают характерные для обсуждаемого этапа две новые функции X_2 и Y_2. В переменных r и u их асимптотика описывается формулами (8.46) и (8.47), которые показывают нам, что «главными частями» рядов X_2 и Y_2 служат многочлены $p_2(u)$ и $q_2(u)$, имеющие соответственно степени $n_1 - 2$ и $n_1 - 1$, а знаки их старших коэффициентов совпадают со знаком A_1.

Далее мы выбрали число $u^* > 0$ с тем расчетом, чтобы в области $|u| \geq u^*$ многочлены $p_2(u)$ и $q_2(u)$ не имели корней. Затем по формулам (8.51) мы построили дугу $C_2^*(r)$, параметризованную отрезком $|u| \leq u^*$, которая имеет тип $(1, \pm)$ или $(2, \pm)$ в зависимости от четности номера n_1 и знака коэффициента A_1. Замыкая эту дугу по установленным ранее правилам, мы пришли, наконец, к контуру $C_2(r)$, который и становится теперь главным объектом нашего исследования. Как мы видели, наша задача сводится к доказательству следующего утверждения: во всех случаях

$$\operatorname{ind} C_2(r) \geq 0, \tag{8.63}$$

а если функция w представима в форме (8.62), где многочлен $g_{m_1}(u)$ имеет четную степень n_1 и его старший коэффициент A_1 связан с постоянной C неравенством $CA_1 < 0$, то

$$\operatorname{ind} C_2(r) \geq 1. \tag{8.64}$$

Формально говоря, мы вполне готовы перейти к индукционному шагу. Но очень может быть, что с содержательной точки зрения лучше было бы уделить внимание еще одному или двум конкретным этапам. Дело в том, что ко второму шагу, задачу которого мы только что описали, успели проявиться далеко не все интересные черты изучаемых нами линий и связанные с ними проблемы. Например, если бы мы перешли сейчас к детальному анализу контура $C_2(r)$, то обнаружили бы, что в случае четного номера n_1 постоянная C обязана быть равной нулю, так что вариант, когда $CA_1 < 0$, на самом деле пока не может встретиться. Другой пример — устройство ряда w, выраженного в переменных, возникающих на более поздних этапах. Если в разложении (8.62) заменить m_1 на m_{s-1}, где s означает номер шага в процессе разрешения особенности α_0, то при достаточно больших s, как мы вскользь заметили выше, коэффициенты перед степенями r^m, где $M < m < m_{s-1}$, могут быть не только постоянными, но и линейными функциями. Для полного понимания того, что происходит в нашей задаче, было бы совсем неплохо проследить за механизмом появления этих линейных коэффициентов. Но обсуждение подобных обстоятельств привело бы, по-видимому, уже к «запредельному» увеличению объема статьи. Во всяком случае, резко упала бы вероятность, что кто-нибудь из наших читателей нашел бы в себе силы дочитать работу до конца ... Поэтому в строгом соответствии с нашим планом, принятым в разд. 5.5, мы «с большим сожалением» оставляем в стороне все эти увлекательные вещи и переходим к индукционному шагу. Но мы надеемся, что любой читатель, до сих пор не покинувший нас, легко проведет самостоятельный анализ еще нескольких начальных шагов, если его вдохновят на это наши заключительные рассуждения.

§ 9. Индукционный шаг

В конце предыдущего параграфа мы подробно описали ситуацию, возникшую к началу нового — «второго» — этапа исследования, и поставили задачу, решение которой означало бы завершение нашей работы. Теперь мы обобщим эту задачу, считая, что речь идет о шаге с номером $s \geq 2$. Ясно, что при $s = 2$ общая задача должна по крайней мере включать прежнюю.

9.1. Задача индукции. Пусть вещественные числа $\alpha_0, \ldots, \alpha_{s-1}$ составляют совместную тейлоровскую цепочку функций X_0 и Y_0. Мы считаем, что с каждым из этих чисел α_i связан некий номер n_i, причем $n_0 \geq \ldots \geq n_{s-1} \geq 3$. Образуем из них сумму

$$m_{s-1} = kp + n_0 + \ldots + n_{s-1}, \tag{9.1}$$

где $k \geq 3$ и $p \geq 1$ означают прежние два натуральных параметра, появившиеся еще на самом начальном этапе нашего пути. Как мы предупреждали в разд. 5.2, важную роль в дальнейшем играют многочлены $\varphi_{s-1}(r)$ и $\psi_{s-1}(r)$, построенные выше по формулам (5.10). Первый из них мы используем для перехода от полярного угла ϑ к новой переменной u, полагая $\vartheta = \varphi_{s-1}(r) + ur^s$.

Как мы знаем, в новых переменных функция w записывается в виде степенного ряда

$$w = \sum_{m=kp}^{\infty} g_m(u) r^m, \tag{9.2}$$

у которого коэффициенты $g_m(u)$ представляют собой многочлены переменной u. Мы считаем, что для этого ряда возможны лишь два варианта: назовем их «нейтральным» и «знакоопределенным». В нейтральном варианте $g_m(u) \equiv 0$ для всех $m < m_{s-1}$, так что ряд имеет вид

$$w = \sum_{m=m_{s-1}}^{\infty} g_m(u) r^m. \tag{9.3}$$

Знакоопределенным мы считаем тот вариант, когда степени многочленов $g_m(u)$ при $m < m_{s-1}$ не выше единицы, среди них хотя бы один отличен от нуля и первый ненулевой многочлен есть константа. Таким образом, в этом случае ряд устроен следующим образом:

$$w = Cr^M + \ldots + \sum_{m=m_{s-1}}^{\infty} g_m(u) r^m, \tag{9.4}$$

где $C \neq 0$ и $pk \leq M < m_{s-1}$, а многоточие заменяет несколько степенных членов $g_m(u)r^m$ с постоянными или линейными относительно u коэффициентами $g_m(u)$ и показателями m из интервала $M < m < m_{s-1}$. В любом из этих двух вариантов мы считаем, что степень многочлена $g_{m_{s-1}}(u)$ в точности равна n_{s-1}, так что его разложение по убывающим степеням переменной u имеет вид

$$g_{m_{s-1}}(u) = A_{s-1}u^{n_{s-1}} + \dots, \quad \text{где } A_{s-1} \neq 0. \tag{9.5}$$

Как мы помним, показатель p был выбран так, чтобы некоторые интересные для нас функции оказались регулярными. В частности, это относится к функциям

$$X_s = X_0, \quad Y_s = Y_0 + \frac{\psi_{s-1}(r)/p}{1 - (\psi_{s-1}(r)/p)^2} \cdot X_0. \tag{9.6}$$

В дополнение к этому мы считаем теперь, что после перехода к переменным r и u они могут быть записаны в следующей асимптотической форме:

$$\begin{aligned} X_s &= r^{m_{s-1}-2s}(p_s(u) + rH(r,u)), \\ Y_s &= r^{m_{s-1}-\ s}\ (q_s(u) + rH(r,u)), \end{aligned} \tag{9.7}$$

где $p_s(u)$ и $q_s(u)$ означают многочлены от u, у которых степени равны соответственно $n_{s-1} - 2$ и $n_{s-1} - 1$, а старшие коэффициенты имеют общий знак, совпадающий со знаком числа A_{s-1}.

Чтобы сформулировать ту задачу, к которой сводится наша проблема, нам нужны некоторые построения. Прежде всего выберем число $u^* > 0$ настолько большим, чтобы многочлены $p_s(u)$ и $q_s(u)$ не имели корней в области $|u| \geq u^*$. Для каждого достаточно малого $r > 0$ построим линию $C_s^*(r)$ на плоскости (x, y), полагая

$$x = X_s(r,u), \quad y = Y_s(r,u), \quad \text{где} \quad |u| \leq u^*, \tag{9.8}$$

и предположим, что она не проходит через начало координат. Открытые четверти координатной плоскости (x, y), в которых располагаются начало и конец этой линии, при малых значениях r определяются степенями и старшими коэффициентами многочленов $p_s(u)$ и $q_s(u)$. Из высказанных выше предположений вытекает, что дуга $C_s^*(r)$ относится к одному из хорошо знакомых нам четырех классов кривых, а именно: она имеет тип $(1, \pm)$ или $(2, \pm)$ в зависимости от четности номера n_{s-1} и знака коэффициента A_{s-1}. Замкнем эту дугу в соответствии с нашими прежними правилами, описанными в разд. 6.1. В результате у нас получится контур, который мы обозначим символом $C_s(r)$.

Этот контур и будет главным предметом нашего исследования на данном этапе. Как мы видели в предыдущем параграфе, для достижения нашей основной цели достаточно убедиться в справедливости следующих двух утверждений: во всех случаях

$$\operatorname{ind} C_s(r) \geq 0, \tag{9.9}$$

а если речь идет о знакоопределенном варианте, когда ряд w имеет вид (9.4), причем номер n_{s-1} четный и $CA_{s-1} < 0$, то справедливо более сильное неравенство:

$$\operatorname{ind} C_s(r) \geq 1. \tag{9.10}$$

В зависимости от ряда обстоятельств, о которых нет нужды говорить заранее, мы либо непосредственно докажем требуемые неравенства, либо сведем нашу задачу к точно такой же, но в которой значок s будет уже на одну единичку больше.

9.2. Анализ структурных уравнений. Здесь мы выясним, как устроены многочлены $p_s(u)$ и $q_s(u)$, определяющие главные части рядов X_s и Y_s. Для этого нам придется, опираясь на приведенные в § 5 «структурные» уравнения для «начальных» рядов X_0 и Y_0, получить аналогичные представления функций X_s и Y_s, а затем сравнить их с асимптотическими формулами (9.7). Сочетание этих двух источников информации и приведет нас к нужным выводам.

Полагая для краткости

$$\Psi_{s-1}(r) = \frac{\psi_{s-1}(r)}{p^2 - \psi_{s-1}^2(r)}, \tag{9.11}$$

мы придем согласно (5.17)–(5.19) к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} X_s &= \sum_{m=pk}^{\infty} \big(a_m^{(0)} r^m + a_m^{(1)} r^{m-s} + a_m^{(2)} r^{m-2s}\big)/p^2, \\ Y_s &= \sum_{m=pk}^{\infty} \big(\Psi_{s-1}(r) a_m^{(0)} r^m + \Psi_{s-1}(r) a_m^{(1)} r^{m-s} + b_m^{(1)} r^{m-s}\big)/p. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Участвующие здесь коэффициенты $a_m^{(i)}$ и $b_m^{(1)}$, как мы знаем, выражаются через многочлены $\psi_{s-1}(r)$ и $g_m(u)$. Соответствующие формулы довольно громоздки, и неудобно, когда их нет перед глазами. Поэтому мы выпишем их еще раз, поближе к месту их применения, причем в максимально полной форме:

$$\begin{aligned} a_m^{(0)} &= m(2p-m) g_m(u) + (2m - s - 2p) s u g_m'(u) - s^2 u^2 g_m''(u), \\ a_m^{(1)} &= \big(2(m-s-p)\psi_{s-1}(r) + r\psi_{s-1}'(r)\big) g_m'(u) - 2\psi_{s-1}(r) s u g_m''(u), \\ a_m^{(2)} &= \big(p^2 - \psi_{s-1}^2(r)\big) g_m''(u), \\ b_m^{(1)} &= (m-s-p) g_m'(u) - s u g_m''(u). \end{aligned} \tag{9.13}$$

Вот из этих соотношений нам и предстоит извлечь необходимую информацию. Удивительно, что при невероятном разнообразии обстоятельств и определяемых ими вариантов во всех случаях мы получаем простую и ясную картину, имеющую единую для всех шагов структуру. Все, что будет доказано в этом разделе, можно суммировать в одной лемме.

Лемма 9.1. *Многочлены $p_s(u)$ и $q_s(u)$ имеют следующий вид:*

$$\begin{aligned} p_s(u) &= g_{m_{s-1}}''(u) + a, \\ q_s(u) &= b g_{m_{s-1}}'(u) - c u g_{m_{s-1}}''(u) + d, \end{aligned} \tag{9.14}$$

где a, b, c и d представляют собой некоторые постоянные, причем вторая и третья из них выражаются через имеющиеся у нас параметры вполне конкретными формулами:

$$b = (m_{s-1} - s - p)/p, \quad c = s/p. \tag{9.15}$$

Что же касается постоянных a и d, то относительно них можно высказать два важных для нас утверждения. А именно, в нейтральном варианте $a = 0$ и $d = 0$. Если же вариант знакоопределенный, то $aC \le 0$, так что либо $a = 0$, либо знаки a и C противоположны.

Доказательство. Мы рассмотрим отдельно два случая.

Случай $\psi_{s-1} = 0$. При этом условии в разложении (9.12) функции X_s средняя часть отсутствует, а последняя начинается с члена $a^{(2)}_{m_{s-1}} r^{m_{s-1}-2s}/p^2$, который равен $g''_{m_{s-1}}(u) r^{m_{s-1}-2s}$ согласно третьей из формул (9.13). Что касается первой части, то ее вид зависит от того, какой нам попался вариант. А именно, если вариант нейтральный, то младшая степень r здесь равна m_{s-1}. Таким образом,

$$X_s = r^{m_{s-1}-2s}\big(g''_{m_{s-1}}(u) + rH(r,u)\big). \tag{9.16}$$

Если же вариант знакоопределенный, то младшим членом первой части ряда X_s, как легко видеть, служит моном $a_s r^M$, где

$$a_s = -\frac{M(M-2p)}{p^2}C. \tag{9.17}$$

Заметим, что возникший у нас параметр a_s непременно отличен от нуля и имеет знак, противоположный знаку C, как это вытекает из неравенств $M - 2p \geq (k-2)p > 0$. В такой ситуации асимптотика ряда X_s может иметь вид (9.7) лишь при условии, что

$$M \geq m_{s-1} - 2s. \tag{9.18}$$

Если это неравенство строгое, то ряд X_s снова устроен, как в (9.16). Если же $M = m_{s-1} - 2s$, то вместо (9.16) мы имеем соотношение

$$X_s = r^{m_{s-1}-2s}\big(g''_{m_{s-1}}(u) + a + rH(r,u)\big), \tag{9.19}$$

где $a = a_s$, так что $aC < 0$.

Как мы видим, в обсуждаемом случае многочлен $p_s(u)$ действительно устроен так, как об этом сказанно в лемме. Нам остается заметить, что это верно и в отношении второго многочлена $q_s(u)$, изучение которого здесь существенно проще. Действительно, поскольку $\Psi_{s-1} = 0$, то в разложении (9.12) функции Y_s первое и второе слагаемые пропадают и остается лишь третье. Младшая степень, с которой r входит в это разложение, согласно условию (9.7) должна быть равна $m_{s-1} - s$, а значит, ряд Y_s имеет следующую асимптотическую форму:

$$Y_s = r^{m_{s-1}-s}\big(bg'_{m_{s-1}}(u) - cug''_{m_{s-1}}(u) + rH(r,u)\big), \tag{9.20}$$

где коэффициенты b и c определяются равенствами (9.15). Подчеркнем, что в рассмотренном нами случае всегда $d = 0$, каким бы ни оказался вариант, нейтральным или знакоопределенным.

Случай $\psi_{s-1} \neq 0$. Это условие означает, что в цепочке $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ не все числа равны нулю. Пусть α_μ будет первым отличным нуля ее элементом. Таким образом, многочлен $\psi_{s-1}(r)$ теперь имеет вид

$$\psi_{s-1}(r) = \mu\alpha_\mu r^\mu(1 + O(r)), \tag{9.21}$$

где $\alpha_\mu \neq 0$ и $1 \leq \mu \leq s-1$. Соответственно и разложение функции $\Psi_{s-1}(r)$ начинается с той же степени r, а именно:

$$\Psi_{s-1}(r) = \frac{\mu\alpha_\mu}{p^2} r^\mu(1 + O(r)). \tag{9.22}$$

Посмотрим прежде, как устроены ряды X_s и Y_s, когда вариант нейтральный. Младшие степени, с которыми переменная r входит в каждую из трех частей разложения (9.12) функции X_s, равны соответственно

$$m_{s-1}, \quad m_{s-1} - s + \mu, \quad m_{s-1} - 2s. \tag{9.23}$$

Для ряда Y_s аналогичная цепочка выглядит следующим образом:

$$m_{s-1} + \mu, \quad m_{s-1} - s + 2\mu, \quad m_{s-1} - s. \tag{9.24}$$

Как мы видим, у ряда X_s наименьшая степень r равна $m_{s-1} - 2s$, у ряда Y_s она равна $m_{s-1} - s$. При этом соответствующими коэффициентами перед указанными степенями, как показывают формулы (9.12) и (9.13), служат многочлены $g''_{m_{s-1}}(u)$ и $bg'_{m_{s-1}}(u) - cug''_{m_{s-1}}(u)$, где b и c имеют указанный в лемме вид. Итак, согласно (9.7), в нейтральном варианте мы вновь приходим к нужным нам выводам. А именно, многочлены $p_s(u)$ и $q_s(u)$ определяются равенствами (9.14), в которых нужно взять $a = 0$ и $d = 0$.

Намного больше хлопот доставит нам знакоопределенный вариант, к изучению которого мы теперь и переходим. Здесь нам придется очень внимательно отнестись к устройству начального отрезка ряда w и выделить два подслучая. По условию каждый из многочленов $g_m(u)$ при $M < m < m_{s-1}$ либо сводится к постоянной, либо представляет собой линейную функцию от u.

Предположим сначала, что линейных функций среди этих многочленов нет, так что все они постоянны. Посмотрим, каковы тогда младшие степени, с которыми переменная r входит в каждую из трех частей разложений (9.12). Для функции X_s они равны

$$M, \quad m_{s-1} - s + \mu, \quad m_{s-1} - 2s, \tag{9.25}$$

а для ряда Y_s мы получаем следующую цепочку:

$$M + \mu, \quad m_{s-1} - s + 2\mu, \quad m_{s-1} - s. \tag{9.26}$$

Коэффициент a_s перед степенью r^M в разложении X_s, как и выше, определяется формулой (9.17), и мы уже знаем, что он отличен от нуля. Но здесь нам важнее коэффициент d_s перед степенью $r^{M+\mu}$ в разложении Y_s, на который стоит посмотреть:

$$d_s = \frac{\mu\alpha_\mu}{p^3} M(2p - M)C = \frac{\mu\alpha_\mu}{p} a_s. \tag{9.27}$$

Таким образом, он также отличен от нуля. Поэтому, как показывают формулы (9.26), условие (9.7) может быть выполненным только в том случае, если

$$M + \mu \geq m_{s-1} - s. \tag{9.28}$$

Если это неравенство строгое, то Y_s имеет вид (9.20) и многочлен $q_s(u)$ определяется формулой (9.14), где $d = 0$. Если же $M + \mu = m_{s-1} - s$, то $q_s(u)$ снова выражается формулой (9.14), но в которой уже $d = d_s$. Что же касается многочлена $p_s(u)$, то ему все эти тонкости безразличны: поскольку согласно неравенству (9.28)

$$M \geq m_{s-1} - s - \mu > m_{s-1} - 2s, \tag{9.29}$$

то ряд X_s, как показывает цепочка (9.25), имеет вид (9.16), так что многочлен $p_s(u)$ определяется формулой (9.14), где $a = 0$.

Отметим, что здесь впервые у параметра d появляется возможность быть отличным от нуля. Это тот самый момент, когда после перехода к следующему этапу в начальном отрезке разложения функции w могут возникнуть коэффициенты, линейно зависящие от новой переменной.

Нам остается проанализировать тот «подслучай» знакоопределенного варианта, когда среди многочленов $g_m(u)$, где $M < m < m_{s-1}$, есть хоть один линейный. Пусть N означает наименьший номер в интервале $M < N < m_{s-1}$, которому отвечает многочлен $g_N(u)$ первой степени, а значит, его производная $g'_N(u) = g'_N$ представляет собой отличную от нуля постоянную величину. Здесь важно напомнить, что при переходе от полярного угла к переменной u функция w представляется степенным рядом, у которого согласно лемме 4.1 первые s коэффициентов постоянны. Это значит, что

$$N \geq pk + s. \tag{9.30}$$

Еще раз опираясь на формулы (9.13), (9.21) и (9.22), выпишем младшие степени, с которыми r входит в каждую из трех частей разложений (9.12). Для функции X_s мы получим цепочку

$$M, \quad N - s + \mu, \quad m_{s-1} - 2s, \tag{9.31}$$

а для функции Y_s аналогичные показатели равны

$$M + \mu, \quad N - s + 2\mu, \quad N - s. \tag{9.32}$$

Обратимся прежде ко второй строчке. Коэффициент перед степенью r^{N-s} в разложении функции Y_s имеет вид

$$\frac{b_N^{(1)}}{p} = \frac{N - s - p}{p} g'_N, \tag{9.33}$$

откуда следует, что он отличен от нуля. В самом деле, $g'_N \neq 0$ в соответствии с выбором номера N. С другой стороны, согласно (9.30)

$$N - s - p \geq pk - p = p(k-1) > 0. \tag{9.34}$$

Но $N - s$ заведомо меньше $m_{s-1} - s$. Поэтому разложение Y_s может иметь вид (9.7) лишь при условии, что моном, отвечающий степени r^{N-s}, погашается мономом, отвечающим степени $r^{M+\mu}$, а для этого необходимо равенство $M+\mu = N - s$, или

$$M = N - s - \mu. \tag{9.35}$$

Оставим на минуту цепочку (9.32) и посмотрим на строчку (9.31). Теперь ясно, что в ней первый показатель меньше второго. Поскольку коэффициент a_s перед степенью r^M в разложении X_s отличен от нуля, то условие (9.7) снова требует выполнения неравенства (9.18). Отсюда следует, что многочлен $p_s(u)$ имеет вид (9.14), причем для параметра a есть две возможности: либо $a = 0$, либо $a = a_s$, и тогда знак a противоположен знаку C.

Снова обращаясь к разложению (9.12) функции Y_s, мы завершим теперь описание ее главной части, учитывая вновь появившееся у нас неравенство $M \geq m_{s-1} - 2s$. Как показывают формулы (9.11) и (9.13), все слагаемые вида

$$\Psi_{s-1}(r) a_m^{(0)} r^m \tag{9.36}$$

при $m < N$ представляют собой степенные относительно r ряды с постоянными коэффициентами. Иными словами, в этих рядах зависимость коэффициентов от u может появиться лишь при условии, что $m \geq N$, а значит, младшая степень r, чей коэффициент зависит от u, не меньше

$$N + \mu = M + s + 2\mu \geq m_{s-1} - s + 2\mu. \tag{9.37}$$

Заметим также, что все слагаемые

$$\Psi_{s-1}(r) a_m^{(1)} r^{m-s} \tag{9.38}$$

при $m < m_{s-1}$ зависят только от r, так что непостоянный коэффициент в таких выражениях может появиться только перед степенью r, тоже не меньшей $m_{s-1} - s + 2\mu$. Наконец, и коэффициенты $b_m^{(1)}$ при $m < m_{s-1}$ постоянны. Очевидно, все это вместе с условием (9.7) означает, что многочлен $q_s(u)$ действительно имеет вид (9.14). В отличие от предыдущих случаев здесь трудно проследить, чему равен параметр d, но нам это и не нужно. Лемма доказана.

9.3. Логика решающего шага. Пусть Γ_s^* означает дугу на плоскости (x, y), параметризованную уравнениями

$$x = p_s(u), \quad y = q_s(u), \quad \text{где} \quad |u| \leq u^*. \tag{9.39}$$

Тип этой дуги, как мы помним, зависит от четности номера n_{s-1} и знака числа A_s, которые представляют собой соответственно степень и старший коэффициент многочлена $g_{m_{s-1}}(u)$. Положительное замыкание дуги Γ_s^* мы обозначим символом Γ_s и назовем главным контуром семейства $C_s(r)$.

Как мы выяснили в предыдущем разделе, контур Γ_s, а значит, и семейство $C_s(r)$ относятся к тому классу линий, которые мы изучали в § 6, 7. Теперь мы в полной мере воспользуемся полученными там результатами. Но прежде нам необходимо убедиться, что коэффициенты b и c, определенные равенствами (9.15), удовлетворяют условиям $b > (n_{s-1} - 1)c > 0$. Второе из этих неравенств очевидно. Для доказательства первого из них заметим, что

$$m_{s-1} = pk + n_0 + \ldots + n_{s-1} \geq pk + sn_{s-1}. \tag{9.40}$$

Отсюда и вытекает нужный нам вывод:

$$b - (n_{s-1} - 1)c = \frac{m_{s-1} - s - p}{p} - \frac{(n_{s-1} - 1)s}{p} \geq k - 1 > 0. \tag{9.41}$$

Теперь мы готовы решить задачу индукционного шага. А именно, либо мы уже сейчас докажем неравенства (9.9) и (9.10), либо убедимся, что они вытекают из точно таких же неравенств следующего этапа.

Рассмотрим прежде всего случай «общего положения», когда контур Γ_s не проходит через начало координат. Тогда в любом случае его индекс согласно лемме 6.4 неотрицателен и совпадает с индексом линии $C_s(r)$, так что $\operatorname{ind} C_s(r) \geq 0$, и неравенство (9.9) в этом случае доказано. Обратимся теперь к неравенству (9.10), которое нам необходимо доказать, если речь идет о знакоопределенном варианте, причем при условии, что номер n_{s-1} четный и $CA_{s-1} < 0$. Но параметр a в первом из уравнений (9.14), как показывает лемма 9.1, при любых обстоятельствах либо равен нулю, либо имеет знак, противоположный знаку C. Таким образом, $aA_{s-1} \geq 0$, и нам остается еще раз сослаться на лемму 6.4, согласно которой в таком случае $\operatorname{ind} C_s(r) \geq 1$.

Теперь мы позволим контуру Γ_s при желании пересекать начало координат, но без остановки. Точнее говоря, рассмотрим тот «грубый» случай, когда $a \neq 0$. Вспоминая о лемме 6.5, мы видим, что здесь всегда $\operatorname{ind} C_s(r) \geq 0$, так что неравенство (9.9) снова оказывается верным. Далее, как показывает лемма 9.1, при $a \neq 0$ мы с неизбежностью находимся в условиях знакоопределенного варианта, причем $aC < 0$. Таким образом, если $CA_{s-1} < 0$, то знаки у параметра a и коэффициента A_{s-1} совпадают. Если к тому же номер n_{s-1} четный, то согласно второму утверждению леммы 6.5 индекс линии $C_s(r)$ не меньше единицы, так что теперь справедливо неравенство (9.10).

Итак, нам остается изучить тот, намного более тонкий, случай, когда $a = 0$ и главный контур иногда пересекает начало координат. Здесь мы сможем лишь перенести нашу задачу на следующий этап и тем самым уменьшить расстояние до конца пути еще на один шаг.

Сначала мы обсудим знакоопределенный вариант, когда функция w имеет вид (9.4), а значит, кроме номера n_{s-1} и коэффициента A_{s-1} у нас есть некая отличная от нуля постоянная C. Теперь основным подспорьем наряду с леммой 9.1 нам будет служить лемма 6.7.

Отметим все те моменты, когда контур Γ_s проходит через начало координат, и пусть α_s будет одним из них. Это значит, что $p_s(\alpha_s) = 0$ и $q_s(\alpha_s) = 0$. В соответствии с тем, что мы выяснили в разд. 6.5, разложение многочлена $g_{m_{s-1}}(u)$ по возрастающим степеням разности $u - \alpha_s$ имеет следующий вид:

$$g_{m_{s-1}}(u) = c_s + c_s'(u - \alpha_s) + A_s(u - \alpha_s)^{n_s} + \dots\,, \tag{9.42}$$

где c_s и c_s' означают некоторые постоянные, коэффициент A_s отличен от нуля, а номер n_s содержится в отрезке $n_{s-1} \geq n_s \geq 3$. Подчеркнем, что постоянные c_s и c_s' в дальнейшем анализе знакоопределенного варианта участия не принимают. Иными словами, постановка задачи следующего этапа будет зависеть лишь от номера n_s, коэффициента A_s и постоянной C. Как мы знаем, четность номера n_s и знак коэффициента A_s определяют тип особенности α_s. В свою очередь, от типа особенности зависят правила построения локализующей ее петельки. Пусть $c_s(r;\alpha_s)$ означает петельку, локализующую особенность α_s.

Лемма 9.2. *Предположим, что для каждого особого значения α_s петелька $c_s(r;\alpha_s)$ имеет неотрицательный индекс и каждый раз, когда номер n_s четный и $CA_s < 0$, этот индекс не меньше единицы. Тогда* $\operatorname{ind} C_s(r) \geq 0$, *а если номер n_{s-1} четный и $CA_{s-1} < 0$, то* $\operatorname{ind} C_s(r) \geq 1$.

Доказательство. Пусть $C < 0$. Тогда неравенство $CA_s < 0$ означает, что $A_s > 0$. При этом четность номера n_s равносильна тому, что петелька $c_s(r;\alpha_s)$ имеет тип $(2,+)$. Иными словами, условия леммы в данном случае заключаются в том, что у любой петельки индекс неотрицателен, а для петелек типа $(2,+)$ он не меньше единицы. Таким образом, мы оказались в условиях леммы 6.7, согласно которой $\operatorname{ind} C_s(r) \geq 0$. Если же номер n_{s-1} четный и $CA_{s-1} < 0$, то $A_{s-1} > 0$, так что и сам контур $C_s(r)$ имеет тип $(2,+)$. Та же лемма 6.7 гарантирует нам, что в таком случае $\operatorname{ind} C_s(r) \geq 1$.

Если $C > 0$, то неравенство $CA_s < 0$ означает, что $A_s < 0$. Далее нужно повторить предыдущие рассуждения, заменяя тип $(2,+)$ на тип $(2,-)$ и обращаясь ко второй части леммы 6.7. Лемма доказана.

Мы обсудили уже три ситуации, расположив их по убыванию той вероятности, с которой они могут встречаться. Разумеется, случай «общего положения», когда главный контур проходит мимо начала координат, наиболее вероятный, и в этом случае наше исследование уже закончилось. Если же контур проходит через нуль, то, скорее всего, $a \neq 0$. Как мы видели, при этом условии исследование тоже завершается на данном этапе. Теперь мы рассматриваем тот случай, когда $a = 0$, и здесь наиболее вероятна та ситуация, когда на первом месте в разложении функции w уже появилась постоянная $C \neq 0$. Мы назвали этот вариант знакоопределенным потому, что знак C, как показывает лемма 9.2, полностью определяет направление дальнейшего исследования. Более того, на следующих шагах, сколько бы их ни было, постоянная C продолжает оставаться началом ряда w. Наконец, наиболее редким оказывается тот вариант, когда $a = 0$ и ряд w имеет вид (9.3), так что у нас нет еще никакой постоянной C. Такой вариант мы назвали нейтральным. Здесь уже нет того ориентира, которым в предыдущем варианте служил знак C. Тем не менее и в этом случае мы должны уже сейчас поставить цель дальнейшего исследования, причем так, чтобы — в терминах следующего этапа — она включалась в нашу общую задачу, сформулированную в разд. 9.1. В этом нам помогут результаты § 7, выраженные в лемме 7.1.

Итак, пусть мы оказались в условиях нейтрального варианта. Напомним, что теперь нам нужно доказать лишь неравенство (9.9). Отметим и в этом случае все моменты, когда контур Γ_s пересекает начало координат. Пусть α_s будет одним из них. Подчеркнем, что в уравнениях (9.14) теперь не только $a = 0$, но и $d = 0$, так что мы вправе применить здесь результаты, изложенные в § 7. В отличие от знакоопределенного варианта разложение многочлена $g_{m_{s-1}}(u)$ по возрастающим степеням разности $u - \alpha_s$, как мы выяснили в разд. 7.1, имеет следующий вид:

$$g_{m_{s-1}}(u) = c_s + A_s(u - \alpha_s)^{n_s} + \dots\,. \tag{9.43}$$

Здесь c_s также означает некоторую постоянную, коэффициент A_s отличен от нуля, а номер n_s заключен в отрезке $n_{s-1} \geq n_s \geq 3$. Другое отличие от предыдущего случая заключается в том, что теперь для постановки задачи следующего этапа для нас будут важны не только номер n_s и коэффициент A_s, но и постоянная c_s. Если $c_s = 0$, то особенность α_s мы назовем нейтральной. Для такой особенности ряд w, как мы вскоре увидим, сохраняет вид, аналогичный (9.3), и на следующем этапе. Если же $c_s \neq 0$, то особенность α_s мы будем считать знакоопределенной. Поскольку в обсуждаемом нами «нейтральном варианте» буква C пока ничего не обозначает, мы вправе положить $C = c_s$. Именно эта постоянная C появится на первом месте ряда w, когда мы выразим его в переменных нового этапа.

Лемма 9.3. *Предположим, что для каждой особенности α_s локализующая ее петелька имеет неотрицательный индекс, а если речь идет о знакоопределенной особенности α_s, причем номер n_s четный и $CA_s < 0$, то индекс петельки не меньше единицы. Тогда* $\operatorname{ind} C_s(r) \geq 0$.

Это утверждение полностью совпадает с леммой 7.1, если не обращать внимания на разницу в обозначениях, так что оно уже доказано.

Важно подчеркнуть, что последние две леммы в совокупности охватывают все возможные на данном этапе ситуации и — при определенных условиях — гарантируют нам справедливость именно тех неравенств (9.9) и (9.10), доказательство которых является задачей настоящего этапа. Таким образом, нам остается лишь разобраться в том, что означают условия наших лемм с точки зрения следующего шага. Для этого мы выберем одну из особенностей α_s и пройдем еще один круг уже хорошо известных нам преобразований.

9.4. Рождение новой веточки. Прежде всего выясним, какое отношение имеет особенность α_s к «начальным» функциям X_0 и Y_0.

Лемма 9.4. *Особенность α_s представляет собой совместный тейлоровский параметр функций X_0 и Y_0 уровня s, продолжающий их общую тейлоровскую* *цепочку $\alpha_0, \dots, \alpha_{s-1}$. Другими словами, числа $\alpha_0, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s$ составляют вещественную цепочку Тейлора как для функции X_0, так и для функции Y_0.*

Доказательство. Особенность α_s служит корнем для каждого из многочленов $p_s(u)$ и $q_s(u)$, определяющих главные части рядов X_s и Y_s. Согласно лемме 4.3 нам достаточно показать, что α_s представляет собой корень и тех многочленов, которые являются главными частями функций X_0 и Y_0, выраженных в переменных r и u. Как показывают соотношения (9.6), если $\psi_{s-1}(r) \equiv 0$, то $X_0 = X_s$ и $Y_0 = Y_s$, так что в этом случае задача решена. Если же функция $\psi_{s-1}(r)$ не сводится к тождественному нулю, то она имеет вид

$$\psi_{s-1}(r) = \beta r^{\mu}(1 + O(r)), \tag{9.44}$$

где $\beta \neq 0$ и $1 \leq \mu \leq s-1$. В таком случае, очевидно,

$$\begin{aligned} X_0 &= r^{m_{s-1}-2s}(p_s(u) + rH(r,u)), \\ Y_0 &= r^{m_{s-1}-2s+\mu}\,(-\beta p_s(u) + rH(r,u)). \end{aligned} \tag{9.45}$$

Таким образом, главными частями функций X_0 и Y_0 служат многочлены $p_s(u)$ и $-\beta p_s(u)$, так что особенность α_s действительно является их общим корнем. Лемма доказана.

Итак, мы видим, что новая особенность α_s символизирует один из побегов, порождаемых парой (X_s, Y_s). Это значит, что мы на верном пути и продолжаем подниматься по дереву Каратеодори, произрастающему из корня α_0.

Теперь мы займемся «выпрямлением» петельки $c_s(r; \alpha_s)$, локализующей особенность α_s. Как мы знаем, она является результатом положительного замыкания дуги контура $C_s(r)$, описываемой уравнениями

$$x = X_s(r,u), \quad y = Y_s(r,u), \quad |u - \alpha_s| \leq \varepsilon_s, \tag{9.46}$$

где ε_s означает достаточно малое положительное число. В разд. 6.5 мы уже говорили о том, насколько малым оно должно быть, и у нас еще есть возможность уменьшить его, если это окажется необходимым. Вскоре мы воспользуемся этой возможностью. А пока напомним, что мы обсуждаем тот единственный оставшийся у нас случай, когда в первом из уравнений (9.14) параметр a равен нулю, так что многочлен $g_{m_{s-1}}(u)$ имеет вид (9.42). В нейтральном варианте, когда потребуется, мы непременно учтем, что линейный член в разложении (9.42) отсутствует, и воспользуемся формулой (9.43). Но сейчас нет нужды различать знакоопределенный и нейтральный варианты: важно только, что $a = 0$.

Далее нам потребуются два многочлена «нового поколения»:

$$\varphi_s(r) = \sum_{i=0}^{s} \alpha_i r^i \quad \text{и} \quad \psi_s(r) = r\varphi_s'(r). \tag{9.47}$$

В точном соответствии с нашими действиями в разд. 8.4 построим функцию $\Delta_s(r)$, полагая

$$\Delta_s(r) = \frac{\psi_s(r)/p}{1 - (\psi_s(r)/p)^2} - \frac{\psi_{s-1}(r)/p}{1 - (\psi_{s-1}(r)/p)^2}, \tag{9.48}$$

и рассмотрим преобразование, переводящее точку (x, y) в точку $(\hat{x}, \hat{y})$ с координатами

$$\hat{x} = x, \quad \hat{y} = y + \Delta_s(r)x. \tag{9.49}$$

Петелька $c_s(r, \alpha_s)$ в результате такого преобразования превратится в новую петельку $\hat{c}_s(r, \alpha_s)$, чья «основная» часть определяется уравнениями

$$x = X_{s+1}(r, u), \quad y = Y_{s+1}(r, u), \quad |u - \alpha_s| \le \varepsilon_s, \tag{9.50}$$

где функции X_{s+1} и Y_{s+1} согласно (9.49) имеют следующий вид:

$$X_{s+1} = X_s, \quad Y_{s+1} = Y_s + \Delta_s(r) X_s. \tag{9.51}$$

Для дальнейшего важно заметить, что петельки $c_s(r, \alpha_s)$ и $\hat{c}_s(r, \alpha_s)$ имеют одинаковый индекс. В самом деле, преобразование (9.49) лишь «перекашивает» любой рисунок в направлении оси ординат, оставляя на месте точки самой оси. Впрочем, можно ограничиться тем замечанием, что якобиан этого преобразования равен единице. Таким образом, в условиях лемм 9.2 и 9.3 прежние петельки $c_s(r, \alpha_s)$ можно заменить петельками $\hat{c}_s(r, \alpha_s)$.

Выясним, как выглядят главные части уравнений, параметризующих основной участок «выпрямленной» петельки. Замечая, что

$$\Delta_s(r) = \frac{s\alpha_s}{p} r^s + O(r^{s+1}), \tag{9.52}$$

и учитывая асимптотические формулы (9.7), мы можем записать новые функции X_{s+1} и Y_{s+1} в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_{s+1} &= r^{m_{s-1}-2s}(\hat{p}_{s+1}(u) + rH(r, u)), \\ Y_{s+1} &= r^{m_{s-1}-s}(\hat{q}_{s+1}(u) + rH(r, u)), \end{aligned} \tag{9.53}$$

где роль главных частей выполняют многочлены $\hat{p}_{s+1}(u)$ и $\hat{q}_{s+1}(u)$ переменной u, определяемые соотношениями

$$\hat{p}_{s+1}(u) = p_s(u), \quad \hat{q}_{s+1}(u) = q_s(u) + \frac{s\alpha_s}{p} \cdot p_s(u). \tag{9.54}$$

Из формул (9.14), (9.15) и (9.42), как легко проверить элементарными вычислениями, вытекают следующие асимптотические представления новых многочленов:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{s+1}(u) &= K_s(u - \alpha_s)^{n_s - 2}(1 + O(u - \alpha_s)), \\ \hat{q}_{s+1}(u) &= L_s(u - \alpha_s)^{n_s - 1}(1 + O(u - \alpha_s)), \end{aligned} \tag{9.55}$$

где коэффициенты K_s и L_s определяются равенствами

$$\begin{aligned} K_s &= A_s n_s(n_s - 1), \\ L_s &= A_s n_s(p(k-1) + n_0 + \ldots + n_{s-1} - sn_s)/p. \end{aligned} \tag{9.56}$$

Поскольку $k \ge 3$ и $n_0 \ge \ldots \ge n_{s-1} \ge n_s \ge 3$, то K_s и L_s отличны от нуля и имеют общий знак, совпадающий со знаком A_s. В дальнейшем это замечание для нас также будет крайне важным.

Если построенные выше функции X_{s+1} и Y_{s+1} выразить непосредственно через X_0 и Y_0, то, учитывая соотношения (9.6), мы придем к формулам

$$X_{s+1} = X_0, \quad Y_{s+1} = Y_0 + \frac{\psi_s(r)/p}{1 - (\psi_s(r)/p)^2} X_0. \tag{9.57}$$

Если учесть еще лемму 9.4, то можно сказать, что функции X_{s+1} и Y_{s+1} построены по совместной тейлоровской цепочке регулярных рядов X_0 и Y_0 ровно по тем формулам, о которых говорилось в § 5. Это значит, что они относятся к числу тех функций, регулярность которых мы заранее обеспечили, заменив полярный радиус подходящей переменной r. Возможно, здесь стоит напомнить, что, говоря о регулярности, мы имеем в виду функции, изначально зависящие от переменных r и ϑ. При этом условие регулярности относится к точке $\vartheta = \alpha_0$. Именно такой смысл имеет утверждение о регулярности функций X_{s+1} и Y_{s+1}. Но после перехода от ϑ к переменной u те же функции, зависящие уже от r и u, становятся регулярными в точке $u = \alpha_s$.

Теперь настало время окончательно определиться в выборе числа ε_s. Мы будем считать его настолько маленьким, чтобы по отношению к точке α_s оно служило локализующим радиусом как для функции X_{s+1}, так и для функции Y_{s+1}. Тогда согласно (9.53) и (9.55) эти функции могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_{s+1} &= r^{m_{s-1}-2s} K_s (u-\alpha_s)^{n_s-2}(1+\widetilde{X}_{s+1}(r,u)), \\ Y_{s+1} &= r^{m_{s-1}-s} L_s (u-\alpha_s)^{n_s-1}(1+\widetilde{Y}_{s+1}(r,u)), \end{aligned} \tag{9.58}$$

где «остаточные» слагаемые $\widetilde{X}_{s+1}(r,u)$ и $\widetilde{Y}_{s+1}(r,u)$ по абсолютной величине строго меньше единицы, когда

$$0 < |u-\alpha_s| \le \varepsilon_s \quad \text{и} \quad 0 < r \le \varepsilon_s |u-\alpha_s|. \tag{9.59}$$

9.5. К вершинам Каратеодори. Заменим теперь переменную u новым параметром v, полагая $u = \alpha_s + vr$. Иными словами, прежний наш полярный угол ϑ мы записываем теперь в виде

$$\vartheta = \varphi_s(r) + vr^{s+1} = \alpha_0 + \ldots + \alpha_s r^s + vr^{s+1}. \tag{9.60}$$

Как показывают формулы (9.53) и (9.55), регулярные функции X_{s+1} и Y_{s+1} в новых переменных будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} X_{s+1} &= r^{m_s-2(s+1)}(p_{s+1}(v) + rH(r,v)), \\ Y_{s+1} &= r^{m_s-(s+1)}(q_{s+1}(v) + rH(r,v)). \end{aligned} \tag{9.61}$$

Здесь $m_s = m_{s-1} + n_s = pk + n_0 + \ldots + n_s$, а главные части $p_{s+1}(v)$ и $q_{s+1}(v)$ этих асимптотических формул представляют собой алгебраические многочлены переменной v, у которых степени равны соответственно $n_s - 2$ и $n_s - 1$, а старшими коэффициентами служат числа K_s и L_s, как мы знаем, имеющие общий знак, совпадающий со знаком коэффициента A_s.

Основная часть дуги $\hat{c}_s(r,\alpha_s)$ определяется теперь уравнениями

$$x = X_{s+1}(r,v), \quad y = Y_{s+1}(r,v), \quad |v| \le \varepsilon_s/r. \tag{9.62}$$

Как и должно быть, если путь задан, а скорость уменьшена, то приходится расплачиваться временем. Так, нашей новой переменной v при заданном r нужно пробежать отрезок от $-\varepsilon_s/r$ до $+\varepsilon_s/r$, чтобы параметризовать весь основной участок дуги $\hat{c}_s(r,\alpha_s)$. Но мы уже не раз убеждались, что от этого отрезка можно оставить лишь его «среднюю» часть, чьи размеры не зависят от r, и нам остается лишь повторить наши аргументы. Пользуясь соотношением (9.58), представим уравнения основного участка линии $\hat{c}_s(r,\alpha_s)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= K_s r^{m_s-2(s+1)} v^{n_s-2}(1+\widetilde{X}_{s+1}), \\ y &= L_s r^{m_s-(s+1)} v^{n_s-1}(1+\widetilde{Y}_{s+1}). \end{aligned} \tag{9.63}$$

Здесь $|\widetilde{X}_{s+1}| < 1$ и $|\widetilde{Y}_{s+1}| < 1$, если выполнены условия (9.59), которые выражаются теперь неравенствами $0 < |rv| \le \varepsilon_s$ и $0 < r \le \varepsilon_s |rv|$. Эти неравенства, очевидно, эквивалентны следующим:

$$0 < r \le \varepsilon_s^2 \quad \text{и} \quad 1/\varepsilon_s \le |v| \le \varepsilon_s / r. \tag{9.64}$$

Как и в предыдущих случаях, если мы оставим от основного участка нашей петельки лишь ее дугу, отвечающую отрезку $|v| \le 1/\varepsilon_s$, и замкнем ее в соответствии с нашими правилами, то получим новую петельку, имеющую тот же индекс, что и прежняя. Кроме того заметим, что теперь число $1/\varepsilon_s$ для нас важно лишь тем, что в области $|v| \ge 1/\varepsilon_s$ многочлены $p_{s+1}(u)$ и $q_{s+1}(u)$, как вытекает из леммы 4.7, не имеют корней. Поэтому мы можем заменить его любым другим числом, обладающим подобным свойством.

Итак, пусть $v^* > 0$ настолько велико, что $p_{s+1}(v) \ne 0$ и $q_{s+1}(v) \ne 0$ при $|v| \ge v^*$. Построим на координатной плоскости (x, y) линию $C^*_{s+1}(r)$, полагая

$$x = X_{s+1}(r, v), \quad y = Y_{s+1}(r, v), \quad |v| \le v^*. \tag{9.65}$$

Разумеется, «глобальный» тип этой линии совпадает с «локальным» типом породившей ее особенности α_s и определяется четностью номера n_s и знаком коэффициента A_s. Пусть $C_{s+1}(r)$ означает «положительное» замыкание дуги $C^*_{s+1}(r)$. Как показывают только что проведенные наблюдения, новый контур наследует индекс петельки, из которой он возник:

$$\operatorname{ind} C_{s+1}(r) = \operatorname{ind} \hat{c}_s(r, \alpha_s). \tag{9.66}$$

В свою очередь, индекс петельки $\hat{c}_s(r, \alpha_s)$, как мы отмечали в предыдущем разделе, равен индексу ее прообраза $c_s(r, \alpha_s)$. Сочетая это обстоятельство с предыдущим равенством, мы приходим к замечательному выводу: те требования к индексам петелек $c_s(r, \alpha_s)$, при которых леммы 9.2 и 9.3 гарантируют нужные нам оценки (9.9) и (9.10), можно теперь считать требованиями к индексу контура $C_{s+1}(r)$.

Если мы еще раз внимательно посмотрим на условия лемм 9.2 и 9.3, то заметим, что во всех случаях упомянутые выше «требования» зависят от трех параметров, характеризующих ту или иную петельку, а именно: от номера n_s, коэффициента A_s и постоянной C. Если же мы, пользуясь только что полученным правом, выразим эти требования в терминах контура $C_{s+1}(r)$, то обнаружим, что вся наша задача сводится к доказательству двух положений: во-первых, при любых обстоятельствах

$$\operatorname{ind} C_{s+1}(r) \ge 0, \tag{9.67}$$

а во-вторых, если номер n_s четный и $CA_s < 0$, то

$$\operatorname{ind} C_{s+1}(r) \ge 1. \tag{9.68}$$

Итак, для окончательного сведения задачи к следующему этапу нам остается только выяснить, как выглядит степенной ряд, выражающий функцию w в переменных r и v, и дать характеристику параметрам n_s, A_s и C в терминах этого нового ряда. Нам удобно будет отдельно рассмотреть три случая:

(1) нейтральный вариант и нейтральная особенность α_s;

(2) нейтральный вариант, но знакоопределенная особенность α_s;

(3) знакоопределенный вариант.

Как мы увидим, только в первом случае вариант нового этапа будет снова нейтральным. Во втором случае мы станем свидетелями того замечательного явления, когда вариант, бывший нейтральным, при переходе к следующему шагу становится знакоопределенным — именно в этот момент «срывается с места снежный ком» ... В третьем случае мы воочию убедимся, что вариант, однажды ставший знакоопределенным, уже невозможно лишить его знака — на всех дальнейших этапах он упорно движется в одном и том же направлении, к своей конечной цели, и остановить его может лишь «случай общего положения» или «грубый случай», когда дальнейшее движение либо невозможно, либо бессмысленно. Но именно это и является «конечной целью» знакоопределенного варианта ...

1-й случай. Если вариант нейтральный, то функция w в переменных r и u выражается рядом (9.3). Если же и особенность α_s нейтральна, то первый многочлен $g_{m_{s-1}}(u)$ ряда (9.3) имеет вид (9.43), где $c_s = 0$. Поскольку w как функция от r и ϑ регулярна при $\vartheta = \alpha_0$, то формула (9.3) означает, что числа $\alpha_0, \dots, \alpha_{s-1}$ согласно лемме 4.3 составляют ее тейлоровскую цепочку. В силу той же леммы любой корень «главного» многочлена $g_{m_{s-1}}(u)$ является тейлоровским параметром функции w порядка s, продолжающим указанную цепочку. В нашем случае одним из таких корней служит изучаемая нами особенность α_s. Иными словами, набор $\alpha_0, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s$ также представляет собой цепочку Тейлора функции w. Но тогда после перехода от u к переменной v ряд (9.3) примет следующий вид:

$$w = \sum_{m=m_s} h_m(v) r^m, \tag{9.69}$$

где коэффициенты $h_m(v)$ полиномиально зависят от v, причем степень многочлена $h_{m_s}(v)$ равна кратности n_s корня α_s, а его старшим коэффициентом служит начальный коэффициент A_s разложения (9.43).

Итак, в рассмотренном случае вариант, возникающий на новом этапе, по-прежнему нейтральный. Подчеркнем, что задачей нового этапа является доказательство неравенства (9.67).

2-й случай. Теперь мы изучим ту разновидность нейтрального варианта, когда α_s — знакоопределенная особенность. В этом случае ряд w, как и выше, имеет вид (9.3), его первый многочлен $g_{m_{s-1}}(u)$ определяется той же формулой (9.43), но в которой уже $c_s \neq 0$. Как ясно показывают соотношения (9.3) и (9.43), в переменных r и v функция w предстанет в виде ряда

$$w = c_s r^{m_{s-1}} + \sum_{m > m_{s-1}} h_m(v) r^m, \tag{9.70}$$

чьими коэффициентами $h_m(v)$ служат некоторые многочлены от переменной v.

Таким образом, регулярность самой функции w утрачивает для нас всякое значение. Другое дело — ее производная w_ϑ по переменной ϑ, которая также является регулярной в точке $\vartheta = \alpha_0$. Согласно (5.16), выраженная в переменных r и u, в нашем случае она представляется рядом

$$w_\vartheta = \sum_{m=m_{s-1}} g'_m(u) r^{m-s}, \tag{9.71}$$

в котором первый многочлен $g'_{m_{s-1}}(u)$, как показывает формула (9.43), имеет вид

$$g'_{m_{s-1}}(u) = A_s n_s (u - \alpha_s)^{n_s - 1}(1 + O(u - \alpha_s)). \tag{9.72}$$

Это значит, что в переменных r и v ряд (9.71) обретет следующую форму:

$$w_\vartheta = \sum_{m=m_s} h_m^{(1)}(v) r^{m-(s+1)}, \tag{9.73}$$

где функции $h_m^{(1)}(v)$ представляют собой многочлены от v, причем первый из них, разложенный по убывающим степеням переменной v, равен

$$h_{m_s}^{(1)}(v) = A_s n_s v^{n_s-1} + \dots . \tag{9.74}$$

С другой стороны, если непосредственно продифференцировать равенство (9.70) по переменной ϑ, мы придем к соотношению

$$w_\vartheta = \sum_{m>m_{s-1}} h'_m(v) r^{m-(s+1)}. \tag{9.75}$$

Сравнивая между собой формулы (9.73) и (9.75), мы видим, что при $m_{s-1} < m < m_s$ многочлены $h_m(v)$ постоянны, а значит,

$$w = Cr^M + \dots + \sum_{m=m_s}^{\infty} h_m(v) r^m, \tag{9.76}$$

где $C = c_s$, $M = m_{s-1} < m_s$, а многоточие заменяет несколько мономов с постоянными коэффициентами и степенями m из интервала $m_{s-1} < m < m_s$. Из тех же формул (9.73) и (9.75) вытекает, что $h'_m(v) = h_m^{(1)}(v)$, если $m \geq m_s$. В частности, как показывают соотношения (9.74), отсюда следует, что многочлен $h_{m_s}(v)$ снова имеет степень n_s, а его старший коэффициент, как и в предыдущем случае, равен A_s.

Итак, все три параметра n_s, A_s и C, определяющие задачу нового этапа, нашли свое достойное место в разложении функции w, причем столь удачно, что новый этап отличается от предыдущего лишь своим номером $s+1$, заменившим прежний номер s.

3-й случай. Нам остается рассмотреть знакоопределенный вариант, когда ряд w в переменных r и u имеет вид (9.4). В результате перехода к переменным r и v он, очевидно, преобразится следующим образом:

$$w = Cr^M + \sum_{m>M} h_m(v) r^m, \tag{9.77}$$

где коэффициенты $h_m(v)$ представляют собой некоторые многочлены от переменной v. Мы должны доказать, что при $M < m < m_s$ степени многочленов $h_m(v)$ не выше единицы, а также выяснить, как устроен многочлен $h_{m_s}(v)$.

Как мы договорились, многоточие в формуле (9.4) заменяет несколько степенных членов $g_m(u)r^m$, у которых коэффициенты $g_m(u)$ уже не обязаны быть постоянными, но тогда они линейно зависят от u. Естественно в этом случае обратиться ко второй производной $w_{\vartheta\vartheta}$ функции w по угловой переменной ϑ. Как показывает вторая из формул (5.16), в нынешних условиях

$$w_{\vartheta\vartheta} = \sum_{m=m_{s-1}} g''_m(u) r^{m-2s}, \tag{9.78}$$

где первый многочлен $g''_{m_{s-1}}(u)$ согласно (9.42) имеет вид

$$g''_{m_{s-1}}(u) = A_s n_s (n_s - 1)(u - \alpha_s)^{n_s-2}(1 + O(u - \alpha_s)). \tag{9.79}$$

В свое время мы выбрали переменную r, в частности, с тем расчетом, чтобы $w_{\vartheta\vartheta}$ как функция от r и ϑ оказалась регулярной в точке $\vartheta = \alpha_0$. Поэтому, если в переменных r и u ее вид описывается формулами (9.78) и (9.79), то числа $\alpha_0, \dots, \alpha_{s-1}$, как показывает лемма 4.3, составляют ее тейлоровскую цепочку. В силу той же леммы любой корень «главного» многочлена $g''_{m_{s-1}}(u)$ является тейлоровским параметром функции $w_{\vartheta\vartheta}$ порядка s, продолжающим указанную цепочку. Одним из таких корней служит изучаемая нами особенность α_s. Это значит, что после перехода от u к переменной v ряд (9.78) примет следующую форму:

$$w_{\vartheta\vartheta} = \sum_{m=m_s} h_m^{(2)}(v) r^{m-2(s+1)}, \tag{9.80}$$

где коэффициенты $h_m^{(2)}(v)$ полиномиально зависят от v. При этом многочлен $h_{m_s}^{(2)}(v)$, как показывает формула (9.79), имеет степень $n_s - 2$ и старший коэффициент $A_s n_s (n_s - 1)$, так что, разложенный по убывающим степеням переменной v, он выглядит следующим образом:

$$h_{m_s}^{(2)}(v) = A_s n_s (n_s - 1) v^{n_s - 2} + \dots . \tag{9.81}$$

С другой стороны, двойное дифференцирование равенства (9.77) по угловой переменной приводит к соотношению

$$w_{\vartheta\vartheta} = \sum_{m>M} h''_m(v) r^{m-2(s+1)}, \tag{9.82}$$

Сравнивая это разложение с формулой (9.80), мы и приходим к нужным выводам. А именно, если $M < m < m_s$, то $h''_m(v) = 0$, так что многочлен $h_m(v)$ либо постоянный, либо линейный. Если же $m \geq m_s$, то $h''_m(v) = h_m^{(2)}(v)$. Это равенство нам интересно лишь при $m = m_s$. Вместе с формулой (9.81) оно показывает, что степень многочлена $h_{m_s}(v)$, как и в двух предыдущих случаях, равна n_s, а его старшим коэффициентом служит A_s.

Как мы видим, параметры n_s, A_s и C, определяющие задачу нового этапа, выраженную неравенствами (9.67) и (9.68), действительно определяются по разложению функции w, причем именно так, как об этом говорилось в начале индукционного шага.

В последний раз отметим, что необходимость перехода к следующему уровню и здесь появилась у нас лишь тогда, когда у функций X_0 и Y_0 нашелся общий вещественный тейлоровский параметр α_s уровня s, продолжающий их совместную тейлоровскую цепочку $\alpha_0, \dots, \alpha_{s-1}$. Как мы знаем, когда-нибудь такое продолжение окажется уже невозможным. Поэтому завершение индукционного шага означает достижение намеченной нами цели.

Трудно поверить, но наше исследование подошло к концу. Теперь мы вправе назвать «теоремой» то замечательное утверждение, доказательству которого была посвящена фактически вся наша работа.

Теорема. *Индекс изолированной омбилической точки аналитической поверхности никогда не бывает больше единицы.*

Таким образом, если аналитическая поверхность гомеоморфна сфере, то на ней непременно найдутся по крайней мере две омбилические точки, как и предполагал Каратеодори. Мы не знаем, какие у него были для этого основания, но мы теперь твердо знаем, что он оказался прав ...

Нам очень грустно расставаться с этой изумительной задачей, чья непокорность подарила нам несколько удивительных недель, до краев наполнив их неповторимой радостью ... Но затем потянулись долгие и долгие месяцы заведомо тщетных поисков подходящих слов, способных хоть как-то передать поразившую нас красоту, которая, лишь приоткрывшись нам за наше усердие, вовсе не нуждалась ни в нашем «поражении», ни в наших признаниях ... Не нам судить, что у нас в итоге получилось. Мы только знаем, что эти «муки творчества» никогда бы не закончились, если бы мы не чувствовали каждый день дружескую поддержку тех, кто нам близок и дорог, если бы постоянно не видели их порой беспокойного и даже тревожного взгляда, в котором всегда светилась неугасаемая надежда ... Хотелось бы назвать всех, кому эта работа обязана своим появлением на свет, и обратиться к ним с теплыми словами. Прекрасно понимая, что это невозможно, мы вынуждены ограничиться очевидным ...

Мы глубоко благодарны В. А. Топоногову, имя которого в нашем сознании неотделимо от величественного образа дифференциальной геометрии. Еще со студенческих лет, как и многие, мы обязаны ему своей любовью к этой удивительно красивой науке.

Мы выражаем свою признательность В. А. Александрову, от которого впервые узнали о «драматичной истории» гипотезы Каратеодори. Он же открыл нам имена тех, кто посвятил легендарной проблеме часть своего творчества.

Слова искреннего восхищения мы адресуем Е. П. Волокитину, которому непостижимым для нас образом удалось превратить наши неуклюжие эскизы в настоящие шедевры компьютерной графики. Нет сомнений, что без них наши рассуждения так и остались бы безвидными и бесцветными ...

Пользуясь редкой и счастливой возможностью, мы выражаем благодарность В. Н. Дятлову за его заботу и терпение. Нет другого редактора, который смог бы пережить наши авторские причуды и капризы. Но корни нашего теплого чувства к нему произрастают далеко за пределами этой статьи. Они уходят в те дивные светлые годы, к его незабываемым урокам, где мы — юные студенты еще более юного университета — впервые постигали, что нет в науке ничего превыше истины, но лишь для тех, кому неведомы восторг и вдохновение ...

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hamburger H.* Beweis einer Carathéodoryschen Vermütung // I: Ann. of Math. (2). 1940. V. 41. P. 63–86; II, III: Acta Math. 1941. V. 73. P. 174–332.

2. *Bol G.* Über Nabelpunkte auf einer Eifläche // Math. Z. 1943–1944. Bd 49. S. 389–410.

3. *Klotz T.* On G. Bol's proof of Carathéodory's conjecture // Comm. Pure Appl. Math. 1959. V. 12, N 2. P. 277–311.

4. *Titus C. J.* A proof of a conjecture of Loewner and of the conjecture of Carathéodory on umbilic points // Acta Math. 1973. V. 131, N 1–2. P. 43–77.

5. *Sotomayor J., Mello L. F.* A note on some developments on Carathéodory conjecture on umbilic points // Exposition Math. 1999. V. 17, N 1. P. 49–58.

6. *Gutierrez C., Sotomayor J.* Lines of curvature, umbilic points and Carathéodory conjecture // Resenhas IME-USP. 1998. V. 3, N 3. P. 291–322.

7. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. I. Элементарная дифференциальная геометрия. М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935.

8. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 2. Теория аналитических функций. Дифференциальные уравнения. М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.

9. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1979.

Статья поступила 14 августа 2000 г.

Иванов Владимир Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
iva@nsu.ru