Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2002. Том 43, № 2

УДК 517.54

УСТОЙЧИВОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИСКАЖЕНИЕМ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Н. С. Даирбеков

Аннотация: Доказана теорема устойчивости в областях Джона для отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга, снабженной метрикой Карно — Каратеодори. Библиогр. 14.

Теоремы устойчивости занимают важное место в теории отображений с ограниченным искажением евклидовых пространств (см. [1]). Г. Д. Мостовым [2] было инициировано изучение квазиконформных отображений на группах Гейзенберга, снабженных метрикой Карно — Каратеодори, в связи с доказательством его известной теоремы жесткости локально симметрических пространств ранга 1. Эти исследования были продолжены в [3]. Развернутая теория квазиконформных отображений на группах Гейзенберга построена в работах [4, 5]. В [6–10] основные свойства отображений с ограниченным искажением перенесены на группы Гейзенберга и более общие стратифицированные нильпотентные группы (группы Карно).

В настоящей работе мы переносим теорему Ю. Г. Решетняка [1] об устойчивости в равномерной метрике отображений с ограниченным искажением, заданным в областях Джона евклидова пространства, на отображения с ограниченным искажением в областях Джона на группах Гейзенберга (теорема 1.1). В отличие от указанной теоремы Решетняка, где оценка устойчивости линейная, никакой явной формы для оценки устойчивости в случае групп Гейзенберга получить не удалось. Отметим также, что Ю. Г. Решетняком установлена также более сильная теорема об устойчивости в норме пространства Соболева. В контексте отображений с ограниченным искажением групп Гейзенберга получение явной оценки устойчивости и устойчивость с учетом близости производных остаются открытыми задачами.

Так же, как и в случае евклидова пространства [11], теорема устойчивости в областях Джона влечет инъективность отображений с коэффициентом искажения, близким к 1, заданных на равномерных областях (теорема 1.2).

Доказательство основного результата (теоремы 1.1) проводится по той же схеме, что и в случае евклидова пространства [1]. Все вспомогательные леммы также не претендуют на оригинальность и являются аналогами соответствующих утверждений Ю. Г. Решетняка из [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00517), INTAS (грант 97–0170) и гранта 6-го конкурса-экспертизы молодых ученых РАН 1999 г. (грант №8).

§ 1. Предварительные сведения и формулировка результата

Напомним базисные понятия, относящиеся к группе Гейзенберга и отображениям с ограниченным искажением на ней (см. [4, 5, 9]).

Элементами группы Гейзенберга $\mathbb{H}^n$, $n \geq 1$, являются точки $(x,t) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$, а умножение задается по правилу

$$(x,t)(x',t') = \left(x + x', t + t' + 2\sum_{j=1}^{n} \bigl(x'_j x_{n+j} - x_j x'_{n+j}\bigr) \right).$$

Алгебра Ли левоинвариантных векторных полей на $\mathbb{H}^n$ (алгебра Гейзенберга) имеет базис $X_1, \dots, X_{2n}, T$:

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2x_{n+j}\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_{n+j} = \frac{\partial}{\partial x_{n+j}} - 2x_j \frac{\partial}{\partial t} \quad (j = 1, \dots, n), \quad T = \frac{\partial}{\partial t},$$

с единственными нетривиальными соотношениями

$$[X_j, X_{n+j}] = -4T, \quad j = 1, \dots, n.$$

Горизонтальное пространство алгебры Гейзенберга натянуто на X_j, $j = 1, \dots, 2n$. *Горизонтальное касательное пространство* $HT\mathbb{H}^n$ группы Гейзенберга — это подрасслоение касательного расслоения $T\mathbb{H}^n$, натянутое на X_j, $j = 1, \dots, 2n$. Слои $HT\mathbb{H}^n$ снабжены скалярным произведением, в котором набор $\{X_1(p), \dots, X_{2n}(p)\}$ является ортонормированным базисом над каждой точкой $p = (x,t) \in \mathbb{H}^n$.

Абсолютно непрерывная кривая $\gamma : (a,b) \to \mathbb{H}^n$ называется *горизонтальной*, если $\gamma'(s) \in HT\mathbb{H}^n_{\gamma(s)}$ для п. в. $s \in (a,b)$. Длина кривой γ равна

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(s)|\, ds,$$

где $|\gamma'(s)|$ вычисляется относительно скалярного произведения на $HT\mathbb{H}^n$. *Расстояние Карно — Каратеодори* $d_c(p,p')$ между двумя точками $p, p' \in \mathbb{H}^n$ определяется как точная нижняя грань длин горизонтальных кривых, соединяющих p и p':

$$d_c(p,p') = \inf_{\gamma} l(\gamma). \tag{1.1}$$

Область (открытое связное множество) $U \subset \mathbb{H}^n$ называется [11] *областью Джона с внутренним радиусом* α *и внешним радиусом* β, или *областью класса* $J[\alpha,\beta]$, $0 < \alpha \leq \beta < \infty$, если существует выделенная точка $p_0 \in U$ такая, что любая другая точка $p \in U$ может быть соединена в U с точкой p_0 спрямляемой кривой $\gamma(s)$, $0 \leq s \leq l \leq \beta$, где s — длина дуги, для которой $\gamma(0) = p$, $\gamma(l) = p_0$ и для всех $s \in [0,l]$

$$d_c[\gamma(s), \partial U] \geq \frac{\alpha}{l} s. \tag{1.2}$$

Область $U \subset \mathbb{H}^n$ называется [11] (α,β)-*равномерной*, или *областью класса* $U[\alpha,\beta]$, $0 < \alpha \leq \beta < \infty$, если для каждой пары различных точек p, p' в U существует область V класса $J[\alpha d_c(p,p'), \beta d_c(p,p')]$ такая, что $p, p' \in V \subset U$.

Мера Лебега на $\mathbb{R}^{2n+1}$ является биинвариантной мерой Хаара на $\mathbb{H}^n$.

Функция $u : U \to \mathbb{R}$, где U — открытое множество в $\mathbb{H}^n$, принадлежит *горизонтальному соболевскому пространству* $HW^{1,s}(U)$ $(HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U))$, $1 \le s < \infty$, если $u \in L^s(U)$ и слабые производные $X_j u$, $j = 1, \dots, 2n$, принадлежат пространству $L^s(U)$ $(u, X_j u \in L^s_{\mathrm{loc}}(U)$, $j = 1, \dots, 2n)$, где $L^s(U)$ $(L^s_{\mathrm{loc}}(U))$ определено относительно указанной выше меры.

Отображение $f : U \to \mathbb{H}^n$ *принадлежит классу* $HW^{1,s}(U)$ $(HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U))$, если каждая компонента f_j отображения $f = (f_1, \dots, f_{2n+1})$ принадлежит классу $HW^{1,s}(U)$ $(HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U))$. В этом случае для почти всех $p \in U$ определены векторы

$$X_j f(p) = \begin{pmatrix} X_j f_1(p) \\ \dots \\ X_j f_{2n+1}(p) \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, 2n,$$

причем $X_j f(p)$ рассматриваются как касательные векторы над $f(p)$: $X_j f(p) \in T\mathbb{H}^n_{f(p)}$, $j = 1, \dots, 2n$.

Отображение $f : U \to \mathbb{H}^n$ класса $HW^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U)$ называется (*слабо*) *контактным*, если $X_j f(p) \in HT\mathbb{H}^n_{f(p)}$, $j = 1, \dots, 2n$, для почти всех точек $p \in U$. *Формальный горизонтальный дифференциал* $Hf_*(p) : HT\mathbb{H}^n_p \to HT\mathbb{H}^n_{f(p)}$ контактного отображения f определен для почти всех $p \in U$ следующим образом: на базисных векторах

$$Hf_*(p)X_j = X_j f(p), \quad j = 1, \dots, 2n,$$

и $Hf_*(p)$ продолжено на $HT\mathbb{H}^n_p$ по линейности. Формальный горизонтальный дифференциал $Hf_*(p)$ рассматривается также как отображение горизонтального пространства алгебры Гейзенберга в себя и его матрица относительно базиса $X_1, \dots, X_{2n}$ имеет вид

$$Hf_*(p) = \begin{pmatrix} X_1 f_1(p) & \dots & X_{2n} f_1(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1 f_{2n}(p) & \dots & X_{2n} f_{2n}(p) \end{pmatrix}.$$

Если $f : U \to \mathbb{H}^n$ — контактное отображение класса $HW^{1,2}_{\mathrm{loc}}(U)$, то для почти всех $p \in U$ линейное отображение горизонтального пространства, заданное матрицей $Hf_*(p)$, единственным образом продолжается [9, предложение 1.2] до гомоморфизма $f_*(p)$ алгебры Ли группы $\mathbb{H}^n$, называемого (*формальным*) $\mathscr{P}$-*дифференциалом* отображения f в точке p. Определитель матрицы $f_*(p)$ называется *якобианом* контактного отображения f и обозначается через $J(p, f)$.

Определение [9]. Отображение $f : U \to \mathbb{H}^n$ открытого множества $U \subset \mathbb{H}^n$ в $\mathbb{H}^n$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если

(a) f непрерывно,

(b) $f \in HW^{1,Q}_{\mathrm{loc}}(U)$, где $Q = 2n + 2$ — хаусдорфова размерность группы $\mathbb{H}^n$,

(c) f — контактное отображение,

(d) существует постоянная $K < \infty$ такая, что неравенство

$$\|Hf_*(p)\|^Q \le K J(p, f)$$

выполняется почти всюду в U. Здесь $\|Hf_*(p)\| = \max\limits_{\xi \in HT\mathbb{H}^n_p,\, |\xi| = 1} |Hf_*(p)\xi|$ — операторная норма линейного отображения $Hf_*(p)$.

Наименьшая постоянная K в неравенстве п. (d) называется *коэффициентом искажения* отображения f и обозначается через $K(f)$.

Гомеоморфное отображение с ограниченным искажением называется *квазиконформным.*

Группа $SU(1,n+1)$ действует естественным образом на одноточечной компактификации $\widehat{\mathbb{H}}^n = \mathbb{H}^n \cup \{\infty\}$ группы Гейзенберга. Вместе с «отражением»

$$I : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n, \quad (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}, t) \mapsto (-x_1, \dots, -x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}, -t),$$

$SU(1,n+1)$ порождает *группу* $\mathbb{G}$ *мёбиусовых преобразований* $\widehat{\mathbb{H}}^n$:

$$\mathbb{G} = SU(1,n+1) \cup SU(1,n+1)I,$$

конформно действующую на $\widehat{\mathbb{H}}^n$ (более подробно группа $\mathbb{G}$ описана в следующем параграфе).

Имеет место следующий аналог теоремы Лиувилля [9, теорема 5.6].

Предложение 1.1. *Если f — непостоянное отображение с ограниченным искажением области $U \subset \mathbb{H}^n$, причем $K(f) = 1$, то f является сужением на U некоторого мёбиусова преобразования.*

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Предположим, что $U \subset \mathbb{H}^n$ — область класса $J[\alpha, \beta]$. Существуют $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\beta/\alpha) > 0$ и функция $\mu = \mu_{\beta/\alpha} : [0, \varepsilon_0) \to [0, \infty)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(a) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mu(\varepsilon) = \mu(0) = 0$,

(b) *если $f : U \to \mathbb{H}^n$ — отображение с ограниченным искажением и $K(f) \le 1 + \varepsilon_0$, то найдется мёбиусово преобразование φ такое, что для всех $p \in U$ выполняется неравенство*

$$d_c(\varphi^{-1}(f(p)), p) \le \mu[K(f) - 1]\beta.$$

Аналогично [11] из этой теоремы вытекает

Теорема 1.2. *Пусть U — область класса $U[\alpha, \beta]$. Существует число $K = K_{\beta/\alpha} > 1$ такое, что каждое отображение с ограниченным искажением, для которого $K(f) \le K$, взаимно-однозначно.*

§ 2. Вспомогательные утверждения о мёбиусовых преобразованиях

Наряду с метрикой Карно — Каратеодори группа Гейзенберга снабжена *метрикой Гейзенберга*, порожденной *однородной нормой*

$$|p| = (|x|^4 + t^2)^{1/4} = \left(\left(\sum_{j=1}^{2n} x_j^2 \right)^2 + t^2 \right)^{1/4}$$

по правилу

$$d_h(p, p') = |p^{-1}p'|. \tag{2.1}$$

Метрики d_c и d_h, определенные формулами (1.1) и (2.1), различны, но эквивалентны. Обозначим через κ постоянную эквивалентности:

$$\frac{1}{\kappa} d_c(p, p') \le d_h(p, p') \le \kappa d_c(p, p'), \quad p, p' \in \mathbb{H}^n. \tag{2.2}$$

Нам также понадобится сферическая модель группы Гейзенберга. Отождествим точки $(x,t)\in\mathbb{H}^n$ с элементами $[z,t]\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}$, полагая $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$, $z_j=x_j+ix_{n+j}$, $j=1,\dots,n$. В этих обозначениях произведение, однородная норма и метрика Гейзенберга на $\mathbb{H}^n$ записываются следующим образом:

$$[z,t]\cdot[z',t']=[z+z',t+t'+2\operatorname{Im}\langle z,z'\rangle],\quad |[z,t]|=||z|^2+it|^{1/2}=(|z|^4+t^2|^{1/4},$$
$$d([z,t],[z',t'])=||z|^2-2\langle z,z'\rangle+|z'|^2+i(t'-t)|^{1/2}.$$

Рассмотрим единичную сферу пространства $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$\mathbb{S}=\{(w_1,w_2,\dots,w_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1}:|w_1|^2+|w_2|^2+\dots|w_{n+1}|^2=1\},$$

и снабдим ее метрикой

$$d_s(u,w)=\sqrt{\frac{1}{2}|1-\langle u,w\rangle|}. \tag{2.3}$$

Обобщенная стереографическая проекция $\pi:\mathbb{S}\setminus\{-e_{n+1}\}\to\mathbb{H}^n$, где $e_{n+1}=(0,\dots,0,1)\in\mathbb{C}^{n+1}$, определяется как композиция преобразования Кэли

$$z_j=\frac{iw_j}{1+w_{n+1}},\quad j=1,2,\dots,n,\quad z_{n+1}=i\frac{1-w_{n+1}}{1+w_{n+1}}$$

и проекции

$$z_j\mapsto z_j,\quad j=1,2,\dots,n,\quad z_{n+1}\mapsto t=\operatorname{Re}z_{n+1}.$$

Обратное отображение π^{-1} задается формулами

$$w_j=\frac{-2iz_j}{1+|z|^2-it},\quad j=1,2,\dots,n,\quad w_{n+1}=\frac{1-|z|^2+it}{1+|z|^2-it}.$$

Обобщенная стереографическая проекция является конформным отображением метрического пространства $(\mathbb{S}\setminus\{-e_{n+1}\},d_s)$ на $(\mathbb{H}^n,d_c)$ и продолжается до гомеоморфизма $\mathbb{S}$ на $\widehat{\mathbb{H}}^n$.

Группа $SU(1,n+1)$ линейных отображений $g:\mathbb{C}^{n+2}\to\mathbb{C}^{n+2}$ с определителем 1, сохраняющих квадратичную форму

$$y_0\bar y_0-y_1\bar y_1-\dots-y_{n+1}\bar y_{n+1},\quad (y_0,y_1,\dots,y_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+2},$$

естественным образом действует как группа преобразований единичной сферы $\mathbb{S}$ (см. [12]). Обозначим через $I:\mathbb{S}\to\mathbb{S}$ комплексное сопряжение на $\mathbb{S}$:

$$I(w_1,w_2,\dots,w_{n+1})=(\overline{w}_1,\overline{w}_2,\dots,\overline{w}_{n+1}),$$

являющееся изометрией в метрике (2.3). Тогда $\mathbb{G}=SU(1,n+1)\cup SU(1,n+1)I$ является *группой мёбиусовых преобразований* $\mathbb{S}$. Посредством стереографической проекции действие группы $\mathbb{G}$ переносится на $\widehat{\mathbb{H}}^n$. Простейшими представителями мёбиусовых преобразований являются *однородные растяжения*

$$\delta_r(p)=\delta_r(x,t):=(rx,r^2t),\quad p\in\mathbb{H}^n, \tag{2.4}$$

с положительными коэффициентами растяжений $r>0$ и *левые сдвиги*

$$L_a(p)=ap,\quad p\in\mathbb{H}^n, \tag{2.5}$$

посредством элементов $a\in\mathbb{H}^n$. Метрики d_c и d_h левоинвариантны и пропорционально меняются при растяжениях: $d_c[\delta_r(p),\delta_r(p')]=rd_c(p,p')$, $p,p'\in\mathbb{H}^n$, $r>0$, и соответственно $d_h[\delta_r(p),\delta_r(p')]=rd_h(p,p')$.

Для четверки (p_1, p_2, p_3, p_4) различных точек в $\mathbb{H}^n$ определено их *двойное отношение относительно метрики Гейзенберга*:

$$\frac{d_h(p_1,p_3)d_h(p_2,p_4)}{d_h(p_1,p_2)d_h(p_3,p_4)}.$$

Отождествляя точки $\widehat{\mathbb{H}}^n$ и $\mathbb{S}$ посредством обобщенной стереографической проекции, определим *сферическое расстояние* $d_s(p,p')$ на $\widehat{\mathbb{H}}^n$ как расстояние в метрике d_s между прообразами точек p и p' относительно обобщенной стереографической проекции π. Заменяя в определении двойного отношения метрику d_h метрикой d_s, получим *двойное отношение относительно сферической метрики*:

$$\frac{d_s(p_1,p_3)d_s(p_2,p_4)}{d_s(p_1,p_2)d_s(p_3,p_4)}.$$

Предложение 2.1. *Если $p = [z,t]$ и $p' = [z',t']$ — точки из $\mathbb{H}^n$, то*

$$d_s(p,p') = \frac{d_h(p,p')}{((1+|z|^2)^2+t^2)^{1/4}((1+|z'|^2)^2+t'^2)^{1/4}}. \tag{2.6}$$

В частности, двойное отношение четверок точек в $\mathbb{H}^n$ относительно метрики Гейзенберга совпадает с двойным отношением относительно сферической метрики. Мёбиусовы преобразования сохраняют двойное отношение четверок точек.

Предложение 2.1 установлено в [13, леммы 4.3 и 4.4] в случае группы $\mathbb{H}^1$, и изложенное там доказательство без труда переносится на общие группы $\mathbb{H}^n$.

Из сохранения двойного отношения четверок точек стандартным образом выводится следующее утверждение (ср. [14, теорема 3.6.5]).

Предложение 2.2. *Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ — мёбиусовы преобразования такие, что $\varphi_k(p_j) \to p'_j$ при $k \to \infty$ для трех различных точек p_1, p_2, p_3 и трех различных точек p'_1, p'_2, p'_3. Тогда $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ содержит подпоследовательность, сходящуюся равномерно на $(\widehat{\mathbb{H}}^n, d_s)$ к мёбиусову преобразованию.*

Далее мы обозначаем через $B(p,r)$ $(S(p,r))$ шар (сферу) с центром $p \in \mathbb{H}^n$ и радиусом $r > 0$ в метрике Карно — Каратеодори и обозначим через $\overline{B}(p,r)$ соответствующий замкнутый шар.

В следующих двух леммах мы оцениваем различные отклонения мёбиусова преобразования от тождественного.

Лемма 2.1. *Существует монотонная функция $\tilde{\zeta} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ со следующими свойствами:*

(a) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \tilde{\zeta}(\varepsilon) = \tilde{\zeta}(0) = 0$,

(b) *если φ — мёбиусово преобразование такое, что*

$$d_c(\varphi(p),p) \le \varepsilon, \quad p \in B(0,1),$$

то

$$d_s(\varphi(p),p) \le \tilde{\zeta}(\varepsilon), \quad p \in \mathbb{H}^n.$$

Доказательство. Для $\varepsilon \ge 0$ положим

$$G(\varepsilon) = \{\varphi \in \mathbb{G} : d_c(\varphi(p),p) \le \varepsilon,\ p \in B(0,1)\}.$$

Определим функцию

$$\tilde{\zeta}(\varepsilon) = \sup_{\varphi \in G(\varepsilon)} \sup_{p \in \mathbb{H}^n} d_s(\varphi_j(p), p).$$

Функция $\tilde{\zeta}$, очевидно, монотонна и удовлетворяет условию (b). Проверим, что она также удовлетворяет условию (a). Рассуждая от противного, получим существование последовательности мёбиусовых преобразований $\{\varphi_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, и постоянной $\tilde{\zeta}_0 > 0$ таких, что для всех $j = 1, 2, \ldots$

$$\sup_{p \in B(0,1)} d_c(\varphi_j(p), p) \le 1/j, \tag{2.7}$$

$$\sup_{p \in \mathbb{H}^n} d_s(\varphi_j(p), p) \ge \tilde{\zeta}_0. \tag{2.8}$$

Из (2.7) и предложения 2.2 вытекает, что существует подпоследовательность φ_{j_k}, $k = 1, 2, \ldots$, сходящаяся равномерно на $(\widehat{\mathbb{H}}^n, d_s)$ к некоторому мёбиусову преобразованию φ_0:

$$\sup_{p \in \mathbb{H}^n} d_s[\varphi_{j_k}(p), \varphi_0(p)] \to 0, \quad k \to \infty. \tag{2.9}$$

В силу (2.7) φ_j равномерно сходятся на шаре $B(0,1)$ к тождественному отображению. Значит, φ_0 — тождественное отображение, но тогда (2.8) и (2.9) противоречат друг другу.

Лемма 2.2. *Для любого фиксированного числа $\Delta > 1$ существует монотонная функция $\zeta = \zeta_\Delta : [0, \infty) \to [0, \infty]$ со следующими свойствами:*

(a) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \zeta(\varepsilon) = \zeta(0) = 0$,

(b) *если φ — мёбиусово преобразование такое, что*

$$d_c(\varphi(p), p) \le \varepsilon r, \quad p \in B(a, r),$$

то

$$d_c(\varphi(p), p) \le \zeta(\varepsilon) r, \quad p \in B(a, \Delta r).$$

Доказательство. Зафиксируем число $\Delta > 1$. Тогда

$$\overline{M} := \sup_{p \in B(0,\Delta)} d_s(p, 0) < 1.$$

Ввиду п. (a) леммы 2.1 найдется $\varepsilon_\Delta > 0$ такое, что

$$\widetilde{M} := \tilde{\zeta}(\varepsilon_\Delta) + \overline{M} < 1.$$

Тогда

$$M := \sup_{p \in \mathbb{H}^n,\, d_s(p,0) \le \widetilde{M}} d_c(p, 0) < \infty. \tag{2.10}$$

Определим функцию

$$\zeta(\varepsilon) = \begin{cases} \infty, & \varepsilon > \varepsilon_\Delta, \\ \sqrt{2}\, \kappa \tilde{\zeta}(\varepsilon)[1 + (\kappa M)^4]^{1/4}[1 + (\kappa\Delta)^4]^{1/4}, & 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_\Delta, \end{cases}$$

где κ — постоянная из (2.2). Функция ζ, очевидно, удовлетворяет условию (a) леммы. Проверим выполнение условия (b). Сначала рассмотрим случай, когда $a = 0$ и $r = 1$.

Пусть $\varphi \in \mathbb{G}$ таково, что $d_c(\varphi(p), p) \le \varepsilon$ для всех $p \in B(0,1)$. Мы можем считать, что $\varepsilon \le \varepsilon_\Delta$. Для $p \in B(0,\Delta)$ имеем

$$d_s(\varphi(p), 0) \le d_s(\varphi(p), p) + d_s(p, 0) \le \tilde{\zeta}(\varepsilon) + \overline{M} \le \tilde{\zeta}(\varepsilon_\Delta) + \overline{M} = \widetilde{M}.$$

Учитывая (2.2) и (2.10), получаем

$$|\varphi(p)| = d_h(\varphi(p), 0) \le \kappa d_c(\varphi(p), 0) \le \kappa M, \quad p \in B(0,\Delta). \tag{2.11}$$

Из (2.2) и (2.6) следует, что

$$d_c(\varphi(p), p) \le \kappa d_h(\varphi(p), p) \le \kappa\sqrt{2}\, d_s(\varphi(p), p)(1 + |\varphi(p)|^4)^{1/4}(1 + |p|^4)^{1/4}.$$

Используя (2.2) и (2.11), отсюда выводим для $p \in B(0,\Delta)$

$$d_c(\varphi(p), p) \le \sqrt{2}\,\kappa\tilde{\zeta}(\varepsilon)[1 + (\kappa M)^4]^{1/4}[1 + (\kappa\Delta)^4]^{1/4} = \zeta(\varepsilon).$$

Пусть теперь $\varphi \in \mathbb{G}$ таково, что $d_c(\varphi(p), p) \le \varepsilon r$ для всех $p \in B(a,r)$. Положим $\psi(p) = \delta_{1/r}[L_{a^{-1}}[\varphi(L_a(\delta_r(p)))]]$. Так как преобразования (2.4), (2.5) принадлежат $\mathbb{G}$, имеем $\psi \in \mathbb{G}$, причем $\varphi(p) = L_a[\delta_r[\psi(\delta_{1/r}(L_{a^{-1}}(p)))]]$ и $d_c(\psi(p), p) \le \varepsilon$ для всех $p \in B(0,1)$. Применяя уже полученное утверждение к ψ, после очевидных преобразований выведем, что $d_c(\varphi(p), p) \le \zeta(\varepsilon)r$ для всех $p \in B(a, \Delta r)$. Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1.1

Лемма 3.1. *Пусть $K \ge 1$ и $\mathscr{F}(K)$ — семейство отображений $h : \overline{B}(0,1) \to \mathbb{H}^n$, удовлетворяющих следующим условиям:*

(a) *h гомеоморфно на $\overline{B}(0,1)$, квазиконформно на $B(0,1)$, и $K(h) \le K$,*

(b) *$h(0) = 0$ и $\min\limits_{p \in S(0,1)} |h(p)| = 1$.*

Тогда семейство отображений $\mathscr{F}(K)$ равностепенно равномерно непрерывно в каждом шаре $B(0,r)$, $r < 1$, и существуют функции $\lambda(r)$ и $\Lambda(r)$ переменной $r \in (0,1)$ такие, что для значения любого отображения $h \in \mathscr{F}(K)$ на сфере $S(0,r)$ удовлетворяют неравенствам

$$0 < \lambda(r) \le |h(p)| \le \Lambda(r) < \infty, \quad p \in S(0,r).$$

Доказательство. Семейство $\{h\big|_{B(0,1)}\}$ сужений отображений из $\mathscr{F}(K)$ на шар $B(0,1)$ удовлетворяет условиям предложения 15 работы [5], поскольку каждое из отображений h в открытом шаре $B(0,1)$ не принимает в качестве своего значения некоторую точку сферы $S(0,1)$ и точку на бесконечности. Из этого предложения мы выводим, что семейство $\mathscr{F}(K)$ равностепенно непрерывно в каждой точке $p \in B(0,1)$.

С учетом того, что $h(0) = 0$ для всех $h \in \mathscr{F}(K)$, по соображениям компактности отсюда следует, что семейство отображений $\mathscr{F}(K)$ равностепенно равномерно непрерывно в каждом шаре $B(0,r)$, $r < 1$, и существует функция $\Lambda : [0,1) \to [0,\infty)$ такая, что $\Lambda(0) = 0$, $\Lambda(r)$ непрерывна в нуле и

$$|h(p)| \le \Lambda(|p|), \quad p \in B(0,1). \tag{3.1}$$

Из условия (b) нетрудно вывести, что $h(B(0,1)) \supset B(0,1)$. Следовательно,

$$h^{-1} : B(0,1) \to B(0,1). \tag{3.2}$$

Из замечания после предложения 15 в [5] вытекает, что отображения (3.2) удовлетворяют условию Гёльдера в каждом шаре $B(0,r)$, $r<1$. Так как $h^{-1}(0)=0$, в шаре $B(0,1/2)$ мы, в частности, имеем

$$|h^{-1}(p')| \le C|p'|^c, \quad p' \in B(0,1/2), \tag{3.3}$$

где постоянные c и C не зависят от $h \in \mathscr{F}(K)$.

Зафиксируем $r_0 \in (0,1)$ такое, что для $r \le r_0$

$$\Lambda(r) < 1/2. \tag{3.4}$$

Тогда (3.1), (3.3) и (3.4) влекут

$$(|p|/C)^{1/c} \le |f(p)|, \quad p \in B(0,r_0).$$

Положим

$$\lambda(r) = \begin{cases} (r/C)^{1/c}, & 0<r<r_0, \\ (r_0/C)^{1/c}, & r_0 \le r < 1. \end{cases}$$

Легко видно, что функции λ и Λ удовлетворяют требуемым условиям.

В следующей лемме мы устанавливаем локальную устойчивость в шаре.

Лемма 3.2. *Существуют число q, $0<q<1$, и монотонная функция $\tilde{\mu}$: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ со следующими свойствами:*

(a) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \tilde{\mu}(\varepsilon) = \tilde{\mu}(0) = 0$,

(b) *для каждого отображения $f : B(a,r) \to \mathbb{H}^n$ с ограниченным искажением можно указать мёбиусово преобразование φ такое, что*

$$d_c(\varphi^{-1}(f(x)), x) \le r\tilde{\mu}(K(f)-1)$$

для всех $x \in B(a,qr)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай шара $B(0,1)$. Учитывая неравенства (2.2), из [9, теорема 5.8] выводим, что существует число $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$ такое, что если $K(f) \le 1+\tilde{\varepsilon}_0$, то отображение f является инъективным в замкнутом шаре $\overline{B}(0,1/(10\kappa))$. Полагаем $q = 1/(20\kappa)$. В этом случае f является инъективным в замкнутом шаре $\overline{B}(0,2q))$.

Для отображения $f : B(0,1) \to \mathbb{H}^n$ положим

$$D(f) = \inf_{\varphi\in\mathbb{G}} \sup_{p\in\overline{B}(0,q)} d_c(\varphi^{-1}(f(p)),p).$$

Нетрудно видеть, что $D(f) < 2$ для любого непрерывного отображения f : $B(0,1) \to \mathbb{H}^n$. Обозначим через $H(\varepsilon)$, $\varepsilon \ge 0$, совокупность всех отображений $f : B(0,1) \to \mathbb{H}^n$ с ограниченным искажением, для которых $K(f) \le 1+\varepsilon$, и определим функцию

$$\tilde{\mu}(\varepsilon) = \sup_{f\in H(\varepsilon)} D(f) + \varepsilon.$$

Функция $\tilde{\mu}$ является монотонной и удовлетворяет условию (b) леммы при $a=1$ и $r=1$. Проверим, что она также удовлетворяет условию (a) леммы.

Рассуждая от противного, получим существование последовательности отображений $f_j \in H(\tilde{\varepsilon}_0/j)$ и числа $\tilde{\mu}_0 > 0$ таких, что

$$D(f_j) \ge \tilde{\mu}_0, \quad j=1,2,\dots. \tag{3.5}$$

Положим

$$b_j = f_j(0), \quad c_j = \min_{p\in S(0,2q)} d_c[f_j(p), f_j(0)]$$

и определим

$$g_j(p) = \delta_{1/c_j}[L_{b_j^{-1}}[f_j(p)]], \quad p \in B(0,1).$$

Для всех j имеем $g_j \in H(\tilde{\varepsilon}_0/j)$ и $D(g_j) = D(f_j)$. Кроме того, $g_j(0) = 0$ и $\min\limits_{p\in S(0,2q)} |g_j(p)| = 1$. Последовательность отображений $h_j(p) = g_j(\delta_{2q}(p))$, $p \in \overline{B}(0,1)$, принадлежит семейству $\mathscr{F}(1+\tilde{\varepsilon}_0)$ леммы 3.1. Согласно этой лемме последовательность $\{h_j\}$ локально равностепенно равномерно непрерывна в шаре $B(0,1)$, причем $0 < \lambda(|p|) \le |h_j(p)|$ для $p \in B(0,1)$. Отсюда вытекает, что последовательность $\{g_j\}$ локально равностепенно равномерно непрерывна в шаре $B(0,2q)$, при этом $0 < \lambda(|p|/2q) \le |g_j(p)|$ для $p \in B(0,2q)$. Значит, можно извлечь подпоследовательность $\{g_{j_k}\}$, $k = 1,2,\dots$, локально равномерно сходящуюся в $B(0,2q)$ к некоторому отображению φ_0. Ввиду [9, теорема 5.7] φ_0 является отображением с ограниченным искажением, причем $K(\varphi_0) \le \varliminf\limits_{k\to\infty} K(g_{j_k}) = 1$. Для предельного отображения очевидно, что $\varphi_0(0) = 0$ и $0 < \lambda(|p|/2q) \le |\varphi_0(p)|$ для $p \in B(0,2q)$. В частности, φ_0 не является тождественно постоянным. Тогда по предложению 1.1 $\varphi_0 \in \mathbb{G}$. При $k \to \infty$ имеем

$$\varphi_0^{-1}(g_{j_k}(p)) \to \varphi_0^{-1}(\varphi_0(p)) = p, \quad p \in B(0,2q),$$

причем сходимость локально равномерная внутри шара $B(0,2q)$ и, в частности, равномерная на замкнутом шаре $\overline{B}(0,q)$. Следовательно,

$$D(f_{j_k}) = D(g_{j_k}) \to 0, \quad k \to \infty,$$

что противоречит (3.5). Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть V — ограниченное множество в $\mathbb{H}^n$, $\overline{V}$ — замыкание V, $f : \overline{V} \to \mathbb{H}^n$ — непрерывное отображение. Пусть $p \in V$, и предположим, что $d_c(f(y), y) < d_c(p, y)$ для всех $y \in \partial V$. Тогда $p = f(p')$ для некоторой точки $p' \in V$.*

Доказательство. Положим $f_s(y) = y\delta_s(y^{-1}f(y))$, где $s \in [0,1]$, $y \in \overline{V}$. Тогда f_s — гомотопия тождественного отображения в f. Для $y \in \partial V$ имеем

$$\begin{aligned} d_c(f_s(y), y) &= d_c(y\delta_s(y^{-1}f(y)), y) = d_c(\delta_s(y^{-1}f(y)), 0) \\ &= sd_c(y^{-1}f(y), 0) = sd_c(f(y), y) < sd_c(p, y). \end{aligned}$$

Следовательно, $p \ne f(y)$ для любого $y \in \partial V$. Тогда топологическая степень отображения f в точке p относительно V равна степени тождественного отображения в точке p, т. е. 1. Отсюда вытекает, что $p = f(p')$ для некоторой точки $p' \in V$.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть U — область класса $J(\alpha,\beta)$ и $f : U \to \mathbb{H}^n$ — отображение с ограниченным искажением. Пусть a — выделенная точка области U. Положим

$$p_0 = a, \quad R_0 = \alpha, \quad r_0 = qR_0.$$

Из определения областей класса Джона вытекает, что шар $B(p_0, R_0)$ содержится в U. Тогда согласно лемме 3.2 существует мёбиусово преобразование φ_0 такое, что

$$d_c[\varphi_0^{-1}(f(p)), p] \le \tilde{\mu}[K(f) - 1]R_0, \quad p \in B(p_0, r_0).$$

Оценим $d_c[\varphi_0^{-1}(f(p)), p]$ во всей области U, а не только в шаре $B(p_0, r_0)$.

Возьмем $p \in U$ и рассмотрим кривую $\gamma(s)$, $0 \le s \le l \le \beta$, соединяющую точки a и p и такую, что неравенство (1.2) выполняется для $s \in [0, l]$. При этом считаем, что выполнены также все другие условия на кривую $\gamma(s)$ из определения областей Джона. Возьмем

$$\sigma = 1 - \frac{q\alpha}{3\beta} > \frac{2}{3}. \tag{3.6}$$

Для $m = 0, 1, 2, \ldots$ пусть

$$s_m = \sigma^m l, \quad p_m = \gamma(s_m), \quad R_m = \sigma^m R_0, \quad r_m = qR_m = \sigma^m r_0.$$

При каждом $m = 0, 2, \ldots$ отображение f определено на шаре $B(p_m, R_m) \subset U$. По лемме 3.2 существует мёбиусово преобразование φ_m такое, что

$$d_c[\varphi_m^{-1}(f(p)), p] \le \tilde{\mu} R_m, \quad p \in B(p_m, r_m), \tag{3.7}$$

где $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}[K(f) - 1]$.

Положим $\varphi_m^{-1} \circ f = g_m$ и $\psi_m = \varphi_{m-1}^{-1} \circ \varphi_m$. При каждом m имеем $\psi_m \circ g_m = g_{m-1}$.

Докажем, что если значение $\tilde{\mu}$ достаточно мало, то для для всех точек $p \in B(p_{m-1}, \frac{2}{3} r_{m-1}) \cap B(p_m, \frac{2}{3} r_m)$ выполняется неравенство

$$d_c(\psi_m(p), p) \le \tilde{\mu}(R_{m-1} + R_m). \tag{3.8}$$

Действительно, пусть $p \in B(p_{m-1}, \frac{2}{3} r_{m-1}) \cap B(p_m, \frac{2}{3} r_m)$. Рассмотрим область $V = B(p_{m-1}, r_{m-1}) \cap B(p_m, r_m)$. Для $y \in \partial V$ в силу (3.7) имеем

$$d_c(g_m(y), y) \le \tilde{\mu} R_m = \frac{\tilde{\mu}}{q} r_m. \tag{3.9}$$

Очевидно, что y лежит на одной из сфер $S(p_{m-1}, r_{m-1})$ или $S(p_m, r_m)$. Если y лежит на первой сфере, то

$$d_c(p, y) \ge r_{m-1} - \frac{2}{3} r_{m-1} = \frac{1}{3} r_{m-1} > \frac{1}{3} r_m. \tag{3.10}$$

Если же y лежит на второй сфере, то

$$d_c(p, y) \ge r_m - \frac{2}{3} r_m = \frac{1}{3} r_m. \tag{3.11}$$

Предположим, что

$$\frac{\tilde{\mu}}{q} < \frac{1}{3}. \tag{3.12}$$

Тогда из (3.9)–(3.11) получаем $d_c(g_m(y), y) < d_c(p, y)$. По лемме 3.3 существует точка $p' \in B(p_{m-1}, r_{m-1}) \cap B(p_m, r_m)$ такая, что $g_m(p') = p$. Имеем

$$\begin{aligned} d_c(\psi_m(p), p) &\le d_c(\psi_m(p), p') + d_c(p, p') = d_c[\psi_m(g_m(p')), p'] + d_c(g_m(p'), p') \\ &= d_c(g_{m-1}(p'), p') + d_c(g_m(p'), p') \le \tilde{\mu} R_{m-1} + \tilde{\mu} R_m, \end{aligned}$$

что доказывает справедливость неравенства (3.8) в предположении, что $\tilde{\mu}$ удовлетворяет неравенству (3.12).

Рассмотрим кратчайшую $\gamma_m(\tau)$, соединяющую p_{m-1} с p_m, где параметр $\tau \in [0, l_m]$ — длина дуги, а $l_m = d_c(p_{m-1}, p_m)$. Нетрудно видеть, что

$$l_m \le s_{m-1} - s_m = l\sigma^{m-1}(1 - \sigma) \le \beta \sigma^{m-1} \frac{q\alpha}{3\beta} = \frac{1}{3} r_{m-1}.$$

Положим
$$y_m = \gamma_m\left(\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)l_m\right), \quad \rho_m = \frac{1}{3}r_m.$$
Тогда
$$B(y_m,\rho_m) \subset B\left(p_{m-1}, \frac{2}{3}r_{m-1}\right) \cap B\left(p_m, \frac{2}{3}r_m\right).$$
Действительно, если $y \in B(y_m,\rho_m)$, то
$$d_c(y,p_{m-1}) \le d_c(y,y_m) + d_c(y_m,p_{m-1})$$
$$\le \frac{1}{3}r_m + \left(1-\frac{\sigma}{2}\right)l_m \le \frac{1}{3}\sigma r_{m-1} + \frac{1}{3}\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)r_{m-1} < \frac{2}{3}r_{m-1}$$
и аналогично
$$d_c(y,p_m) \le d_c(y,y_m) + d_c(y_m,p_m) \le \frac{1}{3}r_m + \frac{\sigma}{2}l_m \le \frac{1}{3}r_m + \frac{\sigma}{6}r_{m-1} < \frac{2}{3}r_m.$$

Значит, в силу (3.8) для всех $p \in B(y_m,\rho_m)$
$$d_c(\psi_m(p),p) \le \tilde{\mu}(R_{m-1}+R_m) = \frac{3\rho_m}{q}\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)\tilde{\mu} < \frac{8\tilde{\mu}}{q}\rho_m. \tag{3.13}$$

Положим
$$\Delta = \frac{7\beta}{q\alpha}. \tag{3.14}$$
Тогда
$$d_c(p_j,y_m) \le \frac{\Delta\rho_m}{2} \quad \text{для всех } j \ge m. \tag{3.15}$$
Действительно, для $s \in [0,s_m]$ имеем
$$d_c(\gamma(s),y_m) \le d_c(\gamma(s),p_m) + d_c(y_m,p_m) \le s_m + \frac{\sigma}{2}l_m$$
$$\le l\sigma^m + l\sigma^m\frac{1-\sigma}{2} \le \frac{7\beta\sigma^m}{6} = \frac{\Delta\rho_m}{2},$$
что доказывает (3.15).

Из (3.13) и леммы 2.2 для всех $y \in B(y_m,\Delta\rho_m)$ получаем неравенство
$$d_c(\psi_m(y),y) \le \zeta\left(\frac{8\tilde{\mu}}{q}\right)\rho_m. \tag{3.16}$$

Пусть $0 \le k \le m$. Оценим величину $d_c(g_k(p_m),p_m)$, рассуждая по индукции по убыванию k от m до 0. Согласно (3.7)
$$d_c(g_m(p_m),p_m) \le \tilde{\mu}R_m. \tag{3.17}$$

Далее,
$$d_c(g_k(p_m),p_m) = d_c[\psi_{k+1}(g_{k+1}(p_m)),p_m]$$
$$\le d_c[\psi_{k+1}(g_{k+1}(p_m)),g_{k+1}(p_m)] + d_c(g_{k+1}(p_m),p_m).$$

Предположим, что точка $g_{k+1}(p_m)$ лежит в шаре $B(y_{k+1},\Delta\rho_{k+1})$. Тогда в силу (3.16)
$$d_c[\psi_{k+1}(g_{k+1}(p_m)),g_{k+1}(p_m)] \le \zeta\left(\frac{8\tilde{\mu}}{q}\right)\rho_{k+1},$$

откуда

$$d_c(g_k(p_m), p_m) \le \zeta\left(\frac{8\tilde{\mu}}{q}\right)\rho_{k+1} + d_c(g_{k+1}(p_m), p_m).$$

Ввиду (3.17) при сделанном предположении искомая оценка должна иметь вид

$$d_c(g_k(p_m), p_m) \le d_c(g_m(p_m), p_m) + \zeta\left(\frac{8\tilde{\mu}}{q}\right)[\rho_{k+1} + \cdots + \rho_m]$$

$$< \tilde{\mu}R_m + \zeta\left(\frac{8\tilde{\mu}}{q}\right)\frac{\rho_{k+1}}{1-\sigma}. \quad (3.18)$$

Выясним, каким должно быть $\tilde{\mu}$, чтобы при выполнении (3.18) точка $g_k(p_m)$ принадлежала шару $B(y_k, \Delta\rho_k)$. Вследствие (3.15) имеем

$$d_c(g_k(p_m), y_k) \le d_c(g_k(p_m), p_m) + d_c(p_m, y_k) \le d_c(g_k(p_m), p_m) + \frac{\Delta\rho_k}{2}.$$

Если $d_c(g_k(p_m), p_m)$ оценивается согласно (3.18), то

$$d_c(g_k(p_m), y_k) < \tilde{\mu}R_m + \zeta\left(\frac{8\tilde{\mu}}{q}\right)\frac{\rho_{k+1}}{1-\sigma} + \frac{\Delta\rho_k}{2}.$$

Так как $\rho_{k+1} = \sigma\rho_k$ и $R_m \le R_k = 3\rho_k/q$, величина $d_c(g_k(p_m), y_k)$ будет меньше чем $\Delta\rho_k$, если

$$\frac{3\tilde{\mu}}{q} + \zeta\left(\frac{8\tilde{\mu}}{q}\right)\frac{\sigma}{1-\sigma} < \frac{\Delta}{2} = \frac{7\beta}{2q\alpha}.$$

Замечая, что $\varepsilon \le \zeta(\varepsilon)$ для всех $\varepsilon \ge 0$, видим, что это неравенство заведомо выполнено, если

$$\zeta\left(\frac{8\tilde{\mu}}{q}\right) \le \frac{7\beta}{2q\alpha}\cdot\frac{8(1-\sigma)}{3+5\sigma}. \quad (3.19)$$

Ввиду (3.6) для этого достаточно потребовать, чтобы

$$\zeta\left(\frac{8\tilde{\mu}}{q}\right) \le \frac{28}{9}.$$

Зафиксируем такое $\varepsilon_0 > 0$, что выполняется неравенство

$$\zeta\left(\frac{8\tilde{\mu}(\varepsilon_0)}{q}\right) < \frac{8}{3}. \quad (3.20)$$

Это возможно с учетом того факта, что функции ζ и $\tilde{\mu}$ бесконечно малые. Так как функция ζ определяется величиной Δ, а последняя — отношением β/α, то ε_0 полностью определяется отношением β/α. Отметим, что (3.20) влечет как (3.19), так и (3.12).

Следовательно, если $K(f) \le 1 + \varepsilon_0$, то проведенное рассуждение показывает, что (3.18) верно для всех $k = m, m-1, \ldots, 0$. Полагая в (3.18) $k = 0$, получаем неравенство

$$d_c(g_0(p_m), p_m) < \tilde{\mu}R_m + \zeta\left(\frac{8\tilde{\mu}}{q}\right)\frac{\rho_1}{1-\sigma}$$

для всех m. Устремляя m к бесконечности, выводим

$$d_c(g_0(p), p) \le \zeta\left(\frac{8\tilde{\mu}}{q}\right)\frac{\rho_1}{1-\sigma} < 2\beta\zeta\left(\frac{8\tilde{\mu}}{q}\right),$$

т. е.

$$d_c(\psi_0^{-1}(f(p)), p) < \mu[K(f) - 1]\beta,$$

где

$$\mu(\varepsilon) = 2\zeta\left(\frac{8\tilde{\mu}(\varepsilon)}{q}\right).$$

Заметим, что функция ζ определяется значением параметра Δ, который, в свою очередь, определяется отношением β/α ввиду (3.14). Следовательно, функция μ полностью определяется отношением β/α. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.

2. *Mostow G. D.* Strong rigidity of locally symmetric spaces. Princeton: Princeton Univ. Press, 1973. (Annals of Math. Studies; N 78).

3. *Pansu P.* Métriques de Carnot — Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. (2). 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.

4. *Korányi A., Reimann H. M.* Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Invent. Math. 1985. V. 80. P. 309–338.

5. *Korányi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111, N 1. P. 1–87.

6. *Heinonen J., Holopainen I.* Quasiregular maps on Carnot groups // J. Geom. Anal. 1997. V. 7, N 1. P. 109–148.

7. *Capogna L.* Regularity of quasi-linear equations in the Heisenberg group // Comm. Pure Appl. Math. 1997. V. 50. P. 867–889.

8. *Capogna L.* Regularity for quasilinear equations and 1-quasiconformal maps in Carnot groups // Math. Ann. 1999. V. 313, N 2. P. 263-295.

9. *Даирбеков Н. С.* Отображения с ограниченным искажением на группах Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 3. С. 567–590.

10. *Dairbekov N. S.* Mappings with bounded distortion of two-step Carnot groups // Тр. по геометрии и анализу. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2000. P. 122–155.

11. *Martio O., Sarvas J.* Injectivity theorems in plane and space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 1978/79. V. 4, N 2. P. 383–401.

12. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.

13. *Даирбеков Н. С.* Предел последовательности отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга и теорема о локальном гомеоморфизме // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 316–328.

14. *Бердон А.* Геометрия дискретных групп. М.: Наука, 1986.

Статья поступила 12 ноября 2001 г.

Даирбеков Нурлан Слямханович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090
dair@math.nsc.ru