Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2002. Том 43, № 2

УДК 517.5

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ В СРЕДНЕМ ФУНКЦИЯХ НА КОМПЛЕКСНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Вит. В. Волчков

Аннотация: Получено общее решение одного класса уравнений свертки на комплексном гиперболическом пространстве. Библиогр. 30.

Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности n, Ω — открытое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, T — ненулевое распределение в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем $\operatorname{supp} T$. Обозначим

$$\Omega_T = \{x \in \mathbb{R}^n : x - y \in \Omega \text{ при всех } y \in \operatorname{supp} T\}.$$

Функция $f \in C^\infty(\Omega)$ называется *периодической в среднем относительно* T, если

$$(T * f)(x) = T(f(x-y)) = 0, \quad x \in \Omega_T, \tag{1}$$

где распределение T действует по переменной y.

Одной из главных проблем теории периодических в среднем функций является проблема спектрального синтеза и существование интегральных представлений Фурье для решений (1) (см., например, [1]). Классические результаты в этом направлении принадлежат Дж. Дельсарту, Л. Шварцу, Б. Мальгранжу, Л. Эренпрейсу, В. П. Паламодову, Л. Хёрмандеру и др. (см. [1]). Как более поздние достижения в этой области отметим работы К. А. Беренстейна, Л. Зальцмана, А. Тейлора, Р. Гэя, Д. Струппы, В. В. Напалкова, П. А. Кучмента и др. (см. [1–3] и библиографию в них).

Теоремы о представлении решений уравнения (1) играют важную роль в задачах, связанных с геометрическими аспектами периодичности в среднем (см. обзоры в [1, 4], а также в [5–19]). Ключевым моментом в ряде таких задач является вид описания периодических в среднем функций. Известная теорема аппроксимации Мальгранжа — Хёрмандера (см. [2, гл. 16, теорема 16.4.1]) утверждает, что сужение на Ω всех линейных комбинаций экспоненциально-полиномиальных решений уравнения (1) плотно в пространстве всех его решений в топологии, индуцированной $C^\infty(\Omega)$. Значительное продвижение в этой тематике было достигнуто Л. Эренпрейсом [20, 21] и независимо В. П. Паламодовым [22]. Их результат, известный под названием «фундаментального принципа», дает экспоненциальное представление решений одного класса уравнений в частных производных (см., например, [1, теорема 2.3]). Позже были получены

Работа частично поддержана ФФИ Украины (проект 01.07/00241).

аналоги фундаментального принципа для уравнений в свертках и их систем [1, теорема 2.13]. Отметим также теорему Беренстейна и Гэя [1, теорема 2.19], в которой для обратимых распределений T (см., например, [2, гл. 16, определение 16.3.12]) решение (1) представлено в виде ряда по экспоненциальным полиномам, периодическим в среднем относительно T. Эти результаты получены с помощью методов многомерного комплексного анализа.

В случае, когда Ω — шар, принципиально новый метод предложен в работах [6, 9, 19]. Он дает явное решение уравнения свертки в виде разложения в ряд Фурье специального вида по сферическим гармоникам (см. [19]). Это позволило, в частности, получить окончательные результаты в ряде задач, связанных с шаровыми и сферическими средними (см. [5–19]). В работах [7, 14] содержится обобщение этой методики для более широкого класса множеств Ω.

В связи с многочисленными приложениями большой интерес представляет развитие такой техники для некомпактных двухточечно-однородных пространств. В соответствии с их классификацией (см., например, [23, гл. 1, § 3, п. 3]) это в точности евклидовы пространства, гиперболические пространства $H^n(\mathbb{R})$, $H^n(\mathbb{C})$, $H^n(\mathbb{H})$ и гиперболическое пространство Кэли $H^{16}(Cay)$. В работе [19] найдено общее решение (в пространстве K-инвариантных распределений) одного класса уравнений свертки на симметрических пространствах $X = G/K$ некомпактного типа ранга 1. Для пространств постоянной кривизны в [19] получен также подобный результат без предположения K-инвариантности.

В данной работе найдено общее решение уравнения свертки в геодезическом шаре комплексного гиперболического пространства $H^n(\mathbb{C})$.

§ 1. Формулировка основного результата

Пусть $\mathbb{C}^n$ — комплексное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с эрмитовым скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$, где $|z|^2 = \langle z, z\rangle$. Обозначим через $d(z,w)$ расстояние между точками $z, w \in B$ в метрике Бергмана, т. е.

$$d(z,w) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|1-\langle w,z\rangle| + \sqrt{|w-z|^2 + |\langle w,z\rangle|^2 - |z|^2|w|^2}}{|1-\langle w,z\rangle| - \sqrt{|w-z|^2 + |\langle w,z\rangle|^2 - |z|^2|w|^2}}\right). \tag{2}$$

Как известно (см., например, [24]), комплексное гиперболическое пространство $H^n(\mathbb{C})$ размерности n изометрично шару B с метрикой (2). Определим на B меру τ равенством $d\tau(z) = dm(z)/(1-|z|^2)^{n+1}$, где m — мера лебега в $\mathbb{C}^n$, нормированная условием $m(B) = 1$. Мера τ инвариантна относительно группы G всех биголоморфных отображений шара B на себя (см. [25, гл. 2, § 2.2, теорема 2.2.6]). Группа G — группа Ли преобразований (см. [26, гл. 3, § 1, теорема 1.2]), действующая транзитивно на шаре B. Унитарная группа $U(n)$ является подгруппой изотропии точки $z = 0$ в G, т. е. однородное пространство $G/\mathscr{U}(n)$ совпадает с B.

Пусть $B_R = \{z \in B : d(0,z) < R\}$ — открытый геодезический шар радиуса R, $S = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$, ρ, σ — полярные координаты в $\mathbb{C}^n$ ($\forall z \in \mathbb{C}^n \rho = |z|$, а если $z \neq 0$, то $\sigma = \frac{z}{|z|}$), $S^{(k)}_{p,q}(\sigma)$ ($p, q \geq 0$, $1 \leq k \leq N(n,p,q)$) — ортонормированный базис в пространстве сферических гармоник бистепени (p,q), рассматриваемом как подпространство $L^2(S)$ (см. [24]).

Всякой локально суммируемой в B_R функции f (обозначение $f \in L_{\mathrm{loc}}(B_R)$)

соответствует ряд Фурье

$$f(z)=\sum_{p,q=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(n,p,q)}f_{p,q}^{(k)}(\rho)S_{p,q}^{(k)}(\sigma),\quad \rho\in(0,\operatorname{th}R),$$

где

$$f_{p,q}^{(k)}(\rho)=\int\limits_S f(\rho\sigma)\overline{S_{p,q}^{(k)}(\sigma)}\,d\sigma.$$

Пусть $\alpha,\beta\geq 0$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\gamma=\alpha+\beta+1$, $\nu=\frac{n-i\lambda}{2}$. Обозначим

$$\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t)=F\left(\frac{\gamma-i\lambda}{2},\ \frac{\gamma+i\lambda}{2};\ \alpha+1;\ -(\operatorname{sh}t)^2\right),\tag{3}$$

$$\begin{gathered}\Phi_\lambda^{p,q}(\rho)=\frac{\Gamma(\nu+q)\Gamma(\nu+p)\Gamma(n)}{\Gamma(n+p+q)\Gamma^2(\nu)}\rho^{p+q}(1-\rho^2)^\nu F(\nu+q,\nu+p;n+p+q;\rho^2),\\ \Phi_{\lambda,m}^{p,q}(\rho)=\frac{d^m}{d\mu^m}\big(\Phi_\mu^{p,q}(\rho)\big)|_{\mu=\lambda},\end{gathered}\tag{4}$$

где, как обычно, F — гипергеометрическая функция, Γ — гамма-функция. Для любого $1\leq k\leq N(n,p,q)$ имеет место равенство

$$\Phi_\lambda^{p,q}(\rho)\overline{S_{p,q}^{(k)}(\sigma)}=\int\limits_S(P(z,\zeta))^{\nu/n}\overline{S_{p,q}^{(k)}(\zeta)}\,d\zeta,\quad z=\rho\sigma,\tag{5}$$

где $P(z,\zeta)=\big(\frac{1-|z|^2}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^2}\big)^n$ — ядро Пуассона в шаре B (см. [24, формула (4.9)]).

Сферические функции на $H^n(\mathbb{C})$ имеют вид

$$\varphi_\lambda(z)=\varphi_\lambda^{(n-1,0)}(d(0,z))=\Phi_\lambda^{0,0}(|z|)=\int\limits_S(P(z,\zeta))^{\nu/n}\,d\zeta\tag{6}$$

(см. [24, § 3, формулы (3.4), (3.5); 25, гл. 4, § 4.2]).

Далее, как обычно, $\mathscr{D}(\mathscr{M})$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на гладком многообразии $\mathscr{M}$, и $\mathscr{D}'(\mathscr{M})$ — пространство распределений на $\mathscr{M}$ (см., например, [23, гл. 2, § 2, п. 2]). Пусть dg — мера Хаара на G, нормированная соотношением

$$\int\limits_G\varphi(g0)\,dg=\int\limits_B\varphi(z)\,d\tau(z),\quad \varphi\in\mathscr{D}(B).\tag{7}$$

Свертка t_1*t_2 двух распределений на G, одно из которых имеет компактный носитель, является распределением на G, определяемым равенством

$$(t_1*t_2)(\varphi)=t_2(t_1(\varphi(g_1g_2))),\quad \varphi\in\mathscr{D}(G),$$

где распределение t_i $(i=1,2)$ действует по переменной $g_i\in G$ (см. [23, гл. 2, § 5, п. 1, формула (2)]). Для любой $\varphi\in\mathscr{D}(G)$ рассмотрим функцию $\varphi_0\in\mathscr{D}(B)$, определенную следующим образом:

$$\varphi_0(g0)=\int\limits_{\mathscr{U}(n)}\varphi(gU)\,dU,\quad g\in G$$

(здесь и далее dU — мера Хаара на группе $\mathscr{U}(n)$, нормированная условием $\int\limits_{\mathscr{U}(n)} dU = 1$).

Каждое распределение $f \in \mathscr{D}'(B)$ поднимается до распределения F на G по формуле

$$F(\varphi) = f(\varphi_0), \quad \varphi \in \mathscr{D}(G).$$

Это поднятие определяет свертку распределений $T_1, T_2 \in \mathscr{D}'(B)$ посредством равенств

$$(T_1 \times T_2)(\varphi) = (\widetilde{T}_1 * \widetilde{T}_2)(\tilde{\varphi}), \quad \tilde{\varphi}(g) = \varphi(g0)$$

(см. [23, гл. 2, § 5, п. 1, формула (12)]).

Пусть T — данное радиальное распределение на B_R с носителем $\operatorname{supp} T = \overline{B}_r$ $(0 < r < R)$. Радиальность T означает, что для любого $U \in \mathscr{U}(n)$

$$T(\varphi(z)) = T(\varphi(U^{-1}z)), \quad \varphi \in \mathscr{D}(B_R).$$

Обозначим через $N(T)$ множество корней λ сферического преобразования $\widehat{T}(\lambda) = T(\varphi_\lambda(z))$ таких, что $-\pi/2 < \arg\lambda \leq \pi/2$. Из общих фактов теории целых функций следует (см. [27, гл. 1, § 5, теорема 6]), что $\sum\limits_{\lambda \in N(T)} \frac{1}{\lambda^{1+\varepsilon}} < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$. Далее предполагаем, что множество $N(T)$ при $|\lambda| \to +\infty$ удовлетворяет условиям

$$|\operatorname{Im}\lambda| = O(\ln|\lambda|), \quad n_\lambda = O(1), \quad |\widehat{T}^{(n_\lambda)}(\lambda)| > \frac{1}{|\lambda|^\omega}, \tag{8}$$

где n_λ — кратность корня $\lambda \in N(T)$ и $\omega > 0$ не зависит от λ. Нетрудно видеть, что наиболее интересные для приложений примеры T (см., например, [1, § 3, 4; 4]) удовлетворяют условию (8). Рассмотрим уравнение свертки

$$(f \times T)(z) = 0, \quad z \in B_{R-r}, \tag{9}$$

где $f \in \mathscr{D}'(B_R)$. Множество функций $f \in C^\infty(B_R)$, удовлетворяющих (9), обозначим через $\mathscr{E}_T(B_R)$. Для $f \in \mathscr{E}_T(B_R)$ имеем

$$(f \times T)(g0) = T(f(gz)) = 0 \quad \forall g \in G : g0 \in B_{R-r}$$

(распределение T действует по переменной z). Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Общее решение уравнения* (9) *в* $C^\infty(B_R)$ *имеет вид*

$$f(z) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(n,p,q)} \left(\sum_{\lambda \in N(T)} \sum_{m=0}^{n_\lambda - 1} c_{\lambda,m,p,q,k} \Phi_{\lambda,m}^{p,q}(\rho) \right) S_{p,q}^{(k)}(\sigma),$$

где $\max\limits_{0 \leq m \leq n_\lambda - 1} |c_{\lambda,m,p,q,k}| = O(|\lambda|^b)$ *при* $|\lambda| \to +\infty$ *и любом* $b < 0$.

Аналогичный результат для пространств постоянной кривизны получен в работе [19], в которой также найдено общее решение (9) в пространстве K-инвариантных распределений на симметрических пространствах $X = G/K$ ранга 1 некомпактного типа. Автор благодарит профессора В. В. Волчкова за многочисленные полезные обсуждения.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Далее все функции, определенные и непрерывные в проколотой окрестности нуля в $\mathbb{C}^n$, допускающие непрерывное продолжение в точку 0, считаются доопределенными в нуле по непрерывности.

Обозначим через $T(U)$ квазирегулярное представление группы $\mathscr{U}(n)$ ($\forall f \in L^2(S)$ $(T(U)f)(\sigma) = f(U^{-1}\sigma)$, где $\sigma \in S$, $U \in \mathscr{U}(n)$). Как известно, $T(U)$ является прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений $T_{p,q}(U)$, действующих на пространствах $H(p,q)$ однородных гармонических полиномов бистепени (p,q) (см. [25, гл. 12, § 12.2, пп. 12.2.4, 12.2.7]). Пусть $\{t_{lk}^{p,q}\}$, $1 \le l,k \le N(n,p,q)$, — матрица представления $T_{p,q}(U)$, т. е.

$$\big(T_{p,q}(U)S_{p,q}^{(k)}\big)(\sigma) = S_{p,q}^{(k)}(U^{-1}\sigma) = \sum_{l=1}^{N(n,p,q)} t_{lk}^{p,q}(U)S_{p,q}^{(l)}(\sigma). \tag{10}$$

Из неприводимости представлений $T_{p,q}(U)$ следует, что при всех $1 \le l,k \le N(n,p,q)$

$$f_{p,q}^{(k)}(\rho)S_{p,q}^{(l)}(\sigma) = N(n,p,q)\int\limits_{\mathscr{U}(n)} f(U^{-1}z)\overline{t_{lk}^{p,q}(U)}\,dU \tag{11}$$

(см. [5, доказательство формулы (6)]).

Лемма 1. *Пусть $f \in \mathscr{E}_T(B_R)$. Тогда функция $F_{p,q}^{k,l}(z) = f_{p,q}^{(k)}(\rho)S_{p,q}^{(l)}(\sigma)$ принадлежит $\mathscr{E}_T(B_R)$ при всех $p,q \ge 0$, $1 \le l,k \le N(n,p,q)$.*

Доказательство. Из условия $f \in C^\infty(B_R)$ и (11) вытекает, что $F_{p,q}^{k,l} \in C^\infty(B_R)$. Пусть $g \in G$, $g0 \in B_{R-r}$. Поскольку для любого $U \in \mathscr{U}(n)$ $U^{-1}g0 \in B_{R-r}$ из (11) имеем

$$\big(F_{p,q}^{k,l} \times T\big)(g0) = T\big(F_{p,q}^{k,l}(g,z)\big) = N(n,p,q)\int\limits_{\mathscr{U}(n)} T(f(U^{-1}gz))\overline{t_{l,k}^{p,q}(U)}\,dU = 0.$$

Таким образом, $F_{p,q}^{k,l} \in \mathscr{E}_T(B_R)$, и лемма 1 доказана.

Пусть $z = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n$, $z_k = x_k + iy_k$, $1 \le k \le n$,

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right).$$

Зафиксируем $a \in \mathbb{C}^n$. Обозначим $s_a = (1-|a|^2)^{1/2}$, $P_a(z) = \frac{\langle z,a\rangle}{|a|^2}a$ при $a \ne 0$ ($P_0 = 0$), $Q_a(z) = z - P_a(z)$, $\varphi_a(z) = \frac{a - P_a(z) - s_aQ_a(z)}{1-\langle z,a\rangle}$, $\psi_a = -\varphi_a$.

Любой автоморфизм ψ шара B имеет вид $\psi = U\circ\varphi_a$, где $U \in \mathscr{U}(n)$, $a \in B$ (см., например, 25, гл. 2, § 2.1, теорема 2.2.5]).

Лемма 2. *Пусть $f \in \mathscr{E}_T(B_R)$. Тогда при всех $1 \le k \le n$ функции*

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} - \sum_{m=1}^{n}\overline{z_kz_m}\frac{\partial f}{\partial z_m}, \quad \frac{\partial f}{\partial z_k} - \sum_{m=1}^{n} z_kz_m\frac{\partial f}{\partial z_m}$$

принадлежат $\mathscr{E}_T(B_R)$.

Доказательство. Пусть $g \in G$, $g0 \in B_{R-r}$. Положим $a = (a_1,\dots,a_n)$, где $a_k = t \in \mathbb{R}^1$, $a_j = 0$, $j \ne k$. Поскольку $\psi_ag0 \in B_{R-r}$ при малых $|t|$, из условия $f \in \mathscr{E}_T(B_R)$ следует, что

$$((f\circ\psi_a)\times T)(g0) = 0.$$

Дифференцируя это равенство по t и полагая $t=0$, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z_k}+\frac{\partial f}{\partial \bar z_k}-\sum_{m=1}^{n}\left(z_k z_m\frac{\partial f}{\partial z_m}+\overline{z_k z_m}\frac{\partial f}{\partial \bar z_m}\right)\in \mathscr{E}_T(B_R).$$

Аналогично при $a_k=it$, $t\in R^1$, $a_j=0$, $j\neq k$ получаем

$$\frac{\partial f}{\partial z_k}+\frac{\partial f}{\partial \bar z_k}+\sum_{m=1}^{n}\left(z_k z_m\frac{\partial f}{\partial z_m}-\overline{z_k z_m}\frac{\partial f}{\partial \bar z_m}\right)\in \mathscr{E}_T(B_R),$$

откуда следует утверждение леммы 2.

Пусть $D_1(p,q)$, $D_2(p,q)$ — дифференциальные операторы, действующие на функцию $\varphi\in C^1(0,\operatorname{th}R)$ следующим образом:

$$(D_1(p,q)\varphi)(\rho)=\frac{(1-\rho^2)^{n+q}}{\rho^{2n+p+q-2}}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho^{2n+p+q-2}}{(1-\rho^2)^{n+q-1}}\varphi(\rho)\right),$$

$$(D_2(p,q)\varphi)(\rho)=\frac{\rho^{p+q}}{(1-\rho^2)^{q-1}}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\rho^2)^{q}}{\rho^{p+q}}\varphi(\rho)\right).$$

Из (4) и [28, гл. 2, § 2.8, формула (25)] имеем

$$\big(D_2(p,q)\Phi_\lambda^{p,q}\big)(\rho)=-(i\lambda+n+2q)\Phi_\lambda^{p,q+1}(\rho), \tag{12}$$

$$\big(D_2(p,q)\Phi_\lambda^{p,q}\big)(\rho)=-(i\lambda+n+2q)\Phi_\lambda^{p+1,q}(\rho). \tag{13}$$

Лемма 3. *Пусть $\varphi(\rho)S^{(l)}_{p,q}(\sigma)\in\mathscr{E}_T(B_R)$ при некотором $1\le l\le N\ (n,p,q)$. Тогда*

(а) $(D_1(p,q)\varphi)(\rho)S^{(k)}_{p,q-1}(\sigma)\in\mathscr{E}_T(B_R)$ при $p\ge 0$, $q\ge 1$, $1\le k\le N\ (n,p,q-1)$;

(б) $(D_1(p,q)\varphi)(\rho)S^{(k)}_{p-1,q}(\sigma)\in\mathscr{E}_T(B_R)$ при $p\ge 1$, $q\ge 0$, $1\le k\le N\ (n,p-1,q)$;

(в) $(D_2(p,q)\varphi)(\rho)S^{(k)}_{p,q+1}(\sigma)\in\mathscr{E}_T(B_R)$ при $p,q\ge 0$, $1\le k\le N\ (n,p,q+1)$;

(г) $(D_2(q,p)\varphi)(\rho)S^{(k)}_{p+1,q}(\sigma)\in\mathscr{E}_T(B_R)$ при $p,q\ge 0$, $1\le k\le N\ (n,p+1,q)$.

Доказательство. Рассмотрим многочлены

$$P(z)=z_1^p\bar z_2^q\in H(p,q),\ \ Q(z)=z_1^p\bar z_2^{q+1}\in H(p,q+1),\ \ R(z)=z_1^{p-1}\bar z_2^q\in H(p-1,q).$$

Обозначим

$$A_1(z)=x_1P(z)-\frac{1}{2n+2(p+q)-2}\rho^2\frac{\partial P}{\partial x_1},$$

$$A_2(z)=y_1P(z)-\frac{1}{2n+2(p+q)-2}\rho^2\frac{\partial P}{\partial y_1},\quad A_3(z)=A_1(z)-iA_2(z).$$

В силу леммы 1 $f(z)=\varphi(\rho)P(\sigma)\in\mathscr{E}_T(B_R)$. По лемме 2 функции

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}-\sum_{m=1}^{n}\overline{z_1 z_m}\frac{\partial f}{\partial \bar z_m}=\frac{p}{2(n+p+q-1)}(D_1(q,p)\varphi)(\rho)R(\sigma)+\frac{1}{2\rho^{p+q+1}}(D_2(p,q)\varphi)(\rho)A_3(z), \tag{14}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_2}-\sum_{m=1}^{n}\overline{z_2 z_m}\frac{\partial f}{\partial \bar z_m}=\frac{1}{2}(D_2(p,q)\varphi)(\rho)Q(\sigma) \tag{15}$$

принадлежат $\mathscr{E}_T(B_R)$. Поскольку

$$A_3(z) \in \sum_{m_1+m_2=p+q+1} \oplus H(m_1, m_2)$$

(см. [29, гл. 9, § 2, п. 3, формула (5); гл. 1, § 1, п. 7], а также [25, гл. 12, § 12.2, предложение 12.2.2]), из (14), (15) и леммы 1 получаем утверждения (б), (в). Утверждения (а) и (г) доказываются аналогично.

Пусть $\widetilde{\Delta}$ — оператор Лапласа — Бельтрами на $H^n(\mathbb{C})$ [25, гл. 4, § 4.1]). Простые вычисления показывают, что если $f \in C^2(B_R)$ имеет вид $f(z) = \varphi(\rho)S_{p,q}^{(k)}(\sigma)$, то

$$(\widetilde{\Delta} f)(z) = \bigg((1-\rho^2)^2\varphi''(\rho) + \frac{1-\rho^2}{\rho}(2n-1-\rho^2)\varphi'(\rho) + \frac{1-\rho^2}{\rho^2}((p+q)(2-2n-p-q) + (p-q)^2\rho^2)\varphi(\rho)\bigg) S_{p,q}^{(k)}(\sigma). \quad (16)$$

Лемма 4. *Имеют место равенства*

$$\widetilde{\Delta}\big(\Phi_\lambda^{p,q}(\rho)S_{p,q}^{(k)}(\sigma)\big) = -(\lambda^2+n^2)\Phi_\lambda^{p,q}(\rho)S_{p,q}^{(k)}(\sigma), \quad (17)$$

$$\big(D_1(p,q+1)\Phi_\lambda^{p,q+1}\big)(\rho) = (n+2q-i\lambda)\Phi_\lambda^{p,q}(\rho), \quad (18)$$

$$\big(D_1(p,q+1)\Phi_\lambda^{p+1,q}\big)(\rho) = (n+2q-i\lambda)\Phi_\lambda^{p,q}(\rho). \quad (19)$$

Доказательство. При $p = q = 0$ утверждение леммы следует из (12), (13), (16) и [25, гл. 4, § 4.2, теорема 4.2.2]. Общий случай получается отсюда индукцией по p, q с использованием равенств (12), (13), (16).

Лемма 5. *Пусть $g \in G$, $\zeta \in S$. Тогда*

$$T((P(gz,\zeta))^{\nu/n}) = (P(g0,\zeta))^{\nu/n}\widehat{T}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (20)$$

Доказательство. Положим $\eta = g^{-1}(\zeta)$. Из равенства

$$P(gz,\zeta) = P(g0,\zeta)P(z,\eta) \quad (21)$$

(см. [25, гл. 3, теорема 3.3.5]) и радиальности T имеем

$$T((P(gz,\zeta))^{\nu/n} = (P(g0,\zeta))^{\nu/n} T\bigg(\int\limits_{\mathscr{U}(n)} (P(z,U\eta))^{\nu/n}\,dU\bigg). \quad (22)$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{\mathscr{U}(n)} (P(z,U\eta))^{\nu/n}\,dU = \int\limits_S (P(z,\xi))^{\nu/n}\,d\xi$$

(см. [25, гл. 1, предложение 1.4.7]), из (22) и (6) получаем утверждение леммы 5.

Лемма 6. *Пусть $\mu \in N(T)$, $0 \le m \le n_\mu - 1$. Тогда*

$$\Phi_{\mu,m}^{p,q}(\rho)S_{p,q}^{(k)}(\sigma) \in \mathscr{E}_T(B_R) \quad (23)$$

при всех $p, q \ge 0$, $1 \le k \le N(n,p,q)$.

Доказательство. Дифференцируя (20) m раз по λ и полагая $\lambda = \mu$, выводим, что

$$\frac{d^m}{d\lambda^m}((P(z,\zeta))^{\nu/n})\bigg|_{\lambda=\mu} \in \mathscr{E}_T(B_R).$$

Тогда по лемме 1

$$\int\limits_S \frac{d^m}{d\lambda^m}((P(z,\zeta))^{\nu/n})\bigg|_{\lambda=\mu} \overline{S_{p,q}^{(k)}(\xi)}\,d\xi \cdot S_{p,q}^{(k)}(\sigma) \in \mathscr{E}_T(B_R).$$

Отсюда и из (5) получаем требуемое утверждение.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Для доказательства основного результата нам потребуются еще две леммы.

Лемма 7. *Пусть* $p, q \geq 0$, $1 \leq k \leq N(n,p,q)$ *и* $\varphi(\rho) S^{(k)}_{p,q}(\sigma) \in \mathscr{E}_T(B_R)$. *Тогда*

$$\varphi(\rho) = \sum_{\lambda \in N(T)} \sum_{m=0}^{n_\lambda - 1} c_{\lambda,m,p,q,k} \Phi^{p,q}_{\lambda,m}(\rho), \tag{24}$$

причем $\max\limits_{0 \leq m \leq n_\lambda - 1} |c_{\lambda,m,p,q,k}| = O(|\lambda|^b)$ *при* $|\lambda| \to +\infty$ *и любом фиксированном* $b < 0$.

Доказательство. Пусть $p = q = 0$. Тогда $\varphi(\rho) \in \mathscr{E}_T(B_R)$ и из [19, теорема 5] получаем

$$\varphi(|z|) = \sum_{\lambda \in N(T)} \sum_{m=0}^{n_\lambda - 1} c_{\lambda,m} \frac{d^m}{d\mu^m} (\varphi_\mu(z)) \bigg|_{\mu = \lambda}, \quad z \in B_R,$$

где $\max\limits_{0 \leq m \leq n_\lambda - 1} |c_{\lambda,m}| = O(|\lambda|^b)$ при $|\lambda| \to +\infty$ и любом $b < 0$. Отсюда и из равенств (6) следует разложение (24). Предположим, что утверждение леммы справедливо при некоторых p, q. Докажем его для $p, q+1$ и $p+1, q$. Пусть $\varphi(\rho) S^{(k)}_{p,q}(\sigma) \in \mathscr{E}_T(B_R)$. По лемме 3 и предположению индукции имеем

$$(D_1(p, q+1)\varphi) = \sum_{\lambda \in N(T)} \sum_{m=0}^{n_\lambda - 1} c_{\lambda,m,p,q,k} \Phi^{p,q}_{\lambda,m}(\rho). \tag{25}$$

Из (25), (5), (8) и леммы 4 получаем

$$\varphi(\rho) = \sum_{\lambda \in N(T)} \sum_{m=0}^{n_\lambda - 1} c_{\lambda,m,p,q,k} \Phi^{p,q+1}_{\lambda,m}(\rho),$$

причем $\max\limits_{0 \leq m \leq n_\lambda - 1} |c_{\lambda,m,p,q+1,k}| = O(|\lambda|^b)$ при $|\lambda| \to +\infty$ и любом $b < 0$. Таким образом, лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть* $f \in C^\infty(B_R)$ *и каждый коэффициент ее ряда Фурье имеет вид*

$$f^{(k)}_{p,q}(\rho) = \sum_{\lambda \in N(T)} \sum_{m=0}^{n_\lambda - 1} c_{\lambda,m,p,q,k} \Phi^{p,q}_{\lambda,m}(\rho),$$

где $\max\limits_{0 \leq m \leq n_\lambda - 1} |c_{\lambda,m,p,q,k}| = O(|\lambda|^b)$ *при* $|\lambda| \to +\infty$ *и любом* $b < 0$. *Тогда* $f \in \mathscr{E}_T(B_R)$.

Доказательство. Из (5), (8) и леммы 6 следует, что

$$f^{(k)}_{p,q}(\rho) S^{(k)}_{p,q}(\sigma) \in \mathscr{E}_T(B_R) \tag{26}$$

при всех $p, q \geq 0$, $1 \leq k \leq N(n,p,q)$. Обозначим $I(w) = (f \times T)(w)$, $w \in B_{R-r}$. Пусть $g \in G$ и $g0 \in B_{R-r}$. Из (26) и (11) находим

$$\int\limits_{\mathscr{U}(n)} I(U^{-1} g0) \overline{t^{p,q}_{lk}(U)} \, dU = 0.$$

Это означает (см. (11)), что

$$\int\limits_S \dot I(|g0|\sigma)\overline{S_{p,q}^{(k)}(\sigma)}\,d\sigma = 0 \quad \forall p,q \geq 0,\ 1 \leq k \leq N(n,p,q).$$

Из полноты сферических гармоник (см. [30, гл. 4, § 2, следствие 2.3]) следует, что $\dot I(g0) = 0$ и $f \in \mathscr{E}_T(B_R)$. Лемма 8 доказана.

Отсюда и из лемм 1, 7 получаем утверждение теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беренстейн К. А., Струппа Д.* Комплексный анализ и уравнения в свертках // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М: ВИНИТИ, 1989. Т. 54. С. 5–111. (Итоги науки и техники).

2. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. М.: Мир, 1986. Т. 2.

3. *Напалков В. В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах. М: Наука, 1982.

4. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. P. 185–194.

5. *Волчков В. В.* Новые теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 7. С. 71–78.

6. *Волчков В. В.* Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 6. С. 15–34.

7. *Волчков В. В.* Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Мат. сб. 1997. Т. 188, № 9. С. 13–30.

8. *Волчков В. В.* Экстремальные задачи о множествах Помпейю // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 7. С. 3–32.

9. *Волчков В. В.* Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, № 1. С. 182–194.

10. *Волчков В. В.* О множествах инъективности преобразования Радона на сферах // Изв. РАН. Сер. мат. 1999. Т. 63, № 3. С. 63–76.

11. *Волчков В. В.* Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях // Мат. заметки. 1993. Т. 53, № 2. С. 30–36.

12. *Волчков В. В.* Окончательный вариант теоремы о среднем в теории гармонических функций // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 3. С. 351–358.

13. *Волчков В. В.* Теоремы единственности для некоторых классов функций с нулевыми сферическими средними // Мат. заметки. 1997. Т. 62, № 1. С. 59–65.

14. *Волчков В. В.* Теоремы единственности для кратных лакунарных тригонометрических рядов // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 6. С. 27–31.

15. *Волчков В. В.* Новые теоремы о среднем для полианалитических функций // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 3. С. 20–28.

16. *Волчков В. В.* Теоремы о среднем для одного класса полиномов // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 4. С. 737–745.

17. *Volchkov V. V.* Morera type theorems on the unit disk // Anal. Math. 1994. V. 20. P. 49–63.

18. *Волчков В. В.* Теоремы о двух радиусах на пространствах постоянной кривизны // Докл. РАН. 1996. Т. 347, № 3. С. 300–302.

19. *Волчков В. В.* Проблемы типа Помпейю на многообразиях // Докл. АН Украины. 1993. № 11. С. 9–12.

20. *Ehrenpreis L.* The fundamental principle for linear constant coefficients partial differencial equations // Proc. Intern. symp. linear spaces. Oxford: Pergamon, 1961. P. 161–174.

21. *Ehrenpreis L.* Fourier analysis in several complex variables. New York: Wiley Interscience, 1970.

22. *Паламодов В. П.* Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967.

23. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.

24. *Harchaoui M.* Inversion de la transformation de Pompeiu locale dans les espaces hyperboliques reel et comlete (cas de duex boules) // J. Anal. Math. 1995. V. 67. P. 1–37.

25. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.

26. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1986.
27. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
28. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т. 1.
29. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
30. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

Статья поступила 2 декабря 1999 г.

Волчков Виталий Владимирович
Донецкий гос. университет, ул. А. Малышко, 3, Донецк 83053, Украина
volchkov@univ.donetsk.ua